2020 年文职考试《数学 2+ 物理》解析

数学部分

1、设四阶行列式 D 中第二行元素依次为 2，-1，3，1，它们对应的余子式分别是 -4，3，1，-7，则行列式 D 的值是（　　　　）。

A、-15　　B、-5　　C、21　　D、15

选项：B。

解析：

行列式按第二行展开：$|D| = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} \cdot A_{2j}$

代数余子式为：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

列表：

j	1	2	3	4
$i+j$	3	4	5	6
M_{2j}	-4	3	1	-7
A_{2j}	4	4	-5	6
a_{2j}	2	-1	3	1
$a_{2j} \cdot A_{2j}$	8	-4	-15	6

故：$|D| = 8 - 4 - 15 + 6 = -5$

2、当λ满足条件（　　　　）时，线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda\end{cases}$存在唯一解。

A、$\lambda \neq 3$且$\lambda \neq 0$　　B、$\lambda \neq 3$且$\lambda \neq 1$

C、$\lambda \neq -3$且$\lambda \neq 0$　　D、$\lambda \neq -3$且$\lambda \neq 1$

选项：C。

解析：

对方程组的增广矩阵进行实等行变换，化成行简化阶梯形。

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{实行行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

若使方程组有唯一解，需要满足：

$R(A) = R(\overline{A}) = n$

故：$-\lambda(\lambda+3) \neq 0$

即：$\lambda \neq -3$且$\lambda \neq 0$

3、当$x \to +\infty$时，下列无穷小与$\frac{1}{\sqrt{x}}$互为等价无穷小的是（　　）。

A、$1 - e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$　　B、$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1$　　C、$\ln\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right]$　　D、$1 - \cos\sqrt{\frac{1}{x}}$

选项：C。

解析：
几个重要的等价无穷小替换（$t\to 0$）：

①$e^t\sim 1+t\Longrightarrow 1-e^t\sim -t$；②$\ln(1+t)\sim t$；③$1-\cos t\sim\frac{1}{2}t^2$；④$\sqrt{1+t}-1\sim\frac{t}{2}$

A 项：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=-1$

B 项：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}$

C 项：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

D 项：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$

4、设$f(x)$的定义域为全体实数，且$|f(x)|\leqslant\sin x^2$，则$x=0$为函数的（　　　）。

A、间断点　　　　　　　　　　B、连续但不可导点

C、可导点且$f'(0)=0$　　　　D、可导点且$f'(0)\neq 0$

选项：C。
解析：
因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin x^2=0$，且$0\leqslant|f(x)|\leqslant\sin x^2$，故：$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$。又：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-0}{x}\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x}=0$$

故，导数存在。

5、已知$f'(e^x)=xe^{-x}$，且$f(1)=0$，则$f(x)=$（　）。

A、$\frac{1}{2}(\ln x)^2$　　B、$(\ln x)^2$　　C、$\frac{\ln x}{2}$　　D、$\ln x$

选项：A。
解析：
令$e^x=t$，则$x=\ln t$，所以原式可化为：

$$f'(t)=\frac{\ln t}{t}\Longrightarrow f'(x)=\frac{\ln x}{x}$$

两侧同时积分：

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x d(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

代入$f(1)=0$，解得$C=0$。

6、已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&k\\3&6&9\end{bmatrix}$,$B=(b_{ij})_{3\times3}\neq0$，且$AB=0$，则（　　　　）。

A、当$k=6$时，必有$R(B)=1$　　　　B、当$k=6$时，必有$R(B)=2$

C、当$k\neq6$时，必有$R(B)=1$　　　　D、当$k\neq6$时，必有$R(B)=2$

选项：C。

解析：

因为 A、B 为非 0 矩阵，且$R(AB)=0$，故：

$$0=R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-3\Longrightarrow R(A)+R(B)\leqslant3$$
$$R(B)\geqslant1$$

当$k=6$时：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},R(A)=1,R(B)=1\text{或}2$$

当$k\neq6$时：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&k\\3&6&9\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&k-6\\0&0&0\end{bmatrix},R(A)=2,R(B)=1$$

7、已知函数$y=f(x)$由方程$y^5+2y-x-3x^7=0$确定，则：$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$（　）。

A、0　　　B、1/2　　　C、1　　　D、2

选项：A。

解析：

将$x=0$代入原式，可得$y(0)=0$。

对两侧求一阶导：

$$5y^4y'+2y'-1-21x^6=0$$

对两侧求二阶导：

$$20y^3(y')^2+5y^4y''+2y''-126x^5=0$$

将$x=0$ $y(0)=0$代入可得：$y''=0$。

8、曲线$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant2\pi)$与 x 轴所围图形的面积为（　　　　）。

A、0　　　B、2　　　C、4　　　D、6

选项：C。

解析：

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=2\int_0^{\pi}\sin xdx=2(-\cos x)|_0^{\pi}=4$$

注意：计算的是面积，不是定积分的值。

9、对于矩阵 AB，下列命题中不正确的是（　　）。
A、若 A 与 B 相似，则 A 与 B 等价
B、若 A 与 B 合同，则 A 与 B 等价
C、若 A 与 B 互为逆矩阵，则 A 与 B 等价
D、若 A 与 B 相似，则 A 与 B 合同
选项：B。
解析：
矩阵 A 与矩阵 B 等价：$r(A)=r(B)=r(A|B)$，存在可逆矩阵P,Q，使得：

$$PAQ=B$$

A 合同于 B：存在可逆矩阵 C，使得：

$$C^TAC=B$$

故结论 B 只有当P为的Q转置时结论才成立。

10、设$A=(a_{ij})_{4\times4}$满足$A^*=A^T$，其中A^*为A的伴随矩阵，若：

$$a_{12}=a_{22}=a_{32}=a_{42}$$

则a_{22}可能为（　　）。

A、$\sqrt{2}$　　B、$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C、$-\frac{1}{2}$　　D、1

选项：C。
解析：
由题意知：$a_{ij}=A_{ij}$，且$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\geqslant0$

$AA^*=|A|E=AA^T\rightarrow\|A\|=|A||A^T|\rightarrow|A|^4=|A|^2\Longrightarrow|A|=0或1$

因为：$a_{12}=a_{22}=a_{32}=a_{42}$，所以：$4a_{22}^2=0或1$。故：

$$a_{22}=0或\pm\frac{1}{2}$$

11、微分方程$y''+y=x^2+\sin x$的特解形式可设为（　　）。

A、$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

B、$y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

C、$y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

D、$y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

选项：A。
解析：
由题意该微分方程对应的特征方程为：$r^2+1=0$，故：$r=\pm i$。
因为三角函数部分为其对应的特征值，故其特解形式为：

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$$

12、设平面区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$为区域 D 上正值函数，$a,b$ 为常数，则二重积分$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}dxdy=$ （　　　　）。

A、$ab\pi$　　　　B、$\frac{ab}{2}\pi$　　　　C、$(a+b)\pi$　　　　D、$\frac{(a+b)}{2}\pi$

选项：D。

解析：

因为积分区域关于$y=x$对称，故由轮换对称性可得：

$$2I=\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}dxdy$$
$$=\iint_D (a+b)dxdy=(a+b)\iint_D dxdy=(a+b)\pi$$

所以：

$$I=\frac{a+b}{2}\pi$$

13、关于函数$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$的描述不正确的是（　　）。

A、该函数为偶函数

B、该函数存在极小值，也存在极大值

C、该函数存在极小值，不存在极大值

D、该函数为可导函数

选项：B。

解析：

由题意可得：$f(-x)=f(x)$，故原函数为偶函数，且$f(0)=0$。故：

$$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt=-2e^{-x^2}+x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+1$$

对$f(x)$求一阶导，并令其为 0：

$$f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$$

可得：

$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{2})$上单调增，在$(-\sqrt{2},0)$上单调减；

$f(x)$在$(0,\sqrt{2})$上单调增，在$(\sqrt{2},+\infty)$上单调增。

且：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{e^{x^2}}+1=1$；

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ （偶函数）；

$f(0)=0$；

故最小值存在。

14、回忆版题干错误。

15、设Γ为平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限的部分，则曲面积分：

$$\iint_{\Gamma}\left(2x+\frac{4}{3}y+2\right)dx$$

的值为（　　）。

A、$2\sqrt{61}$　　B、$3\sqrt{61}$　　C、$4\sqrt{61}$　　D、$\sqrt{61}$

选项：C。

解析：

由题意可得：

$$2x+\frac{4y}{3}+z=4\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)=4$$

故原式等于：

$$\iint_{\Gamma}4ds$$

由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4}{3}$可得：

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}d\sigma=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

所以：

$$\iint_{\Gamma}4ds=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{\Gamma}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\times2\times3\times\frac{1}{2}=4\sqrt{61}$$

16、定积分$2\displaystyle\int_0^2\max\{x^2,|x|\}dx=$（　　）。

A、$\dfrac{17}{2}$　　B、$\dfrac{17}{3}$　　C、$\dfrac{17}{5}$　　D、$\dfrac{17}{7}$

选项：B。

解析：

$$2\int_0^2\max\{x^2,|x|\}dx=2\int_0^1xdx+2\int_1^2x^2dx=\frac{17}{3}$$

17、已知曲线$y=f(x)$在点$[x_0,f(x_0)]$处的切线方程为$y=x+1$，则下方结论不正确的是（　　）。

A、函数$y=f(x)$在点$x=x_0$处可导，且$\dfrac{d}{dx}f(x)=1$

B、函数$y=f(x)$在点$x=x_0$处连续

C、存在某$\mu(x_0)$，使得函数$y=f(x)$在该邻域内单调递增

D、存在某$\mu(x_0)$，使得函数$y=f(x)$在该邻域内单调递减

选项：D。

解析：

由题意可知该点的导数值为$f'(x_0)=1$，由极限的保号性可知，导函数在该点的邻域内，导数值大于0，故该函数在该邻域内单增。

18、设有向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^T$，下列选项正确的是（　　）。

A、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$\beta\alpha_1,\beta\alpha_2,\cdots,\beta\alpha_m$线性相关

B、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$\beta\alpha_1,\beta\alpha_2,\cdots,\beta\alpha_m$线性无关

C、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$\beta\alpha_1,\beta\alpha_2,\cdots,\beta\alpha_m$线性无关

D、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$\beta\alpha_1,\beta\alpha_2,\cdots,\beta\alpha_m$线性相关

选项：A。

解析：

$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$，故法 A 线性相关时，AB 必线性相关。

19、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则函数$z=f(x,y)$在点$(0,0)$处（　　）。

A、不连续

B、连续但偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$不存在

C、连续且偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在，但不可微

D、可微

选项：C。

解析：

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\leqslant\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y}{2xy}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2}=0$，故连续。

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$；$\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$，故可偏导。

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令：$y=kx$，则：

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to kx}}\frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to kx}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{kx^3}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}x^3}=\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

这说明，极限值与 k 的取值有关，故不可微。

20、已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2-y^2}}=2$$

则下列选项正确的是（　　）。

A、点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

B、点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

C、点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

D、根据所给的条件无法点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

选项：C。

解析：

$$\lim_{\substack{x\to0^-\\y=0}}\frac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0^-\\y=0}}\frac{f(x,0)}{-x}=-2\ ,\ \lim_{\substack{x\to0^+\\y=0}}\frac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0+\\y=0}}\frac{f(x,0)}{x}=2$$

故：

$$f_x{}'(0^-)=-2,f_x{}'(0^+)=2$$

故在$x=0$的左邻域内单减，右邻域内单增；

同理：

$$f_y{}'(0^-)=-2,f_y{}'(0^+)=2$$

故点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点。

21、回忆版题干错误。

22、设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，其中：$f(0)=0,f'(0)\neq0$

则$x=0$是$F(x)$的（　　）。

A、连续点

B、跳跃间断点

C、无穷间断点

D、可去间断点

选项：D。

解析：

由题意可得：$f(0)=0,f'(0)\neq0$，即函数值为零，一阶导存在且不为零。

故$f(x)$在$x=0$的邻域内可导：

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\overset{L'Hospital}{=\!=\!=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)\neq0$$

故该点为可去间断点。

23、设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$是正定二次型，$A^T=A,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，下列二次型中：$x^TAx,x^TA^{-1}x,x^T(A^{-1}+A^T)x,x^TA^2x$，属于正定二次型的个数为（　　　）。

A、1　　　B、2　　　C、3　　　D、4

选项：D。

解析：

由题意可知，A 的特征值均大于零。则：

矩阵	特征值	正负
A	λ_i	正
A^{-1}	$\frac{1}{\lambda_i}$	正
$A^{-1}+A^T$	$\frac{1}{\lambda_i}+\lambda_i$	正
A^2	λ_i^2	正

所以，四个二次型均为正定二次型。