

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校	海军工程大学	
参赛队号	90038016	
队员姓名	1.	吴 名 强
	2.	翟 玉 文
	3.	赵 政 弘

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 空气中 PM2.5 问题的研究

摘 要：

PM2.5 是空气质量指数 AQI 中的重要监测指标，是产生灰霾的主要因素，对人类健康危害极大。由于 PM2.5 进入公众视线的时间还很短，与它相关的统计数据比较缺乏，从而限制了对其客观规律的了解。对此，本文着重进行了以下几个方面的工作：

一、PM2.5 的相关因素分析。结合附件 1 中的数据，利用 Pearson 相关分析法计算 AQI 中 PM2.5、SO₂、NO₂、PM10、CO 以及 O₃ 等 6 个监测分指标的指标值及其污染物含量相互间的相关系数，定量地分析了 6 个指标之间相关性的强弱，发现 PM2.5 与 SO₂、NO₂、PM10、CO 具有很强的正相关性，而与 O₃ 呈较弱负相关。在此基础上，建立了 PM2.5（含量）与其它 5 个分指标及其对应污染物（含量）的多元线性回归模型，并利用附件中的数据对回归模型的合理性进行了验证。

二、PM2.5 的分布与演变及应急处理。利用附件 2 中 SO₂、NO₂、PM10、PM2.5 的 2013 年数据建立了 PM2.5 的 3 元线性回归模型，利用回归方程拟合 2010 年 ~ 2012 年间缺失的 PM2.5 数据，并以此绘制 2010 年 ~ 2013 年间西安市 13 个区域对应的 PM2.5 拟合值曲线，对不同区域和时间段的分布情况进行分析，发现 PM2.5 具有季节性、区域性的分布特点。同时，计算附件 2 中各区域 2010 年 ~ 2013 年间每个季节空气质量指数的平均值，取其相应的污染等级对各区域做出了污染评估。

在合理假设的前提下，根据扩散理论建立了简化的 PM2.5 连续点源扩散模型，定量地分析了 PM2.5 与风力之间的相关性，并利用附件 2 中的数据对 PM2.5 与湿度之间的相关性进行了定性分析；再提取附件 2 中的两组数据分别建立其 PM2.5 扩散模型，绘制其正下风向的扩散分布图，从而对 PM2.5 扩散模型进行了定量与定性分析。

当污染源的 PM2.5 浓度值急剧升高时（作为新污染源），周边区域的 PM2.5 浓度在短时间内不会发生突变，继而建立新污染源的短暂连续点源扩散模型，并提出了污染扩散预测与评估方法：对污染源下风向 x 处的区域，分析在 t 时刻该处的 PM2.5 浓度是受新污染源影响还是受初始污染源影响，再利用相应的污染源扩散方程预测该处

的 PM2.5 浓度，并换算其对应的空气质量指数，继而做出污染评估。进一步，结合附件 2 中的数据，利用该扩散模型进行预测评估，通过统计下风向不同区域的污染等级，给出了重度污染和可能安全区域。

为分析文中扩散模型的合理性，在附件 2 中选用小寨、纺织城、兴庆小区、市人民体育场等 4 个监测点数据进行比对分析：利用后三个监测点建立 PM2.5 扩散模型，并对小寨的 PM2.5 浓度值进行估计，将该值与真实测量值进行比较，继而分析扩散模型的合理性。同时，结合已有的研究成果，对 PM2.5 的成因、演变等一般性规律进行了探索。

三、空气质量的控制管理。在分析 PM2.5 的污染成因后，总体上依据“先源头、后时段”两次分配的思路，确定阶段治污目标并制定相应的治污方案。在分析附件 1 所在地区 PM2.5 的主要来源类别及其贡献率的基础上，按照“源头治理，贡献率越大，要求完成的治理指标越高”的基本原则，按比例分配给 PM2.5 主要来源不同的治理指标。针对不同的 PM2.5 来源，根据其治理措施的有效性、周期性等特点，分别设计每年的治理指标，继而确定该区域 5 年内的污染治理计划，并给出了每年的全年年终平均治理指标。

采用综合治理、专项治理相结合制定治污方案的思路，将 PM2.5 治理指标按比例 P 分配给该两种治污方式来完成，继而得到每年投入经费与 5 年投入总经费的数学表达式；在完成预订治理目标的前提下，以总经费尽可能低、每年投入经费适度均衡为优化目标，建立优化模型对专项治理计划进行优化，给出了五年投入总经费和逐年轻费投入的预算，并对专项治理方案的合理性进行了说明。

最后，我们分析了本文工作的优缺点，并提出了改进方向。

关键词：PM2.5、空气质量指数、污染等级、相关分析、多元线性回归、连续点源扩散模型、专项治理

1 问题重述

大气为地球上生命的繁衍与人类的发展提供了理想的环境，因此，对空气质量监测、预报和控制等问题，国家和地方政府均制定了相应政策、法规和管理办法。2012年2月29日，环境保护部公布了新修订的《环境空气质量标准》(GB3095-2012)^[1]，增设了颗粒物(粒径小于等于 $2.5\mu\text{m}$)浓度限值和臭氧 8 小时平均浓度限值。与新标准同步还实施了《环境空气质量指数(AQI)技术规定(试行)》(HJ633-2012)^[2]。上述规定中，启用了空气质量指数 AQI 作为空气质量监测指标，它包含了 6 个基本监测分指标：二氧化硫 SO_2 、二氧化氮 NO_2 、可吸入颗粒物 PM_{10} 、细颗粒物 $\text{PM}_{2.5}$ 、臭氧 O_3 和一氧化碳 CO 。新标准中，首次将 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度指标作为空气质量监测指标^[2]，它是产生灰霾的主要因素，对人类健康危害极大。由于 $\text{PM}_{2.5}$ 及相关的因素的统计数据还太少，对其客观规律的研究还不成熟。因此，要求对以下问题进行研究：

一、 $\text{PM}_{2.5}$ 的相关因素分析

$\text{PM}_{2.5}$ 的成分主要由水溶性离子、颗粒有机物和微量元素等组成。要求依据附件中的数据或自行采集数据，利用或建立适当的数学模型，对 AQI 中 6 个基本监测指标的相关与独立性进行定量分析，尤其是对其中 $\text{PM}_{2.5}$ （含量）与其它 5 项分指标及其对应污染物（含量）之间的相关性及其关系进行分析。

二、 $\text{PM}_{2.5}$ 的分布与演变及应急处理

要求依据附件中的数据或自行采集的数据，通过数学建模探索完成以下研究：

- 1、描述该地区内 $\text{PM}_{2.5}$ 的时空分布及其规律，并分区进行污染评估。
- 2、合理考虑风力、湿度等天气和季节因素的影响，建立能够刻画该地区 $\text{PM}_{2.5}$ 的发生和演变规律的数学模型，并利用该地区的数据进行定量与定性分析。
- 3、假设该地区某监测点处的 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度突然增至数倍，且延续数小时，要求提出对这种突发情形的污染扩散预测与评估方法。并以该地区 $\text{PM}_{2.5}$ 监测数据最高的一天为例，在全地区 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度最高点处的浓度增至 2 倍，持续 2 小时，利用建立的模型进行预测评估，给出重度污染和可能安全区域。
- 4、采用适当方法检验以上模型和方法的合理性，并根据已有研究成果探索 $\text{PM}_{2.5}$ 的成因、演变等一般性规律。

三、空气质量的控制管理

数据 1 所在地区的环境保护部门考虑治污达标的紧迫性和可行性，在未来五年内，拟采取综合治理和专项治理相结合的逐年达到治理目标的方案。要求考虑以下问题：

- 1、该地区目前 $\text{PM}_{2.5}$ 的年平均浓度估计为 $280\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，要求未来五年内逐年减少 $\text{PM}_{2.5}$ 的年平均浓度，最终达到年终平均浓度统计指标 $35\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，要求给出每年的全年年终平均治理指标。
- 2、要求为数据 1 所在地区设计有效的专项治理计划，使得既达到预定 $\text{PM}_{2.5}$ 减排计划，同时使经费投入较为合理，要求给出五年投入总经费和逐年轻费投入预算计划，并论述该方案的合理性。

2 模型假设与符号说明

2.1 模型假设

1. 监测点的数据代表了其周围一小块区域上的数据；
2. 由于附件中没有包含地貌、源高等信息，将 PM2.5 扩散模型看作为二维平面的连续点源扩散问题，且有效源高为 0；
3. 某监测点 PM2.5 浓度突增数倍并持续一段时间后，恢复为初始的 PM2.5 浓度；

2.2 符号说明

符号	解释说明	单位
r	相关系数	无
β	回归系数	无
c	PM2.5 浓度	$\mu\text{g}/\text{m}^3$
u	风速	m/s
t	时间	s (h)

3 问题一：PM2.5 的相关因素分析

3.1 问题分析及解题思路

AQI 监测指标共包含 PM2.5、SO₂、NO₂、PM10、CO 以及 O₃ 等 6 个分指标，问题要求对这 6 个监测指标（含量）的相关性与独立性进行定量分析。结合附件 1 中提供的数据，问题一实质上是定量分析 6 个变量之间的相关性。对此，我们首先利用常用的 Person 相关系数分析法定量的分析 6 个指标之间相关性的强弱，以掌握一般性规律；在这基础上建立 PM2.5（含量）与其它 5 个分指标及其对应污染物（含量）的多元线性回归模型，从而定量的描述它们之间的相关系。

3.2 PM2.5 与其它因素的相关分析

Person 相关分析^[3]是处理变量与变量之间关系的一种统计方法，通常利用两个变量之间的相关系数来分析变量之间的线性相关程度，并据此进行线性回归分析、预测和控制等。相关系数绝对值愈大（愈接近 1），表明变量之间的线性相关程度愈高；相关系数绝对值愈小，表明变量之间的线性相关程度愈低；相关系数为零时，表明变量之间不存在线性相关关系。因此，可以利用相关系数的大小来描述 PM2.5 与其它 5 个分指标及其对应污染物（含量）之间相关性的强弱。相关系数计算公式为：

$$r(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

为了全面分析 6 个指标之间以及 PM2.5 与 SO₂、NO₂、PM10、CO、O₃ 之间的相关性，我们针对附件 1，分别采用指标值和转化后的对应污染物浓度值两种形式，来讨论相关系数。首先将附件 1 中的数据导入 Matlab，并对数据进行如下处理：

- 1、剔除不完整的监测数据，最终得到 236 组完整、有效的监测数据；
- 2、利用附件中给出的空气质量分指数计算公式以及对应污染物项目浓度限值，计算 236 组数据中 6 种分指标对应污染物的浓度值（O₃ 采用 8 小时滑动平均，其余采用 24 小时平均，单位统一为 μg/m³）；

继而，利用 Matlab 计算 AQI 中 6 个分指标以及对应污染物含量之间的相关系数，计算结果如表 1 所示。其中，对角线以下部分的数据（黑体）表示根据指标值得出的 6 个监测指标之间的相关系数，对角线以上部分的数据（斜体）表示根据污染物含量得出的相关系数。且表 1 中的相关系数均通过 0.01 水平上的双侧显著相关性检测。

表1 AQI中6个分指标及其污染物含量间的相关系数

AQI 分指标	SO ₂	NO ₂	PM10	CO	O ₃	PM2.5
SO ₂	1	0.8017	0.7184	0.6692	-0.2889	0.7406
NO ₂	0.8051	1	0.7891	0.6367	-0.1780	0.7537
PM10	0.6779	0.7275	1	0.6162	-0.1511	0.8186
CO	0.6570	0.6245	0.5860	1	-0.4986	0.8167
O ₃	-0.1815	-0.0646	-0.0685	-0.3830	1	-0.4488
PM2.5	0.7241	0.7324	0.7787	0.8216	-0.3549	1

从表1可以发现：

- (1) PM2.5指标与其它5项分指标的相关性强度从高到低依次为：CO、PM10、NO₂、SO₂、O₃，其中PM2.5指标与CO、PM10、NO₂、SO₂四种分指标具有很强的正相关性（相关系数均大于0.72），与O₃分指标相关性较弱且呈负相关性。
- (2) PM2.5污染物浓度与其它5类污染物浓度的相关性强度从高到低依次为：PM10、CO、NO₂、SO₂、O₃，其中PM2.5污染物浓度与CO、PM10、NO₂、SO₂四种污染物的浓度具有很强的正相关性（相关系数均大于0.74），与O₃污染物浓度则呈负相关。

显然，(1) 和 (2) 的结论基本是一致的。这说明，PM2.5与CO、PM10、NO₂、SO₂具有很强的正相关性，而与O₃相关性较弱且呈负相关。同时也说明，CO、PM10、NO₂、SO₂四种污染物是形成PM2.5的主要因素，而O₃则在一定程度上阻止了PM2.5的形成。然而，相关系数仅是刻画变量之间线性程度的量，只表明两个变量的共变联系，为了更准确的分析PM2.5与其它5个分指标的关系，我们在后文中建立了多元线性回归模型^[4]。

3.3 PM2.5 与相关因素的多元线性回归模型

在前一节相关分析的基础上，发现 PM2.5 与 CO、PM10、NO₂、SO₂ 具有较强的正相关性，而与 O₃ 呈负相关。为了定量描述它们之间的相关性，我们建立了基于指标值和浓度值的 PM2.5 与相关因素的指标多元线性回归模型。

记 $y = \{y_i, i=1, \dots, n\}$ 为 n 次监测得到的 PM2.5 指标（或污染物浓度值），对应的 SO₂、NO₂、PM10、CO 以及 O₃ 指标（或污染物浓度值）用 $x_i (i=1, \dots, 5)$ 表示。则 PM2.5 与相关因素的多元线性回归方程可以表示为：

$$y = \sum_{i=1}^5 \beta_i x_i \quad (2)$$

其中， $\beta_i (i=1, \dots, 5)$ 为回归系数。我们采用附件 1 中 236 组完整的数据进行计算，先将数据分成两部分：其中 176 组用于估计回归系数，其余 60 组用于验证回归模型的准确性。表 2 为利用 176 组数据对式(2.3.1)进行最小二乘估计得到的回归系数，其中 $R_1^2 = 0.83$ ， $R_2^2 = 0.86$ 。

表2 回归系数的估计结果

回归系数	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
指标值回归模型	0.3945	0.1258	0.8418	1.9492	-0.4043
浓度值回归模型	0.1566	0.2128	0.4818	0.0377	-0.1646

根据表 2 的结果，就可以得到定量反映 PM2.5（含量）与其它 5 项分指标及其对应污染物（含量）之间相关性的多元线性回归方程。

基于指标值的 PM2.5 与相关因素的多元线性回归模型方程：

$$y = 0.3945x_1 + 0.1258x_2 + 0.8418x_3 + 1.9492x_4 - 0.4043x_5 \quad (3)$$

基于浓度值的 PM2.5 与相关因素的多元线性回归模型方程：

$$y = 0.1566x_1 + 0.2128x_2 + 0.4818x_3 + 0.0377x_4 - 0.1646x_5 \quad (4)$$

为了验证回归方程的准确性，分别利用式(3)和(4)对剩下的 60 数据进行拟合并计算其归一化均方误差（Normalized Mean Square Error, NMSE），NMSE 计算公式为：

$$NMSE = 10 \times \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - y'_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \quad (5)$$

其中， y_i 、 y'_i 分别第 i 个观测点的真实 PM2.5 值以及回归方程计算值。对式(3)和(4)进行验算得到的 NMSE 分别为-13.3834 和-14.7623，这说明本文建立的多元回归模型是可行的。进一步，分别绘制式(3)和(4)对 236 组监测数据的拟合结果图，如图 1 所示，其中第 1~176 组用来计算方程的回归参数，第 177~236 组用于验证。可以发现，式(3)和(4)具有较好的拟合效果，而且拟合值基本保持了真实值的分布性质，这也进一步说明了本文建立的 PM2.5 与相关因素的回归模型是有效的。

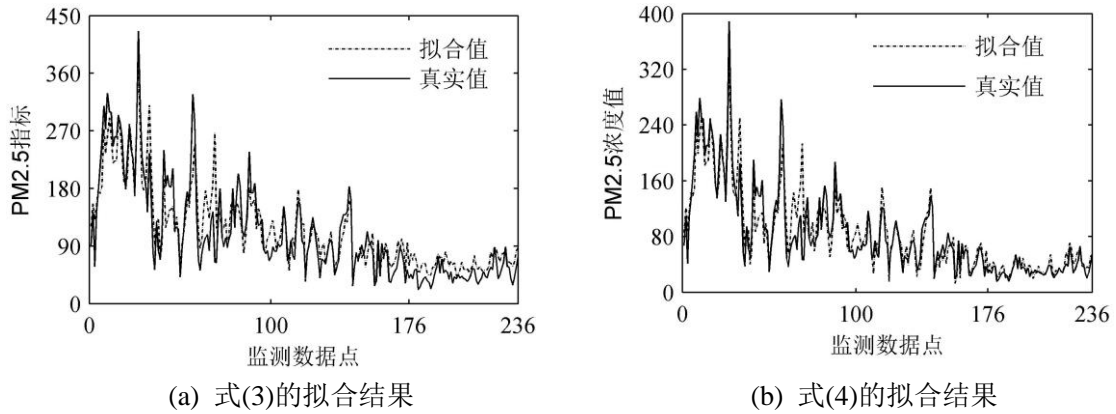


图1 回归方程对附件1中数据的拟合结果

3.4 PM2.5 多元回归模型的进一步分析

我们利用相关系数法分析了 AQI 中 6 个分指标（污染物含量）之间的相关性，发现 PM2.5 与 SO₂、NO₂、PM10、CO 有较强的正相关性，而与 O₃ 呈负相关。进一步，利用多元线性回归模型建立了 PM2.5（含量）与相关因素的多元回归方程，从而定量的描述了 PM2.5（含量）与其它 5 个分指标及其污染物（含量）之间的相关性。同时，我们利用附件中的数据对建立的回归方程加以验证，说明了其有效性。

然而，由于附件 1 中的数据比较有限，在此基础上建立的多元回归模型可能存在一定的误差。同时，考虑到实际监测的数据可能存在不完整性（比如缺少某一种或几种污染物的监测数据），导致 5 元回归模型缺乏数据而无法使用。考虑到 SO₂、NO₂、PM10、CO 等与 PM2.5 具有很强的正相关性，可以尝试建立 PM2.5 的 4 元回归模型甚至是 3 元回归模型，利用模型拟合值定性的描述 PM2.5 的分布性质，这对缺乏监测数据情况下的实际应用具有重要的意义。

4 问题二：PM_{2.5} 的分布与演变及应急处理

4.1 问题分析及解题思路

问题二中共包含四个小问，我们分别对其进行分析，并给出相应的解题思路。

4.1.1 第一小问

问题要求描述某地区 PM_{2.5} 的时空分布及其规律，并对该地分区进行污染评估。问题的关键在于利用足够的 PM_{2.5} 数据进行统计分析。但是现有的数据非常有限，附件 2 中的数据也不够完整。对此，我们的解题思路是：

- 1) 利用附件 2 中 SO₂、NO₂、PM₁₀ 的数据建立 PM_{2.5} 的 3 元线性回归方程，通过回归方程拟合 2010 年到 2012 年缺失的 PM_{2.5} 数据；
- 2) 三元回归拟合得到的 PM_{2.5} 值与真实值将会存在一定差异，但根据前面的分析，拟合值可以较好地保持真实 PM_{2.5} 值的分布性质，因此可以根据拟合值对 PM_{2.5} 进行定性的时域和空域分析。继而绘制 2010 年 1 月 1 日到 2013 年 4 月 26 日间西安市 13 个区域对应的 PM_{2.5} 拟合值曲线，并对不同区域、不同时间段的 PM_{2.5} 分布情况进行分析，以描述 PM_{2.5} 的时空分布及其规律；
- 3) 由于 PM_{2.5} 的分布往往具有季节性，因此采用以下方法进行分区污染评估：计算附件 2 中各区域从 2010 年 1 月 1 日到 2013 年 4 月 26 日之间每个季节的空气质量指数的平均值，取其对应的空气质量指数类别对各区域污染评估。

4.1.2 第二小问

问题要求充分考虑风力、湿度等因素的影响，建立 PM_{2.5} 发生和演变的数学模型，并利用该地区的数据进行定量与定性分析。由于附件中缺乏湿度的量化数据，我们仅定量地研究 PM_{2.5} 与风力之间的相关性，对 PM_{2.5} 与湿度的关系则进行定性说明：

- 1) 结合适当的假设，利用高斯扩散模型建立了简化的 PM_{2.5} 连续点源扩散模型，并对模型参数的确定方法进行说明；
- 2) 提取附件 2 中的两组数据分别建立其扩散模型，绘制正下风向某处的扩散分布图，继而分析 PM_{2.5} 浓度的扩散规律，对建立的 PM_{2.5} 扩散模型进行定量与定性分析；
- 3) 根据附件 2、3 中的数据，对 PM_{2.5} 与湿度的关系进行定性的说明。

4.1.3 第三小问

问题要求建立 PM_{2.5} 浓度急剧升高的突发情形下的污染扩散预测与评估方法，并利用实例进行验证。我们假设污染源 PM_{2.5} 的浓度是在瞬间增加的，但是污染物的扩散过程是不能突变的，也就是说污染源的浓度急剧升高后，周边区域的 PM_{2.5} 浓度在短时间内不会发生改变。在这基础上，我们进行以下工作：

- 1) 将 PM_{2.5} 浓度值急剧升高后的污染源（新污染源）作为连续稳定的点源，建立新污染源的扩散方程；
- 2) 针对正下风向 x 处（任意 t 时刻）的 PM_{2.5} 浓度值预测问题，考虑到新污染源仅仅持续一段时间，在这之后 PM_{2.5} 的浓度值将恢复原有水平。对此，根据所处的位置分析在 t 时刻 x 处的 PM_{2.5} 浓度是受新污染源影响还是受初始污染源影响，然后利用对应的污染源扩散方程预测 PM_{2.5} 浓度值，并换算其对

应的空气质量指数，继而做出污染评估；

- 3) 以附件 2 中人民体育场 PM2.5 浓度值最大的一天为例子，将浓度增值 2 倍并持续 2 小时，利用前面建立的扩散模型进行预测评估；再统计下风向不同区域的污染等级情况，绘制重度污染区和安全区。

4.1.4 第四小问

问题要求采用适当方法对建立的模型进行验证，说明其合理性，继而探索 PM2.5 的成因和演变等一般性规律。问题解决的关键是选取附件中合适的数据进行验证实验，我们的基本思路是：

- 1) 在附件 2 中选择两个监测点 A 和 B，从中选取 A 点 PM2.5 浓度值变化对 B 点 PM2.5 浓度值变化影响较强的两组数据（第 $k, k+1$ 天的监测数据）；
- 2) 以 A 为污染源建立扩散模型（PM2.5 浓度值取该点第 k 天的监测值），预测第 $k+1$ 天 B 点因 A 点污染扩散而产生的 PM2.5 浓度值，再结合 B 点第 k 天的 PM2.5 浓度值估计 B 点第 $k+1$ 天的 PM2.5 浓度（合理考虑其它污染源的 B 点的影响），将该值与真实测量值进行比较，从而验证本文扩散模型的合理性。
- 3) 根据实验分析的结果以及已有的研究成果，探索 PM2.5 的成因、演变等一般性规律。

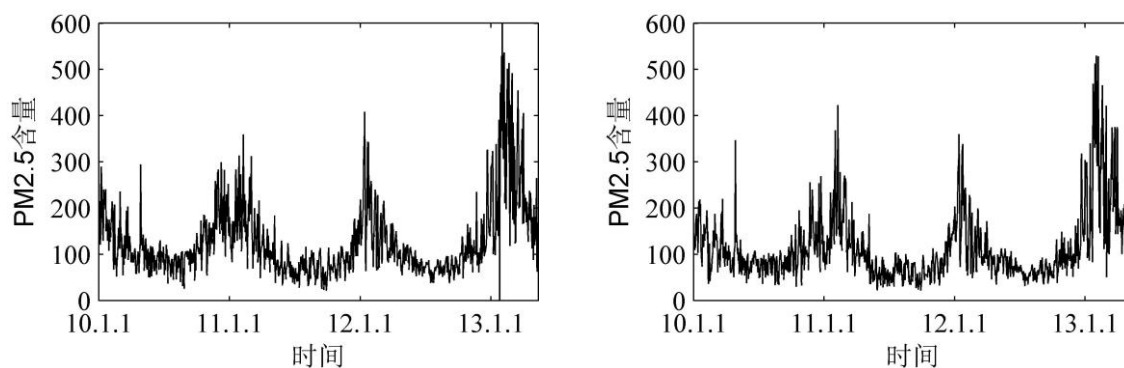
4.2 PM2.5 的时空分布规律以及分区污染评估

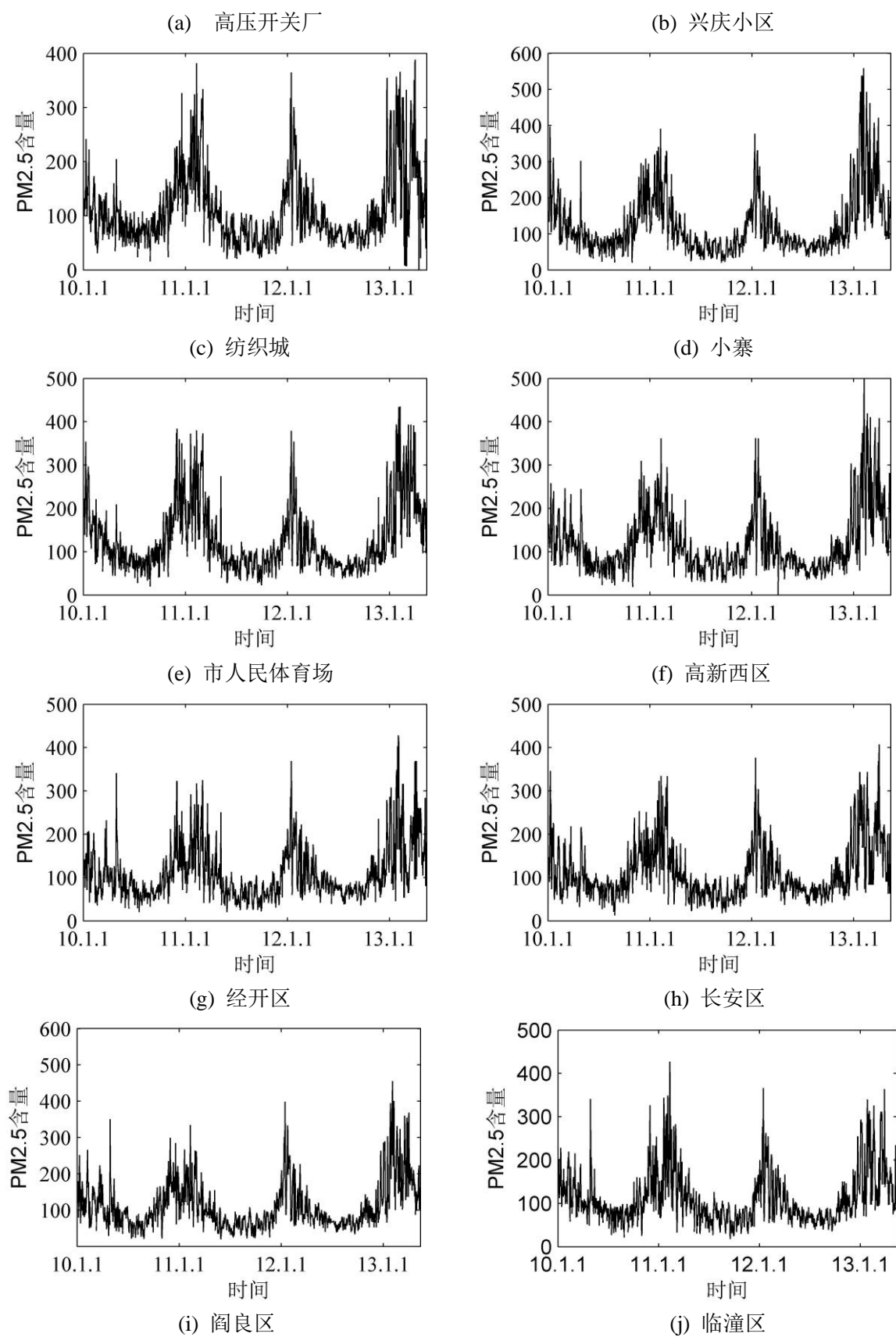
4.2.1 PM2.5 的时空分布及其规律

在第二章中我们建立了关于 PM2.5 的五元回归模型，由于附件 2 中缺损了非常多 PM2.5、CO、O₃ 的数据，无法采用五元回归模型拟合 PM2.5 的数据。但是我们发现，SO₂、NO₂、PM10 与 PM2.5 呈正相关，能够定性的反映 PM2.5 的分布规律。因此，我们通过建立 PM2.5 与 SO₂、NO₂、PM10 的三元回归模型，对 2010 年到 2013 年缺损的 PM2.5 值进行补充。类似第二章的方法，我们利用附件 1 的数据建立 PM2.5 污染物含量的 3 元线性回归模型，计算得到的回归方程为（ $R^2 = 0.79$ ）：

$$y = 0.9172x_1 - 0.01x_2 + 0.5444x_3 \quad (6)$$

其中 y 对应 PM2.5 的浓度值， $x_i (i=1, \dots, 3)$ 对应 SO₂、NO₂、PM10 的浓度值。利用式(6)对附件 2 中 13 个地区的 PM2.5 值进行拟合，并绘制相应的“PM2.5—时间”曲线，如图 2 所示（横坐标为时间，从 2010 年 1 月 1 日记录到 2013 年 4 月 26 日；纵坐标表示 PM2.5 污染物的浓度值，单位为 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ），对不完整的监测数据，我们不进行回归拟合，也不在图中进行绘制；图 3 为西安市 13 个监测点的位置图。





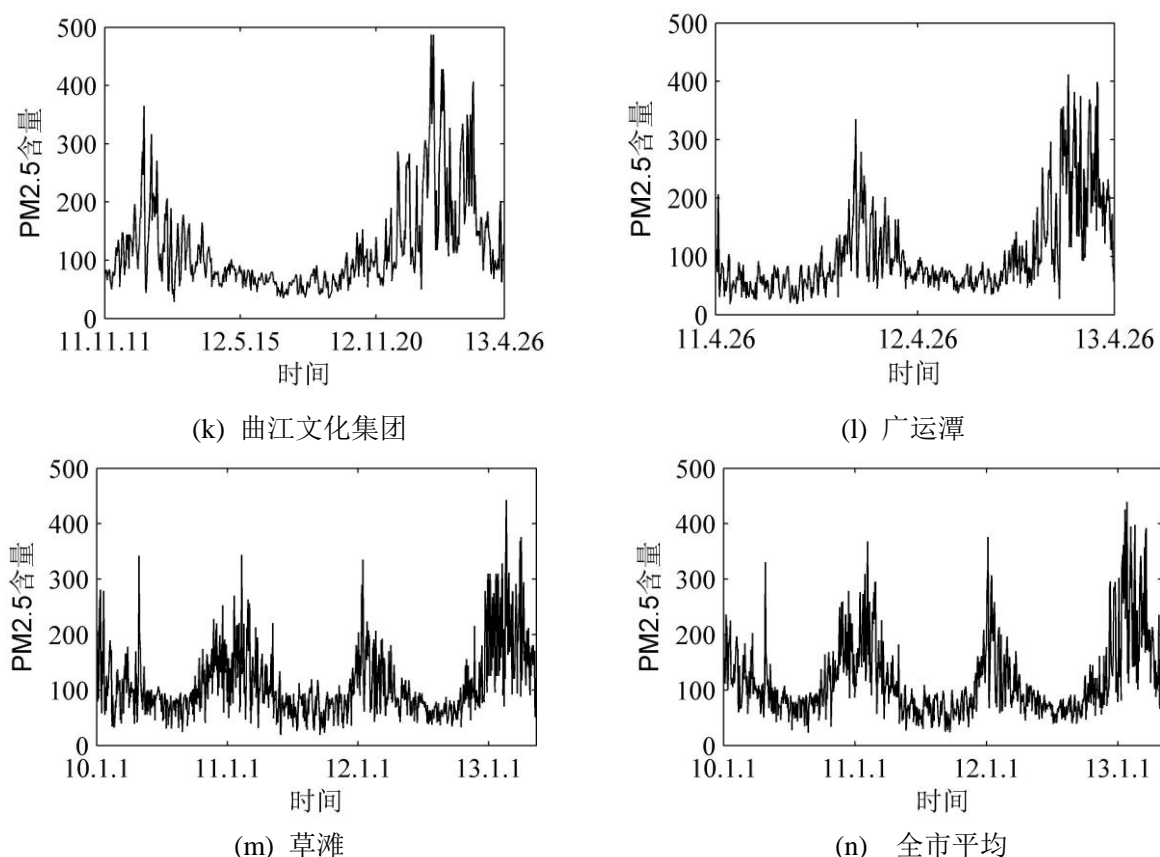


图2 2010.1.1 到 2013.4.26 之间西安市不同区域 PM2.5 浓度估计值曲线



图3 西安市 13 个监测点的位置图

进一步，统计不同区域 4 个季节拟合 PM2.5 的平均值（如表 3 所示），结合图 3 对图 2 中的“PM2.5—时间”曲线进行分析，可以得出西安市 PM2.5 的时空分布及其规律：

(1) 西安市 PM2.5 的时间分布及其规律

- 1) PM2.5 值分布以 1 年为周期呈周期性变化，具有季节性。图 2 中 14 条曲线均表现出周期性的特点，PM2.5 平均浓度从高到低为：春、冬、夏、秋，而且

春季的平均 PM2.5 值是秋季的 2 倍以上，全年平均 PM2.5 值与冬季基本保持一致。因此，PM2.5 值具有明显的季节性。

- 2) PM2.5 值在过年前后有所下降。从图 2 中每条曲线在 1 月 1 日后均会出现段“波谷”，但持续时间较短、之后又急剧增加，出现的时间在中国农历春节（2 月份左右）前后。这可能是由于 PM2.5、NO₂、PM10 等污染物排放量较大的工厂、企业在过年期间停工，以及政府加大春节期间减排措施造成的。

（2）西安市 PM2.5 的区域分布及其规律

- 1) PM2.5 值分布具有区域差异性。在图 2 中，阎良区、临潼区、草滩、长安区等分布在市郊的监测点的 PM2.5 分布情况与小寨、市人民体育场等市中心监测点的 PM2.5 分布情况具有一定的差异，比如平均 PM2.5 值相比市中心要略低（如表 3 所示），原因可能是郊区 PM2.5 污染源较少、且扩散较块。
- 2) PM2.5 值分布具有区域相关性。由于 PM2.5 受到风速、湿度等因素的影响，会逐渐向四周扩散，从而影响邻近监测点的监测结果，表现出一定的区域相关性，比如距离很近的小寨、市人民体育场、兴庆小区等，各季节的平均 PM2.5 浓度比较相近。

表 3 13 个区域四季的 PM2.5 平均值 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

区域	春	夏	秋	冬	全年
高压开关厂	146.06	74.65	53.63	94.16	95.29
兴庆小区	130.43	62.49	47.54	83.94	83.47
纺织城	122.68	60.16	47.97	83.19	81.46
小寨	148.59	65.64	47.28	87.60	89.78
市人民体育场	145.57	74.44	51.58	95.69	94.49
新高西区	133.52	66.69	47.46	94.65	88.04
经开区	116.39	63.62	47.90	90.41	81.90
长安区	120.56	63.30	48.63	85.86	81.80
阎良区	123.99	63.33	44.45	86.13	81.30
临潼区	122.04	62.73	51.24	85.57	81.67
曲江文化集团	38.29	14.44	22.10	71.33	31.19
广运潭	34.14	89.16	41.12	20.52	44.26
草滩	118.22	64.41	50.13	85.36	81.46
全市平均	132.91	66.85	48.81	86.13	85.83

4.2.2 分区污染评估

在第二章中，我们发现 PM2.5 具有季节性，对此，采用以下方法进行分区污染评估：计算每个区域在 2010 年 1 月 1 日至 2013 年 4 月 26 日之间每个季节空气质量指数的平均值，进而取其对应的污染等级作为每个季节度污染评估的结果。需要说明的是，由于附件 2 中缺少 2013 年之前的 PM2.5 数据，我们利用回归方程拟合 2010 年到 2013 年间缺失的 PM2.5 数据。利用上述方法进行计算，同时计算各区全年的空气质量指数平均值，取其对应污染程度作为全年污染评估结果。各区污染评估结果如表 4 所示，特别说明，由于曲江文化集团和广运潭缺少部分数据，我们分别从 2011 年 11 月 11 日和 2011 年 4 月 26 日开始计算，这也导致统计结果与其它区域差异较大。根据表 4，我们发现西安市 13 个不同区域的污染评估结果具有较强的季节性。

具体来看，PM2.5 平均值由高到低依次为春季、冬季、夏季、秋季，春季污染等级多为中度，冬季则多为轻度且与全年平均水平大致相当，夏季和秋季的污染等级多为良；这同时也验证了我们前面得出的 PM2.5 具有季节性、呈开口向上抛物线分布的

结论。

表 4 西安市 13 个区域不同季节的污染评估以及全年污染评估

区域	PM2.5 指标				污染等级			
	春	夏	秋	冬	春	夏	秋	冬
高压开关厂	193.65	99.57	73.29	123.95	中度	良	良	轻度
兴庆小区	171.80	84.36	65.67	111.18	中度	良	良	轻度
纺织城	160.98	81.45	66.21	110.24	中度	良	良	轻度
小寨	197.51	88.30	65.35	115.75	中度	良	良	轻度
市人民体育场	193.67	99.31	70.72	125.87	中度	良	良	轻度
新高西区	176.33	89.62	65.57	124.56	中度	良	良	轻度
经开区	151.98	85.77	66.13	119.27	中度	良	良	轻度
长安区	157.94	85.37	67.04	113.58	中度	良	良	轻度
阎良区	162.84	85.41	61.81	113.92	中度	良	良	轻度
临潼区	160.06	84.66	70.30	113.22	中度	良	良	轻度
曲江文化集团	54.12	20.63	31.58	95.41	优	优	优	良
广运潭	48.78	117.70	57.64	29.31	优	轻度	良	优
草滩	154.59	86.76	68.91	112.95	中度	良	良	轻度
全市平均	175.58	89.81	67.27	113.92	中度	良	良	轻度

4.3 PM2.5 发生和演变的数学模型

4.3.1 PM2.5 生成和演变分析

PM2.5来源复杂，既有来自燃煤、机动车排放、建筑尘、扬尘和生物质燃烧等污染源排放的一次微粒，也有来源于由气态污染物通过化学转化生成的二次硫酸盐和硝酸盐及大气中的有机气态前体物经过均相转化、非均相转化而形成的二次有机碳（SOC）等二次微粒；并且PM2.5成分也十分复杂，主要包括元素碳、有机碳化合物、硫酸盐、硝酸盐、铵盐和各种金属元素。

由于受到风力、气流等影响，PM2.5 形成后会在大气环境中进行扩散，而且具有停留时间长、可促成二次污染、传输距离远的特点。针对某区域的 PM2.5 浓度，它主要受到以下方面的影响：

- (1) 该区域原有的 PM2.5 浓度。由于重力、风力作用该区域的 PM2.5 也在不断扩散，特别地还受到天气因素的影响而发生变化，比如降雨会显著降低 PM2.5 浓度值。
- (2) 邻近 PM2.5 污染源的扩散会导致该区域 PM2.5 浓度值升高。
- (3) 通过化学转化生成的二次硫酸盐和硝酸盐等也会增加 PM2.5 的浓度。
- (4) 由于该区域人为排放产生的 PM2.5，比如机动车污染排放、生物质燃烧、工业排放等。

4.3.2 PM2.5 的连续点源扩散模型

为了刻画 PM2.5 的发生和演变规律，关键是建立一个准确的 PM2.5 扩散模型，从而预测和计算各种条件下 PM2.5 浓度值在传输过程中的时空分布规律。由于附件 2 中没有给出任何关于地面、源高以及湿度等信息，我们仅定量地研究 PM2.5 与风力之间的相关性，而对 PM2.5 与湿度的关系进行定性分析。假设污染源的源高为 0，将

PM2.5 扩散问题看成二维平面的扩散问题。结合梯度输送理论、湍流扩散等理论，则 PM2.5 的平流扩散方程可以表示为^{[5][6]}：

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial c}{\partial z}) \quad (7)$$

其中， c 为 PM2.5 的地面浓度 (g/m^3)； u 为 t 时刻的风速， u_x, u_y, u_z 分别为 t 时刻风速在 x, y, z 方向上的分量； K_x, K_y, K_z 为 x, y, z 方向上的湍流扩散系数。由于扩散系数的数值与大气湍流的尺度有关，并随时间不断变化，以致无法直接求得结果。因此，上述扩散方程不能直接求解，只能针对具体条件获得简化条件下的解析解。在本文中，为了得到式(7)的解析解，我们做出以下合理假设：

1) PM2.5 污染源强是稳定连续的（即源强不变），且扩散为定常态（ $\partial c / \partial t = 0$ ）。

其中源强记为 Q ，表示单位时间和单位面积内通过的污染物的质量；

2) 平均风速场不变，且风的方向与 x 轴的方向保持一致，则 $u_y, u_z = 0$ ；

3) 整个扩散过程 PM2.5 质量守恒，且扩散系数为常数；

4) PM2.5 浓度在 y, z 方向上符合高斯分布。

通过以上 4 项简化条件，式(7)就可以转化为：

$$u_x \frac{\partial c}{\partial x} = K_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (8)$$

边界条件为：

$$\begin{cases} x = y = z \rightarrow \infty \text{ 时, } c \rightarrow 0 \\ x = y = z \rightarrow 0 \text{ 时, } c \rightarrow \infty \\ Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u c dy dz \end{cases} \quad (9)$$

其中 c_0 表示污染源处 PM2.5 的浓度， k_0 为一常数，需要根据实际情况而确定。设

$x = ut$ ，令 $\sigma_y^2 = 2K_y t$ ， $\sigma_z^2 = 2K_z t$ （其中 σ_y 和 σ_z 分别表示侧风向与铅直方向上 PM2.5

浓度分布的标准差，其数值的大小与大气湍流强度(稳定度)有关，具体的确定方法将在下一小节中进行详细介绍），继而可以得到式(8)的解析解，即为 PM2.5 的连续点源扩散模式：

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (10)$$

4.3.3 模型参数的确定

式(10)中的参数 σ_y 和 σ_z 与大气稳定程度相关，因此需要先确定大气稳定程度的类型，再一一确定。我们采用常用的 Pasquill 法^[7]进行大气稳定度分类，它主要根据地

面气象观测数据来估计大气稳定度，把大气稳定度分成 A、B、C、D、E、F 六大类：

A：表示极不稳定大气条件，如炎热而阳光明媚的夏天；

B：表示不稳定大气条件，如有太阳、暖和天气；

C：表示稍不稳定大气条件，白天部分有云；

D：表示中等大气条件，如多云的白天或夜晚；

E：表示稍稳定大气条件，夜间部分有云；

F：表示极稳定大气条件，如在晴朗夜晚。

各类大气稳定度与地面观测气象数据的分类关系如表 5 所示：

表 5 Pasquill 大气稳定度分类表					
地面风速(m/s)	白天日照强度			夜间天空云量	
	强	中	弱	$\geq 5/10$	$\leq 4/10$
$u < 2$	A	A-B	B	—	—
$2 \leq u < 3$	A-B	B	C	E	F
$3 \leq u < 4$	B	B-C	C	D	E
$4 \leq u < 6$	C	C-D	D	D	D
$u \geq 6$	C	D	D	D	D

进一步，我们利用 Briggs 内插公式法^[6]来计算城市地区扩散系数值，具体的计算方法见表 6。

表 6 Briggs 城市地区扩散系数计算方法		
大气稳定度	σ_y	σ_z
A-B	$0.32x(1+0.0004x)^{-1/2}$	$0.24x(1+0.0001x)^{-1/2}$
C	$0.22x(1+0.0004x)^{-1/2}$	$0.20x$
D	$0.16x(1+0.0004x)^{-1/2}$	$0.14x(1+0.0003x)^{-1/2}$
E-F	$0.11x(1+0.0004x)^{-1/2}$	$0.08x(1+0.0015x)^{-1/2}$

这样，PM2.5 的连续点源扩散模型的完全建立起来了。在 4.3.4 节中，我们将对该模型进行定性与定量分析，从而验证其有效性。

4.3.4 PM2.5 扩散模型定量与定性分析

为了定量分析 4.3.2 节建立的 PM2.5 的连续点源扩散模型，我们利用阎良区和临潼区的两组监测数据进行实验。由于数据中没有具体的风速大小，在本文实验中根据风力确定一个合理的风速进行实验（风力 3 级风速为 3.4~5.4m/s），继而可以确定大气稳定度。具体数据如表 7 所示。

表 7 PM2.5 扩散模型定量分析采用的监测数据							
监测时间	监测地点	PM2.5 指标值	PM2.5 浓度值($\mu\text{g}/\text{m}^3$)	风力风向 (白天/夜)	风速 (m/s)	天气状况 (白天/夜间)	大气稳定度
2013/1/19	阎良区	365	315	南风 ≤ 3 级/ 南风 ≤ 3 级	4	阴/小到中雪	D

2013/4/9	临潼区	74	54.2	北风 \leq 3级/ 北风 \leq 3级	2	晴/晴	A
----------	-----	----	------	-------------------------------	---	-----	---

根据以上数据，绘制正下风向的 PM2.5 扩散分布图(见图 4)，源强取 $Q=1000uc_0$ ， y,z 轴的单位为 “m”，纵轴为 PM2.5 的浓度，单位为 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ 。部分 PM2.5 扩散浓度的数据如表 8 所示。

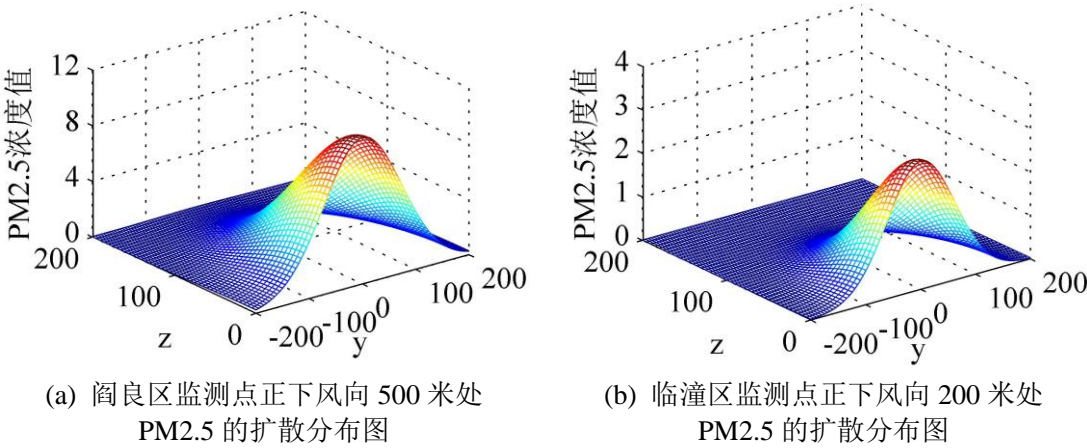


图 4 正下风向的 PM2.5 扩散分布图

表 8 不同正下风向处的最高浓度值($\mu\text{g}/\text{m}^3$)

监测区域	正下风向的距离/m									
	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
阎良区	231.6	104.7	59.87	38.94	27.48	20.51	15.94	12.79	10.52	8.821
临潼区	45.49	11.51	5.178	2.947	1.908	1.340	0.996	0.771	0.616	0.504

结合图 4 和表 8，可以发现 PM2.5 的扩散具有以下规律：

- 1) PM2.5 污染物从污染点源开始向四周扩散，并呈现正下风方向的浓度高于其它方向。从图 4 直观地看，正下风向某处 PM2.5 的扩散分布曲线呈中间高、四周低的形状；而且 PM2.5 浓度值在 $(x,0,0)$ 处达到最大，并沿着 y,z 方向逐渐递减，基本符合高斯分布。这说明，污染点源的大部分 PM2.5 污染物沿着风的方向扩散，越靠近正下风方向 PM2.5 的浓度越高，而向垂直方向扩散的 PM2.5 的量相对较少。
- 2) PM2.5 的浓度沿着正下风方向值呈下降趋势。结合表 8，随着监测点与 PM2.5 污染点源距离的增加，PM2.5 的浓度值逐渐降低。也就是说，当距离足够远时，PM2.5 污染点源将不会对该地区的 PM2.5 值造成影响。

4.3.5 PM2.5 与湿度的关系

由于附件中没有湿度的量化数据，我们无法建立 PM2.5 与湿度之间定量的表达式。对此，利用附件 2、3 分别统计 13 个区域在 2013 年 4 月中天气状况分别为晴天和多云（或雨天）的监测点，绘制晴天和多云天 PM2.5 平均值的散点图，如图 5 所示。横坐标表示西安 13 个监测点，纵坐标表示 PM2.5 浓度值 ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)。根据图 5 可以发现，多云/雨天的平均 PM2.5 浓度值明显高于晴天的平均 PM2.5 浓度值。这说明，PM2.5

浓度值与湿度具有正相关关系。这是因为湿度较大时加速了气态污染物通过化学转化生成二次硫酸盐和硝酸盐等污染物，从而使该地的 PM2.5 值在短期内快速升高。

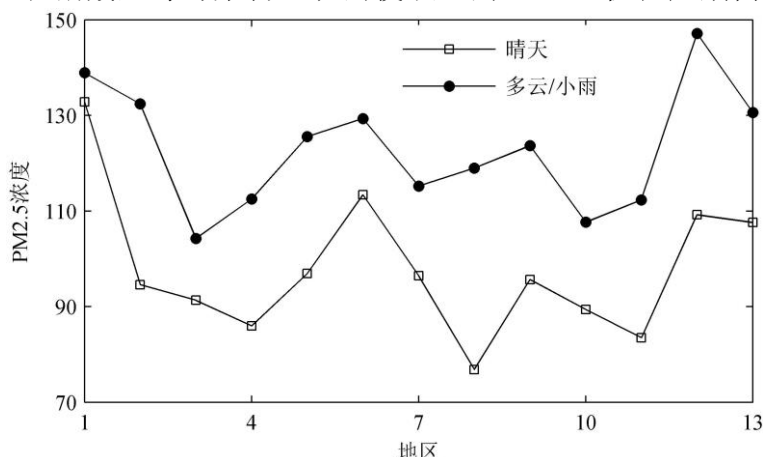


图 5 2013 年 4 月里晴天和多云条件下的 PM2.5 平均值

4.4 突发情况下的 PM2.5 扩散预测与评估方法

在 4.3 节中，我们建立了基于稳定污染源的 PM2.5 扩散模型，但在实际应用中，往往会出现源强发生较大变化的情况，比如 PM2.5 的浓度因为某种突发原因增至数倍且具有一定持续性。对此，我们利用 4.3 节建立的 PM2.5 扩散模型，研究 PM2.5 浓度激增情况下的污染扩散预测与评估方法。

4.4.1 污染浓度激增情况下的 PM2.5 扩散模型

不妨假设 PM2.5 增加的倍数为 K ，持续的时间为 T ，则该突发情况与第 4.3 节中 PM2.5 连续点源扩散模型条件的差异在于源强发生了改变。对此，我们假设 PM2.5 浓度值在激增时是瞬间完成的，但是浓度激增后的 PM2.5 污染源不能立即改变四周的浓度值，即在短时间内周边区域的浓度值将不受浓度激增后的污染源的影响。下面针对 PM2.5 浓度值激增 K 倍且持续 T 时间的条件，建立特殊情况下的 PM2.5 污染扩散预测和评估的方法。为了叙述方便，本文定义 PM2.5 浓度值发生突变前的污染源为初始污染源，发生突变之后的污染源为新污染源。

不失一般性，记 PM2.5 浓度值发生突变的时刻为 t_0 ，进而对 t 时刻污染扩散情况并作污染评估。与 4.3 节类似的，我们假设 PM2.5 浓度激增 K 倍后在 T 时间内是一个连续稳定的污染源。记 PM2.5 初始污染源的浓度和源强分别为 c_0 、 Q_0 ，那么 PM2.5 浓度激增 K 倍后的新污染源的浓度和源强可以表示为 Kc_0 、 Q_K 。PM2.5 从污染源扩散到污染源正下风向距离 x 处所需要的时间为 $t_1 = x/u$ ，为了分析在任意 t 时刻 x 处的扩散分布情况，我们按时间 t 分类进行讨论：

- 1) $t_0 \leq t < t_0 + t_1$ ：此时新污染源还没有扩散到 x 处，即 x 处仍受初始污染源的扩散影响，其 PM2.5 浓度值应该根据下式进行计算；

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (11)$$

2) $t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + t_1 + T$ ：此时初始污染源不再影响 x 处的 PM2.5 浓度，而是受新污染源扩散的影响，浓度值应该按照下式进行计算：

$$\hat{c}(x, y, z) = \frac{Q_K}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (12)$$

3) $t_0 + t_1 + T < t$ ：由于新污染只持续 T 时间，则污染源在 $t_0 + T$ 时刻的浓度值恢复为初始的 c_0 。而当 $t_0 + t_1 + T < t$ 时，新污染源恰好通过 x 处向前扩散，即 x 处将继续受初始污染源的影响。因此此时 PM2.5 浓度值应根据式(11)计算得到。综上可得，污染源正下风向 x 处任意 $t(t \geq t_0)$ 时刻的 PM2.5 浓度值的计算方程为：

$$c(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q_0}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right), t_0 \leq t < t_0 + t_1 \text{ 或 } t_0 + t_1 + T < t \\ \frac{Q_K}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right), t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + t_1 + T \end{cases} \quad (13)$$

在式(13)的基础上，就可以针对扩散情况进行预测，并对某地的 PM2.5 浓度进行估算，进而做出污染评估。这部分内容我们将在下一节进行说明。

4.4.2 污染浓度激增情况下的污染扩散预测与评估方法

利用式(13)，可以对 PM2.5 浓度值激增后的扩散情况进行预测，从而分析不同区域的 PM2.5 浓度值以及污染情况。特别的，我们就某位置 PM2.5 浓度的预测方法进行说明，继而可以根据 PM2.5 浓度值对污染程度作出评估。先以 PM2.5 污染源为原点，风力方向为 x 轴建立空间直角坐标系，其中 z 轴垂直地面向上， y 轴根据右手规则确定。那么，可以按照以下步骤对 t 时刻某区域的 PM2.5 值进行预测并做污染评估：

步骤 1：根据空间直角坐标系求得该预测区域的中心坐标，记为 (x_1, y_1, z_1) ，其中当 $z_1 = 0$ 时表示计算地面的 PM2.5 浓度；

步骤 2：根据预测区域的气象数据判断其大气稳定度，以此估计扩散系数 σ_y 和 σ_z ；

步骤 3：根据式(13)确定的 PM2.5 扩散模型预测 t 时刻预测区域的 PM2.5 浓度值；

步骤 4：根据得到的 PM2.5 浓度值，将其转换为空气质量指标，并以此作出污染评估，即判断其污染等级。

4.4.3 实例计算

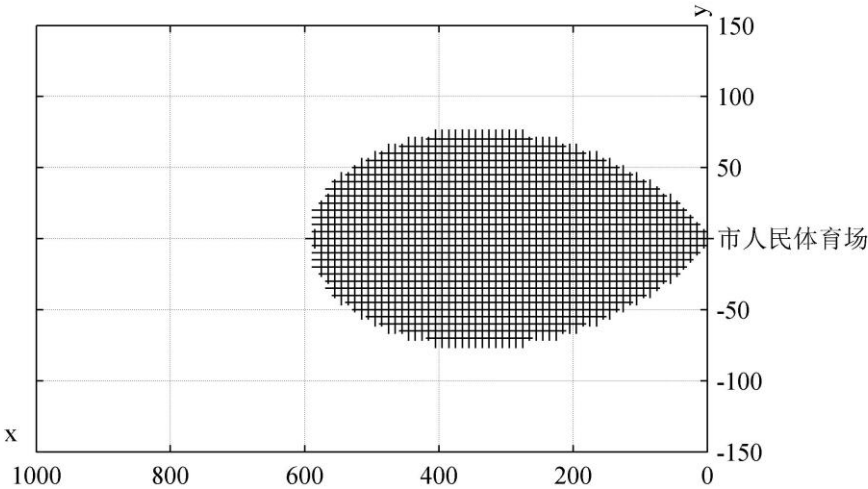
根据题目要求，从附件 2 中西安市 13 个监测区域中选择 PM2.5 浓度值最高的一

天（2013/2/20）作为实例进行计算，该天具体的数据如表 9 所示，共有四个监测点的 PM2.5 指标值达到最大值 500，我们选取市人民体育场监测点的数据进行实验。类似的，取风速为 3m/s，对应的大气稳定度为 D，源强取 $Q = 4000uc_0$ 。

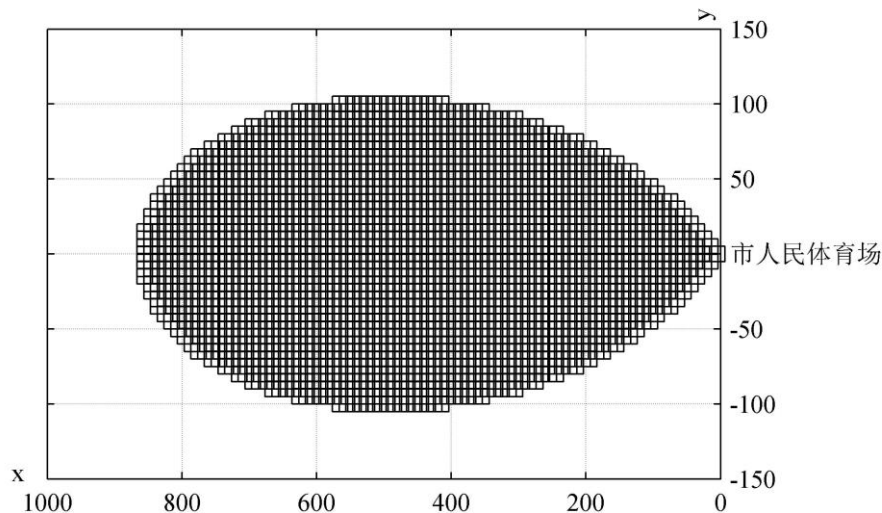
表 9 2013/2/20 的气象观测数据					
监测地点	PM2.5 浓度值	风力风向 (白天/夜间)	天气状况 (白天/夜)	风速 (m/s)	大气稳定度
高压开关厂	500 $\mu\text{g}/\text{m}^3$	东风 \leq 3 级/ 东风 \leq 3 级	多云/多云	3	D
兴庆小区					
高新西区					
市人民体育场					

然后，以 PM2.5 污染源为原点，正西方向为 x 轴方向，正北方向为 y 轴方向，垂直向上的方向为 z 轴方向建立空间直角坐标系。根据题目要求，PM2.5 浓度值升至 2 倍，即为 $1000\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，持续时间为 2 小时，由于风速为 3m/s，则 2 小时内 PM2.5 最远可以扩散至正下风向 21.6 公里处。利用表 9 的数据以及式(13)，计算市人民体育场监测点西侧区域的 PM2.5 浓度值，将浓度值转换为空气质量指数，统计相应的空气质量指数级别。根据空气质量指数级别的差异，可能安全区域的要求是污染等级小于等于 2 级，即污染等级为优或良。继而，绘制重度污染和可能安全的区域如图 6 所示。其中，“市人民体育场”标记处表示 PM2.5 污染源的位置，即为人民体育场监测点； y 轴方向向上（向北）， x 轴方向向左（向西），且坐标单位为 m。

图 6 中，图(a)的黑色区域表示重度污染以上（含严重污染）的区域，图(b)中黑色区域表示轻度污染以上的区域，因此可能安全区域为白色的区域。可以看出，重度以上污染区主要集中在市人民体育场西侧 $[-75:75,0:600]$ 的区域内，而轻度以上污染区主要集中在市人民体育场西侧 $[-100:100,0:860]$ 的区域内，即该范围以外的区域为安全区，污染等级为优或良。



(a) 重度污染区域(黑色区域)



(b) 可能安全区域(白色区域)

图 6 预测评估得到的重度污染区和可能安全区

4.5 PM2.5 扩散模型的验证及拓展

4.5.1 扩散模型验证实验的设计

为验证本文建立的 PM2.5 扩散模型的合理性,需要选取附件中合适的数据进行设计验证实验,我们的基本思路是:

第一步:选取两个合适的监测点 A 和 B,按以下规则寻找连续两天的监测数据进行实验:在第 k 天 A 处于上风向而 B 处于下风向,且 A 监测点的 PM2.5 浓度相比第 $k-1$ 天急剧增加而 B 监测点的 PM2.5 浓度基本没有发生变化;但是在第 $k+1$ 天, B 监测点的 PM2.5 浓度相比第 k 天有明显增加。也就是说需要寻找 A 点 PM2.5 浓度值变化对 B 点 PM2.5 浓度值变化影响较强的监测数据进行实验。

第二步:利用上文方法建立 A 监测点的污染扩散模型,预测第 $k+1$ 天 B 监测点因 A 监测点污染扩散而产生的 PM2.5 浓度值,再结合 B 监测点的 PM2.5 浓度值得到 B 监测点第 $k+1$ 天的 PM2.5 预测值,将该值与真实测量值进行比较,分析两者的误差,从而验证本文扩散模型是否合理。

特别的,针对 B 监测点 PM2.5 预测值的计算方法进行必要说明。B 监测点的 PM2.5 浓度主要受以下方面的影响: A 监测点污染源的污染扩散、B 监测点第 k 天的污染程度、B 监测点在第 $k+1$ 天自己产生的污染以及其它污染源的污染扩散等。在本文中,由于 B 监测点自己产生的污染由于缺乏数据而难以量化而不予考虑;针对其它污染源的影响,我们在选择数据时尽可能选择与其它污染源无关的数据。因此我们主要考虑 A 监测点污染源的污染扩散和 B 监测点第 k 天的污染浓度(记为 $c_B(k)$)对 B 监测点

第 $k+1$ 天的 PM2.5 浓度(记为 $c_B(k)$)进行预测。预测方法为(其中 c'_A 为 A 监测点污染扩散产生的浓度):

$$c_B(k+1) = c_B(k) + c'_A \quad (14)$$

如果不存在满足第一步条件的数据，即 B 监测点也受到其它污染源的影响，此时还要适当考虑其它污染源对 B 监测点的影响。对与 B 监测最近的数个污染源建立扩散模型，联合估计 B 监测点的 PM2.5 浓度，计算公式可以表示为：

$$c_B(k+1) = c_B(k) + c'_A + \sum_{i=1}^n c'_i \tag{15}$$

其中 c'_i 为由第 $i(i=1,...,n)$ 个污染源扩散产生的 B 监测点的 PM2.5 浓度。

4.5.2 数值实验

由于没有找到满足我们设计条件的数据，因此我们从附件中选择两组连续的监测点数据进行实验，结果如表 10 所示。

表 10 用于模型验证的监测数据($\mu\text{g}/\text{m}^3$)

日期	天气状况 (白天/夜间)	风力风向 (白天/夜间)	人民体育场	小寨	纺织城	兴庆小区
2013-3-12	阴/晴	东北风 ≤ 3 级/西风 ≤ 3 级	215	143	312	224
2013-3-13	多云/阴	东风 ≤ 3 级/东风 ≤ 3 级	266	203	346	265

使用地图工具测量到人民体育场距离小寨大约 5 公里，而且在其北部；兴庆小区在小寨东北部 5.7 公里处；纺织城在小寨东北大约 12 公里处，如图 7 所示。然后利用 2013 年 3 月 12 的数据（风速取 3m/s，大气稳定等级为 D）分别建立兴庆小区和人民体育场监测点的 PM2.5 扩散模型，按照式(15)对小寨监测点 2013 年 3 月 13 日的 PM2.5 浓度值进行预测，预测如表 11 所示。其中预测 PM2.5 浓度值为 $183.4 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，真实测量值为 $203 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，误差为 $19.6 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 。这说明，本文建立的扩散模型是基本合理的，但是也还存在一定的误差。分析误差产生的原因，主要包含两个方面：一是模型本身是简化的扩散模型，与实际存在一定差异；二是 2013 年 3 月 13 日天气为多云，湿度比前一天大，根据前文的分析，多云天气的 PM2.5 浓度值往往明显升高，导致预测的数值与实际测量值有所差异；三是 2013 年 3 月 12 日夜里刮西风，导致从兴庆小区和纺织城扩散到小寨的 PM2.5 中有一部分被吹回，也对最终的预测结果产生了影响。



图 7 几个监测点的位置

表 11 2013.3.13 日小寨的 PM2.5 预测值与真实测量值($\mu\text{g}/\text{m}^3$)

2013.3.13~小寨的 PM2.5 来源					测量值	误差
兴庆小区	人民体育场	纺织城	小寨 (2013.3.12)	总计 (预测值)		
29.2	3.8	7.4	143	183.4	203	19.6

4.5.3 PM2.5 的成因与演变规律的探索

根据本文建立的 PM2.5 扩散模型以及已有的研究成果，我们对 PM2.5 的成因和演变规律进行了分析，并总结如下：

(1) PM2.5 的成因。PM2.5 来源广泛，包括自然过程和人为排放过程，主要是人为排放，而 SO_2 (硫的氧化物)、 NO_2 (氮的氧化物)、CO 等物质形成的水的微小液滴、微小液滴和微小颗粒是形成 PM2.5 的主要物质。其中，人为排放部分包括化石燃料（煤、汽油、柴油、天然气）和生物质（秸秆、木柴）等燃烧、道路和建筑施工扬尘、工业粉尘、餐饮油烟等污染源直接排放的颗粒物，也包括由一次排放出的气态污染物（主要有二氧化硫、氮氧化物、挥发性有机物、氨气等）转化生成的二次颗粒物；自然来源则包括风扬尘土、火山灰、森林火灾、漂浮的海盐、细菌等。

(2) PM2.5 的演变。受到风力等影响，PM2.5 在形成后会在大气环境中发生扩散。本文就 PM2.5 扩散问题建立了简化的连续点源扩散模型，对 PM2.5 的演变进行分析并提出了污染扩散预测方法。实际上，PM2.5 在演变过程中还会受到湿度、温度、地形地貌等因素的影响，比如阴天气会明显降低 PM2.5 的扩散，而降雨会使 PM2.5 明显降低，同时在扩散过程中也会有新的 PM2.5 产生，建立符合实际的 PM2.5 扩散模型对空气质量监控与预测具有重要的意义。

5 问题三：空气质量的控制管理

5.1 问题分析及解题思路

问题三要求制定附件 1 所在地区 PM2.5 的减排治污可行规划，治理的目标为五年内从目前的年平均浓度 $280\mu\text{g}/\text{m}^3$ 逐年降低到 $35\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，并给出每年的全年年终平均治理目标。继而，要求给出合理的专项治理计划，使 PM2.5 即达到既定减排计划，同时使经费投入最少，并给出五年投入总经费以及逐年轻费投入的预算计划，然后论述方案的合理性。由于该地区 PM2.5 的浓度值估计为 $280\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，严重危害着市民的健康，对其的治理具有很强的紧迫性，因此应采用“先速降、后缓降”的方式，并要综合考虑计划的可行性。针对第一问：

- 1) 分析武汉市 PM2.5 的主要来源及其贡献率，按照其贡献率比例分配 PM2.5 治理指标：贡献率越大，要求完成的治理指标越高；
- 2) 针对不同 PM2.5 的主要来源，分析其治理措施的有效性、周期性等特点，然后分别设计每年的年终平均治理指标；
- 3) 根据 PM2.5 主要来源制定的治理计划，得到综合的 5 年治理计划，继而给出每年的全年年终平均治理指标。

针对第二问：

- 1) 将 5 年治理指标按比例 P 分配给综合治理和专项治理来完成，继而得到每年的投入经费与 5 年投入总经费的数学表达式，在完成第一问预订治理目标的

前提下，以总经费尽可能低、每年投入经费的差异尽可能小为优化目标，对专项治理计划进行优化；

- 2) 根据优化的结果，给出五年投入总经费和逐年轻费投入的预算，并对专项治理方案的合理性进行说明。

5.2 基于二级分配指标的 PM2.5 污染治理计划

5.2.1 基于 PM2.5 污染来源的一次指标分配

根据题目的要求，5 年内武汉地区 PM2.5 总的治理指标为： $C=280-35=245\mu\text{g}/\text{m}^3$ 。由于附件 1 中给出的数据比较有限，以此分析武汉地区 PM2.5 的主要来源显得不够充分。对此，我们参考成海容、王祖武等在 2012 年发表的论文《武汉市城区大气 PM2.5 的碳组分与源解析》^[8]中的结论。他们结合 PM2.5 所含的水溶性离子、微量元素组成，利用正矩阵因子分析（PMF）模型对武汉市城区大气 PM2.5 的来源进行解析，结果表明，其主要来源及贡献率分别为机动车源（27.1%）、二次硫酸盐和硝酸盐（26.8%）、工厂排放（26.4%）和生物质燃烧（19.6%）。由于四种主要来源贡献率的和仅为 99.9%，这主要是四舍五入造成的，对此，我们将生物质燃烧贡献率调整为 19.7%。

继而，我们对 5 年总的 PM2.5 治理指标按其来源的贡献率进行如下分配（单位为 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ）：

$$\begin{cases} C^1 = C \times 27.1\% = 66.4 \\ C^2 = C \times 26.8\% = 65.7 \\ C^3 = C \times 26.4\% = 64.7 \\ C^4 = C \times 19.7\% = 48.2 \end{cases} \quad (16)$$

其中， C^1, C^2, C^3, C^4 分别表示机动车源、二次硫酸盐和硝酸盐、工厂排放和生物质燃烧需要完成的治理指标。

5.2.2 基于年度治理措施的二次指标分配

下面针对 PM2.5 的每一种主要来源，分别设计治理计划。

（1）机动车污染治理计划

据《2012 年武汉市机动车污染防治年报》^[9]（以下简称《年报》）统计，2002 年全市机动车保有量仅为 24.04 万辆，到 2012 年全市机动车保有量达到 134.4 万辆，并将以每年 20 万量的速度增加。《年报》显示，2012 年机动车氮氧化物 NO_x 排放占到全市的 31.1%。而汽车是机动车污染物排放总量的重要贡献者，四项污染物所占比例均超过 90%（除 HC 为 89.11%）。其中，黄标车占汽车总数量的 13.09%，但黄标车排放的 NO_x 、碳氢化合物 HC、CO 和 PM 分别占到全市汽车排放量的 58.49%、48.30%、43.38%、83.35%。因此，加速淘汰黄标车成为武汉市机动车污染防治工作的重点。对此，武汉市委市政府提出 3 年内淘汰更新现有 2968 辆黄标公交车，其中 2012 年已经更新 942 辆，2013 年计划更新 1000 辆黄标公交车。

根据以上分析，我们制定 5 年内机动车污染的治理指标，不妨设第 $i(i=1, \dots, 5)$ 年

机动车污染的治理指标为 $C_i^1 (\sum_{i=1}^5 C_i^1 = C^1)$ 。由于黄标车在 2013~2014 年将被全部更新，

我们先计算这一部分的治理指标。根据前面的数据，黄标车排放四种污染物占到全市机动车排放总量的一半左右。但是到 2013 年底，黄标车将全部更新完毕，则该项措施可以减少大约 50% 的机动车污染排放量，相应的可以减少一半的 $PM_{2.5}$ 指标，因此，第 $i(i=1,2)$ 年通过更新黄标车可以实现的治理指标别为 $C^1/4$ 。

由于控制新车增长以及减少尾气排放等措施很难在短期内取得明显效果，因此我们采用平均的方法来确定 5 年中采用其它措施实现机动车减排的治理指标，即每年为 $C^1/10$ 。具体的机动车源 5 年治理计划如表 12 所示。

表 12 机动车源 5 年治理计划

年份	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
年终治理指标	$0.35C^1$	$0.35C^1$	$0.1C^1$	$0.1C^1$	$0.1C^1$

(2) 二次硫酸盐和硝酸盐治理计划

二次硫酸盐和硝酸盐主要来自燃煤排放的 SO_2 和机动车排放的 NO_x 经大气化学转化形成的二次气溶胶。我们在机动车污染治理计划中，通过利用 2 年时间淘汰更新全部黄标车，则 NO_x 排放量可以减少一半左右。因此，在硝酸盐治理中，可以充分结合机动车污染治理计划，在 2 年时间内实现减排一半的目标；而 SO_2 排放控制提倡采用源头消减、中间控制和末端治理相结合的控制思想，比如提高煤质及油品质量、采用型煤固硫技术、烟气脱硫工程等。因此，二次硫酸盐污染治理需要长期的治理计划。结合二次硫酸盐和硝酸盐治理难度的实际情况，我们制定如表 13 所示的治理计划：前两年分别完成的全年年终平均治理指标 $C^2/4$ ，后三年的治理指标分别为 $C^2/6$ 。

表 13 二次硫酸盐和硝酸盐 5 年治理计划

年份	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
年终治理指标	$0.25C^2$	$0.25C^2$	$0.17C^2$	$0.17C^2$	$0.16C^2$

(3) 工厂排放污染治理计划

武汉市拥有众多的大型工业企业，例如位于城区的武汉钢铁（集团）、东风集团、造船厂等。工厂对环境的污染主要体现在水污染、大气污染、土壤污染等，武汉工业源对城区大气 $PM_{2.5}$ 的贡献率高达 26.4%。为了有效治理工厂排放污染，采用的措施包括：通过产业结构调整，减少环境污染；限制和禁止能源消耗高、资源浪费大、污染严重的企业发展，大力发展质量效益型、科技先导型、资源节约型工业；在污染密集型的基础工业建设中，严格执行环境保护的有关规定，尽量在生产过程中防治污染等。这些措施的实施需要一定的时间，不能立即减少污染排放量，而且治理难度随着治理的深入不断加大，因此，我们采用等比例下降的方法来确定每年需要完成的治理指标。综合考虑工厂治理的周期往往较长，应设计较小的下降比例，我们使用的下降比例为 0.1。

表 14 工厂排放污染 5 年治理计划

年份	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
年终治理指标	$0.24C^3$	$0.22C^3$	$0.2C^3$	$0.18C^3$	$0.16C^3$

(4) 生物质燃烧污染治理计划

文献[8]发现武汉市秋季 K^+ 、OC 和 EC 含量较高，分析其原因主要是秋收时，

武汉市周边郊区为了解决大量秸秆闲置，将秸秆在田间露天焚烧，产生大量焚烧烟雾可以传输到城区，且在秋季灰霾发生时，逆温天气较多，不利于污染物的扩散。治理生物质燃烧污染最迫的是限制秸秆等自然物质的焚烧，继而采用其它方法处理秸秆。因此，生物质燃烧污染可以在短时间内降到较低，但后期治理难度会不断加大。我们采用等比下降的方法制定每年的治理指标（下降比例为 0.2）。

表 15 生物质燃烧污染 5 年治理计划

年份	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
年终治理指标	$0.3C^4$	$0.24C^4$	$0.19C^4$	$0.15C^4$	$0.12C^4$

(5) 武汉市 5 年 PM2.5 治理计划

根据对武汉 PM2.5 四个主要来源建立的治理计划，可以得到全市每年的全年年终平均治理指标，分别为 $69.8\mu\text{g}/\text{m}^3$ 、 $65.4\mu\text{g}/\text{m}^3$ 、 $39.9\mu\text{g}/\text{m}^3$ 、 $36.6\mu\text{g}/\text{m}^3$ 和 $33.3\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，具体如图 16 所示。

表 16 武汉市 5 年 PM2.5 污染治理计划

PM2.5 主要来源	治理指标($\mu\text{g}/\text{m}^3$)					总计
	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年	
机动车源	23.3	23.3	6.6	6.6	6.6	66.4
二次硫酸盐和硝酸盐	16.4	16.4	11.2	11.2	10.5	65.7
工厂排放	15.6	14.2	12.9	11.6	10.4	64.7
生物质燃烧	14.5	11.5	9.2	7.2	5.8	48.2
全年年终平均治理指标	69.8	65.4	39.9	36.6	33.3	245

5.3 专项治理计划的设计

5.3.1 专项治理计划的优化方案

已知未来 5 年内需要完成的总的治理指标为 $C = \sum_{i=1}^5 C_i = 245\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，其中一部分通

过专项治理实现（记为 PC ， $0 \leq P \leq 1$ ），另一部分通过综合治理实现 $((1-P)C)$ 。根据题目已知条件，专项治理投入费用是当年所减少 PM2.5 浓度平方的 0.005 倍（百万元），我们认为，这里指的“当年所减少的 PM2.5 浓度”是由专项治理所产生的，而不考虑综合治理所减少的 PM2.5 浓度。那么，5 年投入的总经费 F （百万元）可以表示为：

$$F = \sum_{i=1}^5 F_i = \sum_{i=1}^5 (B_i + L_i^2 \times 0.005) \quad (17)$$

其中：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 B_i = (1-P)C \\ \sum_{i=1}^5 L_i = PC \\ B_i + L_i = C_i \end{cases} \quad (18)$$

显然，在不同比例 P 的时，即专项治理计划不同时，逐年投入的费用和投入的总费用是有所差异的。但是我们还发现，当比例 P 固定时有：

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^5 (B_i + L_i^2 \times 0.005) \\ &= \sum_{i=1}^5 B_i + \sum_{i=1}^5 (L_i^2 \times 0.005) \\ &= (1-P)C + \sum_{i=1}^5 (L_i^2 \times 0.005) \\ &\leq (1-P)C + (PC)^2 \times 0.005 \end{aligned} \quad (19)$$

等号成立当前仅当存在 $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ 使得 $L_i = PC$ ，同时还满足

$$\begin{aligned} F &= (1-P)C + \sum_{i=1}^5 (L_i^2 \times 0.005) \\ &\geq (1-P)C + 5 \times (PC/5)^2 \times 0.005 \end{aligned} \quad (20)$$

等式成立当且仅当 $L_i = PC/5 (i=1, 2, \dots, 5)$ 。也就是说，当比例 P 固定时，5 年投入的总经费具有上界和下界，即可以在这个范围内通过设计较为合理的专项治理计划使得总投入经费趋于优化。

实际上，市政府财政支出常常有限，不能随意制定污染治理投入经费。因此要求在完成预定指标的前提下，应该使经费投入较为合理，体现在两个方面：一是总费用要尽可能少；二是逐年投入的资金应该保持一个相对稳定的水平。实际上，如果重复出现治理经费一年很高、一年很低的情况，说明污染治理的效果并不好，即投入很高的经费完成了当年的治理指标，但第二年又出现反弹。由于采用综合治理和专项治理相结合的治理方案的目的就是要有效的降低 $PM_{2.5}$ 的浓度，因此不能出现反弹。对此，我们寻找使总投入经费尽可能低，逐年投入差异尽可能小为优化目标，建立双目标数学优化模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^5 (F_i - \bar{F}_i)^2 \\ s.t. \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^5 B_i = (1-P)C \\ \sum_{i=1}^5 L_i = PC \\ B_i + L_i = C_i \\ F \leq (1-P)C + (PC)^2 \times 0.005\lambda, \lambda \in (0.2, 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\lambda \in (0.2, 1)$ 为控制参数, 由式(19)和(20)可知, $\lambda = 0.2$ 和 $\lambda = 1$ 分别对应总投入资金的最小和最大值。那么, λ 越小, 由式(21)优化得到的总经费 $F^* = \sum_{i=1}^5 F_i$ 也越小。

5.3.2 专项治理计划的数值优化

根据 5.3.1 节设计的专项治理计划的优化方案, 选取不同的控制参数 λ 和专项治理指标比例 P , 计算结果如表 17 所示。

表 17 不同 P 值和 λ 值时得到的最优投入总资金 (百万元)

$P=0.15$ 时得到的最优投入总资金								
λ	0.21	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
F^*	209.67	209.94	210.28	210.95	211.62	211.68	211.68	211.68
Z^*	962.57	721.57	564.78	377.29	272.23	268.72	268.72	268.72
$\lambda=0.25$ 时得到的最优投入总资金								
P	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.30	0.35	0.4
F^*	232.94	221.25	209.94	199.0	188.43	178.25	168.44	159.0
Z^*	1008.26	854.64	721.57	606.96	508.88	425.48	355.07	296.10

根据表 17, 发现当 P 固定时, 随着 λ 的增加最优值 F^* 也逐渐增加且很快达到稳定, Z^* 逐渐减小并趋于稳定; 当 λ 固定时, 随着 P 变大最优值 F^* 快速变小, 且 Z^* 逐渐减小, 这是因为每降低一单位 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度的专项治理费用明显低于综合治理费用。所以专项治理完成的指标越多, 总费用就越小。

6 优缺点分析

本文主要针对 $\text{PM}_{2.5}$ 的相关因素分析、分布与演变模型及其应急处理、控制质量管理等三个方面进行了探索: 1) 利用相关系数分析法对 $\text{PM}_{2.5}$ (含量) 与其它 5 个监测指标 (污染物含量) 之间的相关性进行分析, 并建立了多元线性回归模型; 2) 结合附件 2 中的数据对 $\text{PM}_{2.5}$ 的时空分布及其规律进行分析, 继而建立了简化的 $\text{PM}_{2.5}$ 连续点源扩散模型, 针对 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度突然增加的情况进行污染扩散预测和评估, 并利用监测数据验证了该扩散模型的有效性; 3) 针对 $\text{PM}_{2.5}$ 治理问题, 设计了每年的治理指标, 在这基础上设计了优化的专项治理方案。

然而, 本文还存在以一些不足之处, 体现在: $\text{PM}_{2.5}$ 扩散模型仅能定量的描述 $\text{PM}_{2.5}$ 扩散与风力的关系, 而没有定量分析 $\text{PM}_{2.5}$ 与湿度等其它天气因素的关系; 同时, 在设计合理的治理计划时, 建立的模型还不够完善。

参考文献

- [1] 环境空气质量标准, 中华人民共和国国家标准, GB 3095-2012.
- [2] 环境空气质量指数(AQI)技术规定(试行): 中华人民共和国国家环境保护标准, HJ 633-2012.
- [3] 严丽坤. 相关系数与偏相关系数在相关分析中的应用[J]. 云南财贸学院学报, 2003, 19(3): 78-80.
- [4] 刘严. 多元线性回归的数学模型[J]. 沈阳工程学院学报(自然科学版), 2005, 2(3): 128-130.
- [5] 余常昭. 环境流体力学导论[M]. 北京. 清华大学出版社, 1992, 10.
- [6] 张兵. 放射性物质大气弥散仿真研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2004.
- [7] 何玉贵, 黄建国, 陈长和. 关于大气稳定度分类的研究[J]. 环境科学情报, 1985(5): 21-27.
- [8] 成海容, 王祖武, 冯家良, 等. 武汉市城区大气 PM_{2.5} 的碳组分与源解析[J]. 生态环境学报, 2012, 21(9): 1574-1579.
- [9] 武汉市环保局. <http://www.whepb.gov.cn/jdcGzdt/101823.jhtml>.