“红师行动”—2018 军队文职备考计划

数学 2+物理专业科目练习题

数学 2 部分 第一篇 高等数学

红师教育军队文职教研中心

2018 年 8 月

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

1. 设 $f\left(x\right)=\frac{x-1}{x}$， $x\neq 0、1$，，则 $f[\frac{1}{f(x)}]=$（　）。

A. $1-x$　　　　B. $\frac{1}{1-x}$

C. $\frac{1}{x}$　　　　D. x

2. $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}+\lg\left(5-2x\right)$ 它的定义域是（　）。

A. $\{x\mid 2.5>x\geq -2\}$　　　　B. $\{x\mid 2.5>x>-2且x\neq 1\}$

C. $\{x\mid x\geq -2且x\neq 1\}$　　　　D. $\{x\mid 2.5>x\geq -2且x\neq 1\}$

3. 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$ 其中 $x\neq 0,x\neq 1$，则 $f(x)=$（　　）。

A. $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$　　　　B. $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$

C. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$　　　　D. $f(x)=x+\frac{1}{x}-1$

4. 下列 $f(x)$，$g(x)$ 为同一函数的是（　）。

A. $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $g\left(x\right)=1$

B. $f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$

C. $f(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$ 与 $g(x)=x+1$

D. $f\left(x\right)=\sqrt{\left(x+1\right)^2}$ 与 $g(x)=x+1$

5. 函数 $f\left(x\right)=\sin x^3$ 是（　　）。

A. 偶函数　　　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　　　D. 既是奇函数也是偶函数

习题解析

1.【答案】C。**解析**：$\frac{1}{f(x)}=\frac{x}{x-1}$，$f(\frac{1}{f(x)})=\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{x}$，$x\neq 0、1$ 。故选 C。

2.【答案】 D。**解析**：由 $x+2\geq 0$ 解得 $x\geq -2$；由 $x-1\neq 0$ 解得 $x\neq 1$；由 $5-2x>0$ 解得 $x<2.5$。所以函数的定义域为 $\{x|2.5>x\geq -2且x\neq 1\}$ 或表示为 $[-2,1)\cup(1,2.5)$。故选 D。

3.【答案】A。**解析**：求函数值的问题，一般有配方法与换元法，此处采用的是换元法。

令 $t=\frac{x-1}{x}$，则 $x=\frac{1}{1-t}$，代入原方程得 $f(\frac{1}{1-t})+f(t)=\frac{2}{1-t}$，即 $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2}{1-x}$，

令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$，则 $x=\frac{1}{1-u}$，代入上式得 $f(\frac{u-1}{u})+f(\frac{1}{1-u})=\frac{2(u-1)}{u}$，即

$$f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2(x-1)}{x}$$

联立三式得：$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$。 故选 A。

4.【答案】A。**解析**：A 是同一函数，因为定义域和对应法则都相同，表示变量的字母可以不同。B,C 不是同一函数，因为它们的定义域不相同。D 不是同一函数，因为它们对应的函数值不相同，即对应法则不同。本题答案为 A。

5.【答案】B。**解析**：因 $f(-x)=\sin(-x)^3=\sin(-x^3)=-\sin x^3=-f(x)$，故原函数为奇函数。故选 B。

第二节 极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-x})^{\cot x}=$（ ）。

A. e^2　　B. e

C. 1　　D. e^3

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\quad(1-\frac{1}{n^2})=$（ ）。

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\frac{1}{3}$　　D. $+\infty$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\quad+\frac{n}{n^2+n-1})=$（ ）。

A. $+\infty$　　　　B. 1

C. $\frac{1}{3}$　　　　D. $\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$（ ）=（ ）。

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

5. 确定常数 a,b，使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$（ ）。

A. $a=1,b=0$　　　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=1$　　　　D. $a=-1,b=0$

习题解析

1.【答案】A。**解析：** $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1+x}{1-x})^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2x}{1-x})^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln(1+\frac{2x}{1-x})^{\cot x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2x}{1-x}\cdot\cot x}=e^2$。故选 A。

2.【答案】A。**解析：**

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\quad(1-\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\quad(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\quad\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$ 。故选 A。

3.【答案】D。**解析：** 因为 $\frac{k+1}{n^2+n-1}\le\frac{k+1}{n^2+k}\le\frac{k+1}{n^2}(k=0,1,2,\quad n-1)$

所以 $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n-1)}=\frac{1+2+\quad+n}{n^2+n-1}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\quad+\frac{n}{n^2+n-1}\le\frac{1+2+\quad+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n-1)}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\quad+\frac{n}{n^2+n-1})=\frac{1}{2}$。故选 D。

4.【答案】C。**解析：** 对极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$，令 $f(x)=(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=3[(\frac{1}{3})^x+(\frac{2}{3})^x+1]^{\frac{1}{x}}$

则 $3\le f(x)\le3\cdot3^{\frac{1}{x}}$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$。故选 C。

5.【答案】【答案】D。**解析**：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x})=0$，即$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x})=0$，

故$-1-a=0$，即$a=-1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0$。故选D。

第三节 无穷大与无穷小

1. 当$x\to0$时，$\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$是x的（　　）阶无穷小。

A. $\frac{1}{6}$　　B. 1

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x-1}=5$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$（　　）。

A. $\ln 3$　　B. $10\ln 3$

C. $3\ln 10$　　D. 3

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$ =(　)。

A. $\frac{1}{16}$　　B. 1

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 当$x\to0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是（　）。

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}=$（　　）。

A. 1　　B. 极限不存在，是∞

C. 0　　D. 不是∞，极限不存在

习题解析

1. 【答案】A。**解析**：设其为 x 的 k 阶无穷小，则 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=C\neq0$，

因为 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=\lim_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^{3k}}}=\lim_{x\to0}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}-3k}(1+x^{\frac{3}{2}})}$，即 $\frac{1}{2}-3k=0,k=\frac{1}{6}$。因此本题答案为 A。

2. 【答案】B。**解析**：当 $x\to0$ 时，$3^x-1\to0$，而 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x-1}=5$，故 $\frac{f(x)}{\sin 2x}\to0$，由无穷小等价替换定理有当 $x\to0$ 时，$3^x-1\sim x\ln3$，$\ln(1+\frac{f(x)}{\sin 2x})\sim\frac{f(x)}{\sin 2x}\sim\frac{f(x)}{2x}$，

$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{2x}}{x\ln3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2\ln3}=5$，$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln3$。因此本题答案为 B。

3. 【答案】A。**解析**：$x\to0$ 时 $\sin x\sim x$；$x\to0$ 时 $\tan x\sim x$；$x\to0$ 时 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，

原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\,(1-\cos x)}{(2x)^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{8x^3}=\frac{1}{16}$，等价无穷小替换仅适用于求乘积或商的极限，不能在代数和的情形中使用。如上例中若对分子的每项作等价替换，则原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0$。所以正确答案为 A。

4. 【答案】B。**解析**：利用已知无穷小量的等价代换公式，尽量将四个选项先转化为其等价无穷小量，再进行比较分析找出正确答案。当 $x\to0^+$ 时，A，C，D中 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x$，用排除法知应选B。故选B。

5. 【答案】A。**解析**：当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷小，$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ 虽没有极限但却是有界函数，故根据无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小，可得 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}=0$。故选 A。

第四节 函数的连续性

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{a(1-\cos x)}{x^2} & x<0\\ 1 & x=0\\ \ln(b+x^2) & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$（ ）。

A. $a=2$　　B. $a=e$

C. $a=-2$　　D. $a=-e$

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则常数 $b=$（　）。

A. $b=0$　　B. $b=1$

C. $b=-1$　　D. $b=e$

3. $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点 $x=0$ 的类型（　）。

A. 可去间断点　　B. 第一类跳跃间断点

C. 第二类震荡间断点　　D. 第二类无穷间断点

4. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$ 的间断点为(　)。

A. $x=2$　　B. $x=1$

C. $x=-1$　　D. $x=0$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是(　)。

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

习题解析

1.【答案】 A。**解析**：根据连续的定义， $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$，

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$， 故 $\dfrac{a}{2}=1=\ln b$， 即 $a=2,b=e$。因而正确答案为A。

2.【答案】D。**解析**：因为 $x=0$ 为无穷间断点，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0\Rightarrow a=0,b\neq1。$$

因为$x=1$为可去间断点，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$极限存在，$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0 \Rightarrow b=\lim\limits_{x\to 1}e^x=e$。故选D。

3.【答案】B。**解析**：$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$，所以$x=-1$为第一类可去间断点，

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=\infty$，所以$x=1$为第二类无穷间断点，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=1$，所以$x=0$为第一类跳跃间断点。故选B。

4.【答案】D。**解析**：此类题目需先求函数的表达式

$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\therefore x=0$为第一类跳跃间断点，函数除$x=0$外处处连续。本题答案为D。

5.【答案】D。**解析**： 由于题设条件含有抽象函数，本题最简便的方法是用赋值法求解，即取符合题设条件的特殊函数$f(x)$去进行判断，然后选择正确选项。取$f(x)=|x|$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$，但$f(x)$在$x=0$不可导，故选（D）。事实上，在（A）（B）两项中，因为分母的极限为0，所以分子的极限也必须为0，则可推得$f(0)=0$。在（C）中，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以（C）项正确。故选D。

本章练习题

1. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则（　）。

A．$x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第一类间断点

B．$x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第二类间断点

C．$x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点

D．$x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$（　）。

A．0　　　　B．∞

C. $\frac{1}{2}$ D. 2

3. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续，则下列说法错误的是（ ）。

A. 函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处有定义 B. $x\to x_0$ 时极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在

C. 极限值与函数值相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ D. 函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处可导

4. 已知函数 $f(x)=x^2-1$，则 $f(f(x))=$（ ）

A. x^2-1 B. x^4-2x^2+1

C. x^4-2x^2 D. x^4-x^2+1

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$（ ）。

A. 0 B. ∞

C. $\frac{1}{2}$ D. 2

6. $y=\begin{cases}\sin x, x<0\\ \frac{1}{3}x, x>0\end{cases}$，当 $x\to 0$ 的函数极限为（ ）。

A. 0 B. ∞

C. $\frac{1}{3}$ D. 1

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-x+1}=$（ ）。

A. $\frac{1}{2}$ B. ∞

C. 0 D. 2

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$（ ）。

A. 0 B. ∞

C. $\frac{1}{2}$ D. 1

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{kx})^x=$（ ）。

A. e^{k}　　B. $e^{-\frac{1}{k}}$

C. $e^{\frac{1}{k}}$　　D. e^{-k}

10. 下列在 x=0 处不连续的是（　　）。

A. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$　　B. $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

习题解析

1.【答案】D。**解析**：显然 $x=0$， $x=1$ 为间断点，其分类主要考虑左右极限。由于函数在 $x=0$， $x=1$ 点处无定义，因此是间断点. 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为第二类间断点；$\lim\limits_{x\to 1^{+}}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^{-}}f(x)=-1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点。应特别注意：$\lim\limits_{x\to 1^{+}}\frac{x}{x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^{-}}\frac{x}{x-1}=-\infty$. 从而 $\lim\limits_{x\to 1^{+}}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$。本题答案为 D。

2.【答案】C。**解析**：$\because x\to\infty$时，分母极限为 0，不能直接用商的极限法则。先恒等变形，将函数“有理化”：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$.　（**有理化法**）。故选 C。

3.【答案】D。**解析**：根据函数连续的定义可知，必同时满足ABC三项。D中，连续不一定可导，可导必连续。本题答案为D。

4.【答案】C。**解析**：$f\left(f(x)\right)=f\left(x^{2}-1\right)=\left(x^{2}-1\right)^{2}-1=x^{4}-2x^{2}$。故本题答案为C。

5.【答案】A。**解析**：$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}}+\lim\limits_{n\to+\infty}1}=0$$

所以本题答案为A。

6.【答案】A。**解析**：因为 $\lim\limits_{x\to 0^{-}}y=\sin 0=0, \lim\limits_{x\to 0^{+}}y=\frac{1}{3}\times 0=0$，$\lim\limits_{x\to 0^{-}}y=\lim\limits_{x\to 0^{+}}y$；所以函数在指定点的极限 $\lim\limits_{x\to 0}y=0$。本题答案为 A。

7.【答案】C。**解析**：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{1-0+0}=0$$ 。故选 C。

8.【答案】B。**解析**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，或可以用无穷小等价替换$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$。本题答案为B。

9.【答案】C。**解析**：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{kx}\right)^{kx}\right]^{\frac{1}{k}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{kx}\right)^{kx}\right]^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{k}}$。故本题答案为C。

10.【答案】A。**解析**：

A 中函数在 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，第二类间断点。

B 中，$\because\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0=f(0)$， $\therefore$ 函数在点 $x=0$ 左连续。

C 中， $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$而$f(x_0)=f(0)=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)\therefore$函数在$x=0$处连续。

D 中，虽然 $f(x)$ 是分段函数，但点 $x=0$ 两侧函数表达式一致。

$\because$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}\overset{M\times0}{=\!=}0=f(0)$， $\therefore$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。所以本题答案为 A。

第二章 一元函数微分学

第一节 导数与微分

1. 若 $f'(x_0)$ 存在，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$（ ）。

A. $2f'(x_0)$　　B. $f'(x_0)$

C. $-2f'(x_0)$　　D. $-f'(x_0)$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a，b 值为（ ）。

A. $a=2$，$b=1$　　B. $a=-2$，$b=-1$

C. $a=-2$，$b=-1$　　D. $a=2$，$b=-1$

3. $u=e^{-\sin^2\frac{1}{v}}$，则 $u'=$（ ）。

A. $\dfrac{1}{v^2}\sin\dfrac{2}{v}e^{-\sin^2\frac{1}{v}}$　　B. $-\dfrac{1}{v^2}\sin\dfrac{2}{v}e^{-\sin^2\frac{1}{v}}$

C. $\dfrac{1}{v^2}\sin\dfrac{2}{v}e^{\sin^2\frac{1}{v}}$　　D. $\dfrac{1}{v}\sin\dfrac{2}{v}e^{-\sin^2\frac{1}{v}}$

4. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（ ）。

A. $\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$　　B. $\dfrac{b}{-a\sin^3 t}$

C. $\dfrac{b}{-a^2\sin^3 t}$　　D. $\dfrac{b}{a\sin^3 t}$

5. $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$，$dy=$（ ）。

A. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$　　B. $(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x})dx$

C. $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$　　D. $(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x})dx$

习题解析

1.【答案】A。**解析**：根据导数的定义，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}2\frac{f(x_0-h+2h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$=2\lim\limits_{2h\to 0}\dfrac{f(x_0-h+2h)-f(x_0-h)}{2h}=2f'(x_0)$。故选 A。

2.【答案】D。**解析**：由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $f(1^-)=1=f(1^+)=a+b=f(1)$，即 $a+b=1$。又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，所以：$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ ，$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$，有 $a=2$，$b=-1$ 。求得 $a=2$，$b=-1$。故选 D。

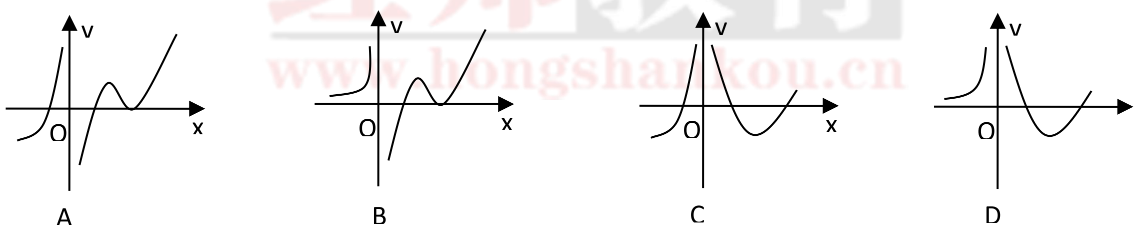
3.【答案】A。**解析**：$u'=e^{-\sin^2\frac{1}{v}}\cdot(-2\sin\dfrac{1}{v}\cdot\cos\dfrac{1}{v}\cdot(-\dfrac{1}{v^2}))$ $=\dfrac{1}{v^2}\sin\dfrac{2}{v}e^{-\sin^2\frac{1}{v}}$。 故选 A。

4.【答案】C。**解析**：$y'=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{b}{a}(\cot t)'\dfrac{1}{-a\sin t}=\dfrac{b}{-a^2\sin^3 t}$。本题答案为 C。

5.【答案】B。**解析**：有微分公式 $df(x)=f'(x)dx$，$dy=(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x})dx$。故选 B。

第二节 导数的应用

1. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图象如右图所示，则导函数 $y=f'(x)$，可能为（ ）。



2. 设函数 $f(x)=kx^3+3(k-1)x^2-k^2+1$ 在区间(0，4)上是减函数，则 k 的取值范围是（ ）。

A. $k<\dfrac{1}{3}$　　B. $0<k\le\dfrac{1}{3}$

C. $0\le k\le\dfrac{1}{3}$　　D. $k\le\dfrac{1}{3}$

3. 若函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-a}(x>a)$ 在 $x=3$ 处取最小值，则 $a=$（ ）。

A. 1　　　　B. 2

C. 4　　　　D. 2 或 4

4. 对于函数 $f(x)=x^3+ax^2-x+1$ 的极值情况，4 位同学有下列说法：甲：该函数必有 2 个极值；乙：该函数的极大值必大于 1；丙：该函数的极小值必小于 1；丁：方程 $f(x)=0$ 一定有三个不等的实数根。这四种说法中，正确的个数是（　　）。

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

5. 已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$，a、b 的值为（　　）。

A. $a=1,b=0$　　　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=1$　　　　D. $a=-1,b=0$

习题解析

1.【答案】D。**解析**：当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单增，$f'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$f(x)$ 先增后减，$f'(x)$ 的符号应是正负正。故选 D。

2.【答案】D。**解析**：$f'(x)=3kx^2+6(k-1)x$，当 $k>0,f'(4)\le 0$；当 $k=0,f'(x)=-6x<0$；$k<0,f'(x)<0$，综合 $k\le\frac{1}{3}$。故选 D。

3.【答案】B。**解析**：$f'(x)=1-\frac{1}{(x-a)^2}$，因为函数在 $x=3$ 处有最小值，则一定有

$f'(3)=1-\frac{1}{(3-a)^2}=0$，解得 $a=2$或$a=4$，因为 $x>a$，所以 $a=2$。故选 B。

4.【答案】C。**解析**：$f'(x)=3x^2+2ax-1$ 中$\Delta=4a^2+12>0$，故该函数必有 2 个极值点 x_1，x_2，且 $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{3}<0$，不妨设 $x_1<0$，$x_2>0$，易知在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值，而 $f(0)=1$，故极大值必大于 1，极小值小于 1，而方程 $f(x)=0$ 不一定有三个不等的实数根。故甲、乙、丙三人的说法都正确。故选 C。

5.【答案】C。**解析**：$f'(x)=\frac{\alpha(\frac{x+1}{x}-\ln x)}{(x+1)^2}-\frac{b}{x^2}$，由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，且

过点 $(1,1)$，故 $\begin{cases} f(1)=1, \\ f'(1)=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b=1, \\ \dfrac{a}{2}-b=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=1$。故选 C。

本章练习题

1. 在一点处函数极限存在、连续、可导、可微之间的关系，下列说法正确的是（　　）。

A. 可微必可导

B. 连续必可导

C. 极限存在则一定连续

D. 连续一定可微

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)$ 在区间 $[0,\ \dfrac{\pi}{2}]$ 上的值域为（　　）。

A. $[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}]$

B. $(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}})$

C. $[1,\ e^{\frac{\pi}{2}}]$

D. $(1,\ e^{\frac{\pi}{2}})$

3. 已知函数 $f(x)=x2(x-3a)+1(a>0,\ x\in R)$，若在 $(0,\ 2)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围（　　）。

A. $(1,+\infty)$

B. $[1,2)$

C. $(-\infty,1]$

D. $[1,+\infty)$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+ax}{e^x}\ (a\in\mathrm{R})$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，则 $a=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{2}$

B. ∞

C. 0

D. 2

5. $y=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$，$dy=$（　　）。

A. $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos}dx$

B. $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos}$

C. $\dfrac{x-\sin x}{1+\cos}dx$

D. $\dfrac{x-\sin x}{1+\cos}$

6. $e^{y}=xy$，则 $y'=$（　　）。

A. $\dfrac{y}{x(y+1)}$

B. $\dfrac{y}{x(y-1)}$

C. $\dfrac{x}{y(y-1)}$

D. $\dfrac{x}{y(y+1)}$

7. 已知 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（　）。

A. $\dfrac{1}{a}\csc^4\dfrac{t}{2}$　　　　B. $\dfrac{1}{4a}\csc^4 t$

C. $\dfrac{1}{4a}\csc^4\dfrac{t}{2}$　　　　D. $\csc^4\dfrac{t}{2}$

8. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　）。

A. 可微　　　　B. 不可导

C. 可导　　　　D. 连续且可导

9. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，$dy$=（　）。

A. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^3}dx$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^3}$

C. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

10. 函数 $f(x)=e^x-ex+a$ 有零点，则 a 的取值范围是（　）。

A. $(-\infty,0]$　　　　B. $(-\infty,0)$

C. $(0,+\infty)$　　　　D. $[0,+\infty)$

习题解析

1.【答案】A。**解析：**　可微 $\Leftrightarrow$ 可导 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ 连续 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ 极限存在。

反例：$f(x)=|\sin x|$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导。$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0 \\ 2, x=0 \end{cases}$，$x=0$ 处极限存在，但不连续。本题答案为A。

2.【答案】A。**解析：**$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+\dfrac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)=e^x\cos x$，当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)\ge 0$，

∴$f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上是增函数。∴$f(x)$的最大值为$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$，$f(x)$的最小值为$f(0)=\dfrac{1}{2}$。故选A。

3.【答案】D。**解析**：$f'(x)=3x(x-2a)$。

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2a$。$f(0)=1$，$f(2a)=-4a3+1$ 。当 $a>0$ 时，$2a>0$。当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2a)$	$2a$	$(2a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	$-4a3+1$	↗

在(0，2)上单调递减，∴ $2a\geq 2$，即$a\geq 1$。本题答案为D。

4.【答案】C。**解析**：对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{(6x+a)e^x-(3x^2+ax)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-3x^2+(6-a)x+a}{e^x}$，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，所以 $f'(x)=0$，即 $a=0$。故本题答案为 C。

5.【答案】A。**解析**：$y'=\dfrac{(\sin x+x\cos x)(1+\cos x)-x\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$。所以本题答案为 A。

6.【答案】B。**解析**：$e^y=xy$，两边求对数得 $y=\ln x+\ln y$， 两边求导 $y'=1/x+y'/y$ ，整理得 $y'=\dfrac{y}{x(y-1)}$。本题答案为 B。

7.【答案】C。**解析**：$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$；$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}$；

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\cdot\dfrac{dt}{dx}=(-\csc^2\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{1}{2})\dfrac{1}{a(1-\cos t)}=-\dfrac{1}{4a}\csc^4\dfrac{t}{2}$。故选 C。

8.【答案】B。**解析**：由于 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\dfrac{1}{x}$， 则 $x\to 0$ 时，上式的极限不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。A 中可微与可导是充要条件，错误。C 中可导，错误。D 中在 $x=0$ 点 $f'(0^+)=f'(0^-)=f(0)$，连续，导数不可导，错误。本题答案为 B。

9.【答案】C。**解析**：$y'=\dfrac{1}{1-x^2}[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}]=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$dy=y'dx=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$。故本题答案为 C。

10.【答案】A。**解析**：$f'(x)=e^x-e$．由 $f'(x)>0$ 得 $e^x-e>0$，∴ $x>\ln 2$．由 $f'(x)<0$ 得，

$x<1$，$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值。只要 $f_{\min}(x)\le 0$ 即可，$\therefore e-e+a\le 0$，$\therefore a\le 0$。$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,0]$。所以本题答案为 A。

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_a^x f(x)dx$ 是（ ）

A. $f(x)$ 的一个原函数　　B. $f'(x)$ 的一个原函数

C. $f(x)$ 的全体原函数　　D. $f'(x)$ 的全体原函数

2. 在下列等式中，正确的结果是（ ）

A. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　　B. $\int df(x)=f(x)$

C. $\int f'(x)dx=f(x)$　　D. $d\int f(x)dx=f(x)$

3. 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int f'(x)dx=$（ ）

A. $\sin x+C$　　B. $\cos x+C$　　C. $-\sin x+C$　　D. $-\cos x+C$

4. $\int e^{2x}dx=$（ ）

A. $e^{2x}+C$　　B. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$　　C. $2e^{x}+C$　　D. $\frac{1}{2}e^{2x}$

5. $\int xde^{-x}=$（ ）

A. $xe^{-x}+C$　　B. $-xe^{-x}+C$　　C. $xe^{-x}+e^{-x}+C$　　D. $xe^{-x}-e^{-x}+C$

6. 设 $f(x)=\sin 2x$，则 $\int xf''(x)dx=$（ ）

A. $\frac{x}{2}\cos 2x-\sin 2x+C$　　B. $2x\cos 2x-\sin 2x+C$

C. $\frac{x}{2}\sin 2x-2\cos 2x+C$　　D. $2x\sin 2x-2\cos 2x+C$

7. $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=$（ ）

A. $2[\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})]+C$　　B. $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$

C. $\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})+C$　　D. $-\ln(1+\sqrt{x})+C$

8. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=$（ ）

A. $\arcsin\frac{x}{a}+C$　　B. $t+C$　　C. $\arcsin x+C$　　D. $x+C$

9. $\int e^x\cos x\mathrm{d}x=$（　）

A. $e^x(\sin x+\cos x)+C$　　B. $\frac{1}{2}e^x\sin x+C$　　C. $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$　　D. $e^x\cos x+C$

10. $\int e^{\sqrt{x}}dx=$（　）

A. $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$　　B. $e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$　　C. $2e^x\left(x-1\right)+C$　　D. $2e^{\sqrt{x}}+C$

习题解析

1.【答案】A。**解析**：由变上限函数的性质可知：$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=f(x)$，由不定积分的定义可知$\int_a^x f(x)dx$是$f(x)$的一个原函数。故选 A。

2.【答案】A。**解析**：本题考查的是不定积分与求导数互为逆运算

①$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$　　②$d\int f(x)dx=f(x)dx$

③$\int F'(x)dx=F(x)+C$　　④$\int dF(x)=F(x)+C$

故选 A。

3.【答案】B。**解析**：由题意$f(x)$的一个原函数是$\sin x$可知，$f(x)=(\sin x)'=\cos x$，而$\int f'(x)dx=f(x)=\cos x+C$　故选 B。

4.【答案】B。**解析**：本题考查的不定积分的计算，利用凑微分的方法计算，$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d2x=\frac{1}{2}e^{2x}+C$，故选 B。

5.【答案】C。**解析**：本题考查的不定积分的计算，利用分部积分的方法计算，$\int xde^{-x}=x\cdot e^{-x}-\int e^{-x}dx=x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}d(-x)=x\cdot e^{-x}+e^{-x}+C$。故选 C。

6.【答案】B。**解析**：本题考查的不定积分的计算，利用分部积分的方法计算，两次利用分部积分法，$\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)=x\cdot f'(x)-\int f'(x)dx=x\cdot f'(x)-\int df(x)=x\cdot f'(x)-f(x)+C$，将$f(x)=\sin 2x$带入，故选 B。

7.【答案】B。**解析**：令$\sqrt{x}=t,则x=t^2,dx=2tdt.于是$

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{1}{1+t}\cdot 2tdt=2\int\frac{1+t-t}{1+t}dt=2\int(1-\frac{1}{1+t})dt$$

$$=2(t-\ln|1+t|)+C=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$$。故选 B。

8.【答案】A。**解析**：令 $x=a\sin t$，$(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$ ，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}a\cos t\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C.$$

再由 $x=a\sin t$，得 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，将其回代上式，得，$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

故选 A。

9.【答案】C。**解析**：$\int e^x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}(e^x)=\cos x\cdot e^x-\int e^x\mathrm{d}(\cos x)\ =\cos x\cdot e^x+\int e^x\sin x\mathrm{d}x$

再次利用分部积分法，得到

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\mathrm{d}x&=\cos x\cdot e^x+\int\sin x\mathrm{d}(e^x)\\&=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\mathrm{d}(\sin x)\\&=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

由上述等式可解得

$\int e^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$． 故选 C。

10.【答案】A。**解析**：先去根号，设 $\sqrt{x}=t,\text{则}x=t^2,dx=2tdt,$于是

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t\cdot 2tdt=2\int tde^t\ =2te^t-2\int e^tdt$$

$$=\int 2te^t-2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$$

这是一道综合题，先用换元积分法消去根式，再用分部积分法求得最终结果。故选 A。

第二节 定积分

1. 设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx(k=1,2,3)$，则有（ ）

A．$I_1<I_2<I_3$　　B．$I_3<I_2<I_1$

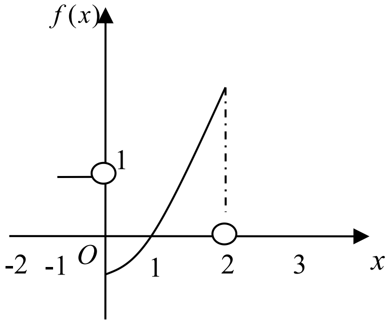
C．$I_2<I_3<I_1$　　D．$I_2<I_1<I_3$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（ ）

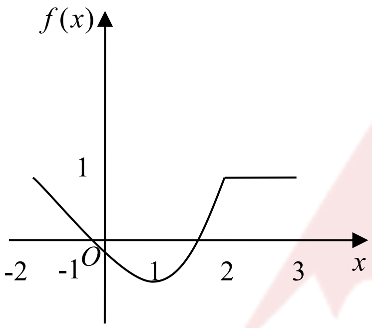
A．$\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　B．$\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　　　D. $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

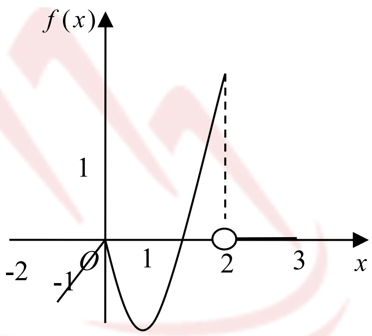
3. 设函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



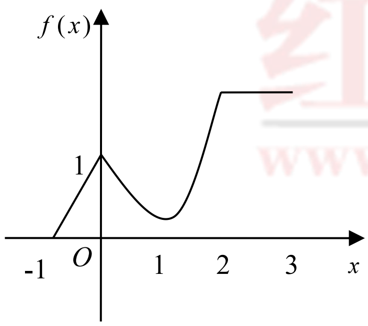
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　）



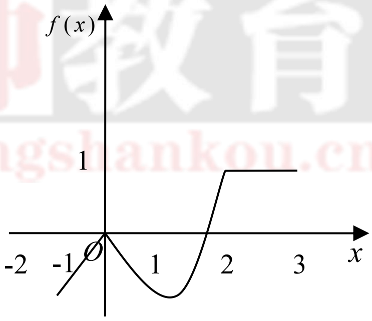
A



B



C



D

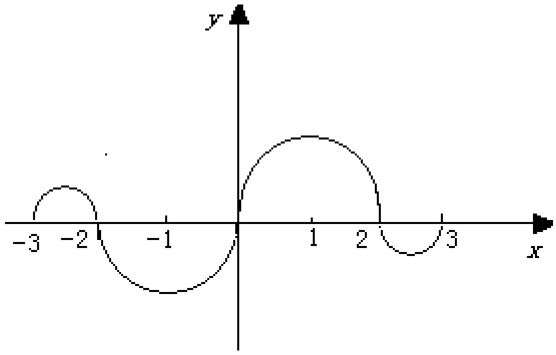
4. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是（　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,\frac{\pi}{2})$　　C. $(\frac{\pi}{2},\pi)$　　D. $(\pi,+\infty)$

5. 函数 $f(x)=\int_0^{x-x^2} e^{-t^2}dt$ 的极值点为 $x=$（　）

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

6. 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（ ）



A. $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

C. $F(3)=\frac{3}{4}F(2)$ D. $F(3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（ ）

A. $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续

B. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 点不可导

C. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$

D. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

8. 设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^{2x} f(t^2)dt$, 则 $F'(x)=$（ ）

A. $2f(4x^2)$ B. $xf(2x^2)$ C. $f(x^4)$ D. $2xf(4x^2)$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos xdx=$（ ）

A. 1 B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

10. $\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=$（ ）

A. $4-2\ln 3$ B. 4 C. $4+2\ln 3$ D. $4-\ln 3$

习题解析

1. 【答案】D。**解析：** 由于当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0$，可知 $\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx<0$，也即 $I_2-I_1<0$，

可知 $I_1>I_2$．又由于 $\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$，对 $\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$ 做变量代换 $t=x-\pi$ 得 $\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)dt=-\int_{\pi}^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin tdt=-\int_{\pi}^{2\pi}e^{(x+\pi)^2}\sin xdx$，

故 $\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}\left(e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}\right)\sin xdx$ 由于当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0,e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}<0$，可知 $\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx>0$，也即 $I_3-I_1>0$，可知 $I_3>I_1$．综上所述有 $I_2<I_1<I_3$．故选 D。

2.【答案】D。**解析**：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$，

因为 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$，

$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$，

所以 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1dx\cdot\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$．故选 D。

3.【答案】D。**解析**：此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

①$x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减．

②$x\in[1,2]$ 时，$F(x)$ 单调递增．

③$x\in[2,3]$ 时，$F(x)$ 为常函数．

④$x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增．

⑤由于 F（x）为连续函数

结合这些特点，故选 D。

4.【答案】A。**解析**：原问题可转化为求

$f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt-\ln x=\int_1^x\frac{\sin t}{t}dt-\int_1^x\frac{1}{t}dt=\int_1^x\frac{\sin t-1}{t}dt=\int_x^1\frac{1-\sin t}{t}dt>0$ 成立时 x 的取值范围，由 $\frac{1-\sin t}{t}>0$，$t\in(0,1)$ 时，知当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$．故选 A。

5.【答案】A。**解析**：因 $f'(x)=e^{-(x-x^2)^2}\cdot(x-x^2)'=(1-2x)e^{-(x-x^2)^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，又 $f'\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，故 $x=\frac{1}{2}$ 是极值点，故选 A。

6.【答案】C。**解析**：本题考查定积分的几何意义，应注意$f(x)$在不同区间段上的符号，从而搞清楚相应积分与面积的关系.

【详解】利用定积分的几何意义，可得

$F(3)=\frac{1}{2}\pi 1^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\pi$，$F(2)=\frac{1}{2}\pi 2^2=\frac{1}{2}\pi$，

$F(-2)=\int_0^{-2}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi 1^2=\frac{1}{2}\pi$.

所以 $F(3)=\frac{3}{4}F(2)=\frac{3}{4}F(-2)$，故选 C。

7.【答案】B。**解析**：先求分段函数$f(x)$的变限积分$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，再讨论函数$F(x)$的连续性与可导性即可.

当$x<0$时，$F(x)=\int_0^x(-1)dt=-x$；

当$x>0$时，$F(x)=\int_0^x 1dt=x$，当$x=0$时，$F(0)=0$. 即$F(x)=|x|$，

显然，$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在$x=0$点不可导. 故选 B。

本题主要考查求分段函数的变限积分. 对于绝对值函数：$|x-x_0|$在$x=x_0$处不可导；$f(x)=x^n|x-x_0|$在$x=x_0$处有n阶导数，则$f^{(n)}(x)=(n+1)!|x-x_0|$.

8.【答案】A。**解析**：本题考查的是积分上限函数求导问题，积分上限的函数是x的复合函数时，有$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$，所以$F'(x)=(\int_0^{2x}f(t^2)dt)'=f((2x)^2)\cdot(2x)'=2f(4x^2)$，故选 A。

9.【答案】B。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用第一类换元法：

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x d\sin x=\left[\frac{\sin^6 x}{6}\right]_{00}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$。故选 B。

10.【答案】A。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用第二类换元法：令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2,dx=2tdt,$且当$x=0$时，$t=0$；当$x=4$时，$t=2$. 于是

$\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_0^2\frac{2t}{1+t}dt=2\int_0^2(1-\frac{1}{1+t})dt=2(t-\ln|1+t|)\big|_0^2=4-2\ln 3$。故选 A。

本章练习题

1. 设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$. 则$I,J,K$的大小关系是（　）

A. $I<J<K$　　B. $I<K<J$　　C. $J<I<K$　　D. $K<J<I$

2．设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

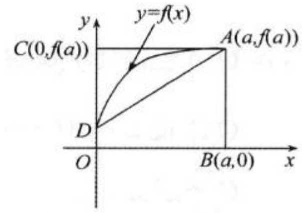
3．曲线方程为 $y=f(x)$ 函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a af'(x)dx$ 表示的是（　）

A．曲边梯形 $ABOD$ 面积

B．梯形 $ABOD$ 面积

C．曲边三角形 ACD 面积

D．三角形 ACD 面积



4．设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\le g(x)$，且对任何 $C\in(0,1)$（　）

A．$\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)dt\ge\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)dt$　　B．$\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)dt\le\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)dt$

C．$\int_{c}^{1}f(t)dt\ge\int_{c}^{1}g(t)dt$　　D．$\int_{c}^{1}f(t)dt\le\int_{c}^{1}g(t)dt$

5．把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　）

A．α,β,γ　　B．α,γ,β　　C．β,α,γ　　D．β,γ,α

6．$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\quad(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于（　）

A．$\int_1^2\ln^2xdx$　　B．$2\int_1^2\ln xdx$

C．$2\int_1^2\ln(1+x)dx$　　D．$\int_1^2\ln^2(1+x)dx$

7．根据定积分的几何意义 $\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})dx=$（　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$-\frac{\pi}{2}$　　C．$-\pi$　　D．π

8．设函数 $f(x)$ 可积，则 $\int df(x)=$（　）

A．$f(x)+C$　　B．$f(x)$　　C．$f(x)dx+C$　　D．$f(x)dx$

9．$\int\frac{1}{e^{x+1}}dx=$（　）

A．$\ln(x+1)+C$　　B．$\frac{1}{e^{x+1}}+C$　　C．$-\frac{1}{e^{x+1}}+C$　　D．$-e^{x+1}+C$

10．$\int\ln xdx=$（　）

A．$x(\ln x-1)+C$　　B．$x\ln x+C$　　C．$\ln x+x+C$　　D．$\ln x-x+C$

11. $\left(\int_{x}^{x^2} f(t)dt\right)' =$（　）

A. $2xf(x^2)-f(x)$　　B. $2xf(x^2)$　　C. $f(x)$　　D. $f(x^2)$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx =$（　）

A. 1　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx =$（　）

A. 1　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

14. $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx =$（　）

A. 1　　B. $\frac{22}{3}$　　C. $\frac{11}{2}$　　D. $\frac{1}{6}$

15. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx =$（　）

A. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{3}\pi-\sqrt{3}$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx =$（　）

A. 1　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{6}$

17. $\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cos\sqrt{x} dx =$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. π　　C. $\pi-2$　　D. 2

18. 抛物线 $y^2=2x$，和直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积为（　）

A. 12　　B. 10　　C. 6　　D. 18

19. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积（　）

A. $\frac{4}{3}\pi ab^2$　　B. πab^2　　C. πab　　D. $\frac{4}{3}\pi ab$

20. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx =$（　）

A. $\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$　B. $\frac{x^3}{3}+\arctan x+C$　C. $-x+\arctan x+C$　D. $\frac{x^3}{3}-x+C$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：本题考查定积分的性质，直接将比较定积分的大小转化为比较对应的被积函数的大小即可.

$x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\cot x$，因此 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx$，故选 B。

2.【答案】B。**解析**：$f'(x)=[\ln(2+x^2)]\cdot 2x$，$f'(0)=0$，即 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的一个零点，又 $f''(x)=2\ln(2+x^2)+\frac{4x^2}{2+x^2}>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加（$x\in(-\infty,+\infty)$），所以 $f'(x)$ 只有一个零点．故选 B。

3.【答案】C。**解析**：$\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=xf(x)\big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx$，其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积．故选 C。

4.【答案】D。**解析**：本题考查的定积分的性质，由保号性的内容可知，$f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\le g(x)$ 时，$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$，故选 D。

5.【答案】B。**解析**：对与变限积分有关的极限问题，一般可利用洛必塔法则实现对变限积分的求导并结合无穷小代换求解.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^x\cos t^2dt}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2}=0,$$

即 $\gamma=o(\alpha)$.

又 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x}=0,$$

即 $\beta = o(\gamma)$.

从而按要求排列的顺序为α、γ、β， 故选 B。

6.【答案】B。**解析**：将原极限变型，使其对应一函数在一区间上的积分和式．作变换后，从四个选项中选出正确的．

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\quad(1+\frac{n}{n})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\quad(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\quad+(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}$$

$$=2\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$\xrightarrow{1+x=t}2\int_1^2\ln t\,dt$$

$$=2\int_1^2\ln x\,dx$$

故选 B。

7.【答案】A。**解析**：由定积分的几何意义可知，定积分$\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})dx$表示曲线$y=\sqrt{1-x^2}$、两条直线$x=-1$、$x=1$与$x$轴所围成的曲边梯形的面积，即为$x^2+y^2=1$面积的一半。故选A。

8.【答案】A。**解析**：本题考查的是不定积分与求导数互为逆运算

①$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ ②$d\int f(x)dx=f(x)dx$

③$\int F'(x)dx=F(x)+C$ ④$\int dF(x)=F(x)+C$

故选A。

9.【答案】C。**解析**：本题考查的不定积分的计算，利用凑微分的方法计算，

$\int\frac{1}{e^{x+1}}dx=\int\frac{1}{e^{x+1}}d(x+1)=-\int e^{-(x+1)}d[-(x+1)]=-e^{-(x+1)}+C=-\frac{1}{e^{x+1}}+C$， 故选C。

10.【答案】A。**解析**：本题考查的不定积分的计算，利用分部积分的方法计算，

$\int\ln xdx=x\cdot\ln x-\int xd\ln x=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$，故选A。

11.【答案】A。**解析**：本题考查的是积分上限函数求导问题，积分上限的函数是x的复合

函数时，有 $\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$，

所以 $\left(\int_x^{x^2} f(t)dt\right)' = f(x^2)\cdot(x^2)' - f(x) + C = 2xf(x^2) - f(x) + C$ ，故选 A。

12.【答案】B。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用第一类换元法：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x) = -[\frac{\cos^6 x}{6}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1/6$$

故选 B。

13.【答案】D。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用第一类换元法：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xd(\cos x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 1)d(\cos x) = \left[\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

故选 D。

14.【答案】B。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用第二类换元法：

设 $x = \frac{t^2 - 1}{2}$，则 $dx = tdt$

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}tdt = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)dt = \frac{1}{2}[\frac{t^3}{3}+3t]_1^3 = 22/3$$

故选 B。

15.【答案】A。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用第二类换元法：

设 $x = 2\sin t$ $dx = 2\cos tdt$ 当

$x = -1$时 $t = -\frac{\pi}{6}$

$x = 1$时 $t = \frac{\pi}{6}$

原式 $= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 tdt = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$

故选 A。

16.【答案】A。**解析**：本题考查的是定积分的计算，利用分部积分法：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\cos x = -x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

17.【答案】C。**解析**：本题考查的是定积分的计算，先作变量代换，然后再用分部积分法：

令 $\boldsymbol{x = t^2}$,则 $\boldsymbol{dx = 2tdt}$， 取 $\boldsymbol{t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$

$$\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\cos\sqrt{x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} td\sin t$$

$$= 2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt$$

$$= \pi + 2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

故选 C。

18.【答案】D。**解析**：先求出抛物线和直线的交点

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}.$$

得交点为（2，-2）和（8，4）

据题意取为积分变量，它的变化区间为[-2，4]可得面积元素为

$$dA = (y + 4 - \frac{1}{2}y^2)dy$$

故：

$$A=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{1}{2}y^2)dy=18$$

故选 D。

19.【答案】A。**解析**：绕 x 轴，由公式得，

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2 dx = \pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= 2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

故选A。

20.【答案】A。**解析**：由于 $\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$，所以

$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int(x^2-1+\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$． 故选 A。

第四章　多元函数微分学

第一节　多元函数的极限与连续性

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　）

A．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

B．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

C．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

D．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{2y}=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．0

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{e^{(x-e^y)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$（　）

A．1　　B．2　　C．0　　D．-2

4. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个领域内有定义，如果（　）则称函数在点 (x_0,y_0) 处连续。

A．$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$　　B．$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z\le 0$

C．$f(x,y)=f(x_0,y_0)$　　D．$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$

5. 函数 $f(x,y)=\ln(x-y)+\ln x$ 的定义域为（　）

A．$0<x$　　B．$0<y$　　C．$y<x$　　D．$0<x,y<x$

6. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 2, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　）

A．无定义　　B．无极限　　C．有极限但不连续　　D．连续

7. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　）

A．充分条件而非必要　　B．必要条件而非充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　D．既非充分又非必要条件

8．函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 存在是它在该点存在全微分的（　）

A．充要条件　　　　　　　　　B．充分但非必要条件

C．必要但非充分条件　　　　　D．既非充分又非必要条件

9．设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处不连续，则 $f(x,y)$ 在该点处（　）

A．必无定义　　　　　　　　　B．极限必不存在

C．偏导数必不存在　　　　　　D．全微分必不存在

10．若 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是　（　）

A．连续且可微　　　　　　　　B．连续但不一定可微

C．可微但不一定连续　　　　　D．不一定可微也不一定连续

习题解析

1.【答案】D。**解析**：题考查可导的极限定义及连续与可导的关系．由于题设条件含有抽象函数，本题最简便的方法是用赋值法求解，即取符合题设条件的特殊函数 $f(x)$ 去进行判断，然后选择正确选项．

取 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导，故选 D．

事实上，在 A、B 两项中，因为分母的极限为 0，所以分子的极限也必须为 0，则可推得 $f(0)=0$．

在 C 中，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0,f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，所以 C 项正确，故选 D。

2.【答案】D。**解析**：本题考查多元函数求极限的方法。故选 D。

3.【答案】A。**解析**：本题考查多元函数求极限的方法,将点直接带入。故选 A。

4.【答案】A。**解析**：本题考查多元函数连续的定义，根据定义可知答案为 A。故选 A。

5.【答案】D。**解析**：本题考查的是多元函数的定义域，定义域应满足不等式 $\begin{cases}x-y>0\\x>0\end{cases}$，解得不等式为答案 D，故选 D。

6.【答案】D。**解析**：本题考查连续的充要条件，计算函数在 $(0,0)$ 点的极限值，根据充要条件判断，故选D。

7.【答案】D。**解析**：本题考查的是连续和偏导数存在之间的关系，函数连续时偏导数不一定存在，偏导数存在时函数也不一定连续，故选 D。

8.【答案】C。**解析**：本题考查的是函数可微和偏导数存在之间的关系，二元函数的连续、偏导数存在、可微三者的关系为：

$$\text{偏导数存在且连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \begin{cases} \text{偏导数存在} \\ \text{函数连续} \end{cases}$$

上述关系不可逆，即函数可微不一定偏导数连续，函数连续且偏导数存在也不一定可微，故选 C。

9.【答案】D。**解析**：本题考查的是函数连续和可微之间的关系，二元函数的连续、偏导数存在、可微三者的关系为：

$$\text{偏导数存在且连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \begin{cases} \text{偏导数存在} \\ \text{函数连续} \end{cases}$$

故选 D。

10.【答案】D。**解析**：本题考查的是函数连续、可微和偏导数存在之间的关系，二元函数的连续、偏导数存在、可微三者的关系为：

$$\text{偏导数存在且连续} \Rightarrow \text{可微} \Rightarrow \begin{cases} \text{偏导数存在} \\ \text{函数连续} \end{cases}$$

故选 D。

第二节 偏导数与全微分

1. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充要条件是（　　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\left[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)\right]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\left[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)\right]=0$

2. 设函数 $u(x,y)=\phi(x+y)+\phi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 ϕ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有（　　）

A. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　B. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

C. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　D. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3. 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此

邻域内该方程（　　）

A．只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

B．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

C．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

D．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

4．设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点（　　）

A．不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B．不是 $f(x,y)$ 的极值点

C．是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D．是 $f(x,y)$ 的极小值点

5．设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

A．$2yf'(xy)$　　B．$-2yf'(xy)$　　C．$\frac{2}{x}f(xy)$　　D．$-\frac{2}{x}f(xy)$

6．设 $z=f(x,y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}=$（　　）

A．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

B．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

C．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

D．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$

7．设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全增量为 Δz，若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则在 (x_0,y_0) 处（　）

A．$\Delta z=dz$　　B．$\Delta z=f_x\Delta x+f_y\Delta y$

C．$\Delta z=f_xdx+f_ydy$　　D．$\Delta z=dz+\eta$（η为高阶无穷小）

8．设 $f(x,y)=\ln(x+\frac{y}{2x})$，则 $f_y(1,0)=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 0

9. 设函数 $z=y\sin(xy)+(1-y)\mathrm{arctg}x+e^{-2y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=$（　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\pi/4$　　D. 0

10. 设 $u=f(xyz)$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$（　）

A. $\frac{df}{dx}$　　B. $f_x(xyz)$

C. $f_x(xyz)\cdot yz$　　D. $\frac{df}{dx}\cdot yz$

习题解析

1.【答案】C。**解析**：本题考查二元函数可微的充分条件。 利用可微的判定条件及可微与连续，偏导的关系。

本题可用排除法，A 是函数在 $(0,0)$ 连续的定义；B 是函数在 $(0,0)$ 处偏导数存在的条件；D 说明一阶偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 存在，但不能推导出两个一阶偏导函数 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在点（0，0）处连续，所以 A、B、D 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。故选 C。

事实上，

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 可得

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x}=0$ ， 即 $f_x'(0,0)=0,$

同理有

$f_y'(0,0)=0.$

从而 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-(f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y)}{\rho}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ 。

根据可微的判定条件可知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，故选 C。

2.【答案】B。**解析**：先分别求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，再比较答案即可。

因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=\phi'(x+y)+\phi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\phi'(x+y)-\phi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)，$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\phi''(x+y)-\phi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)，$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，故选 B。

3.【答案】D。**解析**：本题考查隐函数存在定理，只需令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$，分别求出三个偏导数 F_z,F_x,F_y，再考虑在点 $(0,1,1)$ 处哪个偏导数不为 0，则可确定相应的隐函数。

令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$，则

$$F_x'=y+e^{xz}z，\quad F_y'=x-\frac{z}{y}，\quad F_z'=-\ln y+e^{xz}x，$$

且 $F_x'(0,1,1)=2$，$F_y'(0,1,1)=-1$，$F_z'(0,1,1)=0$。由此可确定相应的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$。故选 D。

4.【答案】D。**解析**：因 $dz=xdx+ydy$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y$，

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1.$$

又在 $(0,0)$ 处，$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$，$AC-B^2=1>0$，

故 $(0,0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

故选 D。

5.【答案】A。**解析**：考察复合函数和抽象函数求偏导数的内容，带入答案为 A。

6.【答案】B。**解析**：根据偏导数的定义 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数为

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$。故选 B。

7.【答案】D。**解析**：由全微分的定义可知 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$，而全增量为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 故选 D。

8.【答案】B。**解析**：先计算出函数对 y 的偏导数 $f_y(x,y)$，再将点 $(1,0)$ 带入导函数计算。故选 B。

9.【答案】B。**解析**：先计算出函数对 x 的偏导数 $f_x(x,y)$，再将点 $(1,0)$ 带入导函数计算。故选 B。

10.【答案】C。**解析**：按照复合函数求导的方法计算，其中 y 和 z 看为常数。故选 C。

第三节 多元函数微分学的应用

1. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）

A．若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$　　B．若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

C．若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$　　D．若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

2. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0$，$g(0)<0$，$f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）

A．$f''(0)<0$，$g''(0)>0$　　B．$f''(0)<0$，$g''(0)<0$

C．$f''(0)>0$，$g''(0)>0$　　D．$f''(0)>0$，$g''(0)<0$

3. 设函数 $f(x,y)$ 为可微函数，且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial(x,y)}{\partial y}<0,$ 则使不等式 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是（　　）

A．$x_1>x_2,y_1<y_2$　　B．$x_1>x_2,y_1>y_2$

C．$x_1<x_2,y_1<y_2$　　D．$x_1<x_2,y_1>y_2$

4. 曲面 $\mathrm{e}^z-\mathrm{z}+\mathrm{xy}=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为（　　）

A．$2x+y-4=0$　　B．$2x+y-z-4=0$

C． $x+2y-4=0$　　　　D． $2x+y-5=0$

5. 曲线 $x=\cos t+\sin^2 t, y=\sin t(1-\cos t), z=-\cos t$ 上在点 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程是（　）

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$　　　　B． $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$

C． $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$　　　　D． $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$

6. 设 $z=x^3-3x-y$，则它在点 $(1,0)$ 处（　）

A．取得极大值　　　　B．无极值

C．取得极小值　　　　D．无法判别是否有极值

7. 函数 $u=xyz+x-y+2z$ 在点 $M_0(-1,1,2)$ 处的梯度是（　）

A． $\dfrac{1}{2}$　　B．0　　C． $3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$　　D． $3\vec{i}+2\vec{k}$

8. 点 $O(0,0)$ 是函数 $z=xy$ 的（　）

A．极小值点　　　　B．驻点但非极值点

C．极大值点　　　　D．最大值点

9. 函数$z=x^3+4x^2+2xy+y^2$的驻点为（　）

A．（0，0）、（1，1）　　　　B．（0，0），（2，-2）

C．（1，1）、（2，2）　　　　D．（0，0），（-2，2）

10. $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$为函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$有极值的（　）

A．充要条件　　B．必要条件　　C．充分条件　　D．无关条件

习题解析

1.【答案】D。**解析**：令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 & (1) \\ F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 & (2) \\ F_\lambda'=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

令 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0,\ \therefore \lambda=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$ 代入（1）　得　$f_x'(x_0,y_0)=\dfrac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$。

令 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0\Rightarrow f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0\Rightarrow f_y'(x_0,y_0)\neq 0$。

故选 D。

2.【答案】A。**解析**：由极值充分条件的定理可知本题答案为 A。

3.【答案】D。**解析**：$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，

关于变量 y 是单调递减的．因此，当 $x_1<x_2, y_1>y_2$ 时，必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D.

4.【答案】C。**解析**：先分别求出函数对 x,y,z 的偏导数，带入切平面方程 $F_x\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(x-x_0\right)+F_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(y-y_0\right)+F_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(z-z_0\right)=0$。故选 C。

5.【答案】D。**解析**：计算 x,y,z 对参数 t 的导函数 $\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$，并将点 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 带入各个导函数，计算出 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$，最后带入切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$。故选 D。

6.【答案】C。**解析**：本题考查的是二元函数极值的判定，根据二元函数取极值的充分条件，分别计算出 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，可知 $B^2-AC<0$，极值存在，并且 $A>0$，所以为极小值点。故选 C。

7.【答案】C。**解析**：根据梯度的定义计算，故选 C。

8.【答案】B。**解析**：根据驻点和极值点的判定方法计算，故选 B。

9.【答案】D。**解析**：根据驻点的定义，令函数偏导数等于 0，解得答案为 D，故选 D。

10.【答案】B。**解析**：本题考查的是极值点的必要条件，若 $\left(x_0,y_0\right)$ 是 $f\left(x,y\right)$ 的极值点，则有 $f'_x\left(x_0,y_0\right)=0,f'_y\left(x_0,y_0\right)=0$，故选 B。

本章练习题

1. 设函数 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$，则 $dz|_{(1,1)}=$（　）

A. $\dfrac{1}{3}(\mathrm{dx}+\mathrm{dy})$　　B. $\mathrm{dx}+\mathrm{dy}$

C. $\sqrt{3}(\mathrm{dx}+\mathrm{dy})$　　D. $\dfrac{1}{2}(\mathrm{dx}+\mathrm{dy})$

2. 曲面 $xyz=1$ 上平行于平面 $x+y+z+3=0$ 的切平面方程为（　）

A. $x+y+z-3=0$　　B. $x+y+z+1=0$

C. $x+y+z-2=0$　　D. $x+y+z=0$

3. 设 $z(x,y)$ 为由方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 确定的函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　）

A. $\dfrac{z}{x}$　　B. $\dfrac{x}{z}$　　C. $-\dfrac{z}{x}$　　D. $-\dfrac{x}{z}$

4. 设 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______.

A. yx^{y-1}　　B. $x^y\ln x$　　C. $\dfrac{x^{y+1}}{y+1}$　　D. $x^y\dfrac{1}{\ln x}$

5. 曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点(3,9,27)处的法平面方程是（　）

A. $x-6y+27z=678$　　B. $x-6y-27z-780=0$

C. $x+6y+27z=786$　　D. $x+6y-27z-672=0$

6. 函数 $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$ 在驻点(2,1)处（　）

A. 取得极大值　　B. 取得极小值

C. 不取得极值　　D. 无法判断是否取得极值

7. 设 $u=f(x^2,xy,xz)$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$（　）

A. $2xf_1'+yf_2'+zf_3'$　　B. $xf_1'+yf_2'+zf_3'$

C. $2xf_1'+yf_2'+f_3'$　　D. $2xf_1'+f_2'+z'$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\sqrt{2xy+1}}{xy}=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{4}$　　D. -1

9. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个领域内有定义，如果（　），则称函数在点 (x_0,y_0) 处连续.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=0$　　B. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\Delta z\le0$

C. $f(x,y)=f(x_0,y_0)$　　D. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

10. $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的（　）条件

A. 充分　　B. 充要

C. 必要　　D. 非充分，非必要

11. 曲面 $xy=z^2$ 在点 (1,4,2) 处的切平面方程为（　）

A. $4x+y=0$　　B. $4x+y-4z=0$

C. $4x+y+z=0$　　D. $x+4y+z=0$

12. 平面 $2x+3y-z=\lambda$ 是曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 处的切平面，则 λ 的值是（　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

13. 函数 $z=\dfrac{1}{\ln(x+y)}$ 的定义域是（　）

A. $x+y\neq 0$　　B. $x+y>0$　　C. $x+y\neq 1$　　D. $x+y>0$,且 $x+y\neq 1$

14. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

A. 无定义　　B. 无极限　　C. 有极限但不连续　　D. 连续

15. 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶偏导数，则下列结论正确的是（　）

A. 必有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$　　B. $f(x,y)$ 在 D 内必可微

C. $f(x,y)$ 在 D 内必连续　　D. 以上三个结论都不成立

16. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处满足关系（　）

A. 可微（指全微分存在）$\Leftrightarrow$ 可导（指偏导数存在）$\Rightarrow$ 连续

B. 可微 $\Rightarrow$ 可导 $\Rightarrow$ 连续

C. 可微 $\Rightarrow$ 可导，或可微 $\Rightarrow$ 连续，但可导不一定连续

D. 可导 $\Rightarrow$ 连续，但可导不一定可微

17. 函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $M_0(1,-1,2)$ 处的梯度是（　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. $2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$　　D. $3\vec{i}+2\vec{k}$

18. 函数 $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ 的极值点为（　　）

A.（0，0）　　B.（0，1）　　C. 不取极值　　D.（1，0）

19. 函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 沿 $i=2i+2j+k$ 的方向导数是（　）

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　B. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

20. 设 $z=e^{x^2+y^2}$，则 $dz=$（　）

A. $2e^{x^2+y^2}(dx+dy)$　　B. $e^{x^2+y^2}(xdx+ydy)$

C. $2e^{x^2+y^2}(ydx+xdy)$　　D. $2e^{x^2+y^2}(xdx+ydy)$

习题解析

1.【答案】A。**解析**：先分别求出函数对 x,y 的偏导数，带入全微分的公式 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 故选 A。

2.【答案】A。**解析**：先分别求出函数对 x,y,z 的偏导数，带入切平面方程 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$。故选A。

3.【答案】C。**解析**：本题考查的是隐函数的求导法则，可以方程两边同时对 x 求导，然后解方程计算出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，也可以根据隐函数求导公式，分别计算出 F_x,F_z，带入公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ 计

算得出。故选C。

4.【答案】A。**解析**：本题考查的是幂指函数求偏导数。函数 $z=x^y$ 两边同时取对数，然后按照隐函数求导的步骤计算出 $\frac{\partial z}{\partial x}$。故选A。

5.【答案】C。**解析**：本题考查曲线参数方程的法平面方程，首先计算出 x,y,z 对参数的偏导数，带入法平面方程 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。故选C。

6.【答案】B。**解析**：本题考查的是二元函数极值的判定，根据二元函数取极值的充分条件，分别计算出 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，可知 $B^2-AC<0$，极值存在，并且 $A>0$，所以为极小值点。故选B。

7.【答案】A。**解析**：本题考查复合函数求偏导数，由外向内一层一层求。故选A。

8.【答案】B。**解析**：本题考查多元函数求极限的方法。故选B。

9.【答案】D。**解析**：本题考查多元函数连续的定义，根据定义可知答案为D。故选D。

10.【答案】C。**解析**：本题考查的是偏导数和可微的关系。二元函数的连续、偏导数存在、可微三者的关系为：偏导数存在且连续$\Rightarrow$可微$\Rightarrow\begin{cases}\text{偏导数存在}\\\text{函数连续}\end{cases}$，故选C。

11.【答案】B。**解析**：先分别求出函数对 x,y,z 的偏导数，带入切平面方程

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$，故选B。

12.【答案】C。**解析**：计算出曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 处的切平面，比较可得结果，故选C。

13.【答案】D。**解析**：本题考查的是多元函数的定义域，定义域应满足不等式 $\begin{cases}x+y>0\\\ln(x+y)\neq 0\end{cases}$，解得不等式为答案D，故选D。

14.【答案】D。**解析**：本题考查连续的充要条件，分别计算函数在 $(0,0)$ 点的左右极限，根据充要条件判断，故选D。

15.【答案】D。**解析**：本题考查的是函数连续、可微和偏导数存在之间的关系，二元函数的连续、偏导数存在、可微三者的关系为：

$$\text{偏导数存在且连续}\Rightarrow\text{可微}\Rightarrow\begin{cases}\text{偏导数存在}\\\text{函数连续}\end{cases}$$

故选D。

16.【答案】C。本题考查的是函数连续、可微和偏导数存在之间的关系，二元函数的连续、偏导数存在、可微三者的关系为：

偏导数存在且连续$\Rightarrow$可微$\Rightarrow\begin{cases}\text{偏导数存在}\\\text{函数连续}\end{cases}$

故选C。

17.【答案】C。根据梯度的定义计算，故选C。

18.【答案】A。根据极值的计算步骤可得答案为A，故选A。

19.【答案】D。根据方向导数的定义计算，故选D。

20.【答案】D。根据由全微分的定义计算，先求出对x,y的偏导数，带入全微分的定义，故选D。

第五章 多元函数积分学

第一节 重积分

1. 估计积分$I=\iint\limits_{|x|+|Y|\le 10}\dfrac{\mathrm{d}xdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$的值，正确的是（ ）

A. $\frac{1}{2}<I<1.04$ B. $1.04<I<1.96$ C. $1.96<I\le 2$ D. $2<I<2.14$

2. 设$D:x^2+y^2\le 1$，$D_1:x^2+y^2\le 1$且$x\ge 0$，$y\ge 0$，则下列四个等式中不成立的是（ ）

A. $\iint\limits_D x\ln(x^2+y^2)dxdy=0$ B. $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$

C. $\iint\limits_D xydxdy=4\iint\limits_{D_1}xydxdy$ D. $\iint\limits_D|xy|dxdy=4\iint\limits_{D_1}|xy|dxdy$

3. 设区域$D=\{(x,y)\,|\,x\le x^2+y^2\le 2x,y\ge 0\}$，则在极坐标下二重积分$\iint xydxdy=$（ ）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta dr$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

C. $\int_0^{\pi}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta dr$ D. $\int_0^{\pi}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

4. 设$f(x)$是连续的奇函数，$g(x)$是连续的偶函数，区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$，则以下结论正确的是（ ）

A. $\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$ B. $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0$

C. $\iint\limits_D[f(x)+g(y)]dxdy=0$ D. $\iint\limits_D[f(y)+g(x)]dxdy=0$

5. 下列可以表示闭域D的面积的是（ ）

A. $-\iint\limits_D d\sigma$ B. $\frac{1}{2}\iint\limits_D d\sigma$ C. $\iint\limits_D 2d\sigma$ D. $\iint\limits_D d\sigma$

6. 利用几何意义计算$\iint\limits_D d\sigma =$（ ） $D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$

A. 36π　B. 6π　C. 3π　D. 12π

7. $I=\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma,\ D:x^2+y^2\le 1$，化为极坐标形式是（ ）

A. $I=\int_0^{2\pi}[\int_0^1 e^{-r^2}dr]d\theta$　B. $I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1 e^{-r^2}dr]d\theta$

C. $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1 e^{-r^2}dr]d\theta$　D. $I=\int_0^{2\pi}[\int_0^1 e^{-r^2}rdr]d\theta$

8. $I=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$， $D:a^2\le x^2+y^2\le b^2\ (0<a<b)$，则$I=$（ ）

A. $\pi(e^{b^2}-e^{a^2})$　B. $2\pi(e^{b^2}-e^{a^2})$

C. $\pi(e^b-e^a)$　D. $2\pi(e^b-e^a)$

9. $\iint\limits_D (x+y)d\sigma$______$\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中积分区域D是由x轴.y轴与直线$x+y=1$所围成。（ ）

A. $\le$　B. ＞　C. $\ge$　D. ＜

10. 若积分域D分为两个子域D_1,D_2，则成立的是（ ）

A. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

B. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma-\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

C. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

D. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=-\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

习题解析

1.【答案】C。**解析**：由于在区域D上恒有$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$，所以由估值定理，得$\frac{S_D}{102}\le I\le\frac{S_D}{100}$,由于$D:|x|+|y|\le 10$的面积$S_D=200$，故有$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}$，故选$C$.

2.【答案】C。**解析**：A 因为积分区域关于y轴对称，而被积函数是关于x的奇函数，所以

积分值为零。B 和 D 正确，因积分区域关于 x 轴和 y 轴都对称且被积函数关于 x，y 都是偶函数，又对称性可知选项是正确的.

C 选项不成立，虽然积分区域关于 x 轴和 y 轴对称，但被积函数关于 x 或 y 都是奇函数，因此等式左端的积分值应为 0，而右端的积分值大于 0，故选 C.

3.【答案】B。**解析**：原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$. 故选 B。

4.【答案】A。**解析**：考查利用对称性求二重积分. A 中区域 D 关于 x 轴对称，$f(y)$ 是奇函数，被积函数 $f(y)g(x)$ 对 y 是奇函数，故 $\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$. 故选 A。

5.【答案】D。**解析**：根据二重积分的定义可知 D 表示积分区域的面积。故选 D。

6.【答案】B。**解析**：当 $f(x,y)$ 为闭区域 D 上的连续函数且 $f(x,y)\geq 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，区域 D 为底，侧面以 D 的边界曲线为准线，母线平行于 z 轴的曲顶柱体的体积，因此只需计算相应圆柱体的体积即可，故选 B。

7.【答案】D。**解析**：根据积分区域可得极坐标系下半径的取值为[0, 1]，级角的范围为[0, 2π]，故选 D。

8.【答案】A。**解析**：将直角坐标系转化为极坐标系下求解，$\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}[\mathrm{b}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\mathrm{e}^{r^2}\mathrm{rdr}]\mathrm{d}\theta=\pi(e^{b^2}-e^{a^2})$ 故选 A。

9.【答案】C。**解析**：根据二重积分的保序性：若 $f(x,y)\leq g(x,y)$，$(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leq\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，比较两个被积函数的大小，注意是在积分区间上进行比较，故选 C。

10.【答案】A。**解析**：根据重积分的积分区域可加性：
$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma$，其中 $D=D_1\quad D_2$，故选 A。

第二节　曲线积分与曲面积分

1. $\int_L(y^2+xy)dl$ 属于第（　）类曲线积分，其中圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的闭路.

A. 一　　B. 二

C. 对坐标的曲线积分　　D. 未定

2. 设 L 是以 O（0，0），A（1，2）及 B（1，0）为顶点的三角形闭路，方向为顺时针，则 $\int_L(e^y+y)dx+(xe^y-2y)dy=$（　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

3. 设 L 是由点 (0,0) 经上半圆 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 到 (1,1) 的一段弧，则 $\int_L(x+2y)dx+(2x+y)dy=$（　）

A．3　　B．-3　　C．6　　D．-6

4．设 L 是 $x=R\cos t, y=R\sin t$, 且 t 是 0 到 $\frac{\pi}{4}$ 的方向，则 $\int_L ydx+xdy=$（　）

A．R^2　　B．$\frac{R^2}{2}$　　C．R　　D．$-\frac{R^2}{2}$

5．设L是以O（0,0），A（1,0），B（0,1）为顶点的三角形闭路，则 $\int_L (x+y)dl=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．1

C．$1+\sqrt{2}$　　D．$1-\sqrt{2}$

习题解析

1.【答案】A。**解析**：由第一类曲线积分的定义可知 $\int_L (y^2+xy)dl$ 为第一类曲线积分，故选 A.

2.【答案】B。**解析**：利用格林公式，方向取逆时针，即 OBAO 方向，由 $\oint_{OBAO}(e^y+y)dx+(xe^y-2y)dy$, 知：$X(x,y)=e^y+y, Y(x,y)=xe^y-2y$，得：

$$\frac{\partial X}{\partial y}=e^y+1, \frac{\partial Y}{\partial x}=e^y$$

$$\int_{OBAO}(e^y+y)dx+(xe^y-2y)dy=\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)d\sigma$$

$$=-\iint_D d\sigma=-1$$

所以：$\oint_L (e^y+y)dx+(xe^y-2y)dy=1$。故选 B。

3.【答案】A。**解析**：首先判断积分与路径无关. 即

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=2=\frac{\partial X}{\partial y}$$

则：选择一个简单的积分路径：用 X 轴上（0，0）到（1，0）再到（1，1）的折线段作为积分路径. $\int_L (x+2y)dx+(2x+y)dy=\int_0^1 xdx+\int_0^1(2+y)dy=3$.

故选 A。

4.【答案】B。**解析**：$\int_L ydx+xdy=R^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2tdt=\frac{R^2}{2}$．故选 B。

5.【答案】C。**解析**：$\oint_L (x+y)dl=\int_0^1 xdx+\int_0^1\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}$。故选 C。

本章练习题

1. $I=\iint\limits_D xyd\sigma, D: y^2=x$ 及 $y=x-2$ 所围，则（　）

A. $I=\int_0^4 dx\int_{y+2}^{y^2} xydy$　　B. $I=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{x} xydy$

C. $I=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xydx$　　D. $I=\int_{-1}^2 dx\int_{y^2}^{y+2} xydy$

2. 若 $f(x,y)\ge g(x,y),(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$（　）$\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

A. $\le$　　B. $\ge$　　C. $>$　　D. $<$

3. 利用几何意义计算 $\iint\limits_D d\sigma=$（　）$D: x^2+y^2\le 2y$

A. 3π　　B. 6π　　C. π　　D. 2π

4. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le a^2$ 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=$（　）

A. $\int_{-a}^a dx\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

C. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

D. $\int_{-a}^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

5. 若 $f(x,y)\ge 0,(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$（　）0.

A. $\le$　　B. $\ge$

C. $>$　　D. $<$

6. 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于（　）

A. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$　　B. $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$

C. $\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$　　D. $\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

7. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于（　）

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

8. 设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则（　）

A. $I_3>I_2>I_1$　　B. $I_1>I_2>I_3$　　C. $I_2>I_1>I_3$　　D. $I_3>I_1>I_2$

9. 设区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（　）

A. $ab\pi$　　B. $\frac{ab}{2}\pi$　　C. $(a+b)\pi$　　D. $\frac{a+b}{2}\pi$

10. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于（　）

A. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

11. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于（　）

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

12. 设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$g(x)$ 是连续的偶函数，区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$，则以下结论正确的是（　）

A. $\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$　　B. $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0$

C. $\iint\limits_D [f(x)+g(y)]dxdy=0$　　D. $\iint\limits_D [f(y)+g(x)]dxdy=0$

13. 设函数 f 连续，若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$（　）

A. $vf(u^2)$　　B. $\frac{v}{u}f(u^2)$　　C. $vf(u)$　　D. $\frac{v}{u}f(u)$

14. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\le x^2+y^2\le 2x,y\ge 0\}$，则在极坐标下二重积分 $\iint xydxdy=$（　）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta dr$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

C. $\int_0^{\pi}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta dr$　　D. $\int_0^{\pi}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

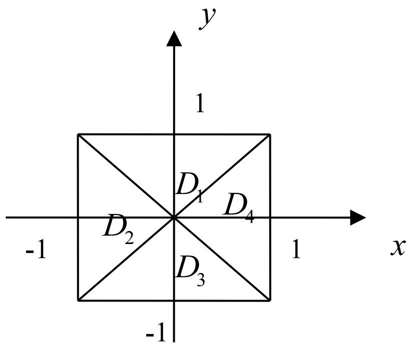
15. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y}f(x,y)dx=$（　）

A. $\int_1^2 dx\int_1^{4-x}f(x,y)dy$　　B. $\int_1^2 dx\int_x^{4-x}f(x,y)dy$

C. $\int_1^2 dy\int_1^{4-y}f(x,y)dx$　　D. $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

16. 如图，正方形 $\{(x,y)\big||x|\le 1,|y|\le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，

$I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x dxdy$，则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\} =$（　）



A． I_1　　B． I_2　　C． I_3　　D． I_4

17. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　）

A． $I_1 > 0$　　B． $I_2 > 0$　　C． $I_3 > 0$　　D． $I_4 > 0$

18. 将二次积分 $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(x^2+y^2)dy$ 化为极坐标形式的二次积分应该是（　）

A． $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(\rho^2)\rho d\rho$　　B． $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(\rho^2)\rho d\rho$

C． $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(\rho^2)\rho d\rho$　　D． 以上三个都不对

19. 设 D：$(x-2)^2+(y-1)^2 \le 1$，比较 $I_1 = \iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2 = \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小，则应有（　）

A． $I_1 = I_2$　　B． $I_1 > I_2$　　C． $I_1 < I_2$　　D． $I_1 \ge I_2$

20. 累次积分 $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)dy$ 的值是（　）

A． $\frac{1}{4}\pi$　　B． $\frac{1}{2}\pi$　　C． $\frac{3}{4}\pi$　　D． π

习题解析

1.【答案】C。**解析**：将 $y^2 = x$ 和 $y = x-2$ 所围成的区域画出，按照由下到上，由左向右的顺序写出累次积分的区间，故选 C。

2.【答案】B。**解析**：根据二重积分的保序性：若 $f(x,y) \le g(x,y)$，$(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，比较两个被积函数的大小，注意是在积分区间上进行比较，故选B。

3.【答案】C。**解析**：当 $f(x,y)$ 为闭区域 D 上的连续函数且 $f(x,y)\ge 0$ 时，二重积分

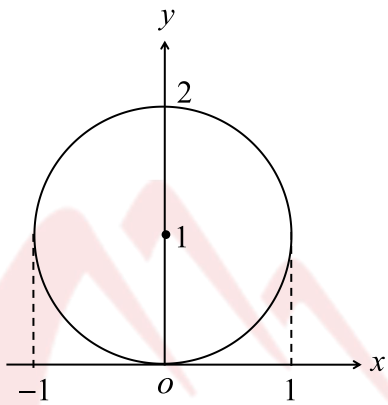
$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，区域 D 为底，侧面以 D 的边界曲线为准线，母线平行于 z 轴的曲顶柱体的体积，因此只需计算相应圆柱体的体积即可，故选 C。

4.【答案】D。**解析**：将定义域 D 的图画出来，利用累次积分的步骤进行转化，可得答案为 D。

5.【答案】B。**解析**：根据重积分的保号性：设 $f(x,y)\geq 0$，$(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\geq 0$ 可知答案为B。

6.【答案】D。**解析**：将二重积分化为累次积分的方法是：先画出积分区域的示意图，再选择直角坐标系和极坐标系，并在两种坐标系下化为累次积分.

积分区域见图.



在直角坐标系下，

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(xy)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$$

故应排除（A）、（B）.

在极坐标系下，$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr,$$

故选 D.

7.【答案】B。**解析**：先求导，再代入 $t=2$ 求 $F'(2)$ 即可. 关键是求导前应先交换积分次序，使得被积函数中不含有变量 t.

交换积分次序，得 $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t[\int_1^x f(x)dy]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$，故选 B.

8.【答案】A。**解析**：关键在于比较 $\sqrt{x^2+y^2}$ 、x^2+y^2 与 $(x^2+y^2)^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq 1\}$

上的大小．在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上，有$0\le x^2+y^2\le 1$，从而有

$$\frac{\pi}{2}>1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge x^2+y^2\ge(x^2+y^2)^2\ge 0$$

由于$\cos x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$ 上为单调减函数，于是

$$0\le\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\cos(x^2+y^2)\le\cos(x^2+y^2)^2$$

因此 $\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)d\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2d\sigma$，故选 A.

9.【答案】D。**解析**：由于未知$f(x)$的具体形式，直接化为用极坐标计算显然是困难的．本题可考虑用轮换对称性．

由轮换对称性，有

$$\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}]d\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.$$

故选 D.

10.【答案】B。**解析**：本题更换二次积分的积分次序，先根据二次积分确定积分区域，然后写出新的二次积分．本题为基础题型．画图更易看出．

由题设可知，$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi,\sin x\le y\le 1$，则$0\le y\le 1,\pi-\arcsin y\le x\le\pi$，故选 B.

11.【答案】C。**解析**：本题更换二次积分的积分次序，先根据二次积分确定积分区域，然后写出极坐标系下的二次积分，故选 C.

12.【答案】A。**解析**：考查利用对称性求二重积分.

A 中区域D关于x轴对称，$f(y)$是奇函数，被积函数$f(y)g(x)$对y是奇函数，故$\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$．故选 A.

13.【答案】A。**解析**：用极坐标得 $F(u,v)=\iint\limits_D\frac{f\left(u^2+v^2\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$，

所以 $\frac{\partial F}{\partial u}=vf\left(u^2\right)$,故选 A.

14.【答案】B。**解析**：原积分$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$．故选 B.

15.【答案】C。**解析**：$\int_1^2dx\int_x^2f(x,y)dy+\int_1^2dy\int_x^2f(x,y)dx$的积分区域为两部分：

$D_1=\{(x,y)|1\le x\le 2,x\le y\le 2\}$，$D_2=\{(x,y)|1\le y\le 2,y\le x\le 4-y\}$.

将其写成一块 $D=\{(x,y)|1\le y\le 2,1\le x\le 4-y\}$，

故二重积分可以表示为 $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$，故选 C.

16.【答案】A。**解析：**本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性.

D_2,D_4 两区域关于 x 轴对称，而 $f(x,-y)=-y\cos x=-f(x,y)$，即被积函数是关于 y 的奇函数，所以 $I_2=I_4=0$；

D_1,D_3 两区域关于 y 轴对称，而 $f(-x,y)=y\cos(-x)=y\cos x=f(x,y)$，即被积函数是关于 x 的偶函数，所以 $I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\ge x,0\le x\le 1\}} y\cos xdxdy>0$；

$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\le -x,0\le x\le 1\}} y\cos xdxdy<0$. 故选 A.

17.【答案】B。**解析：**由二重积分的保号性可知答案为 B，故选 B.

18.【答案】A。**解析：**本题考查的是直角坐标和极坐标之间的转化，将被积函数和积分限转化后为 A，故选 A。

19.【答案】C。**解析：**本题考查二重积分的保号性，注意积分区域，故选 C。

20.【答案】C。**解析：**将二次积分转化为极坐标系下的积分进行计算，故选 C。

第六章　常微分方程

第一节　一阶微分方程

1. 设曲线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin ydx-f(x)\cos ydy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于（　）

A. $\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$　　B. $\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

C. $\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})-1$　　D. $1-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

2. 若函数 $y=\cos 2x$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的一个特解，则该方程满足初始条件 $y(0)=2$ 的特解为（　）

A. $y=\cos 2x+2$　　B. $y=\cos 2x+1$

C. $y=2\cos x$　　D. $y=2\cos 2x$

3. 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解，则该方程的通解为（ ）

A. $y=C_1y_1+C_2y_2$　　B. $y=y_1+Cy_2$

C. $y=y_1+C(y_1+y_2)$　　D. $y=C(y_2-y_1)$

4. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x), y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于（ ）

A. 2π　　B. π　　C. $e^{\frac{\pi}{4}}$　　D. $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

5. 微分方程 $y'-xy^2=x$ 的通解为（ ）

A. $\ln(1+x^2)-\dfrac{y^2}{2}=C$　　B. $\ln(1+y^2)-\dfrac{x^2}{2}=C$

C. $\arctan y-\dfrac{x^2}{2}=C$　　D. $\arctan x-\dfrac{y^2}{2}=C$

6. 微分方程 $\sqrt{1-x^2}\,ydy-xdx=0$ 的通解为（ ）

A. $4\sqrt{1-x^2}-y^2=c$　　B. $\sqrt{1-x^2}+y^2=c$

C. $2\sqrt{1-x^2}+y^2=c$　　D. $\arcsin x+y^2=c$

7. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ 的通解为（ ）

A. $x-y=C$　　B. $e^x+e^y=C$　　C. $e^{-x}+e^y=C$　　D. $e^x+e^{-y}=C$

8. 微分方程 $y'+\dfrac{x}{y}=0$ 的通解为（ ）

A. $y^2+x^2=C$　　B. $y^2+x^2=1$　　C. $y^2-x^2=C$　　D. $y^2-x^2=1$

9. 常分方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-y}$ 的通解为（ ）

A. $e^{2x}-e^y=C$　　B. $e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^y=C$

C. $\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^y=C$　　D. $e^{2x}+e^y=C$

10. 一阶微分方程 $2xydx+x^2dy=0$ 的通解为（ ）

A. $\dfrac{x}{y^2}=C$　　B. $\dfrac{x^2}{y}=C$　　C. $x^2y=C$　　D. $xy^2=C$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：根据题意，$-f'(x)\cos y=[f(x)-e^{x}]\cos y$，解得 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{-x}$。由 $f(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$，故选 B。

2.【答案】D。**解析**：根据解的结构，通解为 $y=C\cos 2x$，由 $y(0)=2$ 得 $C=2$，其他选项经验证不满足方程或定解条件。故选 D。

3.【答案】D。**解析**：因为 $y_1(x),y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解，所以 y_2-y_1 是该方程的一个非零特解。根据解的结构，其通解为 $y=C(y_2-y_1)$，即选项(D)正确。另：根据通解定义，选项(A)中有两个任意常数，故其不对。当 $y_2\equiv 0$ 时，选项(B)不对。当 $y_2=-y_1$ 时，选项(C)不对。故选 D。

4.【答案】D。**解析**：根据微分定义及微分与导数的关系得 $y'=\frac{y}{1+x^2}$，解得 $\ln y=\arctan x+C$，由 $y(0)=\pi$，得 $C=\ln\pi$，所以 $y(1)=\pi e^{\arctan 1}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$。故选 D。

5.【答案】C。**解析**：方程整理得 $\frac{dy}{dx}=x(1+y^2)$，分离变量得 $\frac{1}{1+y^2}dy=xdx$，两边取积分解得通解为 C 项，故选 C。

6.【答案】C。**解析**：方程分离变量得：$ydy=\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$，两边同时积分得 $\int ydy=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$，整理得 $y^2+2\sqrt{1-x^2}=C$，故选 C。

7.【答案】D。**解析**：方程分离变量得：$e^{-y}dy=e^{x}dx$，两边积分 $\int e^{-y}dy=\int e^{x}dx$，计算积分得 $-e^{-y}=e^{x}+C_1$　　$e^{x}+e^{-y}=C$，故选 D。

8.【答案】A。**解析**：分离变量得：$ydt=-xdx$，$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+c_1$，$x^2+y^2=c$，故选 A。

9.【答案】C。**解析**：方程分离变量得 $e^{y}dy=e^{2x}dx$，两边取积分计算即得，故选 C。

10.【答案】C。**解析**：$2xydx+x^2dy=0$，$y'+\frac{2}{x}y=0$，$y=Ce^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{C}{x^2}$。故选 C。

第二节 高阶微分方程

1. 设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解。若 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　）

A．取到极大值　　B．取到极小值

C．某个邻域内单调增加　　D．某个邻域内单调减少

2. 设 y_1,y_2 是二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特解，C_1,C_2 是两个任意常数，则下列命题中正确的是（　）

A．$C_1y_1+C_2y_2$ 一定是微分方程的通解

B．$C_1y_1+C_2y_2$ 不可能是微分方程的通解

C．$C_1y_1+C_2y_2$ 是微分方程的解

D．$C_1y_1+C_2y_2$ 不是微分方程的解

3. 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式（　）

A．ae^x+b　　B．axe^x+b　　C．ae^x+bx　　D．axe^x+bx

4. 设二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0,+\infty)$ 上有界，则实数 b 的取值范围是（　）

A．$b\geq 0$　　B．$b\leq 0$　　C．$b\leq 4$　　D．$b\geq 4$

5. 已知 $y_1=\cos wx$，$y_2=3\cos wx$ 是 $y''+py=0$ 的两个解，　则 $y=c_1y_1+c_2y_2$（c_1,c_2 为任意常数）是（　）

A．是方程的通解　　B．不一定是方程的解

C．是方程的特解　　D．是方程的解，但不是方程的通解

6. 方程　$y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 的特解　y^* 的形式是（　）

A．$(ax+b)e^x$　　B．$(ax+b)xe^x$

C．$(ax+b)+ce^x$　　D．$(ax+b)+cxe^x$

7. 二阶线性齐次微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的通解为（　）

A．$c_1e^{3x}+c_2xe^{-x}$　　B．$e^{-3x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

C．$c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$　　D．$c_1e^{-3x}+c_2e^x$

8. 用待定系数法求微分方程 $y''+2y'=3$ 的特解时，应设特解为（　）

A．$y^*=a$　　B．$y^*=ax^2$　　C．$y^*=ax$　　D．$y^*=ax^2+bx$

9. 微分方程 $y''-2y'+y=e^x(1+x)$ 的特解形式为（　）

A. $y^*=(ax+b)e^x$　　B. $y^*=(ax^3+bx^2)e^x$

C. $y^*=(ax^2+bx)e^x$　　D. $y^*=ae^x$

10. 微分方程 $y''-y=e^x$ 的一个特解形式（a, b 为常数）为（　）

A. ae^x+b　　B. axe^x　　C. ax^2e^x　　D. $(a+bx)e^x$

习题解析

1.【答案】A。**解析**：因为 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，故选 A。

2.【答案】C。**解析**：根据叠加原理，选项（C）正确，选项（D）错误。当 y_1,y_2 线性相关时，选项（A）错误，当 y_1,y_2 线性无关时，选项（B）错误, 故选 C。

3.【答案】B。**解析**：相应齐次方程的特征根为 $1,-1$，所以 $y''-y=e^x$ 的一个特解形式为 axe^x，$y''-y=1$ 的一个特解形式为 b。根据叠加原理，原方程的一个特解形式为 axe^x+b，即选项(B)正确。其他选项经检验不满足方程。故选 B。

4.【答案】A。**解析**：因为当 $b\neq\pm2$ 时，$y(x)=C_1e^{-\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}x}+C_2e^{-\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}x}$，所以，当 $b^2-4>0$ 时，要想使 $y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有界，只需要 $b+\sqrt{b^2-4}\geq0, b-\sqrt{b^2-4}\geq0$，即 $b>2$。当 $b^2-4<0$ 时，要想使 $y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有界，只需要 $b+\sqrt{b^2-4}$ 与 $b-\sqrt{b^2-4}$ 的实部大于等于零，即 $0\leq b<2$。当 $b=2$ 时，$y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有界。当 $b=-2$ 时，$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x\ (C_1^2+C_2^2\neq0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无界。综上所述，当且仅当 $b\geq0$ 时，方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0,+\infty)$ 上有界, 故选 A。

5.【答案】D。**解析**：因为 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{3}$ 是常数，故 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 不能作为微分方程的通解，但是方程的解. 故选 D。

6.【答案】D。**解析**：由于所给方程的特征方程是 $r^2-3r+2=0$，所以特征根为 $r_1=1,r_2=2$.

则方程 $y''-3y'+2y=3x$ 的特解 $y_1{}^*$ 具有形式 $y_1^*=ax+b$.

方程 $y''-3y'+2y=-2e^x$ 的特解 $y_2{}^*$ 具有形式 $y_2^*=cxe^x$.

所以方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 的特解是 $y^*=(ax+b)+cxe^x$.

7.【答案】D。**解析**：对应特征方程的特征根为-3；1，故选 D。

8.【答案】C。**解析**：对应齐次的特征方程 $r^2+2r=0$，特征根 $r=-2,r=0$（一重根），$\lambda=0$ 为单根，所以 $k=1$，又 $m=0$，所以特解为 $y^*=ax$。故选 C。

9.【答案】B。**解析**：由对应齐次的特征方程为$r^2-2r+1=0$，特征根$r=1$为二重根，且$m=1$，所以特解形式为$y^*=(ax^3+bx^2)e^x$。故选 B。

10.【答案】B。**解析**：对应齐次的特征方程为$r^2-1=0$，特征根$r=\pm1$，且$m=0$，$\lambda=1$所以特解形式为axe^x。故选 B。

本章练习题

1. 具有特解$y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$的三阶线性常系数齐次微分方程是（ ）

A. $y'''-y''-y'+y=0$　　B. $y'''+y''-y'-y=0$

C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

2. 设$y_1=e^x,y_2=x$是三阶线性常系数齐次微分方程$y'''+ay''+by'+cy=0$的两个特解，则a,b,c的值为（ ）

A. $a=1,b=-1,c=0$　　B. $a=1,b=1,c=0$

C. $a=-1,b=0,c=0$　　D. $a=1,b=0,c=0$

3. 微分方程$xy'=y$的通解是（ ）

A. $y=Cx$　　B. $y=x+C$　　C. $y=x$　　D. $y=\ln x+C$

4. 微分方程$3x^2+5x-5y'=0$的通解为（ ）

A. $y=\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}+C$　　B. $y=x^3+x^2+C$

C. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+C$　　D. $y=\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}$

5. 微分方程$y'-y=1$的通解为（ ）

A. $y=ce^{-x}-1$　　B. $y=ce^x-1$　　C. $y=ce^{-x}$　　D. $y=ce^x$

6. 微分方程$y'-y=e^x$满足初始条件$y\big|_{x=0}=0$的特解为（ ）

A. $e^x(x+C)$　　B. $e^x(x+1)$　　C. e^x-1　　D. xe^x

7. 微分方程$\tan x\frac{dy}{dx}-y=0$的通解为（ ）

A. $y=\sin x+C$　　B. $y=\cos x+C$

C. $y=C\sin x$　　D. $y=C\cos x$

8. 微分方程 $xy'=2y$ 的通解为（　）

A. $y=Cx^2$　　B. $y=x^2+C$　　C. $y=Cx$　　D. $y=x+C$

9. 微分方程 $y'-\frac{2}{x+1}y=0$ 的通解是（　）

A. $y=C(x+1)^2$　　B. $y=(x+1)^2+C$

C. $y=2(x+1)^2+C$　　D. $y=(x+1)^2$

10. 微分方程 $y'=2xy$ 的通解 $y=$（　）

A. Ce^{x^2}　　B. $e^{x^2}+C$　　C. x^2+C　　D. e^x+C

11. 微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的通解为（　）

A. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$　　B. $y=C_1e^{-3x}+e^x$

C. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$　　D. $y=e^x+3e^{-3x}$

12. 已知 $y''-2y'-3y=0$，则该微分方程的通解为（　）

A. $C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$　　B. $C_1e^x+C_2e^{-3x}$

C. $C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$　　D. $C_1e^x+C_2e^{3x}$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：根据题意，$1,-1$ 是特征方程的两个根，且 -1 是重根，所以特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+1)^2=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$。故所求微分方程为 $y'''+y''-y'-y=0$，故选 B。

2.【答案】C。**解析**：根据题意，$1,0$ 是特征方程的两个根，且 0 是重根，所以特征方程为 $(\lambda-1)\lambda^2=\lambda^3-\lambda^2=0$。故原微分方程应为 $y'''-y''=0$，所以 $a=-1,b=0,c=0$，故选C。

3.【答案】A。**解析**：$xy'=y$，$y'-\frac{1}{x}y=0$，令 $p(x)=-\frac{1}{x}$，故选A。

4.【答案】C。**解析**：方程整理得：$y'=\frac{1}{5}(3x^2+5x)$，令 $p(x)=0$，代入公式 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ 即得。故选C。

5.【答案】B。**解析**：令 $p(x)=-1$，$q(x)=1$，代一阶线性微分方程的通解公式即得。故选B。

6.【答案】D。**解析**：通解：$y=e^{\int dx}(\int e^x.e^{-\int dx}dx+c)=e^x(x+c)$，由 $y\big|_{x=0}=0$ 得 $c=0$，$\therefore y=xe^x$，故选D。

7.【答案】C。**解析**：方程整理得：$y'-\cot x\ y=0$，令 $p(x)=-\cot x$，代公式 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ 即得。故选C。

8.【答案】A。**解析**：方程整理得:，令 $p(x)=-\frac{2}{x}$，代公式 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ 即得。故选 A。

9.【答案】A。**解析**：令 $p(x)=-\dfrac{2}{x+1}$，代公式 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ 即得。故选A。

10.【答案】A。**解析**：方程整理得：$y'-2xy=0$，令 $p(x)=-2x$，代公式 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ 即得。故选A。

11.【答案】A。**解析**：特征方程：$r^2+2r-3=0$，故特征根 $r_1=-3$，$r_2=1$，故通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$。故选A。

12.【答案】A。**解析**：特征方程 $r^2-2r-3=0$，$r=3$ 或-1，通解为 $C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$，故选A。