“红师行动”—2018军队文职备考计划

数学2+物理专业科目练习题

数学2部分 第二篇 线性代数

课程报名电话：400-848-8001

红师教育军队文职教研中心

2018年8月

第一章　线性方程组

第一节　线性方程组的基本概念

1.设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$，若 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 $\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，其表示式为（　）

A. $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　　B. $\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

C. $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$　　D. $\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

2. 设 A 为 m×n 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是（　）

A．A 的列向量组线性相关　　B．A 的列向量组线性无关

C．A 的行向量组线性相关　　D．A 的行向量组线性无关

3. 已知某个 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $\overline{A}$ 经初等行变换化为：$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&2&-1&2\\0&0&a(a-1)&a-1\end{pmatrix}$，若方程组无解，则 a 的取值为（　）

A．1　　B．0　　C．2　　D．-1

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&t&3\\3&4&5\end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则数 $t=$（　）

A．-2　　B．0　　C．-1　　D．2

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解,则 λ 应满足的条件是（　）

A．$\lambda\neq0$　　B．$\lambda\neq-1$　　C．$\lambda\neq1$　　D．$\lambda\neq2$

习题解析

1. 【答案】A。**解析：** 设 $\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即 $\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，得

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3=0\\ x_1-3x_2=-1\\ 2x_2+2x_3=4\\ 3x_1+4x_2-x_3=9\end{cases},$$

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\-2&1&3&0\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=2\\x_2=1\\x_3=1\end{cases},$$

α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 故选 A。

2.【答案】A。**解析：**$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性相关。故选 A。

3.【答案】C。**解析：**$\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&a\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&a+2\\1&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a+2\\1&4\end{vmatrix}=2-a=0$，$a=2$.

4.【答案】D。**解析：**$|A|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&t&3\\3&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2\\0&t-4&-1\\0&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-4&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=2-t=0$，$t=2$. 故选 D。

5.【答案】C。**解析：**齐次线性方程组解的理论. n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组 $A_{n\times n}X_{n\times1}=O_{n\times1}$ 只有零解 $\Leftrightarrow R(A)=n\Leftrightarrow|A|\neq0$，即 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq0\Rightarrow\lambda\neq1$. 故选 C。

第二节 线性方程组的消元法

1. 非齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$ 的通解是（　）

A. $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-16\\23\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$

2. 当a,b为何值时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_2-x_3=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=b+3\end{cases}$有无穷多解（ ）

A. $a=0,b=-1$ B. $a=0,b=0$ C. $a=-1,b=0$ D. $a=-1,b=-1$

3. 线性方程组$\begin{cases}x+y+z=0\\ 2x-5y-3z=10\\ 4x+8y+2z=4\end{cases}$的解为（ ）

A. $x=2,y=0,z=-2$ B. $x=-2,y=2,z=0$

C. $x=0,y=2,z=-2$ D. $x=1,y=0,z=-1$

4. 设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$为3阶非奇异矩阵，则齐次方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}$的解为（ ）

A. $x_1=x_2=x_3=0$ B. $x_1=x_2=0,x_3=x_4=1$

C. $x_1=x_2=x_3=1$ D. $x_1=x_2=1,x_3=x_4=-1$

5. 设线性方程组$\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$有无穷多个解，则$a=$（ ）

A. $a=0$ B. $a=-1$ C. $a=2$ D. $a=-2$

习题解析

1.【答案】B。解析：$(A,b)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&2&1&1&-3&-2\\0&1&2&2&6&23\\5&4&-3&3&-1&12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-1&-2&-2&-6&-23\\0&1&2&2&6&23\\0&-1&-8&-2&-6&-23\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&1&2&2&6&23\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&7\\0&1&0&2&6&23\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-5&-16\\0&1&0&2&6&23\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$\begin{cases}x_1=-16+x_4+5x_5\\x_2=23-2x_4-6x_5\\x_3=0\\x_4=\qquad x_4\\x_5=\qquad\qquad x_5\end{cases}$，通解为$\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$。故选 B。

2.【答案】C。解析：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\2&3&a+2&b+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&a&b+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&a+1&b\end{pmatrix}$，

$a=-1,b=0$时，有无穷多解。故选 C。

3.【答案】A。解析：$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&-5&-3&10\\4&8&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$。故选 A。

4.【答案】A。解析：$|A|\neq 0$，$Ax=0$只有零解：$x_1=x_2=x_3=0$。故选 A。

5.【答案】D。解析：$(A,b)=\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&1-a&1-a^2&2a+1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&0&2-a-a^2&2a+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&3\\0&0&(a+2)(1-a)&2(a+2)\end{pmatrix},$$

方程组有无穷多个解，则$a=-2$。故选 D。

本章练习题

1. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=-a_1, \\ x_2+x_3=a_2, \\ x_3+x_4=-a_3, \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$ 有解, 则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件（　）

A. $a_1+a_2+a_3+a_4=1$　　B. $a_1+a_2+a_3+a_4=0$

C. $a_1+a_2+a_3+a_4=-1$　　D. $a_1+a_2+a_3+a_4=2$

2. 如果线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_2+ax_3=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=6 \end{cases}$ 有惟一解，则 a 为何值（　）

A. $a=3$　　B. $a=1$　　C. $a\neq 3$　　D. $a\neq 1$

3. 已知$\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=$（$1,2,4,a+8$）及$\beta=$（$1,1,b+3,5$）则a,b为何值时，β不能表示成α_1，α_2，α_3，α_4的线性组合（　）

A. $a\neq -1,b=0$　　B. $a=-1,b\neq 0$　　C. $a=0,b\neq -1$　　D. $a\neq 0,b=-1$

4. 线性方程组的$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+5x_3+4x_4=7 \end{cases}$ 解为（　）

A. $\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\-1\\0\\0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -3\\1\\1\\0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -3\\2\\0\\1 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\-1\\0\\0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 3\\-1\\1\\0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -3\\2\\0\\1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\-1\\0\\0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -3\\2\\0\\1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -3\\1\\1\\0 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\-1\\0\\0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -3\\1\\1\\0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 3\\2\\0\\-1 \end{bmatrix}$

5. 设A是$m\times n$矩阵，$AX=0$是非齐次线性方程组$AX=b$所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是（　）

A. 若$AX=0$仅有零解，则$AX=b$有唯一解
B. 若$AX=0$有非零解，则$AX=b$有无穷多个解
C. 若$AX=b$有无穷多个解，则$AX=0$仅有零解
D. 若$AX=b$有无穷多个解，则$AX=0$有非零解

6. 求向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3)$，$\alpha_2=(4,-1,-5,-6)$，$\alpha_3=(1,-3,-4,-7)$ 的秩为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 对非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$，设秩（A）=r，则（　）

A. $r=m$时，方程组 $Ax=b$ 有解　　B. $r=n$时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解

C．$m = n$时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解　　　D．$r < n$时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解

8．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则向量组中（　）

A．必有一个向量可以表为其余向量的线性组合

B．必有两个向量可以表为其余向量的线性组合

C．必有三个向量可以表为其余向量的线性组合

D．每一个向量都可以表为其余向量的线性组合

9．向量组$\alpha_1=(1,1,0,2),\alpha_2=(1,0,1,0),\alpha_3=(0,1,-1,2)$的秩为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

10．设α_1,α_2是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解．则 $A(5\alpha_2-4\alpha_1)=$（　）

A．0　　B．$2b$　　C．b　　D．$-b$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：非齐次线性方程组有解$\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

$$B=\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4\end{bmatrix},\text{则}$$

$a_1+a_2+a_3+a_4=0$.本题答案为B。

2.【答案】C。**解析**：$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&a&2\\2&2&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&a&2\\0&-2&-3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&a&2\\0&0&a-3&0\end{pmatrix}$.

$a\neq 3$时，$r(A,b)=r(A)=3$，有惟一解，此时$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&a&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&2&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&2&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\\x_3=0\end{cases}$；

故选C。

3.【答案】B。**解析**：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$的增广矩阵经过初等变换之后

为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$。故当$a=-1$，$b\neq 0$时，增广矩阵的秩为3，系数矩阵的秩为2，

此时方程组无解。β不能表示成α_1，α_2，α_3，α_4的线性组合。本题答案为B。

4.【答案】A。**解析**：$(A|b)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。$r(A|b)=r(A)=2$, 故原方程组有解，

原方程组与方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=3 \\ x_2-x_3-2x_4=1 \end{cases}$同解。故本题答案为A。

5.【答案】D。**解析**：必须在$AX=b$有解的前提下考察某些结论是否成立，因此首先排除A、B。又因$AX=b$的任意两个解之差是$AX=0$的解，所以本题答案为D。

6.【答案】B。**解析**：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

秩为2，本题答案为B。

7.【答案】A。**解析**：$r=m$时，$r(A,b)=r(A)=m$，$Ax=b$有解。故选A。

8.【答案】A。**解析**：根据线性相关的定义，本题答案为A。

9.【答案】B。**解析**：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，秩为2。故本题答案为B。

10.【答案】C。**解析**：$A(5\alpha_2-4\alpha_1)=5A\alpha_2-4A\alpha_1=5b-4b=b$。所以本题答案为C。

第二章　矩 阵

第一节　矩阵的概念

1.齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的系数矩阵记为$A$，若存在三阶矩阵$B\neq 0$，使得$AB=0$，则（　）

A. $\lambda=-2$ 且$|B|=0$　　B. $\lambda=-2$ 且$|B|\neq 0$

C. $\lambda=1$ 且$|B|=0$　　D. $\lambda=1$ 且$|B|\neq 0$

2. 设A为 3 阶矩阵，且已知$|3A+2E|=0$，则A必有一个特征值为（　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

3. 若实对称矩阵$A=\begin{pmatrix}3&a&0\\a&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}$为正定矩阵，则 a 的取值应满足（　）

A. $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$　　B. $0<a<\sqrt{3}$　　C. $-\sqrt{3}<a<0$　　D. 0

4. 设A为 n 阶方阵，λ 为实数，则$|\lambda A|=$（　）

A. $\lambda|A|$　　B. $|\lambda||A|$　　C. $\lambda^n|A|$　　D. $|\lambda|^n|A|$

5. 设 A 为 n 阶正交矩阵，则行列式$|A^2|=$（　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

习题解析

1. 【答案】C。**解析**：$AB=0$，$B\neq 0\Rightarrow Ax=0$有非零解$\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\lambda=1$，

若$|B|\neq 0$，由$AB=0$得$A=0$矛盾。故选 C。

2. 【答案】B。**解析**：$|3A+2E|=0\Rightarrow\left|-\frac{2}{3}E-A\right|=0\Rightarrow A$必有一个特征值为$-\frac{2}{3}$。故选 B。

3. 【答案】B。**解析**：$\Delta_1=3>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&a\\a&1\end{vmatrix}=3-a^2>0$，

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&a&0\\a&1&0\\0&0&a\end{vmatrix}=a(3-a^2)>0\Rightarrow\quad 0<a<\sqrt{3}$$，故选 B。

4.【答案】C。**解析：**根据矩阵的性质。故选 C。

5.【答案】C。**解析：**A 为正交矩阵，则 $A^TA=E$，$|A^2|=|A|^2=|A^T||A|=|A^TA|=1$。故选 C。

第二节　矩阵的运算

1.设A为 2 阶可逆矩阵，且已知 $(2A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则$A$=（　）

A. $2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$　　B. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$　　C. $2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}$　　D. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}$

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，则$A+2B$=（　）

A. $\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&1\\0&1&4\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&5&2\\0&2&7\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&5&2\\0&2&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}$

3. 设 3 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&2&5\\2&0&0\end{pmatrix}$，则 $(A^T)^{-1}=$（　）

A. $\begin{pmatrix}0&-5&2\\0&3&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}0&-5&2\\0&-3&1\\1&0&0\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}0&-5&2\\0&3&-1\\1/2&0&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}0&-5&2\\0&3&-1\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$

4. 设A为 n 阶方阵，令方阵 $B=A+A^T$，则必有（　）

A. $B^T=B$　　B. $B=2A$　　C. $B^T=-B$　　D. $B=0$

5. 设A为任意 n 阶矩阵，下列矩阵中为反对称矩阵的是（　）

A. $A+A^T$　　B. $A-A^T$　　C. AA^T　　D. A^TA

习题解析

1.【答案】D。**解析：**$(2A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$2A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}$，$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}$。故选 D。

2. 【答案】B。**解析**：2B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&2\\0&2&6\end{pmatrix}$。故选 B。

3. 【答案】C。**解析**：

$$(A^T,E)\to\begin{pmatrix}0&0&2&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\3&5&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0\\3&5&0&0&0&1\\0&0&2&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0\\0&-1&0&0&-3&1\\0&0&2&1&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-5&2\\0&-1&0&0&-3&1\\0&0&2&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-5&2\\0&1&0&0&3&-1\\0&0&1&1/2&0&0\end{pmatrix}。$$

$(A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-5&2\\0&3&-1\\1/2&0&0\end{pmatrix}$故选 C。

4. 【答案】C。**解析**：$B^T=(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T=B$。故选 C。

5. 【答案】B。**解析**：$(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$，所以 $A-A^T$ 为反对称矩阵。故选 B。

第三节 矩阵的分块

1.设$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&-2&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{bmatrix}$，则$AB$=（ ）

A. $\begin{bmatrix}1&0&-2&4\\0&1&-1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}3&3&1&0\\3&1&0&1\\-2&4&1&0\\-1&1&-1&2\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}3&3&-2&4\\3&1&-1&1\\1&0&1&0\\0&1&-1&2\end{bmatrix}$

2. 设$A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，则$A^{-1}$=（ ）

A. $\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&5\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3. 设$A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中$a_i \neq 0$,则$A^{-1}$=（　）

A. $\begin{bmatrix} a_n^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ -a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

4. 设A，B为 n 阶方阵，A^*,B^*分别为A，B的伴随矩阵，分块阵$C=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$，则$C^*=$（　）

A. $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$

5. 设$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，求$|A^8|$（　）

A. 10^6　　B. 10^8　　C. 10^4　　D. 10^{16}

习题解析

1.【答案】 C。**解析**：

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$。则

$AB=\begin{bmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$。故选 C。

2.【答案】A。**解析**：$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$。$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{bmatrix}$

$A_1{}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, A_2{}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$。故选 A。

3.【答案】B。**解析：** $A = \begin{bmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{bmatrix}$，$A^{-1} = \begin{bmatrix} O & A_1{}^{-1} \\ A_2{}^{-1} & O \end{bmatrix}, A_2{}^{-1} = a_n^{-1}$。故选 B。

4.【答案】B。**解析：** $C^* = |C|C^{-1} = |AB|\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = |A||B|\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$$。故选 B。

5.【答案】D。**解析：** 令$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$，其中$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$，$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^8 = \begin{bmatrix} A_1{}^8 & O \\ O & A_2{}^8 \end{bmatrix}$，所以$|A^8| = |A_1{}^8||A_2{}^8| = |A_1|^8|A_2|^8 = 10^{16}$。故选 D。

第四节　矩阵的初等变换

1.设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$，求 $A^{-1}=$（　）

A．$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$　　B．$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

C．$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ -7/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$　　D．$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 7/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$（　）

A．$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$　　　　D. $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值（　）

A. 15　　B. -15　　C. 13　　D. 17

4. 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，且 A，B，X 满足 $(E-B^{-1}A)^T B^T X = E$，求 X^{-1}=（　）

A. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 5a_{11}+2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 5a_{21}+2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 5a_{31}+2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 D_1 的值为（　）

A. -15　　B. -6　　C. 6　　D. 15

习题解析

1.【答案】B。**解析：**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$。故选 B。

2.【答案】D。解析：$\begin{bmatrix}2&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&2&0&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1/2&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1/2\end{bmatrix}$。

故选 D。

3.【答案】A。解析：$\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\2&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&-4&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&8&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&-15\end{vmatrix}=-15$

故选 A。

4.【答案】C。解析：由 $(E-B^{-1}A)^T B^T X=E$，得 $[B(E-B^{-1}A)]^T X=E$，即 $(BE-BB^{-1}A)^T X=E$，

$(B-A)^T X=E$， $X^{-1}=(B-A)^T=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。故选 C。

5.【答案】C。解析：$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&5a_{11}&a_{13}\\a_{21}&5a_{21}&a_{23}\\a_{31}&5a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}&a_{13}\\a_{21}&2a_{22}&a_{23}\\a_{31}&2a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0+2D=6$。故选 C。

第五节　矩阵的秩

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_3x_4$ 的秩为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则数 t=（　）

A. 1　　B. -2　　C. 2　　D. -1

3. 设 A 为 n（$n\geq 2$）阶矩阵，且 $A^2=E$，则必有（　）

A. A 的行列式等于 1　　B. A 的逆矩阵等于 E

C. A 的秩等于 n　　D. A 的特征值均为 1

4. 设 4 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3,\lambda_4=0$，则 $r(A)$=（　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 4

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&5&8\\2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&5&9\\0&0&3&0\end{pmatrix}$，求矩阵 AB 的秩（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

习题解析

1.【答案】C。**解析：** $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，秩为 3。故选 C。

2.【答案】B。**解析：** $\begin{pmatrix}1&1&t\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t\\0&-3&1-t\\0&3&2t+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&t\\0&-3&1-t\\0&0&t+2\end{pmatrix}$，秩为 2，则 $t=-2$。故选 B。

3.【答案】C。**解析：** $|A|^2=1$，$|A|\neq 0$，A 的秩等于 n. 故选 C。

4.【答案】A。**解析** A 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=2$。故选 A。

5.【答案】C。**解析：** $|A|=\begin{vmatrix}3&5&8\\2&4&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5\\2&4\end{vmatrix}=2\neq 0$，$A$ 可逆，而 B 的秩为 3，所以 AB 的秩为 3。故选 C。

本章练习题

1. 设 3 阶矩阵 A 与 B 相似，且已知 A 的特征值为 2, 2, 3，则 $|B^{-1}|=$（ ）

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. 7　　D. 12

2. 设 A 是 4×5 矩阵，秩(A)=3，则（ ）

A. A 中的 4 阶子式都不为 0　　B. A 中存在不为 0 的 4 阶子式

C. A 中的 3 阶子式都不为 0　　D. A 中存在不为 0 的 3 阶子式

3. 矩阵 A=$\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\\1&6\end{pmatrix}$ 的行向量组的秩=（ ）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

4．矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的非零特征值为（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

5．4 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4$ 的秩为（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

6．设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则行列式$|A^TA|$=（　）

A．-2　　B．2　　C．-4　　D．4

7．设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $B=A-E$，则矩阵 B 的秩 r(B)=（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．如果方程组$\begin{cases} 3x_1+kx_2-x_3=0 \\ 4x_2-x_3=0 \\ 4x_2+kx_3=0 \end{cases}$有非零解，则 k=（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

9．与矩阵 A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$相似的是（　）

A．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　C．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10．已知$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，则矩阵 A 可为（　）

A．$(5,-3,-1)$　　B．$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

习题解析

1.【答案】A。**解析：**B 相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$|B|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=12$，$|B^{-1}|=|B|^{-1}=\dfrac{1}{12}$。本题答案为 A。

2.【答案】D。**解析：**根据矩阵的性质。故选D。

3.【答案】C。**解析：**$\begin{pmatrix}-1&0\\1&3\\1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\\0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\\0&0\end{pmatrix}$，秩=2。本题答案为C。

4.【答案】B。**解析：**

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&\lambda-3&\lambda-3\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$，非零特征值为$\lambda=3$。故本题答案为 B。

5.【答案】C。**解析：**，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，秩为2。故本题答案为C。

6.【答案】D。**解析：**$|A^TA|=|A^T||A|=|A|^2=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}^2=(-2)^2=4$。故本题答案为 D。

7.【答案】C。**解析：**$B=A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，r(B)=2。本题答案为C。

8.【答案】B。**解析：**$\begin{vmatrix}3&k&-1\\0&4&-1\\0&4&k\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}4&-1\\4&k\end{vmatrix}=12(k+1)=0$，$k=-1$。故本题答案为 B。

9.【答案】A。**解析：**有相同特征值的同阶对称矩阵一定（正交）相似。故本题答案为A。

10.【答案】A。**解析：**$(5,-3,-1)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，$(5,-3,-1)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=0$。故本题答案为 A。

第四章　向量空间

第一节　向量组及其线性相关性

1. 设 β 可由向量 $\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,0,1)$ 线性表示，则下列向量中 β 只能是（　）。

A. $(2,1,1)$　　　　B. $(-3,0,2)$

C. $(1,1,0)$　　　　D. $(0,-1,0)$

2. 若向量组 $\alpha_1=(1,t+1,0)$，$\alpha_2=(1,2,0)$，$\alpha_3=(0,0,t^2+1)$ 线性相关，则实数 *t*=（　）。

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

3. 设有向量组$\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,3,-1)^T$, $\alpha_3=(5,-3,t)^T$，t=（　）时该向量组线性相关。

A. t=4　　　　B. t=1

C. t=0　　　　D. t=3

4. 若 a_1,a_2线性无关，a_1+b,a_2+b线性相关，则向量b用a_1,a_2线性表示的表示式为（　）。

A. $-\frac{k_1}{k_1+k_2}a_1-\frac{k_2}{k_1+k_2}a_2$　　　　B. $-\frac{k_2}{k_1+k_2}a_1-\frac{k_2}{k_1+k_2}a_2$

C. $-\frac{k_1}{k_1+k_2}a_1-\frac{k_1}{k_1+k_2}a_2$　　　　D. $-\frac{k_1}{k_1-k_2}a_1-\frac{k_2}{k_1-k_2}a_2$

5. 已知$R(a_1,a_2,a_3)=2,R(a_2,a_3,a_4)=3$，下列说法正确的是（　）。

A. a_1能由a_2,a_3线性表示　　　　B. a_4能由a_1,a_2,a_3线性表示

C. a_2能由a_1,a_3线性表示　　　　D. a_3能由a_2,a_1线性表示

习题解析

1.【答案】B。**解析**：$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1,0,k_2)$。故选 B。

2.【答案】B。**解析**：向量组线性相关，则该向量组组成的行列式为 0，

$$\begin{vmatrix}1 & t+1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & t^2+1\end{vmatrix}=(t^2+1)\begin{vmatrix}1 & t+1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(t^2+1)(1-t)=0\Rightarrow t=1$$

。故选 B。

3.【答案】A。**解析**：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,

则$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-3\\t\end{pmatrix}=0$

即$\begin{cases} k_1+k_2+5k_3=0 \\ k_1+3k_2-3k_3=0 \\ -k_2+tk_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2+5k_3=0 \\ k_2-4k_3=0 \\ -k_2+tk_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2+5k_3=0 \\ k_1+3k_2-3k_3=0 \\ (t-4)k_3=0 \end{cases}$

所以，$t=4$, 线性相关; $t\neq 4$, 线性无关。 故选 A。

4.【答案】A。**解析**：因为a_1+b, a_2+b线性相关，所以存在不全为零的k_1，k_2，使得$k_1(a_1+b)+k_2(a_2+b)=0$, 即 $(k_1+k_2)b=-k_1a_1-k_2a_2$. 又因为$a_1, a_2$线性无关，所以$k_1+k_2\neq 0$，于是，$b=-\frac{k_1}{k_1+k_2}a_1-\frac{k_2}{k_1+k_2}a_2$。本题答案为 A。

5.【答案】A。**解析**：因为$R(a_2,a_3,a_4)=3$，所以a_2,a_3,a_4线性无关，a_2,a_3也线性无关；又因为$R(a_1,a_2,a_3)=2$，所以，a_1,a_2,a_3线性相关，所以a_1能由a_2,a_3线性表示。

B 选项，反证法。假设a_4能由a_1,a_2,a_3线性表示。再利用 A 的结果，可推出a_4能由a_2,a_3线性表示，由定理 2 得a_2,a_3,a_4线性相关，与$R(a_2,a_3,a_4)=3$矛盾。所以，a_4不能由a_1,a_2,a_3线性表示。C 无法确定。D 无法确定。故选 A。

第二节 向量组的秩

1. $\alpha_1=(1,2,1,3)^T$, $\alpha_2=(4,-1,-5,-6)^T$, $\alpha_3=(1,-3,-4,-7)^T$的极大无关组为（ ）。

A. (α_1,α_2)　　B. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

C. (α_2,α_3)　　D. (α_1,α_3)

2. 矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$(其中$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0$)的列向量组的秩为（ ）。

A. n　　B. n-1

C. 1　　D. $n/2$

3. 设A,B为同阶矩阵，下列说法不正确的是（ ）。

A. $R(A,B)\leq R(A)+R(B)$　　B. $R(A+B)\leq R(A,B)$

C. $R(A+B)\leq R(A)+R(B)$　　D. $R(A+B)\geq R(A,B)$

4. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2n}$，下列向量组$\beta_1$, $\beta_2,\cdots,\beta_{2n}$线性相关的是（ ）。

A. $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{2n}=\alpha_{2n}+\alpha_1$

B. $\beta_1=2\alpha_1$, $\beta_2=2\alpha_2,\cdots,\beta_{2n}=2\alpha_{2n}$

C. $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_{2n}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2n}$

D. $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\beta_1+\alpha_2,\cdots,\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\alpha_{2n}$

5. 设 A,B 为满足 $AB=0$ 的两个非零矩阵，则必有（　）。

A. A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

B. A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关。

C. A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关。

D. A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关。

习题解析

1.【答案】A。**解析：**

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\underset{r_4-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\underset{\sim}{r_3-r_1}}}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{pmatrix}\underset{r_4-2r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$为极大无关组。故选 A。

2.【答案】A。**解析：**设矩阵A的列向量组为

$$a_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,a_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$$

设$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n=0$，则

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}\\k_2a_{22}+\cdots+k_na_{2n}\\\vdots\\k_na_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\\cdots\\k_n=0\end{cases}$$

所以，$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关，秩为 n，则$R(A)=n$。故选 A。

3.【答案】D。**解析：**设 A 的列向量组为a_1，a_2，…，a_n，极大无关组为a_1，a_2，…，a_s；B 的列向量组为b_1，b_2，…，b_n，极大无关组为b_1，b_2，…，b_r。

A+B 的列向量组为 a_1+b_1，a_2+b_2，…，a_n+b_n 能由 (A,B) 的列向量组 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n线性表示，所以，$R(A+B)\le R(A,B)$。又(A,B)的列向量组 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n能由a_1，a_2，…，a_s，b_1，b_2，…，b_r表示。

所以，$R(A,B)\le R(a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r)\le s+r=R(A)+R(B)$。故选 D。

4.【答案】A。**解析：**A。因为$\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4+\cdots+\beta_{2n-1}-\beta_{2n}=0$，所以，向量组

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2n}$ 线性相关。B、C、D 无法确定。故选 A。

5.【答案】【答案】D。**解析**：遇到 $A_{m\times n}B_{n\times p}=0$，就要想到 $r(A)+r(B)\le n$ 以及 B 的列向量均是线性方程组 $Ax=0$ 的解。

B 的每一列向量都是方程组 *Ax=0* 的解向量，解向量组的极大无关组为方程组的基础解系，基础解系中解向量的个数与自由未知量的个数相同，为 *n-r*；也即解向量中线性无关的解向量最多有 *n-r* 个，因此，秩（*B*）<=*n-r*;因此当 $AB=0$ 时，有 $r(A)+r(B)\le n$。故选 D。

第三节 线性方程组解的结构

1. a,b 为（ ）时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解。

A. $a=1, b=-1$　　B. $a\ne 1$

C. $a=1, b\ne -1$　　D. $b\ne 1$

2. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4, \\ x_1+x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3=1, \\ 7x_1+7x_3-3x_4=3. \end{cases}$ 的通解为（ ）。

A. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 为任意常数

B. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, k 为任意常数

C. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为任意常数

D. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 为任意常数

3. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - x_x + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 的通解为（　）。

A. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数

B. $x = c\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数

C. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数

4. 方程组（Ⅰ）为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ 的基础解系为（　）。

A. $\xi_1 = (0,0,1,1), \xi_2 = (-1,1,0,1)$

B. $\xi_1 = (0,0,1,0), \xi_2 = (1,1,0,1)$

C. $\xi_1 = (1,0,1,0), \xi_2 = (-1,1,0,1)$

D. $\xi_1 = (0,0,1,0), \xi_2 = (-1,1,0,1)$

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.下列（　）也是该方程组的一个基础解系。

A. $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$

B. $\alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3+\alpha_2, \alpha_2$

C. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3+\alpha_2,\alpha_3$

D. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：$B=\left[A\ b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$。

当$R(A)=4\Leftrightarrow a\neq 1$时,方程组有惟一解。因此本题答案为B。

2.【答案】B。**解析**：$B=(A|b)=\begin{bmatrix}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$。

由$R(A)=R(B)=3<4$,得方程组有无穷多解.方程组的解$\begin{cases}x_1=-x_3+3\\x_2=2x_3-8\\x_4=6\end{cases}$，,令$x_3=k$得方程组的

通解：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-8\\0\\6\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$,$k$为任意常数。因此本题答案为B。

3.【答案】A。**解析**：$B=(A\ b)=\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。

$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解，且$B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，解为$\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=-x_3+4\end{cases}$，则通解

为$x=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中$c$为任意常数。所以正确答案为A。

4.【答案】D。**解析**：方程组为$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$，取$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得所求基础解系

$\xi_1=(0,0,1,0),\xi_2=(-1,1,0,1)$。故选D。

5.【答案】A。**解析**：显然 $Ax=0$ 的基础解系含三个线性无关的解向量.由齐次线性方程组解的性质，知 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 为 $Ax=0$ 的解。只须证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$$

而 $R(K)=3\Rightarrow R(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，即 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。同理可知，B、C、D 都线性相关。故选 A。

第四节 向量空间

1. 下列向量空间维数不同的是（ ）。

A. $R^3=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1,x_2,x_3\text{为实数}\}$

B. $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1-x_2+x_3=0\}$

C. $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_3=0\}$

D. $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0\}$

2. 已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 与 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 $P=$（ ）。

A. $\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

3. 已知三维线性空间的一组基底为 $a_1=(1,1,0),a_2=(1,0,1),a_3=(0,1,1)$，则向量 $u=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标是（ ）。

A. $(1,1,1)$　　B. $(1,1,-1)$

C. $(1,-1,-1)$　　D. $(1,1,0)$

4. 设 $V=\left\{(a,2a,3a)^T\mid a\in R\right\}$，$V$ 的一个基是（ ）。

A. $(1,0,0)^T$　　B. $(1,1,1)^T$

C. $(1,1,0)^T$　　　　　　　　　　D. $(1,2,3)^T$

5. 已知向量 $a_1 = (1,1,0)$，$a_2 = (0,0,1)$，由它们生成的向量空间为（　）。

A. $V = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$

B. $V = \{(a, a, a) \mid a \in R\}$

C. $V = \{(a, a, b) \mid a, b \in R\}$

D. $V = \{(a, 2a, b) \mid a, b \in R\}$

习题解析

1.【答案】A。**解析：**

A. $R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3\text{为实数}\}$维数为3。

B. V 就是齐次方程组 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 的解向量组，它的基础解系（即极大无关组）含有 $n-r=3-1=2$ 个向量，所以 V 的维数是2.

C. V 就是齐次方程组 $x_1 + x_3 = 0$ 的解向量组，它的基础解系（即极大无关组）含有 $n-r=3-1=2$ 个向量，所以 V 的维数是2.

D. V 就是齐次方程组 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的解向量组，它的基础解系（即极大无关组）含有 $n-r=3-1=2$ 个向量，所以 V 的维数是2。因而正确答案为A。

2.【答案】D。**解析：**$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P \Rightarrow P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。

故选 D。

3.【答案】B。**解析：**设 $u = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$，得方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ 解得 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$。

故选 B。

4.【答案】D。**解析：**对任意的 $x = (a, 2a, 3a)^T, y = (b, 2b, 3b)^T \in V$，和任意的 $\lambda \in R$，都有 $x + y \in V, \lambda x \in V$。所以 V 是向量空间。

因为向量 $(1,2,3)^T \in V$ 线性无关，且每个 $x = (a, 2a, 3a)^T \in V$，都可由 $(1,2,3)^T$ 表示为 $x = a(1,2,3)^T$，所以向量组 $(1,2,3)^T$ 是 V 的一个基，V 是 1 维向量空间。本题答案为 D。

5.【答案】C。**解析：**已知 2 个向量 $a_1 = (1,1,0)$，$a_2 = (0,0,1)$，则集合

$$L = \{x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$$

是一个向量空间，称该空间为由向量 $a_1 = (1,1,0)$，$a_2 = (0,0,1)$ 生成的向量空间。故选 C。

第五节 *n* 维欧几里得空间

1. 设向量 $\alpha=(1,2,3,4)$， $\beta=(1,-1,2,0)$， 向量 α 与 β 的内积 $(\alpha,\beta)=$（ ）。

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

2. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ 的标准化正交向量组为（ ）。

A. $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

B. $p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

C. $p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$

D. $p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$

3. 下列向量中与 $\alpha=(1,1,-1)$ 正交的向量是（ ）。

A. $\alpha_1=(1,1,1)$　　B. $\alpha_2=(-1,1,1)$

C. $\alpha_3=(1,-1,1)$　　D. $\alpha_4=(0,1,1)$

4. 下列矩阵是正交矩阵的是（ ）。

A. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{10}/6 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $a+b=$（　）。

A. 1　　B. 4

C. 0　　D. 2

习题解析

1.【答案】D。**解析**：根据内积的定义，$(\alpha,\beta)=1-2+6+0=5$。故选 D。

2.【答案】D。**解析**：正交化，得正交的向量组：

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix};$$

单位化，得正交的单位向量组：

$$p_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$$

。故选 D。

3.【答案】D。**解析**：根据正交向量的定义，$(\alpha,\alpha_4)=0+1-1=0$。故选 D。

4.【答案】A。**解析**：根据正交矩阵的定义 $A^TA=E$，可知

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

。故选 A。

5.【答案】C。**解析**：由第 1、2 列正交，即它们的内积 $\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=0$，得 $a+b=0$。所以本题答案为 C。

本章练习题

1. 若 A 为正交矩阵，则下列矩阵中不是正交矩阵的是（　）。

A. A^{-1}　　B. $2A$

C. A^2　　D. A^T

2. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$线性相关，则必可推出（　）。

A. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有一个向量为零向量

B. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有两个向量成比例

C. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合

D. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中每一个向量都可以表示为其余向量的线性组合

3. 从R^2的基$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$到基$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的过渡矩阵为（　）。

A. $\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$

4. 已知三维线性空间的一组基底为$a_1=(1,1,0),a_2=(1,0,1),a_3=(0,1,1)$,则向量$u=(2,0,0)$在上述基底下的坐标是（　）。

A. $(1,1,1)$　　B. $(1,0,-1)$

C. $(1,1,-1)$　　D. $(1,1,0)$

5. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$的秩不为$s$（$s\geq 2$）的充分必要条件是（　　）。

A. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$全是非零向量

B. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$全是零向量

C. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有一个向量可由其它向量线性表出

D. $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有一个零向量

6. 设A为$m\times n$矩阵，方程$AX=0$仅有零解的充分必要条件是（　）。

A. A的行向量组线性无关

B. A的行向量组线性相关

C. A的列向量组线性无关

D. A的列向量组线性相关

7. 设A为3×3矩阵，且方程组$Ax=0$的基础解系含有两个解向量，则秩(A)=（　）。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

8. 设3元线性方程组$Ax=b$，A的秩为2，η_1,η_2,η_3为方程组的解，$\eta_1+\eta_2=(2,0,4)^T$，

$\eta_1+\eta_3=(1,-2,1)^T$，则对任意常数 k，方程组 $Ax=b$ 的通解为（　）。

A. $(1,0,2)^T+k(1,-2,1)^T$　　B. $(1,-2,1)^T+k(2,0,4)^T$

C. $(2,0,4)^T+k(1,-2,1)^T$　　D. $(1,0,2)^T+k(1,2,3)^T$

9. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)^T$，其中的一个极大线性无关组是（　）。

A. $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　B. $\alpha_{21},\alpha_3,\alpha_4$

C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

10. $\xi_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$的单位正交化向量是（　）。

A. $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2/3\sqrt{5}\\4/3\sqrt{5}\\5/3\sqrt{5}\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/3\sqrt{5}\\4/3\sqrt{5}\\5/3\sqrt{5}\end{pmatrix}$

习题解析

1. 【答案】B。**解析**：$AA^T=E\Rightarrow(2A)(2A)^T=4AA^T=4E\neq E\Rightarrow 2A$ 不是正交矩阵。本题答案为 B。

2. 【答案】 C。**解析**：由线性相关和线性表示的内在联系可知，若一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\quad\alpha_m$（$m\geq 2$）是线性相关的，则其中至少有一个向量可以被其它的向量线性表示，设该向量为 α_i，则有 $\alpha_i=\sum^m k_j\alpha_j$　即 $k_1\alpha_1+\quad+k_{i-1}\alpha_{i-1}-\alpha_i+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\quad+k_m\alpha_m=0$。故选C。

3. 【答案】A。**解析**：设 A 为所求的过渡矩阵，则

$$[\beta_1\quad\beta_2]=[\alpha_1\quad\alpha_2]A\Rightarrow A=[\alpha_1\quad\alpha_2]^{-1}[\beta_1\quad\beta_2]=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$。本题答案为 A。

4. 【答案】C。**解析**：方法一：设 $u=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$，得方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_1+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\end{cases}$ 解得 $x_1=1,x_2=1,x_3=-1$.

方法二：$u=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，解矩阵方程得 $x_1=1,x_2=1,x_3=-1$。故本题答案为C。

5.【答案】C。**解析**：由向量组秩的定义可知，$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$ 的秩不为 $s\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$ 线性相关。所以本题答案为C。

6.【答案】C。**解析**：$AX=0$ 仅有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关。所以本题答案为C。

7.【答案】A。**解析**：秩$(A)=n-r=3-2=1$。所以本题答案为A。

8.【答案】D。**解析**：取 $Ax=b$ 的特解：$\eta=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=(1,0,2)^T$；$Ax=0$ 的基础解系个数为3-2=1，含一个解向量：$\alpha=\eta_2-\eta_3=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)=(1,2,3)^T$，所以非齐次方程通解为 $(1,0,2)^T+k(1,2,3)^T$。所以本题答案为D。

9.【答案】C。**解析**：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&0\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&-2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，向量组的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大线性无关组，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$。所以本题答案为C。

10.【答案】C。**解析**：

正交化：$\eta_1=\varepsilon_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\varepsilon_2-\frac{(\varepsilon_2,\eta_1)}{|\eta_1|^2}\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8\\-4\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

单位化：$p_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{bmatrix},p_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{5}{3\sqrt5}\end{bmatrix}$.所以本题答案为C。

第五章　矩阵的相似化简

第一节　特征值与特征向量

1. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}3&b\\a&x\end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$（　）。

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

2. 若 A、B 相似，则下列说法错误的是（　）。

A．A 与 B 等价　　　　B．A 与 B 合同

C．$|A|=|B|$　　　　D．A 与 B 有相同特征值

3. 设 3 阶矩阵 A 与 B 相似，若 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则行列式 $|B^{-1}|=$（　）。

A．24　　　　B．1/24

C．1/8　　　　D．1/6

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}8&7\\1&2\end{pmatrix}$，矩阵的全部特征向量是（　）。

A．$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ，$k_2\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$，$(k_1,k_2$为任意非零常数$)$

B．$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$，$(k_1,k_2$为任意非零常数$)$

C．$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ，$\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

D．$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ，$k_2\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$，$(k_1,k_2$为任意非零常数$)$

5. 设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2$，它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(1,k)^T$，则数 $k=$（　）。

A．2　　　　B．1

C．0　　　　D．−1

习题解析

1.【答案】B。**解析**：相似矩阵有相同的迹，所以 $1+4=3+x$， $x=2$。故选 B。

2.【答案】B。**解析**：根据相似矩阵的性质，可知只有 B 错误，只有正交相似才是合同的。故选 B。

3.【答案】A。**解析**：与 B 相似，B 的特征值也是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，$|B|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$，$|B^{-1}|=\frac{1}{|B|}=24$。故选 A。

4.【答案】A。**解析**：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-8 & -7\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+9=(\lambda-1)(\lambda-9)$，特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=9$.

对于 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-7 & -7\\ -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2=\ \ x_2\end{cases}$，基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，对应的全部特征向量为 $k_1\alpha_1$（k_1 是任意非零常数）；

对于 $\lambda_2=9$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -1 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=7x_2\\ x_2=\ \ x_2\end{cases}$，基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$，对应的全部特征向量为 $k_2\alpha_2$（k_2 是任意非零常数）。本题答案为 A。

5.【答案】 D。**解析**：α_1 和 α_2 属于不同的特征值，所以它们是正交的，即 $(\alpha_1,\alpha_2)=0$，即 $1+k=0$，$k=-1$.。故选 D。

第二节 矩阵的相似对角化

1. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$，它的相似对角阵为（ ）。

A. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

B. $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，则可逆矩阵 P=（ ），使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

A. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，正交矩阵 P=（ ），使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

A. $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. 已知矩阵 A 与对角矩阵 $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，则 A^2 =（ ）。

A. D

B. A

C. E

D. $-E$

5. 已知矩阵 A 相似于对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，行列式 $|A-E|$ =（ ）。

A. 0

B. −1

C. 2

D. −2

习题解析

1. 【答案】B。**解析**：$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ -3 & \lambda-1 & -3 \\ -4 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-7\lambda+6)$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-6)$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$， $\lambda_3=6$。

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-B)x=0$：

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-3&0&-3\\-4&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\begin{cases}x_1=\quad -x_3\\x_2=x_2\\x_3=\quad\ \ x_3\end{cases}，基础解系为\ p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}，\ p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}；$$

对于 $\lambda_3=6$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-B)x=0$：

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}4&0&-1\\-3&5&-3\\-4&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&-3/4\\0&0&0\end{pmatrix}，\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{4}x_3\\x_2=\dfrac{3}{4}x_3\\x_3=\quad x_3\end{cases}，基础解系为\ p_3=\begin{pmatrix}1/4\\3/4\\1\end{pmatrix}.$$

3 阶矩阵 B 有 3 个线性无关的特征向量，所以 B 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$。故选 B。

2.【答案】B。**解析**：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-4(\lambda-2)-4\lambda=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8$

$=(\lambda^3+8)-3\lambda(\lambda+2)=(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)-3\lambda(\lambda+2)$

$=(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+4)=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$，

特征值 $\lambda_1=-2$， $\lambda_2=1$， $\lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=-2$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}，\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3\\x_2=\quad x_3\\x_3=\quad x_3\end{cases}，基础解系为\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}；$$

对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=&-x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\\x_3=&x_3\end{cases}$，基础解系为$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$；

对于$\lambda_3=4$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\begin{cases}x_1=&2x_3\\x_2=-2x_3\\x_3=&x_3\end{cases}$，基础解系为$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}1/2&-1&2\\1&-1/2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$，则$P$是可逆矩阵，使$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$。故选B。

3.【答案】A。**解析**：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)$，特征值$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=3$。

对于$\lambda_1=-1$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=x_2\end{cases}$，基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，单位化为

$\beta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$；

对于$\lambda_2=3$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=x_2\\x_2=x_2\end{cases}$，基础解系为$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，单位化为

$\beta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。

令 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 P 是正交矩阵，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$。 故选 A。

4.【答案】C。**解析**：存在 P，使 $P^{-1}AP=D$， $A=PDP^{-1}$， $A^2=PD^2P^{-1}=PEP^{-1}=PP^{-1}=E$。本题答案为 C。

5.【答案】 D。**解析**：因为 A 与 Λ 相似，所以存在可逆矩阵 P，使 $A=P^{-1}\Lambda P$，$|A-E|=|P^{-1}\Lambda P-E|=|P^{-1}(\Lambda-E)P|=|\Lambda-E|=\begin{vmatrix}-2&0\\0&1\end{vmatrix}=-2$。故选 D。

第三节　实对称矩阵的对角化

1. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$， $\lambda_3=2$，则秩(A)= （　）。

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 已知 $1,1,-1$ 是三阶实对称矩阵 A 的三个特征值，向量 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2,1)^T$ 是 A 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量， A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量是（　）。

A. $\alpha_3=(1,1,0)^T$　　B. $\alpha_3=(-1,1,0)^T$

C. $\alpha_3=(-1,1,1)^T$　　D. $\alpha_3=(-1,-1,0)^T$

3. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，$\alpha_1=(0,1,1)^T$， $\alpha_2=(1,2,x)^T$ 分别为 A 的对应于不同特征值的特征向量，则数 $x=$（　）。

A. −2　　B. 0

C. 1　　D. 2

4. 实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ 的正交相似标准形矩阵是（　）。

A. $\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

5. 设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2$，它们对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(1,k)^T$，则数 $k=$（ ）。

A. 2　　　　B. 1

C. 0　　　　D. -1

习题解析

1.【答案】B。**解析**：A 相似于 $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，秩($A$)= 秩($D$)=1。故选 B。

2.【答案】B。**解析**：设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量，则 α_1 与 α_3 正交，且 α_2 与 α_3 正交，

由此可得 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$，解这个齐次方程组：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=\ \ x_2\\x_3=0\end{cases},$$

$\alpha_3=k(-1,1,0)^T$，$k\neq0$。故选 B。

3.【答案】A。**解析**：实对称矩阵的不同特征值的特征向量正交，它们的内积 $2+x=0$，$x=-2$。故选 A。

4.【答案】A。**解析**：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)$，$A$ 的特征值是 $0,2$，A 的正交相似标准形矩阵是 $\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$。本题答案为 A。

5.【答案】 D。**解析**：α_1 和 α_2 属于不同的特征值，所以它们是正交的，即 $(\alpha_1,\alpha_2)=0$，即 $1+k=0$，$k=-1$.。故选 D。

本章练习题

1. 设 1 为 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 1 的线性无关的特征向量个数为（ ）。

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

2. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}3 & b\\a & x\end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$（ ）。

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

3. 设 A 相似于 $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^4=$（ ）。

A. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　　　B. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　　　D. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

4. 若 3 阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 相似，则下列说法错误的是（ ）。

A. $|A|=0$　　　　B. $|A+E|=0$

C. A 有三个线性无关特征向量　　　　D. $R(A)=2$

5. 设 A 为 3 阶矩阵，且已知 $|3A+2E|=0$，则 A 必有一个特征值为（ ）。

A. $-\frac{3}{2}$　　　　B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{3}{2}$

6. $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\7 & 11\end{bmatrix}$ 的特征向量是（ ）。

A. $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1/7\\1\end{pmatrix}, (k_1,k_2$为任意非零常数$)$

B. $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, k_2\begin{pmatrix}1/7\\1\end{pmatrix}, (k_1,k_2$为任意非零常数$)$

C. $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, k_2\begin{pmatrix}-1/7\\1\end{pmatrix}, (k_1,k_2$为任意非零常数$)$

D. $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1/7\\1\end{pmatrix}$,($k_1,k_2$为任意非零常数)

7. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则有正交矩阵 P=（ ）和对角矩阵Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

A. $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

B. $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

C. $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

D. $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

8. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$的三个特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$（ ）。

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

9. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量$\xi=(1,1,-1)^T$，则$\xi$所对应的特征值（ ）。

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

10. 设 3 阶矩阵 A 的一个特征值为-3，则$-A^2$必有一个特征值为（ ）。

A. -9

B. -3

C. 3

D. 9

习题解析

1.【答案】C。**解析**：根据对称矩阵特征值的性质，相同特征值对应的特征向量线性无关。本题答案为 C。

2.【答案】 B。**解析**：相似矩阵有相同的迹，所以$1+4=3+x$， $x=2$。故选B。

3.【答案】A。**解析**：由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$， $A^4=P\Lambda^4P^{-1}=PEP^{-1}=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

本题答案为A。

4.【答案】B。**解析**：已知A的特征值是$0,2,3$．若$|A+E|=0$，则-1是A的特征值，矛盾。故本题答案为B。

5.【答案】C。**解析**：$|3A+2E|=0\Rightarrow\left|-\frac{2}{3}E-A\right|=0\Rightarrow A$必有一个特征值为$-\frac{2}{3}$.。所以本题答案为C。

6.【答案】C。**解析**：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ -7 & \lambda-11\end{vmatrix}=\lambda^2-14\lambda+40=(\lambda-4)(\lambda-10)$，特征值$\lambda_1=4$，$\lambda_2=10$．

对于$\lambda_1=4$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -7 & -7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2=\ \ x_2\end{cases}$，基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，对应的全部特征向量为$k_1\alpha_1$（$k_1$是任意非零常数）；

对于$\lambda_2=10$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -7 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1/7\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{7}x_2\\ x_2=\ \ x_2\end{cases}$，基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1/7\\ 1\end{pmatrix}$，对应的全部特征向量为$k_2\alpha_2$（$k_2$是任意非零常数）。所以本题答案为C。

7.【答案】A。**解析**：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -1\\ \lambda-3 & \lambda-1 & -1\\ \lambda-3 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$，特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$．

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\ x_2=\ \ x_2\\ x_3=\ \ x_3\end{cases}$，基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，正

交化：令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$，单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\dfrac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_3=3$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases}$，基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化：令 $\eta_3=\dfrac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。所以本题答案为A。

8.【答案】B。**解析**：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A)=1+3+1=5$。所以本题答案为 B。

9.【答案】A。**解析**：设 λ 是 ξ 所对应的特征值，则 $A\xi=\lambda\xi$，即 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

从而 $\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$，可得 $a=-3$，$b=0$，$\lambda=-1$。所以本题答案为 A。

10.【答案】A。**解析**：A 的一个特征值为 -3，则 $-A^2$ 必有一个特征值为 $-(-3)^2=-9$．所以本题答案为A。

第六章　二次型

第一节　二次型及其矩阵表示

1. 二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_1x_2-x_2^2$ 的秩为（　）。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 0

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$ 的矩阵是（　）。

A. $\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&3&8\\0&0&5\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&4\\0&0&5\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&3&8\\-1&8&5\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&3&4\\-1&4&5\end{pmatrix}$

3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\1&0&3\end{bmatrix}$ 所对应的二次型是（　）。

A. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3$

B. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+1x_1x_3$

C. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+3x_1x_2+2x_1x_3$

D. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3$

4. 下列可逆线性变换（　）化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+12x_2x_3$ 为标准形。

A. $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+2y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+3y_3\\x_2=2y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

C. $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+3y_3\\x_2=2y_2+3y_3\\x_3=y_1+y_2+y_3\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2$ 的矩阵为（　）。

A. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，秩为 2。故选 B。

2.【答案】D。**解析**：化二次型为矩阵形式。取$a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$ 于是

$f(x_1,x_2,\quad,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$。故选 D。

3.【答案】A。**解析**：同上。 故选 A。

4.【答案】A。**解析**：
$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+12x_2x_3 \\ &=(x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2)-6x_2^2+12x_2x_3-2x_3^2 \\ &=(x_1-2x_2)^2-6(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)+4x_3^2 \\ &=(x_1-2x_2)^2-6(x_2-x_3)^2+4x_3^2 \end{aligned}$$

令$\begin{cases} y_1=x_1-2x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 则经线性变换$\begin{cases} x_1=y_1+2y_2+2y_3 \\ x_2=\quad y_2+y_3 \\ x_3=\quad\quad y_3 \end{cases}$

将二次型化为标准型 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-6y_2^2+4y_3^2$。本题答案为 A。

5.【答案】C。**解析**：化二次型为矩阵形式，取$a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$。故选 C。

第二节 二次型的标准形

1. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，正交变换 P=（ ），$x=Py$ 将二次型化为标准形。

A. $p=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ B. $p=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

C. $p=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ D. $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

2. 下列线性变换（ ），使用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形。

A. $\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\ y_2=2x_2+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$ B. $\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\ y_2=2x_2-x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$

C. $\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\ y_2=x_2+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$ D. $\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\ y_2=2x_2+x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则二次型 x^TAx 的规范形是（ ）。

A. $y_1^2-y_2^2$ B. $y_1^2+y_2^2$

C. $-y_1^2-y_2^2$ D. $-y_1^2+y_2^2$

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则二次型 x^TAx 的规范形为（ ）。

A. $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ B. $-z_1^2-z_2^2-z_3^2$

C. $z_1^2-z_2^2-z_3^2$ D. $z_1^2+z_2^2-z_3^2$

5. 设 3 元实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 3，正惯性指数为 2，则此二次型的规范形是（ ）。

A. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ B. $-y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

习题解析

1.【答案】D。**解析**：原二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ \lambda-2 & \lambda & -1\\ \lambda-2 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=$$

$(\lambda+1)^2(\lambda-2)$， A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$， $\lambda_3=2$。

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\x_2=\ \ x_2\\x_3=\qquad\ \ x_3\end{cases},\ 取\ \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

先正交化：$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$。

再单位化：$p_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\-1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}$。

对于 $\lambda_3=2$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases},\ 取\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ 单位化为\ \ p_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\1/\sqrt3\end{pmatrix}。$$

令 $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2&-1/\sqrt6&1/\sqrt3\\1/\sqrt2&-1/\sqrt6&1/\sqrt3\\0&2/\sqrt6&1/\sqrt3\end{pmatrix}$，则 P 是正交矩阵，经过正交变换 $x=Py$ 后，原二次型化为标准形 $-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$。故选 D。

2.【答案】D。**解析**：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)+(4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2)-x_3^2$$

$$=(x_1-x_3)^2+(2x_2+x_3)^2-x_3^2$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1\qquad\ -x_3\\y_2=\qquad 2x_2+x_3\\y_3=\qquad\qquad\ \ x_3\end{cases},$$

得标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$。故选 D。

3.【答案】A。**解析**：$x^TAx=-2x_1^2+x_2^2=y_1^2-y_2^2$，其中 $y_1=x_2$，$y_2=\sqrt2x_1$。故选 A。

4.【答案】D。**解析**：令$\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_1-y_3\end{cases}$，则$x^TAx=x_2^2+2x_1x_3=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2=z_1^2+z_2^2-z_3^2$。

解法二：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，存在正交矩阵$P$，使得$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，

即x^TAx的规范形为$z_1^2+z_2^2-z_3^2$。本题答案为D。

5.【答案】C。**解析**：秩$r=3$，正惯性指数$k=2$，则负惯性指数$r-k=3-2=1$，规范形是$y_1^2+y_2^2-y_3^2$。故选C。

第三节　正定二次型

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2-a&0\\0&0&3\end{pmatrix}$为正定矩阵，则$a$的取值范围是（　）。

A. $a<0$　　　　B. $a>1$

C. $a>0$　　　　D. $a<1$

2. 设有二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$，则$f(x_1,x_2,x_3)$（　　）。

A. 正定　　　　B. 负定

C. 不定　　　　D. 半正定

3. 若3阶实对称矩阵$A=(a_{ij})$是正定矩阵，则A的正惯性指数为（　　）。

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

4. 二次型$f=x^TAx$（A为实对称阵）正定的充要条件是（　　）。

A. A可逆　　　　B. $|A|>0$

C. A的特征值之和大于0　　　　D. A的特征值全部大于0

5. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$正定，则数$a$的取值应满足（　）。

A. $a>9$　　　　B. $3\le a\le 9$

C. $-3<a<3$　　　　D. $a\le -3$

习题解析

1.【答案】D。**解析**：$\Delta_1=1>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2-a\end{vmatrix}=1-a>0$，$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2-a&0\\0&0&3\end{vmatrix}=3(1-a)>0\Rightarrow a<1$。

故选 D。

2.【答案】C。**解析**：当 $x_1=1,x_2=0,x_3=0$ 时，$f>0$；当 $x_1=0,x_2=1,x_3=0$ 时 $f<0$。总之，f 有正有负。故选 C。

3.【答案】D。**解析**：$f(x_1,x_2,\quad,x_n)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\quad+\lambda_nx_n^2$ 为正定二次型的充分必要条件是 $\lambda_i>0(i=1,2,\quad,n)$，再结合正惯性指数的定义可知。故选 D。

4.【答案】D。**解析**：正定的充要条件是标准形的所有系数大于零，所有主子式大于零，所有特征值大于零。本题答案为 D。

5.【答案】C。**解析**：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$ $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&a\\0&a&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[(3-\lambda)^2-a^2]=0$。

解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3-a,\lambda_3=3+a$，$\lambda_i>0(i=1,2,3)$，$-3<a<3$。故选 C。

本章练习题

1. 若实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&a&0\\a&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值应满足（　）。

A. $0<a<3$　　B. $0<a<\sqrt{3}$

C. $a<\sqrt{3}$　　D. $0<a$

2. 二次型 $f(x,y,z)=x^2-y^2$ 的正惯性指数 p 为（　）。

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(k+1)x_1^2+(k-1)x_2^2+(k-2)x_3^2$ 正定，则数 k 的取值范围为（　）。

A. $k>-1$　　B. $k>1$

C. $k>0$　　D. $k>2$

4. 4 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4$ 的秩为（　）。

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-5x_3^2-4x_1x_2+2x_2x_3$ 的矩阵为.（　　）。

A. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

6. 下列正交变换 P=（　　），$x = Py$，将二次型 $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ 化为标准形。

A. $p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

C. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

7. a,b 为（　　），使二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ 的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

A. $a = 1, b = \pm 2$ B. $a = 1, b = 2$

C. $a = 1, b = -2$ D. $a = -1, b = \pm 2$

8. 次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的规范形为（　）。

A. $z_1^2 - z_2^2$ B. $z_1^2 + z_2^2$

C. z_1^2 D. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

9. 设二次型 $f(x)=xTAx$ 正定,则下列结论中正确的是（　）。

A. 对任意 n 维列向量 x，$xTAx$ 都大于零。

B. f 的标准形的系数都大于或等于零。

C. A 的特征值都大于零。

D. A 的所有子式都大于零。

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 为标准形为（　）。

A. $f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - 5y_3^2$

B. $f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - 6y_3^2$

C. $f(y_1,y_2,y_3) = 2{y_1}^2 - 2{y_2}^2 + 6y_3^2$

D. $f(y_1,y_2,y_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 5y_3^2$

习题解析

1.【答案】B。**解析**：$\Delta_1=3>0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&a\\a&1\end{vmatrix}=3-a^2>0$，

$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&a&0\\a&1&0\\0&0&a\end{vmatrix}=a(3-a^2)>0\Rightarrow 0<a<\sqrt{3}$。本题答案为B。

2.【答案】 B。**解析**：二次型标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性指数。故选B。

3.【答案】D。**解析**：根据正定二次型的定义可知，本题中平方项系数都>0，$\begin{cases}k+1>0\\k-1>0\\k-2>0\end{cases}$，$\begin{cases}k>-1\\k>1\\k>2\end{cases}$，

$k>2$。本题答案为D。

4.【答案】C。**解析**：$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，秩为2。故本题答案为C。

5.【答案】C。**解析**：化二次型为矩阵形式，取$a_{ji}=a_{ij}$，则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$。所以本题答案为C。

6.【答案】C。**解析**：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$，

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1\\1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)$，$A$的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$。

对于$\lambda_1=2$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=x_2\\x_2=x_2\end{cases}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，单位化：$p_1=\dfrac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

对于$\lambda_2=4$，解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=\ \ x_2\end{cases}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，单位化：$p_2=\dfrac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，使得$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$，经过正交变换$x=Py$，二次

型化为标准形 $f=2y_1^2+4y_2^2$。所以本题答案为C。

7.【答案】A。**解析**：$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，由 A 的特征值之和为 $a+2-2=1$，得 $a=1$；由 A 的特征值之积为 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & b \\ b & -2 \end{vmatrix}=2(-2-b^2)=-4-2b^2=-12$，得 $b^2=4$，$b=\pm 2$。所以本题答案为A。

8.【答案】C。**解析**：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)$

$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2=(x_1+x_2+x_3)^2$，的规范形为 z_1^2。所以本题答案为 C。

9.【答案】C。**解析**：A 中 n 维列向量 $x\neq 0$，B 中标准形系数大于零，D 中所有主子式大于零。所以本题答案为 C。

10.【答案】C。**解析**：配方法得 $f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1-x_3)^2-2(x_2-2x_3)^2+6x_3^2$，

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_3 \\ y_2=x_2-2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 即可逆线性变换为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

故标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=2{y_1}^2-2{y_2}^2+6y_3^2$。所以本题答案为C。