**2009**年新知杯上海市初中数学竞赛

**一、填空题（第1-5小题每题8分，第6-10小题每题10分，共90分）**

1、对于任意实数a, b，定义a∗b =a(a+b)+b，已知a\*2.5=28.5，则实数a的值是 

【解】a\*2.5=a(a+2.5)+2.5=a2+2.5a+2.5,

a2+2.5a+2.5=28.5, 两边同时乘以2，得到 2a2+5a-52=0

（2a+13）(a-4)=0

解得 a=-13/2, 或 a=4

2、在三角形ABC中，AB=b2-1,BC=a2,CA=2a，其中a,b是大于1的整数，则b-a= 0 。

【解】利用三角形三边之间的关系不等式即可以得到:

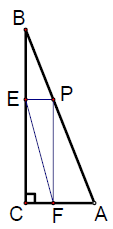
BC+CA >AB 🡺 a2+2a>b2-1 🡺 (a+1)2>b2 🡺 a+1>b (1)

|BC-CA|<AB 🡺|a2-2a|<b2-1 🡺 (a-1)2<b2 🡺 a-1 <b (2)

由(1)和(2)组合得到: -1< b-a <1,

因a,b是整数，故b-a也是整数，在(-1,1)之间只有一个整数0,故b-a=0

3、一个平行四边形可以被分成92个边长为1的正三角形，它的周长可能是 50,94。

4、已知关于x的方程x4+2x3+(3+k)x2+(2+k)x+2k=0有实根，并且所有实根的乘积为−2，则所有实根的平方和为 5 。

5、如图，直角三角形*ABC*中 *AC* = 1, *BC* = 2 ，*P*为斜边*AB*上一动点。PE⊥BC,PF⊥CA，则线段 EF长的最小值为 。

【解】EF=CP，当CP⊥AB时，最小。面积关系就可以了。即CP·CP=CA·CB=2，CP=

6、设a,b是方程x2+68x+1=0的两个根，c,d是方程x2-86x+1=0的两个根，则(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)的值为 2772 。

【解】韦达定理，a+b=-68,ab=1,c+d=86,cd=1

原式=[c2+(a+b)c+ab][d2-(a+b)d+ab]

=（c2-68c+1）（d2+68d+1）

=（c2-68c+cd）(d2+68d+cd)

=cd(c-68+d)(d+68+c)

=(c+d)2-682

=862-682

=154x18

=2772

7、在平面直角坐标系中有两点*P*(-1,1), *Q* (2,2)，函数y= kx −1 的图像与线段*PQ* 延长线相交（交点不包括*Q*），则实数*k*的取值范围是。

【解】从图上可以看出，函数在Q点时，斜率为最大。将Q（2,2）代入函数得到：

k=3/2, 所以 k<3/2;

另外，当斜率减少到与PQ直线平行时，无交点，这是k与PQ的斜率一样，即

k=(2-1)/(2+1)=1/3;

故 1/3<k<3/2

8、方程*xyz*=2009的所有整数解有 72 组。

【解】2009=7x7x41=1x1x2009=1x49x41=1x7x287， 考虑正负号，两个负数也可以。

（1 1 2009）（7 7 41 ）各有12组(此两组有一对相同数)

（1 41 49 ）（1 7 287）各有24组（此两组无相同数）

共有24x3=72组。

穷举法：选择（1 41 49 ），共有24组数据如下：（考虑6个不同的数）

（1,41,49）（1,49,41）（1，-41，-49）（1，-49，-41）

（-1，-41,49）（-1,49，-41）（-1,41，-49）（-1，-49,41）

（41，1,49）（41,49,1）（41，-1，-49）（41，-49，-1）

（-41，-1,49）（-41,49，-1）（-41,1，-49）（-41，-49,1）

（49，1,41）（49,41,1）（49，-1，-41）（49，-41，-1）

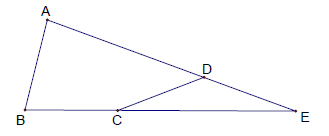
（-49，-1,41）（-49,41，-1）（-49,1，-41）（-49，-41,1）

选择（1,1,2009），共有12组数据如下：（有两个数相同）

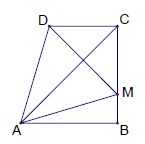
（1,1,2009）（1,2009，1）（1，-1，-2009）（1，-2009，-1）

（-1,-1,2009）(-1,2009,-1)(-1,1,-2009)(-1,-2009,1)

(2009,1,1)(2009,-1,-1)

(-2009,-1,1)(-2009,1,-1)

9、如图，四边形ABCD中， AB=BC=CD,∠ABC =78°，∠BCD =162°。设AD, BC延长线交于*E*，则∠AEB= 21° 。



10、如图，在直角梯形ABCD中，∠ABC = ∠BCD = 90°， AB=BC=10，点M在BC上，使得ΔADM是正三角形，则ΔABM与ΔDCM的面积和是 300-150√3.

**二、（本题15分）**如图，ΔABC中∠ACB =90°，点D在*CA*上，使得CD=1，AD=3,并且∠*BDC=*3∠*BAC*，求BC 的长。



E

解：设BC=x,则BD=, AB=，如图，作ABD∠平分线BE，

则ΔBDE∽ΔADB，因此BD2=DE·DA=3DE。由角平分线定理可知



因此，解得BC=x=。

**三、（本题15分）**求所有满足下列条件的四位数~~abcd~~：~~abcd~~=(~~ab~~+~~cd~~)2，其中数字c可以是0。

解：设x=~~ab~~, y=~~cd~~，则100x+y=(x+y)2，故x2+(2y-100)x+(y2-y)=0有整数解，由于10<x<100，故y≠0。因此Δx=(2y-100)2-4(y2-y)=4(2500-99y)是完全平方数，可设，2500-99y=t2，故99y=(50-t)(50+t), 0≤50-t<50+t之和为100，而且其中有11的倍数，只能有50-t=1或50-t=45，相应得到y=1,25，代入解得

因此~~abcd~~=9801,2025,3025。

**四、（本题15分）**正整数n满足以下条件：任意*n*个大于1且不超过2009的两两互素的正整数中，至少有一个素数，求最小的n.

解：由于22,32,52,72,112,132,172,192,232,292,312,372,412,432这14个合数都小于2009,

且两两互质，因此*n*≥15.

而*n*=15时，我们取15个不超过的互质合数a1,a2,…,a15的最小素因子p1,p2,...,p15，则必有一个素数≥47，不失一般性设p15≥47，由于p15是合数*a*15的最小素因子，因此，矛盾。因此，任意15个大于1且不超过2009的互质正整数中至少有一个素数。

综上所述，n最小是15。

**五、（本题15分）**若两个实数a,b使得a2+b与a+b2都是有理数，称数对(a,b)是和谐的。

①试找出一对无理数，使得(a,b)是和谐的；

②证明：若(a,b)是和谐的，且a+b是不等于1的有理数，则a,b都是有理数；

③证明：若(a,b)是和谐的，且a/b是有理数，则a,b都是有理数。

解：①不难验证 是和谐的。

②由已知t=(a2+b)-(a+b2)=(a-b)(a+b-1)是有理数，*a+b=s*是有理数，因此a-b=，解得a=是有理数，当然*b*=*s*−*a*也是有理数。

③若，则a+b2=0，则b=是有理数，因此a=(a+b2)-b2也是有理数。若a+b2≠0，由已知x=是有理数，y=a/b也是有理数，因此，故b=是有理数，因此a=(a+b2)-b2也是有理数。

翔文学习 数学频道



QQ: 2254 2374 33

Email: [xiangwenjy@gmail.com](mailto:xiangwenjy@gmail.com)