**第十二届“中环杯”中学生思维能力训练活动**

**初二年级模拟练习题(二)答案**

1. **填空题：**
   1. 关于x的方程(x-5)(x+3)(x+6)(x-10)=20x2的有理根的个数是( **0**)。

【解1】分析20=2x2x5,3：6=5:10=1:2，将20的两个因数2分别给左边的6和10，得到：

(x-5)(x+3)(x/2+3)(x/2-5)=5x2, （1）

不妨设y=x/2,🡺 x=2y, （1）式可以化为

(2y-5)(2y+3)(y+3)(y-5)=20y2

重新组合，[(2y-5)(y+3)][(2y+3)(y-5)]=20y2, 展开得到：

(2y2-5y+6y-15)(2y2+3y-10y-15)=20y2,

将2y2-15看成一个整体，得到：

[(2y2-15)+y][( 2y2-15)-7y]=20y2,

(2y2-15)2-6y(2y2-15)-7y2-20y2=0,

(2y2-15)2-6y(2y2-15)-27y2=0,

[(2y2-15)+3y][(2y2-15)-9y]=0,

2y2+3y-15=0 （2）

或者 2y2-9y-15=0 （3）

（2）的判别式=9+120=129=3x43

（3）的判别式=81+120=201=3x67

都不是平方数，所以无有理根。

**[解2]**直接计算[(x-5) (x+6)] [(x+3) (x-10)]-20x2 = 0

(x2-30+x)( x2-30-7x)-20 x2 = 0

(x2-30)2-6x(x2-30)-27 x2=0

(x2-30-9x)( x2-30+3x)=0

x2-30-9x=0 或者 x2-30+3x=0

两者都无有理根（判别式都不是完全平方数）。

* 1. 设f(n)为正整数n(十进制)的各数位上的数字的平方之和，比如f(123)=12+22+32=14。记f1(n)=f(n)，fk+1(n)=f(**fk (n)**)，k=1，2，3，…，则f2006(2006)=(**145**)。

【解】原题有误，**将f(fk+1(n))改为f(fk(n)).**

因为f1(2006)=f(2006)=40,f2(2006)=f(40)=16,f3(2006)=f(16)=37,

f4(2006)=f(37)=9+49=58, f5(2006)=f(58)=25+64=89, f6(2006)=f(89)=145,

f7(2006)=f(145)=42, f8(2006)=f(42)=20, f9(2006)=f(20)=4,

f10(2006)=f(4)=16,……

所以从16开始，fn是以周期为8的形式重复出现。

故f2006(2006)=f2004(16)=f4+250×8(16)=f4(16)=145。

* 1. 已知：p+q+r=9，，则=(**9**)。

【解】显然用到因式分解公式**x3+y3+z3-3xyz = (x+y+z)(x2+y2+z2-xy-yz-zx)**

设p=k(x2-yz),q=k(y2-zx),r=k(z2-xy) k≠0,

由题意知 k（x2-yz+ y2-zx+ z2-xy）=9

px+qy+rz=k(x3-xyz+ y3-xyz+ z3-xyz)=k(x+y+z)(x2+y2+z2-xy-yz-zx)

=9(x+y+z)

所以 

* 1. 如图是由9个等边三角形拼成的六边形，若已知中间的最小等边三角形的边长是a，则六边形的周长是(**30a**)。

【解】设右下方的等边三角形的边长是x，则其他等边三角形的边长分别是x，x+a，x+2a，x+3a，且有x+3a=2x，所以x=3a，从而六边形的周长是30a。

* 1. 自然数a满足21a的后三位数字是241，那么a最小为( **241**)。

解：只要证明21a=241(mod1000)，则原结论得证。

设21a=1000m+241，此时问题转化成求一次不定方程整数解的问题了，这个问题我们非常熟悉。因为(21，1000)=1，我们不妨先考虑21s-1000t=1的解的情况。

使用辗转相除法可知，21×381-1000×8=1，故该方程的特殊解为：s=381，t=8，从而21a=1000m+241的特殊解为：a=241s，m=241t，故只要取a=241s+1000m =241×381+1000m=91821+1000m=91821+1000(n+91)=821+1000k(n为整数，k=n+ 91)，就能使21a的后三位数字是241。

* 1. 已知实数a、b满足3+|b|+c2=5，s=2-3|b|+2c2=+2|b|，则s的取值范围是( **2≤s≤**)。

解：s=。

* 1. 甲、乙两人分别从东门和西门两地同时出发，相向而行，相遇后甲又走了8分钟到达西门。若乙从西门到达东门需要6分钟，则甲从东门到西门所需时间是( **12**)分钟。

解：设从东门到西门的距离为1，x为甲从东门到相遇处所用的时间，那么有，解得：x=4，所用时间为4+8=12

* 1. 如下图1，在矩形ABCD中，动点P从点B出发，沿B→C→D→A的方向运动至点A处停止，设点P的运动的路程为x，△ABP的面积为y，如果y关于x的函数图像如图2所示，则矩形ABCD的面积为(**20**)。



解：由图可知点P由B向C点运动过程中，路程x由0到4，面积由0开始增加。而当点P由C向D运动的过程中，路程由4到9，但面积没有发生变化，说明BC=4，CD=5。所以矩形的面积为20。

1. **动手动脑题**
   1. 已知关于x的方程4x2-8nx-3n=2和x2-(n+3)x-2n2+2=0，是否存在这样的n值，使第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一整数根?若存在，请求出这样的值；若不存在，请说明理由。

解：△=(-8n)2-4×4×(-3n-2)=(8n+3)2>0。

可见，n为任意实数，方程4x2-8nx-3n=2都有实数根，记这两个实数根为α、β，则α+β=2n，αβ=。

(α-β)2=(α+β)2-4αβ=4n2+3n+2。

由方程x2-(n+3)x-2n2+2=0得[x-(2n+2)][x+(n-1)]=0，解得x1=2n+2，x2=1-n。

若x1为整数，则4n2+3n+2=2n+2，从而n1=0，n2=。

当n1=0时，x1=2是整数。当n2=-时，x1=不是整数，舍去。

若x2为整数，则4n2+3n+2=1-n，从而n3=n4=-。

当n=-时，x2=不是整数，舍去。

综上可知，当n=0时，第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一整数根。

* 1. 一叠纸牌共2000张，每张牌上都标有一个数，数从1到2000。这叠牌并不是按数的大小顺序排列的。现将这叠牌这最上面的一张取出放在桌上，而将第二张牌移到这叠牌的最下面。再将剩下的这叠牌中的第一张移到桌上，并放在桌上的那张牌的右边，同样将那叠牌的第二张移到这叠牌的最下面。这个过程不断重复直到所有牌都已放在桌上为止。然后发现从左往右数，牌上数字大小是依次上升的：1，2，3，…，1999，2000。问在原来的那叠牌中，有多少张牌在标有数1999的牌的上面?

解：若纸牌共有2n张，则按题设操作最后放在桌上最右边的是原来的第2n张，右边第二张是原来的第2n-1张。而1024=210<2000<211，故可先考虑取走2000-1024=976张，在剩下的1024张，按原序号排应为：1953，1954，…，1999，2000，2，4，…，1952，而标有数1999的牌应在其中的第512张，即原序号为[512-(2000-1953)]×2=928。

因此，原序号为928的牌上面的数是1999，从而该牌上面有927张。

* 1. 用标有1g，2g，6g，26g的砝码各一个，在一架无刻度的天平上称重物，如果天平两端均可放置砝码，求可以称出的不同克数(正整数的重物)的种数共有多少种?

解：(1)当天平的一端放1个砝码，另一端不放砝码时，可以称出1g，2g，6g，26g；

(2) 当天平的一端放2个砝码，另一端不放砝码时，可以称出3g，7g，8g，27g，28g，32g；

(3) 当天平的一端放3个砝码，另一端不放砝码时，可以称出9g，29g，33g，34g；

(4) 当天平的一端放4个砝码，另一端不放砝码时，可以称出35g；

(5) 当天平的一端放1个砝码，另一端也放1个砝码时，可以称出1g，4g，5g，20g，24g，25g；

(6) 当天平的一端放1个砝码，另一端放2个砝码时，可以称出3g，5g，7g，18g，19g，21g，22g，23g，25g，27g，30g，31g；

(7) 当天平的一端放1个砝码，另一端放3个砝码时，可以称出17g，23g，31g，33g；

(8) 当天平的一端放2个砝码，另一端也放2个砝码时，可以称出19g，21g，29g；

综上所述，去掉重复的克数后，共有28种。

* 1. 如图是一个立方体魔方，我们可以从图中看到它的右侧、上侧和前侧。如果面对魔方右侧，顺时针转动右侧第一层90度，我们记作进行了一次R操作；如果逆时针转动魔方右侧第一层90度，则记作R′。对于上侧和前侧分别进行相同的旋转操作，分别记作U、U′、F、F′。现在对魔方转动如下：FRUR′FU′RF′R′U，那么图中的阴影面被转到了哪里?请在图中标出。

答案如图所示。



翔文学习 数学频道



QQ: 2254 2374 33

Email: [xiangwenjy@gmail.com](mailto:xiangwenjy@gmail.com)