**数论精选题（四）**

**1﹒**设正整数n是75的倍数，且恰有75个正整数约数（包括1和自身），求n的最小值。

([答案](#A1))

**2﹒**能否将正整数3,4，…，11填入3×3方格表，使得第一行的数的乘积等于第一列的数的乘积，第二行的数的乘积等于第二列的数的乘积，第三行的数的乘积等于第三列的数的乘积？

([答案](#A2))

**3﹒**已知a, b, c为整数，且(a5+b5+c5)+4(a+b+c)是120的倍数，求证：a3+b3+c3是24的倍数。

([答案](#A3))

**4﹒\***以p(n, k)表示正整数n的不小于k的约数的个数，求p(1001,1)+p(1002,2) + … + p(2000,1000) 的值。

([答案](#A4))

**5﹒**证明费尔马小定理：设p为素数，a为整数，则ap≡a(mod p) , 特别地，当(a, p)=1时， ap-1≡1(mod p).

([答案](#A5))

**6﹒**证明：对任意正整数n，下列命题成立：“7为3n+n3的约数当且仅当7是3nn3+1的约数”。

([答案](#A6))

**7﹒**设m，n为给定的正整数，且mn|m2+n2+m, 证明：m是一个完全平方数。

([答案](#A7))

**8﹒**数列{an}，an=[], 1≤n≤1997中，有多少个不同的数？

([答案](#A8))

**9﹒**证明：对任意一个末尾数字不为5的正奇数都可以找到一个正整数k，使得它们的乘积在十进制表示下，各数码均为奇数。

([答案](#A9))

**10﹒** 求所有形如nn+1的不超过1019的素数，这里n为正整数。

([答案](#A10))

**《数论精选题四》参考答案**

1﹒解：设n的素因数分解式为n=，其中p1，p2，……，pk是n的不同的素因数，a1，a2，a3，……，ak均为正整数。于是n的不同的正约数个数为(a1+1) (a2+1)…(ak+1), 由题意知道：(a1+1) (a2+1)…(ak+1)=75=3×52，

所以 n至多有3个不同的素因数。

为了是n最小且是75的倍数，n的素因数应取2,3,5，且3至少出现1次，5至少出现2次，即令 n=，其中(a1+1) (a2+1) (a3+1)=75, a1≥0, a2≥1, a3≥2,

满足上述条件的（a1，a2，a3）有

(4,4,2),(4,2,4),(2,4,4),(0,4,14),(0,14,4),(0,2,24),(0,24,2)

经过计算可得，当a1=a2=4，a3=2时，n取最小值，此时n=24×34×52=32 400。

注：本题采用小缩小n的取值范围，再枚举比较大小，直到找到问题的解。 （[返回](#T1)）

2﹒一种填入法如图：分析：3,4，…，11共有7个2,4个3,5个5,1个7,1个11，所以7和11必须在对角线上，另外9包含2个3, 另外 2个3在3和6中，无法配成对，所以9也只能在对角线上。剩下就是分配3，4，5，6，8，10这6个数。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 11 | 8 | 5 | 7 | 8 | 5 | 7 | 8 | 3 |
| 4 | 7 | 6 | 4 | 11 | 6 | 4 | 11 | 10 |
| 10 | 3 | 9 | 10 | 3 | 9 | 6 | 5 | 9 |

（[返回](#T2)）

3﹒证明：因为5个连续整数的乘积为 (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)=a5-5a3+4a，且能被5,4,3,2,1整除，即5！| a5-5a3+4a，所以 5！| (a5+b5+c5)-5(a3+b3+c3)+4(a+b+c)，

由已知得：5！| (a5+b5+c5) +4(a+b+c)，故5！|5(a3+b3+c3)， 即4！|(a3+b3+c3)，证毕

（[返回](#T3)）

4﹒解：证 从1 到2000的数n只出现一次

若n>1000, 则n在本身的约数中出现（1001在p(1001,1)中出现）

若n≤1000，对k<n，而1000+1，……，1000+n中有且仅有一个为n的倍数，（模n余数不同），所以n也只被写了一次，所以 1~2000中每个均只被写了一次，

所以所求和等于2000. （[返回](#T4)）

5. 证明：若p|a，则由整除性质得 ap≡0 （mod p）， a≡0 （mod p），所以 ap≡a(mod p)

若pa，（a，p）=1，设*x*1，*x*2，*x*3，……，*x*p-1均不为p的倍数，且两两模p不同，则

*ax*1，a*x*2，a*x*3，……，a*x*p-1均不为p的倍数，且两两模p也不同，

所以 (*ax*1)(a*x*2)(a*x*3)……(a*x*p-1)≡*x*1*x*2*x*3……*x*p-1 (mod p)

又 （*x*1*x*2*x*3……*x*p-1，p）=1

所以 ap-1≡1 （mod p） （[返回](#T5)）

6﹒证明：当7|（3n+n3）时，又73n（显然3n只有3的幂次方这类约数），所以7n3，即（7，n）=1

由费马小定理： n6≡1(mod 7), 又7|（3n+n3）n3, 即 7|（3n n3+n6）

所以 7|（3n n3+1）

反之，若7|（3n n3+1），同样，有73n，所以7n3 ，故（7，n）=1，

由费马小定理得 n6≡1(mod 7), 所以 7|（3n n3+1）n3, 即 7|（3n n6+n3），故7|（3n+n3）

（[返回](#T6)）

7﹒证明：只需证明m的所有素因数的幂次都为偶数。

设p为m的任意一个素因数，且pa|m，但pa+1m,

下面证明a为偶数，反证法，假设a为奇数，由于pa|mn，mn|m2+n2+m,所以 pa| m2+n2+m

故pa| n2，又a为奇数，所以 pa+1|n2,

所以 p|n，由于pa|m，所以 pa+1|mn，又mn|m2+n2+m,

所以 pa+1| m2+n2+m 🡺 pa+1|m, 与假设矛盾。 （[返回](#T7)）

8﹒解：当1≤k≤998时，0< < 1, 所以ak+1-ak为0或1.

故ak=[k2/1998]取遍0~[9992/1998]=499，有500个不同的数;

当1000≤k≤1997时，ak=[k2/1998] 均不相同，共有998个不同的数；

故总共有500+998=1498个不同的整数。 （[返回](#T8)）

9﹒ 证明：假设正奇数为n，

考虑101,102,102^2，……，102^n共n+1个数，由抽屉原理，其中至少有2个数模n 同余，

又同余定理得到 n|102^j-102^i （j>i）

即 n|，所以 n|99…9, 故取 k=99…9/n，就可以保证kn的各位数码都是奇数9。

（[返回](#T9)）

10﹒解：在《奇数和偶数》课程中，我们有：任一正整数*n*可表示为*n* = 2*k* ⋅*q*的形式，其中*k*为非负整数，*q*为正奇数.

则 nn+1=(n2^k)q+1q=（n2^k+1）（…） 不为质数（参见注（1）（2））, 与题设不符;

故只有n=2k，

所以 nn+1=2k·2^k +1,

同理 k也是2的幂次，设 k=2m，

所以 nn+1=2k·2^k +1=22^m·2^k+1=22^(m+k)+1=22^(m+2^m)+1

当m≥2时，上式≥264+1=(210)6·24+1>103·6·10+1>1019

所以 m=0或1，此时 k=1或2，n=2或4，nn+1=5或257，显然n=1时，nn+1=2也是；

综上所述，所求形如nn+1的素数有 2,5,257，分别对应的n为1，2,4.

注：本题利用了

（1）若n为正整数，则 xn-yn=(x-y)(xn-1+xn-2y+…+xyn-2+yn-1)

（2）若n为正奇数（上式中y用-y代替），则 xn+yn=(x+y)(xn-1-xn-2y+…-xyn-2+yn-1)

（[返回](#T10)）