第一篇

力学部分

第一章　质点运动学

第一节　质点运动的描述

一、参考系、坐标系、质点

参考系：描述相对运动所选定一个或一组保持相对静止的物体作为参考物，称为参考系。

坐标系：为定量描述相对运动，在选定参照系中建立坐标系（如直角坐标系、极坐标系、自然坐标系等）。

质点：如果我们研究某一物体的运动，而可以忽略其大小和形状对物体运动的影响，若不涉及物体的转动和形变，

我们就可以把物体当作是一个具有质量的点（即质点）来处理。

二、位置矢量(position vector)

确定质点 P 某一时刻在坐标系里的位置的物理量称位置矢量，简称位矢。用 $\vec{r}$ 表示。

在直角坐标中，它的表达式为：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

三、运动方程(equation of locus)

位矢随时间变化的关系式称为质点的运动方程，即 $\vec{r}=\vec{r}(t)$。直角坐标系中：

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

轨迹方程：运动方程消去 t，便得到质点的轨迹方程。

第二节　位移、速度、加速度

一、位移(displacement)与路程(path)

位移是位矢的增量，即自始点指向终点的有向线段，用 $\Delta\vec{r}$ 表示。

路程：位置矢量末端运动轨迹 L 的长度。常用 Δs 表示。

位移与路程的区别：

1)位移是矢量，路程是标量；

2)一般情况，位移大小不等于路程；

3)两点间的路程是不唯一的，而位移是唯一的。

时候位移的大小与路程相等：

1)单方向的直线运动；

2) $\Delta t \to 0$ 时，$|d\vec{r}| = ds$ 。

二、质点运动的速度(velocity)

平均速度：粗略描写质点的运动 $\overline{\vec{v}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$

(瞬时)速度：细致描写质点的运动 $\overline{\vec{v}} = d\vec{r}/dt$

直角坐标系中 $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$

速度方向：沿运动轨道切线，而指向运动前方。

速度大小：即速率 $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ，另速率 $v = \dfrac{ds}{dt}$

三、质点运动的加速度(acceleration)

平均加速度 $\overline{\vec{a}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ ；

(瞬时)加速度 $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ 。直角坐标系中 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ，其中

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

第三节　质点运动学两类基本问题

(一)由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

(二)已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，可求质点速度及其运动方程。

例题(略)

第四节　运动的坐标描述

一、直角坐标系

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$；$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$；$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}$

$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}k$

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$；$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$

$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$

二、平面极坐标

以 (r,θ) 为坐标的参考系为平面极坐标系。

它与直角坐标系之间的变换关系为 $\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix}$

三、圆周运动的角速度和角加速度

角坐标：$\theta(t)$；角速度：$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$；角加速度：$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，速率与角速度的关系 $v=r\omega$

四、自然坐标系

把坐标建立在运动轨迹上的坐标系统。

切向　坐标轴沿质点前进方向的切向为正，单位矢量为 et

法向　坐标轴沿轨迹的法向凹侧为正，单位矢量为 en

五、圆周运动的切向加速度和法向加速度

自然坐标系中，$\vec{v}=v\vec{e}_t$，$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n$

切向加速度（速度大小变化引起）$a_t=\frac{dv}{dt}=r\alpha=\frac{d^2s}{dt^2}$；

法向加速度（速度方向变化引起）$a_n=v\omega=\omega^2r=\frac{v^2}{r}$。

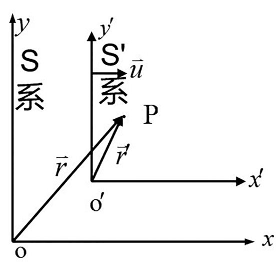
六、匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

匀速率圆周运动：速率和角速度都为常量。$\vec{a}_t=0$；$\vec{a}=a_n\vec{e}_n=r\omega^2\vec{e}_n$

匀变速率圆周运动：角加速度为常量 $\omega=\omega_0+\alpha t$，$\theta=\theta_0+\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

推广：任意曲线运动（不同点曲率中心及曲率半径不同）$a_n=\frac{v^2}{\rho}$

第五节　伽利略变换



伽利略坐标变换：$\vec{r}=\vec{u}t+\vec{r}'$

伽利略速度变换：$\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}'$

$\vec{v}$、$\vec{v}'$、$\vec{u}$ 分别称为绝对速度、相对速度、牵连速度。

第二章　质点动力学

第一节　牛顿运动定律

一、牛顿第一定律

牛顿第一定律:任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态,直到外力迫使它改变运动状态为止。

1)定义了物体的惯性:任何物体都有保持其运动状态不变的性质，这一性质叫惯性。

2)定义了力:力是物体运动状态发生变化的原因。

3)定义了惯性参照系:物体在某参考系中,不受其他物体作用而保持静止或匀速直线运动状态,这个参考系称为惯性系。相对惯性系静止或匀速直线运动的参照系也是惯性系。(解释什么是惯性系)

二、牛顿第二定律

物体动量随时间的变化率等于作用于物体的合外力 $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ 。当速度远小于光速时:$\vec{\mathrm{F}}=\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}$

1)牛顿第二定律只适用于质点的运动.

2)质点所受合外力与获得的加速度为瞬时对应关系

3)力的叠加原理 $\vec{a}=\frac{m}{}=\frac{\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots}{m}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\cdots$

三、牛顿第三定律

两个物体之间作用力和反作用力,沿同一直线,大小相等,方向相反,分别作用在两个物

体上。作用力与反作用力是同一性质的力。$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

第二节　力学中常见的相互作用力

一、万有引力

万有引力：$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$

万有引力定律适用于两个质点。

重力：地球对地面附近物体的万有引力，严格来说应是万有引力的分力。

二、弹性力

弹性力：（压力、支持力、张力、弹簧弹性力等）特点：接触、形变、被动

1）压力和支持力：方向和接触表面垂直。

2）绳的张力：当绳拉紧时，内部质元间的拉力。（分析什么时候各点张力相等，什么时候不等）

3）弹簧的弹力：$F=-kx$，负号表示外力与位移方向相反。

三、摩擦力

摩擦力：当相互接触的物体作相对运动或有相对运动的趋势时，它们中间所产生的阻碍相对运动的力称为摩擦力。

湿摩擦：液体内部或液体和固体表面的摩擦

干摩擦：固体表面之间的摩擦。（滑动摩擦、静摩擦、滚动摩擦）

滑动摩擦力、静摩擦力、最大静摩擦

第三节　牛顿运动定律的应用

一、两类问题：

1)已知运动求力；

2)已知力求运动。桥梁是加速度。

二、解题步骤：

1)确定研究对象进行受力分析；

2)取合适的坐标系；列方程(一般用分量式)；

3)利用其它的约束条件列补充方程；

4)先用文字符号求解，后带入数据计算结果。

第四节　力学相对性原理、非惯性参考系中的牛顿定律

一、力学相对性原理

对于惯性系：$\vec{a}=\vec{a}'$

1)凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系。。

2)对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，与惯性系的运动无关，这就是伽利略相对性原理。

二、非惯性系

牛顿定律不成立的参考系：相对于一个惯性系做加速运动的参考系一定是非惯性系。

例如：小车匀加速沿水平地面运动，弹簧伸长，小球受水平拉力。

三、惯性力(平动)

为使牛顿定律在非惯性系中形式上成立，人为引入一个假象力——惯性力。

1）引入的方法：设一个物体 m 相对于惯性系 S 有加速度 $\vec{a}$，相对于非惯性系 S' 有加速度 $\vec{a}'$，S' 系相对于 S 系的加速度为 $\vec{a}_0$，则在 S' 系中物体除受真实力之外，还受到惯性力的作用：$\vec{F}_{惯}=-m\vec{a}_0$

2)惯性力是虚拟力，不符合牛顿第三定律，它没有反作用力。

第三章　动量、功和动能

第一节　质点和质点系的动量定理

过程量与状态量;过程量等于状态量的增量。

一、冲量 质点的动量定理

由牛顿第二定律 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 可得:$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta$

(一)冲量:力对时间的积分(矢量) $\vec{I}=\int_{t1}^{t2}\vec{F}\mathrm{d}t$

(二)质点的动量定理:在给定的时间内,外力作用在质点上的冲量,等于质点在此时间内动量的增量 。

(三)平均冲力 $\overline{\vec{F}}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

二、质点系动量定理

质点系的动量定理:作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。注意:内力不改变系统的动量。

$\int_{t1}^{t2}\vec{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$ 或 $\vec{I}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$

第二节　动量守恒定律

一、动量守恒定律

动量守恒定律：质点系所受的合外力为零时，则系统的总动量将保持不变。

1)系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于同一惯性参考系 。

2)若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

3)当外力<<内力且作用时间极短时可认为近似守恒。

4)动量守恒定律比牛顿定律更普遍、更基本，在宏观和微观领域均适用。

第三节　质点的角动量

一、角动量

角动量：$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$ 说到一个角动量时，必须指明对哪一个固定点而言。

角动量的大小：$L=rp\sin\theta=mvr\sin\theta$ ，质点作圆周运动时，$L=mvr$

注意：说到一个角动量时，必须指明对哪一个固定点而言。

二、角动量定理

角动量定理：质点所受合力矩等于它的角动量对时间的变化率。$\vec{M}=d\vec{L}/dt$

三、关于力矩

力矩：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$（分析什么情况下力矩为零）

四、角动量守恒定律

角动量守恒定律：如果对某固定点，质点所受合力矩为零，则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变。

第四节　动能定理

一、功

（一）定义：力对质点所作的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。

元功：$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$（元功的正负），$W=\int_A^B\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$（功是标量，过程量）

（二）直角坐标系：$W=\int F_x\mathrm{d}x+\int F_y\mathrm{d}y+\int F_z\mathrm{d}z$ ；

自然坐标系 $W=\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int(F_\tau\vec{\tau}+F_n\vec{n})\cdot\mathrm{d}s\vec{\tau}=\int F_\tau\mathrm{d}s$ 。

（三）合力的功 ＝ 分力的功的代数和

（四）功率：功随时间的变化率。单位（瓦特）

二、质点的动能定理

质点的动能定理：功可以改变物体的运动状态，可以设想，必定相应的存在某种描述运动状态的物理量，它的改变正好由力对物体所做的功来决定，以质点的动力学方程为线索可以找到其关系为：

$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s\Rightarrow W=\int_{s_1}^{s_2}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

动能（状态函数）$E_{\mathrm{k}}=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{p^2}{2m}$

动能定理：合外力的功等于质点动能的增量 $W=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k0}}$

1）动能定理给出了力的空间积累效应，即功可以改变质点的动能。

2）不同惯性系中，动能定理形式保持不变（协变性）。但是，功和动能的量值却不相同。

三、质点系的动能定理

质点系的动能定理：外力和内力的总功等于质点系总动能的增量 $W^{\mathrm{ex}}+W^{\mathrm{in}}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k0}}$

值得注意的是，质点系的总动量与内力无关，但总动能却与内力有关。内力可改变系统的总动能。

第五节　保守力与非保守力 势能

一、几种力的作功特点

（一）万有引力作功 $W=-\left[(-G\dfrac{m'm}{r_B})-(-G\dfrac{m'm}{r_A})\right]$

（二）重力做功 $W=-(mgy_B-mgy_A)$

（三）弹性力做功 $W=-(\dfrac{1}{2}kx_B^2-\dfrac{1}{2}kx_A^2)$

二、保守力和非保守力

如果一对力的功与相对路径无关，而只决定于两质点的相对始末位置，这样的一对力叫保守力。

物体沿闭合路径运动一周时，保守力对它所作的功等于零。$\oint_l \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$

非保守力：力所作的功与路径有关 。（例如摩擦力）

三、势能

前面我们计算了几种保守力的功，它们都可写成两项之差，第一项只与初位置有关，第二项只与末位置有关，因此可定义一个只与位置有关的函数 EP，它在 A 点的值记为 EPA，在 B 点的值记为 EPB，这样定义的函数称为系统的势能。势能与保守力的功的关系为：保守力的功等于系统势能增量的负值。

选择 B 点为势能零点，则任意点（例如 A 点）势能 $E_{\mathrm{pA}}=W_{\mathrm{A}\to\text{势能零点}}=\int_{\mathrm{A}}^{\text{势能零点}}\vec{F}_{\text{保守}}\cdot d\vec{r}$

即：空间某点的势能值就等于把质点从该点沿任意路径移动到势能参考点保守力所作的功。

注意：势能是状态函数；势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关；势能是属于系统的。

四、由势能求保守力

保守力沿某一给定的 l 的方向的分量等于此保守力相应的势能函数沿 l 方向的空间变化率的负值。

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}=-\left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\vec{k}\right)=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)E_{\mathrm{p}}=-\nabla E_{\mathrm{p}}$$

第六节　功能原理 机械能守恒定律

一、质点系的功能原理

质点系的动能定理，内力功可分为保守力的功和非保守力的功两类，则：质点系机械能的增量等于外力和非保守内力作功之和$W^{ex}+W_{nc}^{in}=E-E_0$ 其中机械能$E=E_k+E_p$

二、机械能守恒定律

机械能守恒定律：只有保守内力作功的情况下，质点系的机械能保持不变。

守恒定律的意义为：利用守恒定律，可以使我们在解决有些问题时只考虑初末态，而省去从初态到达末态的中间过程，从而使问题简化。

第七节　碰撞

碰撞问题

碰撞：两物体互相接触时间极短而互作用力较大的相互作用

1）完全弹性碰撞：两物体碰撞之后，它们的动能之和不变。

2）非弹性碰撞：碰撞后，由于非保守力的作用，使机械能转换为热能、声能，化学能等其他形式的能量。

3）完全非弹性碰撞：两物体碰撞后，以同一速度运动。

第八节　质心 质心运动定律

一、质心

质心（概念；质心的位置；直角坐标系分量表示（连续与离散）；质心与重心；

1）质心位矢与坐标系的选取有关。但质心相对于各质点的相对位置是不会随坐标系的

选择而变化的；

2）对密度均匀、形状对称的物体，其质心在其几何中心。

二、质心运动定律

质心运动定律：将质心公式两边对时间求导，得到质心速度公式；质点系总动量对时间求导得到质心运动定律 $\vec{F}_{合外}=\frac{d\vec{p}_{总}}{dt}=m\vec{a}_{C}$

质心位置在工程上有重要意义，例如要使起重机保持稳定，其质心位置应满足一定条件；飞机、轮船、车辆等的运动稳定性也与质心位置密切相关；此外，若高速转动飞轮的质心不在转动轴线上，则会引起剧烈振动而影响机器正常工作和寿命。

第四章　刚体力学

第一节　刚体运动学

一、刚体

刚体的概念：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

二、刚体的运动

（一）平动：若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线。

（二）转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动 。转动又分定轴转动和非定轴转动。

刚体一般的运动可看成质心平动和绕质心转动的合成

三、刚体绕定轴转动的描述

（一）特点：圆周运动；任意质点的角量相同，线量不同；运动的描述仅需一个坐标。

（二）描述：$\theta=\theta(t)$；$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$；$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$；$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$ 。

说明：实际上角速度与角加速度也为矢量，方向与旋转方向符合右手螺旋。定轴转动时，他们只有两种可能取向，这时把他们当作标量，以正负号表示两种取向。

（三）角量与线量的关系：角量描述整个刚体；线量描述的是刚体上的点。

$\Delta s=r\Delta\theta$；$ds=rd\theta\rightarrow v=r\omega\rightarrow a_t=\alpha r$；$a_n=\omega^2 r$

（四）匀变速转动公式（质点匀变速直线运动公式对比）

$\omega=\omega_0+\alpha t$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

第二节　刚体定轴转动的转动定理

一、力矩

力矩：(对于定轴转动的刚体，外力对刚体转动的影响，不仅与力的大小有关，而且还与力的作用点和力的方向有关。我们用力矩来描述力对刚体的作用)

1)力垂直于转轴时：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$；$M=Fr\sin\theta=Fd$，d 为力臂

2)力不垂直于转轴时：$M_z\vec{k}=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$；

3)合力矩等于各分力矩的矢量和：$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3+\cdots$；

4)刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消；

二、转动定律

(一)单个质点与转轴刚性连接：$M=mr^2\alpha$

(二)刚体：刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

$$\sum_j M_{ej}+\sum_j M_{ij}=\sum \Delta m_j r_j^2 \Rightarrow M=J\alpha$$

三、转动惯量

(转动惯性的量度)：$J=\sum\limits_j \Delta m_j r_j^2$，$J=\int r^2\mathrm{d}m$

转动惯量的性质：转动惯量具有可累加性；形状、大小相同的均匀刚体总质量越大，转动惯量越大；总质量相同的刚体，质量分布离轴越远，转动惯量越大；同一刚体，转轴不同，转动惯量就不同。所以说刚体的转动惯量，必须指明是对哪一个轴的。

第三节　刚体定轴转动的角动量定理

力的时间累积效应——冲量、动量、动量定理

力矩的时间累积效应——冲量矩、角动量、角动量定理

一、刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

（一）刚体定轴转动的角动量：把刚体的每一个质点的角动量求和得 $L=\sum_i m_i r_i v_i=(\sum_i m_i r_i^2)\omega$；$L=J\omega$

（二）刚体定轴转动的角动量定理：$\int_{t1}^{t2} M\mathrm{d}t=J\omega_2-J\omega_1$。非刚体：$\int_{t1}^{t2} M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$

二、刚体定轴转动的角动量守恒定律

刚体定轴转动的角动量守恒：若 M＝0，L＝恒量

如果物体所受的合外力矩等于零，或者不受外力矩的作用，物体的角动量保持不变。

注意：就动量不变，但转动惯量和角速度可以变，只是二者乘积不变。

三、角动量守恒实例

如花样滑冰，跳水，惯性导航仪，被中香炉等；例题。

第四节　刚体定轴转动的功能原理

力的空间累积效应——力的功，动能，动能定理

力矩的空间累积效应——力矩的功，转动动能，动能定理

一、力矩作功

$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F_t\mathrm{d}s=F_t r\mathrm{d}\theta=M\mathrm{d}\theta$；$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$。

二、力矩的功率

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M\omega$$

三、转动动能

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}(\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

四、刚体绕定轴转动的动能定理

合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量

$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_1}J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\mathrm{d}\omega$，$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$。