Chapter 1. 插入、归并排序

1.1. 插入排序(稳定，原址)

```
INSERTION-SORT(A)
1 for j=2 to A.length
2       key=A[j]
3       //Insert A[j] into the sorted sequence A[1…j-1]
4       i=j-1
5       while i>0 and A[i]>key
6             A[i+1]=A[i]
7             i=i-1
8       A[i+1]=key
```

1. 2. 归并排序

```
MERGE(A,p,q,r)
1 n1=q-p+1
2 n2=r-q
3 let L[1…n1+1] and R[1…n2+1] be new arrays
4 for i=1 to n1
5         L[i]=A[p+i-1]
6 for j=1 to n2
7         R[j]=A[q+j]
8 L[n1+1]=∞
9 R[n2+1]=∞
10 i=1
11 j=1
12 for k=p to r
13          if L[i]≤R[j]
14                    A[k]=L[i]
15                    i=i+1
16          else A[k]=R[j]
17                    j=j+1
```

```
MERGE-SORT(A,p,r)(稳定)
1 if p<r //当只有一个元素(p=r)或者没有元素(p>r)时递归终止
2         q=⌊(p + r)/2⌋
3         MERGE-SORT(A,p,q)
4         MERGE-SORT(A,q+1,r)
5         MERGE(A,p,q,r)
```

Chapter 2. 最大和子数组

```
FIND-MAX-CROSING-SUBARRAY(A,low,mid,high)//求包含 mid 的最大字数组
1 left-sum=-∞//mid 左侧最大值，包括 mid
2 sum=0
3 for i=mid downto low//这里从 mid 算起，因此 max-left 最大为 mid
4       sum=sum+A[i]
5       if sum>left-sum
6             left-sum=sum
7             max-left=i
8 right-sum=-∞//mid 右侧最大值
9 sum=0
10 for j=mid+1 to high //这里从 mid+1 算起，因此 max-right 最小为 mid+1
11       sum=sum+A[j]
12       if sum>right-sum
13            right-sum=sum
14            max-right=j
15 return (max-left,max-right,left-sum+right-sum)

FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A,low,high)
1 if high==low//递归终止
2       return(low,high,A[low])
3 else mid=⌊(low + high)/2⌋
4       (left-low,left-high,left-sum)=
            FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A,low,mid)//这里包含只含有单个 mid 的情况
5       (right-low,right-high,right-sum)=
            FIND-MAXMUM-SUBARRAY(A,mid+1,high)//这里不包含只含有单个 mid 的情况
6       (cross-low,cross-high,cross-sum)=
            FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A,low,mid,high) //这里不包含只含有单个 mid 的情况
7       if left-sum≥right-sum and left-sum≥cross-sum
8             return (left-low,left-high,left-sum)
9       elseif right-sum≥left-sum and right-sum≥cross-sum
10            return(right-low,right-high,right-sum)
11      else return(cross-low,cross-high,cross-sum)
```

注意：cross 必然包含两个元素，至少为[mid,mid+1]

Chapter 3. 堆排序

3.1. 堆性质维护

维护最大堆的性质(**单独对某一个节点调用该函数，并不能保证以该节点为根节点的子堆满足最大堆的性质，即不发生递归调用的时候(该节点的子节点比该节点小)，可能该节点子节点的子节点比该节点大**)

```
MAX-HEAPIFY(A,i)
1 l=LEFT(i)
2 r=RIGHT(i)
3 if l≤A.heap-size and A[l]>A[i]
4         largest=l
5 else largest=i
6 if r≤A.heap-size and A[r]>A[largest]
7         largest=r
8 if largest≠i
9         exchange A[i] with A[largest]
10        MAX-HEAPIFY(A,largest)
```

3. 2. 构造最大堆

BUILD-MAX

1 A.heap-size=A.length**//这句什么用?**

2 **for** i=$\lfloor A.length/2 \rfloor$ **downto** 1

3 MAX-HEAPIFY(A,i)

3. 3. 堆排序（非原址，非稳定）

```
HEAPSORT(A)
1 BUILD-MAX-HEAP(A)
2 for i=A.length downto 2
3       exchange A[1] with A[i]
4       A.heap-size=A.heap-size-1
5       MAX-HEAPIFY(A,1)
```

若堆索引从 1 开始算，那么 L=2*i　　R=2*i+1
若堆索引从 0 开始算，那么 L=2*i+1　　R=2*i+2

3. 4. 基于最小最大二叉堆的优先队列

```
HEAP-MAXIMUM(A)
1 return A[1]

HEAP-EXTRACT-MAX(A)
1 if A.heap-size<1
2       error”heap underflow”
3 max=A[1]
4 A[1]=A[A.heap-size]//将最后一个数放置到第一个
5 A.heap-size=A.heap-size-1//减少堆的维度
6 MAX-HEAPIFY(A,1)//维护堆的性质
7 return max

HEAP-INCREASE-KEY(A,i,key)
1 if key<A[i]
2       error”new key is smaller than current key”
3 A[i]=key
4 while i>1 and A[PARENT(i)]<A[i]
5       exchange A[i] with A[PARENT(i)]
6       i=PARENT(i)

MAX-HEAP-INSERT(A,key)
1 A.heap-size=A.heap-size+1
2 A[A.heap-size]=-∞
3 HEAP-INCREASE-KEY(A,A.heap-size,key)
```

Chapter 4. 快速排序

4.1. 快速排序(原址，非稳定)

```
QUICKSORT(A,p,r)
1 if p<r
2       q=PARTITION(A,p,r)
3       QUICKSORT(A,p,q-1)
4       QUICKSORT(A,q+1,r)
```

```
PARTITION(A,p,r)//其实 p=r 的情况下也能运行
1 x=A[r]
2 i=p-1
3 for j=p to r-1//循环到 r-1 的原因：等于 x 的值已经放在最右侧了，对该值不需要循环
4       if A[j]≤x
5             i=i+1
6             exchange A[i] with A[j]
7 exchange A[i+1] with A[r]
8 return i+1
```

PARTITION 的随机化版本

```
RANDOMIZED-PARTITION(A,p,r)
1 i=RANDOM(p,r)
2 exchang A[r] with A[i]//必须将该值置于最后，才能调用 PARTITION
3 return PARTITION(A,p,r)
```

4. 2. 优化版本 1

对于重复元素较多的情况下，采用这种方式效率较高

```
PARTITION_REPEAT1(A,p,r)
1 x=A[r]
2 i=p-1              //小于 x 的最大索引
3 boundary=r-1       //以最后一个元素为主元，非主元的最大索引
4 for j=p to boundary
5       if A[j]<x
6             i=i+1
7             EXCHANGE A[i] with A[j]
8       elseif A[j]==x
9             EXCHANGE A[j] with A[boundary]     //将于 x 相同的值先放到最后
10            j=j-1//将索引为 cnt 的数放到 j 位置，但这个数尚未进行判断，因此要将 j-1(抵消自增量)
11            boundary = boundary -1//由于 boundary 位置上已经是与 x 相同的数，因此循环边界递减
12 n=r- boundary
13 for j=0 to n-1
14       EXCHANGE A[i+1+j] with A[r-j]
15 return i+1 and i+n
```

i+1 是与 x 值相同的区间内的开始，i+rn 是与 x 值相同的区间的结束
[p,i]区间内的元素小于 x
[i+1,i+rn]区间内的元素等于 x，[i+rn+1,r]的元素大于 x

```
MODIFIED_PARTITION(A,p,r,M)
1 i=p-1
2 cnt=r          //非主元M的最大索引
3 for j=p to cnt     //与上一个版本有差异，因为最后一个元素并不是M，M的位置是未知的
4       if A[j]<M
5             i=i+1
6             EXCHANGE A[i] with A[j]
7       elseif A[j]==M    //关键：将于M相同的值暂时放到A的最后边
8             EXCHANGE A[j] with A[cnt] //将于x相同的值先放到最后
9             j=j-1//将第cnt个数放到j位置上，但这个数尚未进行判断，因此要将j-1(抵消自增量)
10            cnt=cnt-1     //由于cnt位置的值已经与M相等，因此递减循环边界cnt
11 rn=r-cnt
12 for j=0 to rn-1      //将等于M的区间挪到中间
13       EXCHANGE A[i+1+j] with A[r-j]
14 return i+1 and i+rn
```

i+1 是与 x 值相同的区间内的开始，i+rn 是与 x 值相同的区间的结束
[p,i]区间内的元素小于 x
[i+1,i+rn]区间内的元素等于 x
[i+rn+1,r]的元素大于 x

4. 3. 优化版本 2

对于重复元素较多的情况下，采用这种方式效率较高

```
PARTITION_REPEAT2(A,p,r)
1 x=A[r]
2 i1=p-1        //小于x的最大索引
3 i2=p-1        //等于x的最大索引(算最后一个)
4 for j=p to r-1
5       if A[j]<x
6             i1=i1+1
7             EXCHANGE A[i1] with A[j]
8             i2=i2+1
9             if i1≠i2
10                  EXCHANGE A[i2] with A[j]
11      elseif A[j]==x
12            i2=i2+1
13            EXCHANGE A[i2] with A[k]
14 i2=i2+1
15 EXCHANGE A[i2] with A[r]
15 return i1+1 and i2
```

Chapter 5. 线性时间排序

5.1. 计数排序(稳定，非原址)

```
COUNTING-SORT(A,B,k)
1 let C[0…k] be a new array
2 for i=0 to k
3         C[i]=0
4 for j=1 to A.length
5         C[A[j]]=C[A[j]]+1
6 //C[i] now contains the number of elements equal to i
7 for i=1 to k
8         C[i]=C[i]+C[i-1]
9 //C[i] now contains the number of elements less than or equal to i
   //存的是值为 i 的元素的最大索引
10 for j=A.length down to 1
11          B[C[A[j]]]=A[j]
12          C[A[j]]=C[A[j]]-1
```

5. 2. 基数排序

```
RADIX-SORT(A,d)
1 for i=1 to d
2       use a stable sort to sort array A on digit i
```

5. 3. 桶排序

BUCKET-SORT(A)

1 n=A.length

2 let B[0…n-1] be a new array

3 **for** i=0 **to** n-1

4 make B[i] an empty list

5 **for** i=1 **to** n

6 insert A[i] into list B[$\lfloor nA[i] \rfloor$]

7 **for** i=0 **to** n-1

8 sort list B[i] with insertion sort

9 concatenate the lists B[0],B[1],…,B[n-1] together in order

5. 4. 遗忘比较交换算法

```
COMPARE-EXCHANGE(A,i,j)
1 if A[i]>A[j]
2       exchange A[i] with A[j]

INSERTION-SORT(A)
1 for j=2 to A.length//循环不变式：A[1…j-1]是已排序的序列
2       for i=j-1 down to 1
3             COMPARE-EXCHANGE(A,i,i+1)
```

Chapter 6. 中位数和顺序统计量

```
RANDOMIZED_SELECT(A,p,r,i)//这里的 pr 是绝对下标，i 是相对大小
1 if p==r//只有一个元素时，退出
2       return A[p]
3 q=RANDOMIZED_PARTITION(A,p,r);
4 k=q-p+1
5 if k==i//若q就是要找的下标
6       return A[q]   //别写成了A[i]
7 elseif i<k
8       return RANDOMIZED_SELECT(A,p,q-1,i)
9 else return RANDOMIZED_SELECT(A,q+1,r,i-k)
```

Chapter 7. 基本数据结构

7.1. 二叉树前序遍历非递归算法

外循环体：对于当前指针 cur：

首先：内循环体：对于当前指针 cur

1) cur 不为空：访问该节点，并将该节点压入栈，并使 cur 指向该节点的左孩子(无论左孩子是否存在)
2) cur 为空：栈顶元素为最左端的节点，内循环结束

然后：对于栈

1) 栈为空：树已遍历，外循环结束
2) 栈不为空：弹出栈顶节点(该节点已被访问过)，将指针指向该节点的右孩子(无论右孩子是否存在)

```
PRE-ORDER-STACK(T)
1 let S be a STACK sized T.size
2 cur=T.root
3 while( S.empty==False or cur≠NULL) //这个条件怎么理解：栈为空且指针为空才表明树已经完全输出
4       while(cur≠NULL) //循环终止时，栈顶元素(节点指针)指向没有左孩子的节点，cur指向空
5             visit(cur)
6             S.PUSH(cur)
7             cur=cur.left
8       if S.empty==Flase
9             cur=S.POP
10            cur=cur.right
```

7. 2. 二叉树中序遍历非递归算法

外循环体：对于当前指针cur：

首先：内循环体：对于当前指针cur

1) cur不为空：将cur指向的节点压入栈，并使cur指向该节点的左孩子(无论左孩子是否存在)
2) cur为空：栈顶元素为最左端的节点，内循环结束

然后：对于栈

1) 栈为空：树已遍历，外循环结束
2) 栈不为空，则弹出栈顶节点，并访问该节点，并使cur指向该节点的右孩子(无论右孩子是否存在

```
IN-ORDER-STACK(T)
1 let S be a STACK sized T.size
2 cur=T.root
3 while( S.empty==False or cur≠NULL) //这个条件怎么理解：栈为空且指针为空才表明树已经完全输出
4       while(cur≠NULL) //循环终止时，栈顶元素(节点指针)指向没有左孩子的节点，cur指向空
6             S.PUSH(cur)
7             cur=cur.left
8       if S.empty==Flase
9             cur=S.POP
9             visit(cur)
10            cur=cur.right
```

7. 3. 二叉树后序遍历非递归算法 1

外循环体：对于当前指针cur

首先：内循环体：对于当前指针cur

1) cur不为空：将入栈计数增加1(该节点的入栈计数变成了1)，然后将该节点压入栈，并使cur指向该节点的左孩子(无论左孩子是否存在)
2) cur为空：栈顶元素为最左端的节点，内循环结束

然后：对于栈：

1) 栈为空：树已遍历，外循环结束
2) 栈不为空：弹出栈顶元素记为N1
   - N1 的入栈计数为 2，访问该元素
   - **N1 的入栈计数为 1，入栈计数增加 1(入栈计数变成了 2)，重新将该节点压入栈，并使 cur 指向该节点的右孩子(无论右孩子是否存在)**

```
POST-ORDER-STACK(T)
1 let S be a STACK sized T.size
2 let every Node's cnt be zero
3 cur=T.root
4 while( S.empty==False or cur≠NULL) //这个条件怎么理解：栈为空且指针为空才表明树已经完全输出
5       while(cur≠NULL) //循环终止时，栈顶元素(节点指针)指向没有左孩子的节点，cur指向空
6             cur.cnt=cur.cnt+1
7             S.PUSH(cur)
8             cur=cur.left
9       if S.empty==Flase
10            cur=S.POP
11            if cur.cnt==2
12                  visit(cur)
13                  cur=NULL //保证下一次循环直接跳过内层的 while
14            else cur.cnt=cur.cnt+1
15                  S.PUSH(cur)
16                  cur=cur.right
```

7. 4. 二叉树后序遍历非递归算法 2

初始化：首先将根节点入栈，cur置空，pre置空(cur指向栈顶元素，pre指向上一次访问的元素)

循环体：对于栈

1) 栈不为空：cur指向栈顶元素，记为N1
   - 若N1的左右孩子均不存在，或pre指针指向的节点是N1的孩子：弹出栈顶元素N1，并访问，并将pre指向该已被访问过的节点N1
   - 若N1存在孩子，且pre指向的节点不是N1的孩子：若N1的右孩子存在，则将右孩子入栈，若N1的左孩子存在，再将左孩子入栈
2) 栈为空：树已遍历，循环结束

关键点：节点压入栈的顺序为后序遍历的反序，即先当前，再有孩子，再左孩子

```
POST-ORDER-STACK
1 let S be a STACK sized T.size
2 S.PUSH(T.root)
3 pre=cur=NULL
3 while S.empty==False//栈不为空时进入循环
4       cur=S.TOP//获取栈顶元素(非弹出)
5       if cur.left==NULL and cur.right==NULL or pre≠NULL and pre.p=cur
6             visit(cur)
6             S.POP//弹出该元素
7             pre=cur
14      else_if cur.right≠NULL
15                  S.PUSH(cur.right)
16            if cur.left≠NULL
17                  S.PUSH(cur.left)
```

7. 5. 二叉树的前序遍历的非递归非栈算法

POST-ORDER-ELSE

```
1 pre=NULL//前一节点初始化为空
2 cur=T.root//当前节点初始化为根节点
3 while(cur≠NULL)
4       if pre==cur.p //当前节点是上一节点的子节点
5             visit(cur)        //访问当前节点
6             pre=cur
7             if cur.left≠NULL
8                   cur=cur.left
9             elseif cur.right≠NULL
10                  cur=cur.right
11            else
12                  cur=cur.p
13      elseif pre==cur.left//上一节点是当前节点的左孩子
14            pre=cur
15            if cur.right≠NULL
16                  cur=cur.right
17            else
18                  cur=cur.p
19      else//上一节点是当前节点的右孩子
20            pre=cur
21            cur=cur.p
```

访问出现在左孩子判断前

7. 6. 二叉树的中序遍历的非递归非栈算法

```
IN-ORDER-ELSE
1 pre=NULL//前一节点初始化为空
2 cur=T.root//当前节点初始化为根节点
3 while(cur≠NULL)
4       if pre==cur.p //当前节点是上一节点的子节点
5             pre=cur
6             if cur.left≠NULL
7                   cur=cur.left
8             elseif cur.right≠NULL
9                   visit(cur)        //访问当前节点
10                  cur=cur.right
11            else
12                  visit(cur)        //访问当前节点
13                  cur=cur.p
14      elseif pre==cur.left//上一节点是当前节点的左孩子
15            pre=cur
16            visit(cur)        //访问当前节点
17            if cur.right≠NULL
18                  cur=cur.right
19            else
20                  cur=cur.p
21      else//上一节点是当前节点的右孩子
22            pre=cur
23            cur=cur.p
```

访问出现在右孩子判断前

7. 7. 二叉树的后序遍历的非递归非栈算法

```
POST-ORDER-ELSE
1 pre=NULL//前一节点初始化为空
2 cur=T.root//当前节点初始化为根节点
3 while(cur≠NULL)
4       if pre==cur.p //当前节点是上一节点的子节点
5             pre=cur
6             if cur.left≠NULL
7                   cur=cur.left
8             elseif cur.right≠NULL
9                   cur=cur.right
10            else
11                  visit(cur)        //访问当前节点
12                  cur=cur.p
13      elseif pre==cur.left//上一节点是当前节点的左孩子
14            pre=cur
15            if cur.right≠NULL
16                  cur=cur.right
17            else
18                  visit(cur)        //访问当前节点
19                  cur=cur.p
20      else//上一节点是当前节点的右孩子
21            visit(cur)        //访问当前节点
22            pre=cur
23            cur=cur.p
```

访问出现在返回父节点之前

7. 8. 二叉树树的析构：

7. 8. 1. 通过后续遍历的栈算法 2 的变形来实现

```
~TREE(T)
1 let S be a STACK sized T.size
2 pre=cur=NULL
3 S.PUSH(T.root)
4 while S.empty==False//栈不为空时进入循环
5       cur=S.TOP//获取栈顶元素(非弹出)
6       if cur.left==NULL and cur.right==NULL   //与后续遍历的不同之处
7             S.POP//弹出该元素
8             pre=cur
9             cur=cur.p
10            if cur≠NULL
11                  if pre==cur.left
12                        cur.left==NULL
13                  else cur.right=NULL
14            delete pre//释放被弹出的栈顶元素的内存
15      else_if cur.right≠NULL
16                  S.PUSH(cur.right)
17            if cur.left≠NULL
18                  S.PUSH(cur.left)
```

7.8.2. 通过指针路径算法的变形来实现

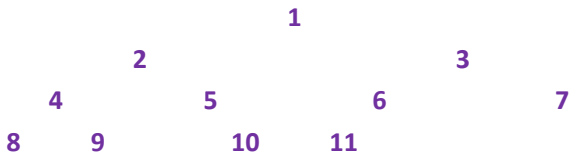
```
~TREE(T)
1 pre=NULL//前一节点初始化为空
2 cur=T.root//当前节点初始化为根节点
3 while(true)
4       if cur==NULL
5             break //当前节点为空时，退出循环
6       if pre==cur.p //当前节点是上一节点的子节点
7             if cur.left≠NULL
8                   pre=cur
9                   cur=cur.left
10                  continue
11            if cur.right≠NULL
12                  pre=cur
13                  cur=cur.right
14                  continue
15            pre=cur
16            cur=cur.p
17            if cur≠NULL and pre==cur.left
18                  i=1
19            elseif cur≠NULL and pre==cur.right
20                  i=2
21            delete pre        continue
22      elseif pre==cur.left//上一节点是当前节点的左孩子
23            if cur.right≠Null
24                  pre=cur
25                  cur=cur.right
26                  continue
27            pre=cur
28            cur=cur.p
29            if cur≠NULL and pre==cur.left
30                  i=1
31            elseif cur≠NULL and pre==cur.right
32                  i=2
33            delete pre        continue
34      elseif pre==cur.right//上一节点是当前节点的右孩子
35            pre=cur
36            cur=cur.p
37            if cur≠NULL and pre==cur.left
38                  i=1
39            elseif cur≠NULL and pre==cur.right
40                  i=2
41            delete pre        continue
42      else switch(i)
```

```
43          case 1: if cur.right≠Null
44                      pre=cur
45                      cur=cur.right
46                      continue
47                  pre=cur
48                  cur=cur.p
49                  if cur≠NULL and pre==cur.left
50                      i=1
51                  elseif cur≠NULL and pre==cur.right
52                      i=2
53                  delete pre          continue
54          case 2: pre=cur
55                  cur=cur.p
56                  if cur≠NULL and pre==cur.left
57                      i=1
58                  elseif cur≠NULL and pre==cur.right
59                      i=2
60                  delete pre          continue
```

7.9. 二叉树的遍历总结

对于后续遍历的栈算法 2 与非栈非递归算法的比较：
两者均有 pre 与 cur 指针,但不同的是
Stack2 算法中：cur 指向的是栈顶元素,pre 指向的是上一次访问的元素
Fix 算法中：cur 指向的是指针路径的顶端元素，pre 指向的是指针路径的顶端第二个元素，cur 与 pre 必定为父子或子父关系。注意：pre 并非指向访问的元素，只是指针路径中的顶端第二个元素

对于如下的一棵树，Fix 算法中的指针路径(不存在跳跃，必须连续前进)为
1-2-4-8-4-9-4-2-5-10-5-2-1-3-6-11-6-3-7-3-1-Null



Chapter 8. 二叉搜索树

8.1. 插入二叉搜索树

```
TREE_INSERT(T,z)
1 y=T.nil
2 x=T.root
3 while x≠T.nil//循环结束时 x 指向空，y 指向上一个 x
4       y=x
5       if z.key<x.key
6             x=x.left
7       else x=x.right
8 z.p=y//将这个叶节点作为 z 的父节点
9 if y==T.nil
10      T.root=z
11 elseif z.key<y.key
12      y.left=z
13 else y.right=z
```

```
TREE-SEARCH(x,k) x 指向根节点
1 while x≠T.nil and k≠x.key//当找到该元素或者达到搜索路径的顶端(叶节点的孩子节点)循环结束
2       if k<x.key
3             x=x.left
4       else x=x.right
5 return x
```

以 x 为根节点的子树的最大值

```
TREE-MAXIMUM(x)
1 while x.right≠T.nil//沿着右孩子路径一直搜索到没有右孩子的节点
2       x=x.right
3 return x
```

以 x 为根节点的子树的最小值

```
TREE-MINIMUM(x)
1 while x.left≠T.nil//沿着左孩子路径一直搜索到没有左孩子的节点
2       x=x.left
3 return x
```

8. 2. 后继元素

1、若该元素含有右孩子，那么后驱元素必定在以右孩子为根节点的子树中

2、若该元素没有右孩子，那么搜索子树的根节点 y 第一次以左孩子的身份作作为其父节点的孩子，那么该父节点就是后驱元素(第一次父比子大)

```
TREE-SUCCESSOR(x)
1 if x.right≠T.nil
2        return TREE-MINIMUM(x.right)//找到以右孩子为根节点的最大值
3 y=x.p
4 while y≠T.nil and x≠y.left//循环结束时 x 为 y 的左孩子
5        x=y
6        y=y.p
7 return y//y 若为空，则代表无后继元素
```

8. 3. 前驱元素

1、若该元素含有左孩子，那么前驱元素必定在以左孩子为根节点的子树中

2、若该元素没有左孩子，那么搜索子树的根节点 y 第一次以右孩子的身份作作为其父节点的孩子，那么该父节点就是后驱元素(第一次父比子小)

```
TREE-PREDECESSOR(x)
1 if x.left≠T.nil
2        return TREE-MAXIMUM(x.left)//找到以左孩子为根节点的最大值
3 y=x.p
4 while y≠T.nil and x≠y.right//循环结束时x为y的右孩子
5        x=y
6        y=y.p
7 return y//y 若为空，则代表无前驱元素
```

查找关键字为k的元素

8. 4. 删除

删除节点的辅助函数：用另一棵树替换一棵树并成为其双亲的孩子节点

需要更改的指针：v 的父节点，以及 u 的父节点的相应的孩子节点

```
TRANSPLANT(T,u,v)
1 if u.p==T.nil
2       T.root=v
3 elseif u==u.p.left
4       u.p.left=v
5 else u.p.right=v
6 if v≠T.nil
7       v.p=u.p
//u.p=u.left=u.right=NIL 这句不能有，需要完整保留以 u 为根节点的子树(u 的双亲未必是 NIL)
```

删除元素**版本 1**：(假定删除 z 节点)

①若 z 节点没有孩子，那么直接删除 z 即可

②若 z 节点只有一个孩子，那么将这个孩子作为根节点的子树替换以 z 为根节点的子树，并成为 z 的双亲的孩子

③若 z 节点有两个孩子，那么找到 z 的后继 y(一定在右子树中)，并让 y 占据 z 的位置。z 的原来右子树部分成为 y 的新的右子树，并且 z 的左子树成为 y 的新左子树

删除指定关键字的节点

```
TREE-DELETE1(T,z)
1 if z.left==T.nil
2       TRANSPLANT(T,z,z.right)
3 elseif z.right==T.nil
4       TRANSPLANT(T,z,z.left)
5 else y=TREE-MINIMUM(z.right) //找到z的后继，由于z存在左右孩子，故后继为右子树中的最小值
6       if y≠z.right//如果y是z的右孩子，那么y的右子树会保留，只需要更新y的左子树即可
7             TRANSPLANT(T,y,y.right)
8             y.right=z.right
9             y.right.p=y
10      TRANSPLANT(T,z,y)
11      y.left=z.left
12      y.left.p=y
```

6-12 行可改为以下形式：无论何种情况都会更新 y 的左右子树

```
6       TRANSPLANT(T,y,y.right)
7       y.right=z.right
8       y.right.p=y
9       TRANSPLANT(T,z,y)
10      y.left=z.left
11      y.left.p=y
```

删除元素**版本 2**：(假定删除 z 节点)

①若 z 节点没有孩子，那么直接删除 z 即可

②若 z 节点只有一个孩子，那么将这个孩子作为根节点的子树替换以 z 为根节点的子树，并成为 z 的双亲的孩子

③若 z 节点有两个孩子，那么找到 z 的前驱 y(一定在左子树中)，并让 y 占据 z 的位置。z 的原来左子树部分成为 y 的新的左子树，并且 z 的右子树成为 y 的新右子树

删除指定关键字的节点

```
TREE-DELETE2(T,z)
1 if z.left==T.nil
2       TRANSPLANT(T,z,z.right)
3 elseif z.right==T.nil
4       TRANSPLANT(T,z,z.left)
5 else y=MAXIMUM(T,z.left)//找到z的前驱，由于z存在左右孩子，故前驱为左子树中的最大值
6       if y≠z.left//如果y是z的左孩子，那么y的左子树会保留，只需要更新y的右子树即可
7             TRANSPLANT(T,y,y.left)
8             y.left=z.left
9             y.left.p=y
10      TRANSPLANT(T,z,y)
11      y.right=z.right
12      y.right.p=y
```

6-12 行可改为以下形式：无论何种情况都会更新 y 的左右子树

```
6       TRANSPLANT(T,y,y.left)
7       y.left=z.left
8       y.left.p=y
9       TRANSPLANT(T,z,y)
10      y.right=z.right
11      y.right.p=y
```

Chapter 9. 红黑树

9.1.定义

9.1.1. 节点

1、节点的属性

1) val：关键字
2) left：左孩子节点
3) right：右孩子节点
4) parent：父节点
5) color：颜色

2、节点的性质

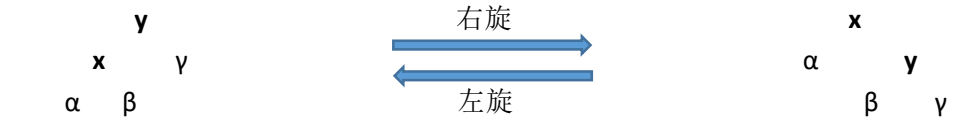
1) 每个节点或是红色的，或是黑色的
2) 根节点是黑色的
3) 每个叶节点(nil)是黑色的
4) 如果一个节点是红色的，则它的两个子节点都是黑色的
5) 对每个节点，从该节点到其所有后代叶节点的简单路径上，均包含相同数目的黑色节点

9.1.2. 树

1、属性

1) nil：哨兵节点
2) root：根节点

9.2. 旋转



左右旋的变换中，需要改变的就是节点 β，节点 α 和 γ 不需要改变

9.2.1. 左旋

```
LEFT-ROTATE(T,x)
1 y=x.right
2 x.right=y.left
3 if y.left≠T.nil
4         y.left.p=x      //1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)
5 y.p=x.p
6 if x.p==T.nil
7         T.root=y
8 elseif x==x.p.left
9         x.p.left=y
10 else x.p.right=y // 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)
11 y.left=x
12 x.p=y              //11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)
```

9.2.2. 右旋

```
RIGHT-ROTATE(T,y)
1 x=y.left
2 y.left=x.right
3 if x.right≠T.nil
4         x.right.p=y     //1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)
5 x.p=y.p
6 if y.p==T.nil
7         root=x
8 elseif y==y.p.left
9         y.p.left=x
10 else y.p.right=x // 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)
11 x.right=y
12 y.p=x              //11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)
```

(颜色改动+旋转变换)后性质 5 是否成立：看变换后 x、y 节点的父节点黑高是否发生变化即可

9.3. 插入

```
RB-INSERT(T,z)
1 y=T.nil
2 x=T.root
3 while x≠T.nil
4         y=x
5         if z.key<x.key
6                 x=x.left
7         else x=x.right
8 z.p=y
9 if y==T.nil
10        T.root=z
11 elseif z.key<y.key    //这里与567行最好保持一致
12        y.left=z
13 else y.right=z
14 z.left=T.nil
15 z.right=T.nil
16 z.colcor=RED
17 RB-INSERT-FIXUP(T,z)
```

插入的节点被设定为红色：

那么可能会违背性质2或4，但只能是其中之一

①当插入的节点是第一个时，此时根节点是红色，违背了性质2，但其子节点与父节点均为T.nil 是黑色，没有违反性质4

②当插入的节点不是根节点，并且其父节点也为红色时，违背了性质4

纠正思路：

对于错误①的修正，只需要将根节点设为黑色即可

对于错误②的修正，由于z与其父节点均为红色，那么祖父节点必为黑色，根据z的叔节点的颜色状况以及z作为z.p的左右孩子，分三种情况讨论：

9.3.1. 插入辅助

①当 z 的父节点是祖父节点的左孩子时：(叔节点为祖父节点的右孩子)

情况1：z节点的父节点以及z节点的叔节点都是红色：将z节点的父节点以及叔节点置为黑色，z节点的祖父节点置为红色，继续循环z的祖父节点(z=z.p.p)

z可为z.p的左或右孩子

情况2：z节点的父节点为红色，叔节点为黑色，z为父节点的右孩子，对z的父节点做一次左旋，转为情况3:(旋转前后z所表示的关键字发生改变，但是z的祖父节点没有变)

情况3：z节点的父节点为红色，叔节点为黑色，z为父节点的左孩子，首先将父节点设为黑色，祖父节点设为红色，然后对祖父节点做一次右旋

②当 z 的父节点是祖父节点的右孩子时，(叔节点为祖父节点的左孩子)

情况1：z节点的父节点以及z节点的叔节点都是红色：将z节点的父节点以及叔节点置为黑色，z节点的祖父节点置为红色，继续循环z的祖父节点(z=z.p.p)

z可为z.p的左或右孩子

情况2：z节点的父节点为红色，叔节点为黑色，z为父节点的左孩子，对z的父节点做一次右旋，转为情况3：(旋转前后z所表示的关键字发生改变，但是z的祖父节点没有改变)

情况3：z节点的父节点是红色，叔节点是黑色，z为父节点的右孩子，首先将父节点设为黑色，祖父节点设为红色，然后对祖父节点做一次左旋

旋转前插入红z不会导致性质5破坏:bh(z.p.p)=bh(z)=bh(z.p)=bh(y)+1

旋转后：由于bh(z)=by(y)+1保持不变，因此

bh(z.p)=bh(z.p.p)= bh(z)=by(y)+1 性质5依然成立

```
RB-INSERT-FIXUP(T,z)
1 while z.p.color==RED//由于 z.p 是红色，因此访问 z.p.p 的任何属性都是安全的
2       if z.p==z.p.p.left
3             y=z.p.p.right
4             if y.color==RED
5                   z.p.color=BLACK
6                   y.color=BLACK
7                   z.p.p.color=RED
8                   z=z.p.p//继续循环
9             else_if z==z.p.right
10                        z=z.p
11                        LEFT-ROTATE(T,z)
12                  z.p.color=BLACK
13                  z.p.p.color=RED
14                  RIGHT-ROTATE(T,z.p.p)//循环结束
15      else z.p==z.p.p.right
16            y=z.p.p.left
17            if y.color==RED
18                  z.p.color=BLACK
19                  y.color=BLACK
20                  z.p.p.color=RED
21                  z=z.p.p//继续循环
22            else_if z==z.p.left
23                        z=z.p
24                        RIGHT-ROTATE(T,z)
25                  z.p.color=BLACK
26                  z.p.p.color=RED
27                  LEFT-ROTATE(T,z.p.p) //循环结束
28 T.root.color=BLACK//针对第一个插入的 z，不会进入循环(性质 4 成立，但性质 2 破坏，这里纠正)
```

将v为根节点的子树代替u为根节点的子树

```
RB-TRANSPLANT(T,u,v)
1 if u.p==T.nil
2       T.root=v
3 elseif u==u.p.left
4       u.p.left=v
5 else u.p.right=v
6 v.p=u.p             //与搜索二叉树相比，这里没有判断，即使v是哨兵，也执行此句,对于移动到y位置的节点x(可能是哨兵)，会访问x.p，因此这里需要进行赋值
```

9.4. 删除函数：

```
RB-DELETE(T,z)
1 y=z
2 y-original-color=y.color
3 if z.left==T.nil
4       x=z.right
5       RB-TRANSPLANT(T,z,z.right)
6 elseif z.right==T.nil
7       x=z.left
8       RB-TRANSPLANT(T,z,z.left)
9 else y=TREE-MINIMUM(z.right)
10      y-original-color=y.color
11      x=y.right
12      if y.p==z
13            x.p=y//使得x为哨兵节点时也成立
14      else RB-TRANSPLANT(T,y,y.right)//即使y.right是哨兵，也会指向y的父节点
15            y.right=z.right
16            y.right.p=y
17      RB-TRANSPLANT(T,z,y)
//17行运行之后，13、14行都会保证x指向原始y父节点的位置
18      y.left=z.left
19      y.left.p=y
20      y.color=z.color
21 if y-original-color==BLACK
22      RB-DELETE-FIXUP(T,x)
```

总结：

1) 删除最终转化为删除一个最多只有一个孩子的节点
   - 当被删除节点 z 最多只有只有一个孩子，满足该条规律
   - 当被删除节点 z 有两个孩子，那么找到该节点的后继节点 y，此时 y 节点必然最多只有一个右孩子，于是将其右孩子 y.right transplant 到到 y 节点处以删除 y 节点，然后再将 y 节点移动到 z 节点处，并保持 z 节点原来的颜色，那么等价于删除 y 节点
2) 当被删除节点的颜色为红色，那么不会破坏红黑树的性质
3) 当被删除的节点是黑色，那么transplant到该节点的节点x如果是黑色，那么为了保持黑高不变的性质，x必须含有双重黑色，此时又破坏了性质1，需要进行维护矫正

9.4.1. 删除辅助

```
RB-DELETE(T,z)
1 y=z
2 y-original-color=y.color
3 if z.left==T.nil
4       x=z.right
5       RB-TRANSPLANT(T,z,z.right)
6 elseif z.right==T.nil
7       x=z.left
8       RB-TRANSPLANT(T,z,z.left)
9 else y=TREE-MINIMUM(z.right)
10      y-original-color=y.color
11      x=y.right
12      RB-TRANSPLANT(T,y,y.right)//即使y.right是哨兵，也会指向y的父节点
13      y.right=z.right
14      y.right.p=y
15      RB-TRANSPLANT(T,z,y)
16      y.left=z.left
17      y.left.p=y
18      y.color=z.color
19 if y-original-color==BLACK
20      RB-DELETE-FIXUP(T,x)
```

蓝色部分为不同之处，即不用讨论(y.parent==z)也可以

y节点：**为删除节点z(z的孩子至少有一个为nil)**或者**将要移动到被删除节点z的节点(z有两个非nil的孩子)**

y-original-color：**y节点的原始颜色**

x：**指向将要移动到y节点的节点(x代表占有y原来位置的节点)**

1、**当y-original-color为红色时：不会违反红黑树的任何性质。**

①当y为被删除节点时：若y为红色，那么它的父节点为黑色，孩子节点也必为黑色，将孩子移植到该位置不会违反任何性质。

②当y节点为z节点的后继时：若y为红色，那么y节点的父节点以及y节点的右子节点(可能为哨兵)必为黑色，将y.right移植到y的位置，不会违反任何性质；**如果z节点是黑色的**，那么删除z节点后z的任意祖先的黑高将少一，但是由于将y的颜色设为黑色，做了补偿。**如果z节点是红色的**，将y节点也设为红色，那么删除z节点不会违反性质5

因此y-original-color为红色时，不会违反红黑树的任何性质

2、**当y-original-color为黑色时：可能会违反性质2或4或5。**

①如果 y 是根节点，而 y 的一个红色孩子成为新的根节点，违反了性质 2

②如果x和x.p是红色，违反了性质4

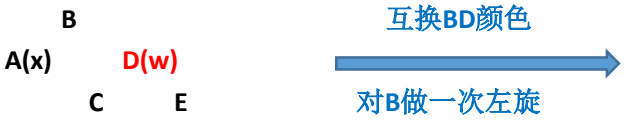
③在树中删除或移动y将导致先前包含y的简单路径上的黑色节点少1

若z节点的孩子均不为T.nil，会违反性质的部分是以y的原位置为根节点的子树(包括其父节点)

①当 x 是其父亲的左孩子时：x 为双重黑色

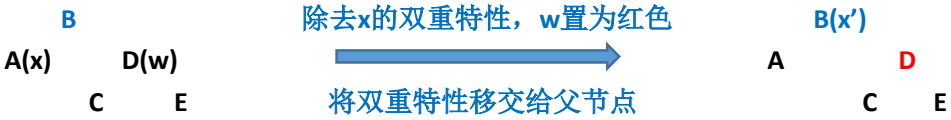
情况1：x的兄弟节点w是红色的(w必有两个黑色的非哨兵子节点，且父亲必为黑色)

将x.p置为红色，w置为黑色，对x.p做一次左旋并更新w，即可将情况1转为234的一种



情况2：x的兄弟节点w是黑色，并且w的两个子节点都是黑色(可以是哨兵)

由于x为双重黑色，为了取消x的双重性，将x与w都去掉一层黑色属性，因此x变为单黑，w变为红色，并更新x(将双重属性赋予x的父节点)，并继续循环



情况3：x的兄弟节点w是黑色，w的左孩子是红色，右孩子是黑色

交换w与其左孩子的颜色，对w进行右旋，并更新w，即可转为情况4

情况4：x的兄弟节点是黑色，且w的右孩子是红色

交换BD颜色，将E置为黑色，并对B做一次左旋，即可退出循环

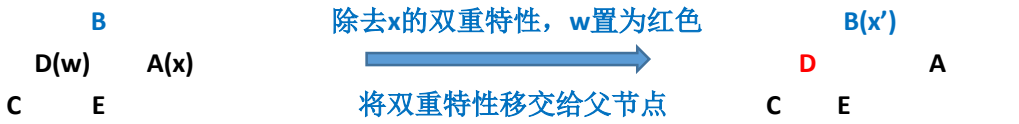
②当 x 是其父亲的右孩子时：x 为双重黑色

情况1：x的兄弟节点w是红色的(w必有两个黑色的非哨兵子节点，且父亲必为黑色)

将x.p置为红色，w置为黑色，对x.p做一次右旋并更新w，即可将情况1转为234的一种

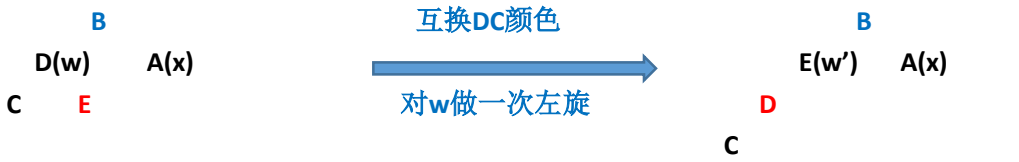
情况2：x的兄弟节点w是黑色，并且w的两个子节点都是黑色(可以是哨兵)

由于x为双重黑色，为了取消x的双重性，将x与w都去掉一层黑色属性，因此x变为单黑，w变为红色，并更新x(将双重属性赋予x的父节点)，并继续循环



情况3：x的兄弟节点w是黑色，w的左孩子是黑色，右孩子是红色

交换w与其右孩子的颜色，对w进行左旋，并更新w，即可转为情况4



情况4：x的兄弟节点是黑色，且w的左孩子是红色

交换BD颜色，将C置为黑色，并对B做一次右旋，即可退出循环

```
RB-DELETE-FIXUP(T,x)
1 while x≠T.root and x.color ==BLACK//若 x 是红色的，那么将 x 改为黑色即可
2       if x==x.p.left//x可以是哨兵，访问x.p是合法的，因为在Delete中已经设置过
3             w=x.p.right
4             if w.color==RED
5                   w.color=BLACK
6                   x.p.color=RED
7                   LEFT-ROTATE(T,x.p)
8                   w=x.p.right
9             if w.left.color==BLACK and w.right.color==BLACK
10                  w.color=RED
11                  x=x.p
12            else_if w.right.color==BLACK
13                        w.left.color=BLACK
14                        w.color=RED
15                        RIGHT-ROTATE(T,w)
16                        w=x.p.right
17                  w.color=x.p.color
18                  x.p.color=BLACK
19                  w.right.color=BLACK
20                  LEFT-ROTATE(T,x.p)
21                  x=T.root
22      elseif x==x.p.right
23            w=x.p.left
24            if w.color==RED
25                  w.color=BLACK
26                  x.p.color=RED
27                  RIGHT-ROTATE(T,x.p)
28                  w=x.p.left
29            if w.left.color==BLACK and w.right.color==BLACK
30                  w.color=RED
31                  x=x.p
32            else_if w.left.color==BLACK
33                        w.right.color=BLACK
34                        w.color=RED
35                        LEFT-ROTATE(T,w)
36                        w=x.p.left
37                  w.color=x.p.color
38                  x.p.color=BLACK
39                  w.left.color=BLACK
40                  RIGHT-ROTATE(T,x.p)
41                  x=T.root
42 x.color=BLACK
```

Chapter 10. AVLTree(版本 1)

10.1. 定义

1、节点的属性

1) val
2) left
3) right
4) parent
5) height

2、节点的性质

1) 每个节点的左子树与右子树的高度最多不超过 1
2) 节点的高度：从给定节点到其最深叶节点所经过的边的数量

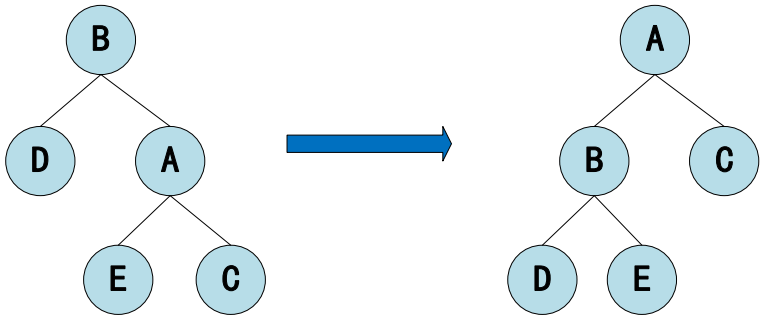
10.2. 平衡性破坏分析

1、调整前某节点 X 的高度记为 HX，调整后，该节点的高度记为 HX+

10.2.1. 可旋性分析

1、对于左旋，必须满足如下性质

- 首先，只有当右子树的高度大于左子树的高度才会有左旋的需求，因此 $H_D=H_A-1$ 或 $H_D=H_A-2$
- 其次，只有 $H_C>=H_E$ 时，旋转后该子树的所有节点才满足 AVL 树的性质，分析如下
- 旋转前，各节点高度如下
  - $H_D=H_A-1$ 或 $H_D=H_A-2$
  - $H_C=H_A-1$
  - $H_E=H_A-1$ 或 $H_E=H_A-2$
- 旋转后，各节点高度如下
  - $H_{D+}=H_D=H_A-1$ 或 H_A-2
  - $H_{E+}=H_E=H_A-1$ 或 H_A-2
  - $H_{C+}=H_C=H_A-1$
  - 旋转后，B 节点平衡，$H_{B+}=H_A$ 或 $H_{B+}=H_A-1$
  - 旋转后，A 节点平衡，$H_{A+}=H_A$ 或 $H_{A+}=H_A+1$



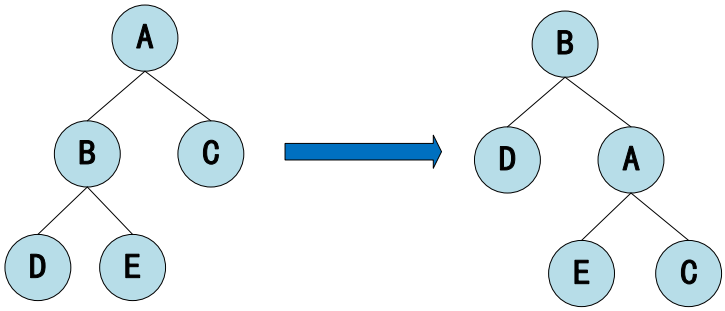
2、对于右旋，必须满足如下性质

- 首先，只有当左子树的高度大于右子树的高度才会有右旋的需求，因此 $H_C=H_B-1$ 或 $H_C=H_B-2$
- 其次，只有 $H_D>=H_E$ 时，旋转后该子树的所有节点才满足 AVL 树的性质，分析如下
- 旋转前，各节点高度如下
  - $H_C=H_B-1$ 或 $H_C=H_B-2$

- $H_D=H_B-1$
- $H_E=H_B-1$ 或 $H_E=H_B-2$

➢ 旋转后，各节点高度如下

- $H_{D+}=H_D=H_B-1$
- $H_{E+}=H_E=H_B-1$ 或 H_B-2
- $H_{C+}=H_C=H_B-1$ 或 H_B-2
- 旋转后，A 节点平衡，且 $H_{A+}=H_B$ 或 $H_{A+}=H_B-1$
- 旋转后，B 节点平衡，且 $H_{B+}=H_B$ 或 $H_{B+}=H_B+1$



10.2.2. 平衡性破坏分析

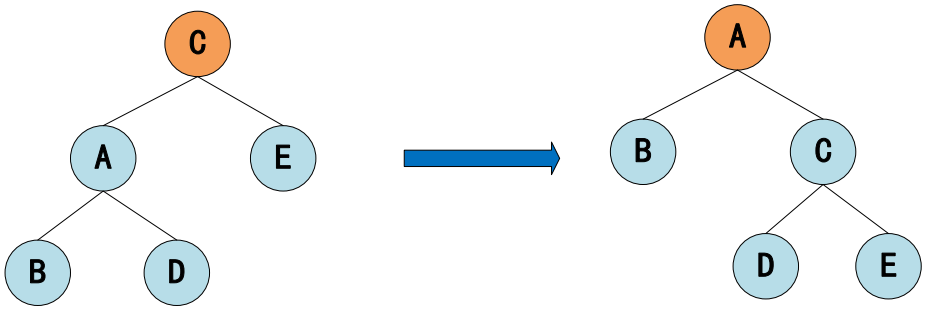
1、当 C 为平衡被破坏的节点，且 C 的左子树比右子树的高度大 2

➢ 需要对 C 进行一次右旋

➢ 右旋的前提是 $H_B>=H_D$

➢ 若不满足 $H_B>=H_D$，则需要首先对 A 进行一次左旋，而左旋又存在前提

➢ 一直往下递归，直至满足旋转条件



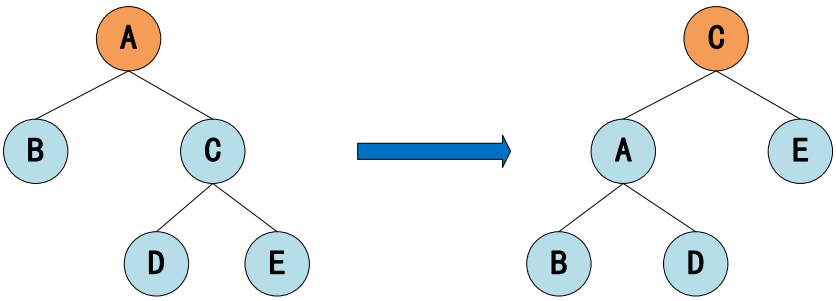
2、当 A 为平衡被破坏的节点，且 A 的右子树比左子树的高度大 2

➢ 需要对 A 进行一次左旋

➢ 左旋的前提是 $H_E>=H_D$

➢ 若不满足 $H_E>=H_D$，则需要首先对 C 进行一次右旋，而右旋又存在前提

➢ 一直往下递归，直至满足旋转条件



10. 3. 基本操作

AVL-TREE-HEIGHT(T,x)

```
1 if x.left.height≥x.right.height      //左右节点均存在
2         x.height=x.left.height+1
3 else x.height=x.right.height+1
```

AVL-TREE-TRANSPLANT(T,u,v)   **//该函数与红黑树完全一致(都含有哨兵节点)**

```
1 if u.p==T.nil
2         T.root=v
3 elseif u==u.p.left
4         u.p.left=v
5 else u.p.right=v
6         v.p=u.p
```

10.3.1. 左旋

AVL-TREE-LEFT-ROTATE(T,**x**)

```
1 y=x.right
2 x.right=y.left
3 if y.left≠T.nil
4         y.left.p=x      //1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)
5 y.p=x.p
6 if x.p== T.nil
7         T.root=y
8 elseif x==x.p.left
9         x.p.left=y
10 else x.p.right=y      // 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)
11 y.left=x
12 x.p=y                 //11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)
13 AVL-TREE-HEIGHT(T,x)
14 AVL-TREE-HEIGHT(T,y)      //13 14 两行顺序不得交换
15 return y      //返回旋转后的子树根节点
```

10. 3. 2. 右旋

AVL-TREE-RIGH-TROTATE(T,**y**)

```
1 x=y.left
2 y.left=x.right
3 if x.right≠T.nil
4         x.right.p=y      //1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)
5 x.p=y.p
6 if y.p==T.nil
7         root=x
8 elseif y==y.p.left
9         y.p.left=x
10 else y.p.right=x      // 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)
11 x.right=y
12 y.p=x              //11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)
13 AVL-TREE-HEIGHT(T,y)
14 AVL-TREE-HEIGHT(T,x)          //13 14 两行顺序不得交换
15 return x           //返回旋转后的子树根节点
```

10.3.3. 维护 AVL 树的性质

AVL-TREE-HOLD-ROTATE(T,x,orientation)

```
1 let stack1,stack2 be two stacks//不考虑实际用到的大小，直接用树的大小来分配堆栈空间大小
2 stack1.push(x)
3 stack2.push(orientation)
4 cur=Nil
5 rotateRoot=Nil //对 x 尝试旋转后，返回最终旋转后的根节点
6 curOrientation=INVALID;
7 while(!stack1.Empty())
8       cur=stack1.top()
9       curOrientation=stack2.top()
10      if curOrientation==LEFT //需要对cur尝试进行左旋
11            if cur.right.right.height≥cur.right.left.height
12                  stack1.pop()
13                  stack2.pop()
14                  rotateRoot=AVL-TREE-LEFT-ROTATE(T,cur)
15            else
16                  stack1.push(cur.right)//否则cur右孩子需要尝试进行右旋来调整
17                  stack2.push(RIGHT);
18      elseif curOrientation ==RIGHT//需要对cur尝试进行右旋
19            if cur.left.left.height≥cur.left.right.height
20                  stack1.pop()
21                  stack2.pop()
22                  rotateRoot=AVL-TREE-RIGHT-ROTATE(T,cur)
23            else
24                  stack1.push(cur.left) //否则cur左孩子需要尝试进行左旋来调整
25                  stack2.push(LEFT)
26 return rotateRoot
```

10. 4. 插入

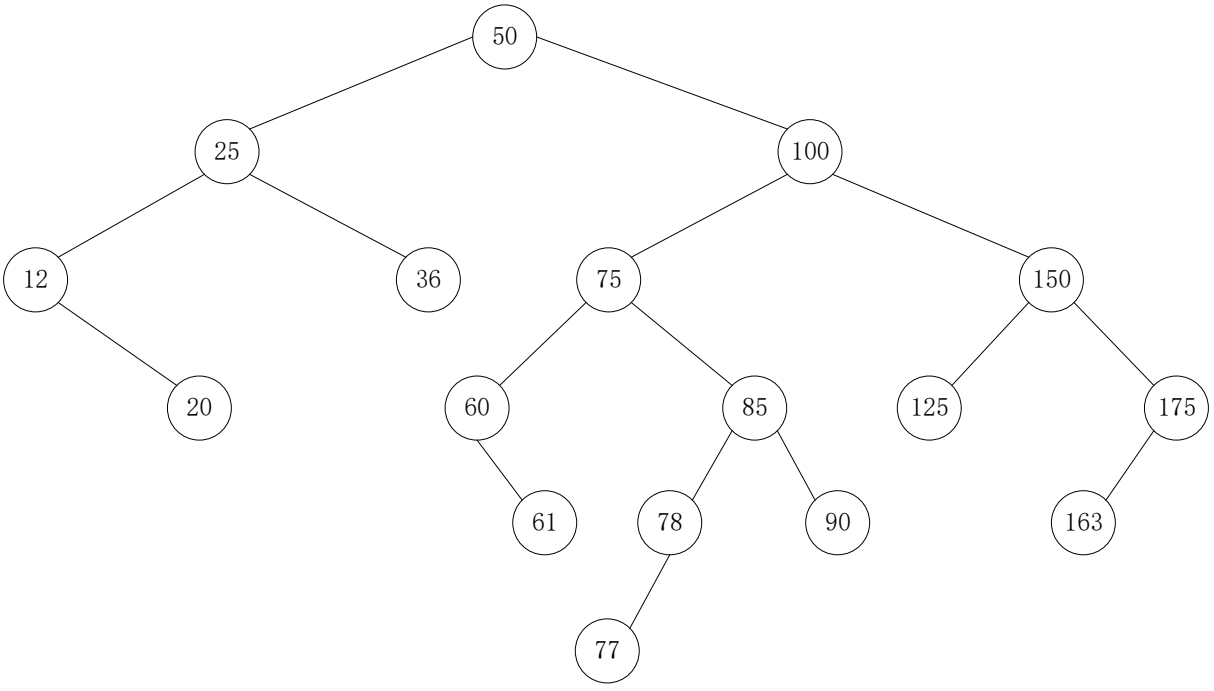
```
AVL-TREE-TREE-INSERT(T,z)
1 y=T.nil
2 x=T.root
3 while x≠T.nil//循环结束时 x 指向空，y 指向上一个 x
4       y=x
5       if z.key<x.key
6             x=x.left
7       else x=x.right
8 z.p=y//将这个叶节点作为 z 的父节点
9 if y==T.nil
10      T.root=z
11 elseif z.key<y.key
12      y.left=z
13 else y.right=z
14 z.left=T.nil
15 z.right=T.nil
16 AVL-TREE-FIXUP(T,z)


AVL-TREE-FIXUP(T,y)
1 if y==T.nil//为了使删除函数也能调用该函数，因为删除函数传入的参数可能是哨兵
2       y=y.p
3 while(y≠T.nil) //沿着y节点向上遍历该条路径
4       AVL-TREE-HEIGHT(y)
5       if y.left.height==y.right.height+2 //左子树比右子树高2
6             y= AVL-TREE-HOLD-ROTATE(T,y,2)
7       elseif y.right.height=y.left.height+2
8             y= AVL-TREE-HOLD-ROTATE(T,y,1)
9       y=y.p
```

10. 5. 删除

AVL-TREE-DELETE(T,z)

```
1 y=z     //x 指向将要移动到 y 原本位置的节点，或者原本 y 节点的父节点
2 if z.left==T.nil
3         x=y.right
4         AVL-TREE-TRANSPLANT(T,z,z.right)
5 elseif z.right==T.nil
6         x=y.left
7         AVL-TREE-TRANSPLANT(T,z,z.left)
8    else y=AVL-TREE-MINIMUM(z.right) //找到z的后继，由于z存在左右孩子，故后继为右子树中的最小值
9         x=y.right
10        if y.p==z//如果y是z的右孩子，需要将x的parent指向y(使得x为哨兵节点也满足)
11              x.p=y
12        else AVL-TREE-TRANSPLANT (T,y,y.right)
13              y.right=z.right
14              y.right.p=y
15         AVL-TREE-TRANSPLANT (T,z,y)
16        y.left=z.left
17        y.left.p=y
18 AVL-TREE-FIXUP(T,x)
```

参考函数HoldRotate思考该数数在插入77后的如何旋转以维持AVL性质



Chapter 11. AVLTree(版本 2)

11.1. 定义

1、节点的属性

6) val
7) left
8) right
9) parent
10) height

2、节点的性质

3) 每个节点的左子树与右子树的高度最多不超过 1
4) 节点的高度：从给定节点到其最深叶节点所经过的边的数量

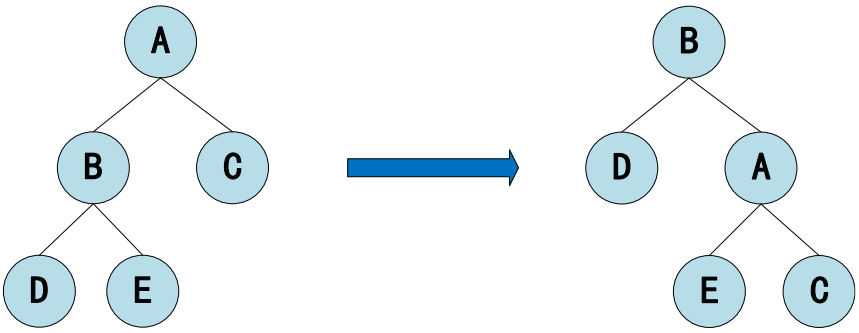
11.2. 平衡性破坏分析

1、与版本 1 的分析不同，这个版本的分析将会更加精确

2、当插入一个节点后，某节点 A 为从插入节点网上的第一个平衡性被破坏的节点，可以分为如下四种情况，又可分为两大类

1) 插入点位于 A 的左子节点的左子树--左左--第一类(外侧)
2) 插入点位于 A 的左子节点的右子树--左右--第二类(内侧)
3) 插入点位于 A 的右子节点的左子树--右左--第二类(内侧)
4) 插入点位于 A 的右子节点的右子树--右右--第一类(外侧)

11.2.1. 第一类不平衡(以左左为例)



1、调整前某节点 X 的高度记为 H_X，调整后，该节点的高度记为 H_{X+}

2、调整前，各节点的高度如下

- $H_B=H_C+2$
- $H_A=H_C+2$(为什么 A 和 B 高度相同，因为 B 的高度已经更新过了，而 A 仍然是是插入新节点之前的高度，即尚未维护 A 节点的 height 字段)
- $H_D=H_B-1=H_C+1$
- H_E 必定小于 H_D(否则在新节点插入到节点 D 为根节点的子树之前，A 节点就是不平衡的)，因此 $H_E=H_C$

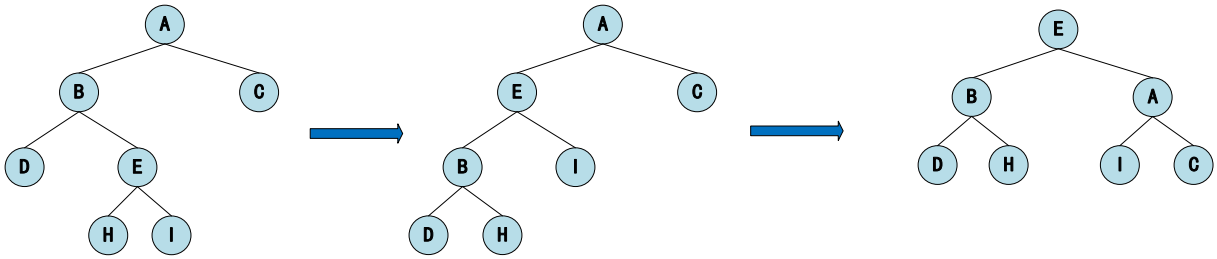
3、右旋调整后，各节点的高度如下

- $H_{D+}=H_D=H_C+1$

- $H_{E+}=H_E=H_C$
- $H_{C+}=H_C$
- 由于 $H_{E+}=H_{C+}$，于是 A 节点平衡，且 $H_{A+}=H_C+1$
- B 节点也是平衡的，且 $H_{B+}=H_C+2$

4、可以发现，调整前后子树根节点的高度都是 H_C+2，因此该节点上层的节点的平衡性不会被破坏，于是通过一次右旋，不平衡性即被消除

11.2.2. 第二类不平衡(以左右为例)



1、调整前某节点 X 的高度记为 H_X，第一次调整后，该节点的高度记为 H_{X+}，第二次调整后记为 H_{X++}

2、调整前，各节点的高度如下

- $H_B=H_C+2$
- $H_A=H_C+2$(为什么 A 和 B 高度相同，因为 B 的高度已经更新过了，而 A 仍然是是插入新节点之前的高度，即尚未维护 A 节点的 height 字段)
- $H_E=H_B-1=H_C+1$
- H_D 必定小于 H_E，因此 $H_D=H_C$
- H_H 与 H_I 至少有一个是 H_C，另一个可以是 H_C 或 H_C-1

3、对 B 节点进行一次左旋后，各节点高度如下

- $H_{D+}=H_D=H_C$
- $H_{H+}=H_H=H_C$ or H_C-1
- $H_{I+}=H_I=H_C$ or H_C-1
- $H_{C+}=H_C$
- $H_{A+}=H_A=H_C+2$
- $H_{B+}=H_C+1$
- 当 $H_{I+}=H_C-1$ 时，节点 E 可能是不平衡的，但是没关系，这只是个中间状态，$H_E=H_C+2$

4、对 A 节点进行一次右旋，各节点高度如下

- $H_{D++}=H_{D+}=H_C$
- $H_{H++}=H_{H+}=H_C$ or H_C-1
- $H_{I++}=H_{I+}=H_C$ or H_C-1
- $H_{C++}=H_{C+}=H_C$
- 旋转后，B 节点平衡，$H_{B++}=H_C+1$
- 旋转后，A 节点平衡，$H_{A++}=H_C+1$
- 因此旋转后，E 节点平衡，$H_{E++}=H_C+2$

5、可以发现，调整前后子树根节点的高度都是 H_C+2，因此该节点上层的节点的平衡性不会被破坏，于是通过一次左旋和一次右旋，不平衡性即被消除

11. 3. 基本操作

AVL-TREE-HEIGHT(T,x)

```
1 if x.left.height≥x.right.height      //左右节点均存在
2         x.height=x.left.height+1
3 else x.height=x.right.height+1
```

AVL-TREE-TRANSPLANT(T,u,v)   **//该函数与红黑树完全一致(都含有哨兵节点)**

```
1 if u.p==T.nil
2         T.root=v
3 elseif u==u.p.left
4         u.p.left=v
5 else u.p.right=v
6         v.p=u.p
```

11. 3. 1. 左旋

AVL-TREE-LEFT-ROTATE(T,**x**)

```
1 y=x.right
2 x.right=y.left
3 if y.left≠T.nil
4         y.left.p=x      //1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)
5 y.p=x.p
6 if x.p== T.nil
7         T.root=y
8 elseif x==x.p.left
9         x.p.left=y
10 else x.p.right=y      // 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)
11 y.left=x
12 x.p=y                 //11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)
13 AVL-TREE-HEIGHT(T,x)
14 AVL-TREE-HEIGHT(T,y)      //13 14 两行顺序不得交换
15 return y      //返回旋转后的子树根节点
```

11.3.2. 右旋

AVL-TREE-RIGH-TROTATE(T,**y**)

```
1 x=y.left
2 y.left=x.right
3 if x.right≠T.nil
4         x.right.p=y      //1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)
5 x.p=y.p
6 if y.p==T.nil
7         root=x
8 elseif y==y.p.left
9         y.p.left=x
10 else y.p.right=x      // 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)
11 x.right=y
12 y.p=x              //11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)
13 AVL-TREE-HEIGHT(T,y)
14 AVL-TREE-HEIGHT(T,x)          //13 14 两行顺序不得交换
15 return x           //返回旋转后的子树根节点
```

11.4. 插入

```
AVL-TREE-INSERT(T,z)
1 y=T.nil
2 x=T.root
3 while x≠T.nil//循环结束时 x 指向空，y 指向上一个 x
4       y=x
5       if z.key<x.key
6             x=x.left
7       else x=x.right
8 z.p=y//将这个叶节点作为 z 的父节点
9 if y==T.nil
10      T.root=z
11 elseif z.key<y.key
12      y.left=z
13 else y.right=z
14 z.left=T.nil
15 z.right=T.nil
16 AVL-TREE-BALANCE-FIX (T,z)


AVL-TREE--BALANCE-FIX(T,z)
1 originHigh=z.h
2 AVL-TREE-HEIGHT(z)
3 r=z
4 if z.left.h==z.right.h+2
5       if z.left.left.h>=z.left.right.h     //第一类，等号在插入过程中不可能取到，删除过程中能取到
6             r=AVL-TREE-RIGHT-ROTATE(z)
7       elseif z.left.left.h<z.left.right.h        //第二类
8             AVL-TREE-LEFT-ROTATE(z.left)
9             r=AVL-TREE-RIGHT-ROTATE(z)
      //不可能出现左右子树高度相同的情况，但是 DELETE-FIX 中可能出现，注意
10 elseif z.right.h==z.left.h+2
11      if z.right.right.h>=z.right.left.h     //第一类，等号在插入过程中不可能取到，删除过程中能取到
12            r=AVL-TREE-LEFT-ROTATE(z)
13      elseif z.right.right.h<z.right.left.h          //第二类
14            AVL-TREE-RIGHT-ROTATE(z.right)
15            r=AVL-TREE-LEFT-ROTATE(z)
      //不可能出现左右子树高度相同的情况，但是 DELETE-FIX 中可能出现，注意
16 if r.h!=originHigh and r!=root
17      AVL-TREE--BALANCE-FIX(r.parent)
```

11.5. 删除

```
AVL-TREE-DELETE(T,z)
1 y=z     //x 指向将要移动到 y 原本位置的节点，或者原本 y 节点的父节点
2 p=y.parent     //p 为被删除节点的父节点
3 if z.left==T.nil
4         AVL-TREE-TRANSPLANT(T,z,z.right)
5 elseif z.right==T.nil
6         AVL-TREE-TRANSPLANT(T,z,z.left)
7    else y=AVL-TREE-MINIMUM(z.right) //找到z的后继，由于z存在左右孩子，故后继为右子树中的最小值
8         if y==z.right       //这个边界判断必须，因为p必须定位到被删除节点的父节点
9               p=y
10        else
11              p=y.parent
12        AVL-TREE-TRANSPLANT(y,y.right)
13        y.right=z.right
14        y.right.parent=y
15        y.left=z.left
16        y.left.parent=y
17        AVL-TREE-TRANSPLANT (T,z,y)
18        y.height=z.height
19 if p!=nil
20        AVL-TREE--BALANCE-FIX(p)
```

Chapter 12. 数据结构扩张

红黑树的扩展：每个节点带有另一个属性(以该节点为根节点的子树的节点个数(不包括Nil)

查找第i个顺序统计量(秩)

```
OS-SELECT(x,i)
1 r=x.left.size+1
2 if i==r
3        return x
4 elseif i<r
5        return OS-SELECT(x.left,i)
6 else return OS-SELECT(x,right,i-r)
```

```
OS-RANK(T,x)
1 r=x.left.size+1
2 y=x
3 while y≠T.root//循环不变式：每次迭代开始时，r为以y为根的子树中x节点的秩
4        if y==y.p.right
5               r=r+y.p.left.size+1
6        y=y.p
7 return r
```

为了维护这个额外的属性，红黑树以下函数需要作出修改

左旋：

```
LEFT-ROTATE(T,x)
1 y=x.right
2 x.right=y.left
3 if y.left≠T.nil
4         y.left.p=x      //1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)
5 y.p=x.p
6 if x.p==T.nil
7         T.root=y
8 elseif x==x.p.left
9         x.p.left=y
10 else x.p.right=y // 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)
11 y.left=x
12 x.p=y              //11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)
13 y.size=x.size      //上述操作后，x.size未被改动，且改变子树的根节点不会导致节点数变化
14 x.size=x.left.size+x.right.size+1 //更新 x.size
```

右旋：

```
RIGHT-ROTATE(T,y)
1 x=y.left
2 y.left=x.right
3 if x.right≠T.nil
4         x.right.p=y     //1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)
5 x.p=y.p
6 if y.p==T.nil
7         root=x
8 elseif y==y.p.left
9         y.p.left=x
10 else y.p.right=x // 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)
11 x.right=y
12 y.p=x              //11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)
13 x.size=y.size    //上述操作后，y.size未被改动，且改变子树的根节点不会导致节点数变化
14 y.size=y.left.size+y.right.size+1 //更新 y.size
```

```
RB-INSERT(T,z)
1 y=T.nil
2 x=T.root
3 while x≠T.nil
4         y=x
5         y.size=y.size+1//新节点插入的路径上每一个父节点都需要将大小增加1
6         if z.key<x.key
7                 x=x.left
8         else x=x.right
9 z.p=y
10 if y==T.nil
11        T.root=z
12 elseif z.key<y.key
13        y.left=z
14 else y.right=z
15 z.left=T.nil
16 z.right=T.nil
17 z.colcor=RED
18 z.size=1//新插入的节点大小为1
19 RB-INSERT-FIXUP(T,z)
```

```
RB-DELETE(T,z)
1 y=z
2 y-original-color=y.color
3 if z.left==T.nil
4       x=z.right
5       RB-TRANSPLANT(T,z,z.right)
6 elseif z.right==T.nil
7       x=z.left
8       RB-TRANSPLANT(T,z,z.left)
9 else y=TREE-MINIMUM(z.right)
10      y-original-color=y.color
11      x=y.right
12      if y.p==z
13            x.p=y//使得x为哨兵节点时也成立
14      else RB-TRANSPLANT(T,y,y.right)//即使y.right是哨兵，也会指向y的父节点
15            y.right=z.right
16            y.right.p=y
17      RB-TRANSPLANT(T,z,y)
//17行运行之后，13、14行都会保证x指向原始y父节点的位置
18      y.left=z.left
19      y.left.p=y
20      y.color=z.color
21 p=x.p //由于x是挪到y原本位置的节点，因此x的属性未发生变动，x的所有父节点需要更新
22 while p≠T.nil
23        p.size=p.size-1
24        p=p.p
25 if y-original-color==BLACK
26      RB-DELETE-FIXUP(T,x)
```

Chapter 13. 动态规划 DP

13.1. 钢条切割问题

朴素递归

```
CUT-ROD(p,n)
1 if n==0
2        return 0
3 q=-∞
4 for i=1 to n      //i表示的是从左边切下的长度
5        q=max(q,p[i]+CUT-ROD(p,n-i))
6 return q
```

带备忘的自顶向下递归(因为需要有初始化的变量，因此需要两个函数!!!)

```
MEMOIZED-CUT-ROD(p,n)
1 let r[0…n] be a new array    //为什么要保存r[0]，见MEMOIZED-CUT-ROD-AUX第7行，会访问该元素
2 for i=0 to n
3        r[i]=-∞
4 return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)
```

```
MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)
1 if r[n]≥0//已存入备忘录，返回
2        return r[n]
3 if n==0//正常递归的返回
4        q=0
5 else q=-∞
6        for i=1 to n
7              q=max(q,p[i]+MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n-i,r)
8 r[n]=q
9 return q
```

自底向上非递归

```
BOTTOM-UP-CUT-ROD(p,n)
1 let r[0...n]be a new array //为什么要保存r[0]，见第6行，会访问r[0]
2 r[0]=0
3 for j=1 to n //按大小次序依次求解该问题以及其所有子问题
4        q=-∞
5        for i=1 to j //在求解子问题j之前，j的所有子问题必然已经求解出来
6              q=max(q,p[i]+r[j-i])//与CUT-ROD不同之处，直接访问结果而非递归调用
```

```
7         r[j]=q
8 return r[n]
```

保存最优解的自底向上非递归

```
EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p,n)
1 let r[0...n] and s[0...n] be new arrays
2 r[0]=0
3 for j=1 to n
4         q=-∞
5         for i=1 to j
6                 if q<p[i]+r[j-i]
7                         q=p[i]+r[j-i]
8                         s[j]=i//只保存第一段长度
9       r[j]=q
10 return r and s
```

13. 2. 矩阵链相乘完全括号化问题

自底向上非递归法：

```
MATRIX-CHAIN-ORDER(p)
1 n=p.length-1//n为矩阵的个数
2 let m[1…n,1…n] and s[1…n-1,2…n] be new tables
3 for i=1 to n
4        m[i,i]=0
5 for g=2 to n //依次计算长度为g的子链的最优括号化(不同的子链长度)
6        for i=1 to n- g +1//i为该长为g的子链的起始索引(索引从1开始)(不同的起始位置)
7              j=i+ g -1//长为g子链以i为起始索引时，终止索引为j
8              m[i,j]=∞
9              for k=i to j-1//子链[i,j]的分割点
10                   q=m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_kp_j //计算m[i,j]时，长度小于j-1+1的子链的最优括号化已求得
11                   if q<m[i,j]
12                         m[i,j]=q
13                         s[i,j]=k
14 return m and s
```

其中m[i,j]代表计算矩阵$A_{i...j}$所需标量乘法次数的最小值

其中s[i,j]代表满足$A_{i...j}$所需标量乘法次数的最小值时的分割点，故i≤s[i,j]<j

若矩阵为A1=30*35; A2=35*15; A3=15*5; A4=5*10; A5=10*20; A6=20*25;

那么p=[30,35,15,5,10,20,25] 即A_i=p[i-1]*[i]

```
PRINT-OPTIMAL-PARENS(s,i,j)
1 if i==j
2        print “A”_i
3 else print”(”
4        PRINT-OPTIMAL-PARENS(s,i,s[i,j])
5        PRINT-OPTIMAL-PARENS(s,s[i,j]+1,j)
6        print”)”
```

自带备忘的自顶向下法：

```
MATRIX-CHAIN-MEMOIZED(p)
1 int n=p.length-1
2 let m[1…n,1…n] and s[1…n-1,2…n]be new tables
3 for i=1 to n//该循环初始化，使得备忘录为特殊值
4        for j=i to n
5              m[i,j]=∞
6 MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,1,n)
7 return m and s
```

```
MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,i,j)
1 if m[i,j]<∞//若不为特殊值说明该情况已求得最优解
2         return m[i,j]
3 if i==j
4         m[i,j]=0
5 else for k=i to j-1
6                 q= MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,i,k)+
                        MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,k+1,j)+ p_{i-1}p_kp_j
7                 if q<m[i,j]
8                         m[i,j]=q
9                         s[i,j]=k
10 return m[i,j]
```

自带备忘的自顶向下法的特点

1、需要两个函数，其中一个为递归函数

2、递归函数中，有3个返回点：备忘录中已有该问题的结果；平凡结果；非平凡结果

3、递归函数需要返回值：该问题的一个最优解

13.3. LCS-LENGTH

LCS(X,Y) longest common subsequence

```
1 m=X.length
2 n=Y.length
3 let b[1...m,1...n] and c[1...m,1...n]be new tables//c[i,j]表示 X1...i 与 Y1...i 的最长公共子序列的长度
//b[i,j]表示 c[i,j]分解成子问题的方式(存储即作出选择，该选择只有 3 种)
4 for i=1 to m
5       c[i,0]=0
6 for j=0 to n
7       c[0,j]=0
8 for i=1 to m
9       for j=1 to n
10          if xi==yj
11              c[i,j]=c[i-1,j-1]+1
12              b[i,j]= ↖
13          elseif c[i-1,j]≥c[i,j-1]
14              c[i,j]=c[i-1,j]
15              b[i,j]= ↑
16          else c[i,j]=c[i,j-1]
17              b[i,j]= ←
18 return c and b
```

LMS-LENGTH(X) longest monotonous sunsequence

```
1 n=X.length
2 let c[1...n] b[1...n] be new tables //其中 c[i]表示以元素 X[i]结尾的最长单调子序列(子问题形式与原问题不同！)
//b[i]表示以元素 X[i]结尾的最长单调子序列中第二大的元素的下标
3 for i=1 to n
4       c[i]=1//至少为 1 嘛
5 for i=2 to n
6       for j=1 to i-1
7           if X[i]>X[j] and c[i]<c[j]+1
8               c[i]=c[j]+1
9               b[i]=j
```

13.4. OBST

```
OBST(p,q)
1 let e[1...n+1,0...n],w[1...n+1,0...n],and root[1...n,1...n]be new tables
//其中 p1...pn 代表关键字 k1...kn 的概率，q0...qn 代表伪关键字 d0...dn 的概率
//e[i,j]表示包含关键字 ki...kj 的子树的搜索期望代价，其中 e[i,i-1]=q[i-1]
//w[i,j]表示包含关键字 ki...kj 的子树的关键字以及伪关键字 di-1...dj 概率之和
//root[i,j]表示包含关键字 ki...kj 的子树的根节点
//包含关键字 ki...kj 的子树中必然包含伪关键字 di-1...dj
2 for i=1 to n+1
3       e[i,i-1]=q[i-1];
4       w[i,i-1]=q[i-1];
5 for L=1 to n //L 代表子树的长度
6       for i=1 to n-L+1//i 代表长为 L 的子树的起始索引
7           j=i+L-1//j 代表长为 L 的子树的终止索引
8           e[i,j]=∞
9           w[i,j]=w[i,j-1]+p[j]+q[j]
10          for r=i to j//r 代表长为 L 的子树的分割点
11              t=e[i,r-1]+e[r+1,j]+w[i,j]
12              if t<e[i,j]
13                  e[i,j]=t
14                  root[i,j]=r
15 return e and root

PRINT_TREE(i,j,last)
1 cur=SUB_ROOT(i,j)//若 j<i 会返回 0
2 if i==1 and j==root.Length
3       print("K"+cur+"为根")
4 elseif cur==0
5       if j<last
6           print("D"+j+"为"+"K"+last+"的左孩子)
7       else print("D"+j+"为"+"K"+last+"的左孩子)
8 elseif index<last
9       print("K"+index+"为"+"K"+last+"的左孩子)
10      PRINT_TREE(i,index-1,index)
11      PRINT_TREE(index+1,j,index)
12 else print("K"+index+"为"+"K"+last+"的右孩子)
13      PRINT_TREE(i,index-1,index)
14      PRINT_TREE(index+1,j,index)

SUB_ROOT(i,j)
if i<=j
    return root[i,j]
return 0 //当 i=1，j=0 时也能起作用，而 root[i,j]此时会异常
```

Chapter 14. 贪心算法

```
RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)
1 m=k+1
2 while m≤n and s[m]<f[k] //在 k 之后，n 之前的活动中，找到活动开始时间小于活动 k 结束时间的活动，由于活动结束时间已排序，因此第一个满足条件的活动一定是活动时间最早结束的活动
3       m=m+1
4 if m≤n
5       return {a_m}URECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,m,n)
```

```
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)
1 n=s.length
2 A={a_1} //由于活动按结束时间排序，第一个活动必定会选择
3 k=1
4 for m=2 to n
5       if s[m]≥f[k]
6             A=A∪{a_m}
7             k=m
8 return A
```

14.1. 0-1 背包问题

```
MaxValue(p,w,V)
1 n=p.length
2 let dp[1...n][1...V] be a new array
3 for v=1 to V //初始化，对于不同的背包容量，对第一个商品的最大利益
4       if w[1]<=v
5             dp[1][v]=p[1] //装得下就装下
6       else dp[1][v]=0 //装不下就舍弃
7 for i=2 to n
8       for v=1 to V
9             if v<w[i] //若大小为 v 的背包容量小于第 i 件商品的重量，那么第 i 件商品无法取得
10                  dp[i][v]=dp[i-1][v]
11            else dp[i][v]=max(dp[i-1][v],dp[i-1][v-w[i]]+p[i])
12 return dp[n][V]
```

核心关系式：**dp[i][v]=max(dp[i-1][v],dp[i-1][v-w[i]]+p[i])**

子问题模式：**dp[i][v]：对于前 i 个商品，给定背包容量 v 所能获取的最大收益(可以取可以不取)**

14. 2. 哈夫曼编码

```
HUFFMAN(C)
1 n=|C|
2 Q=C//将 C 中的元素全部存入优先队列(优先队列用最小二叉堆实现)
3 for i=1 to n-1
4       allocate a new node z
5       z.left=x=EXTRACT-MIN(Q)//提取出优先队列中的第一项
6       z.right=y=EXTRACT-MIN(Q) //提取出优先队列中的第一项
7       z.freq=x.freq+y.freq
8       INSERT(Q,z)
9 return EXTRACT-MIN(Q)
```

Q 是一个优先队列

Chapter 15. B 树

15.1. 定义

15.1.1. 节点

1、节点的属性

1) n：关键字个数
2) key：关键字数组
3) c：孩子数组
4) leaf：是否为叶节点

2、每个节点具有以下性质

1) x.n：当前存储在节点 x 中的关键字个数
2) x.n 个关键字本身 $x.key_1, x.key_2, ..., x.key_{x.n}$，以非降序存放，使得
$$x.key_1 \le x.key_2 \le ... \le x.key_{x.n}$$
3) x.leaf：一个布尔值，如果 x 是叶节点，则为 TRUE，如果 x 为内部节点，则为 FALSE
4) 每个内部节点 x 还包含 x.n+1 个指向其孩子的指针，$x.c_1, x.c_2, ..., x.c_{x.n+1}$，叶节点没有孩子，所以他们的 c_i 属性没有定义
5) 关键字 $x.key_i$ 对存储在各子树中的关键字范围加以分割：如果 k_i 为任意一个存储在以 $x.c_i$ 为根的子树中的关键字，那么
$$k_1 \le x.key_1 \le k_2 \le x.key_2 \le ... \le x.key_{x.n} \le k_{x.n+1}$$
6) 每个叶节点都具有相同的深度，即树的高度 h
7) 每个节点所包含的关键字个数有上界和下界，用一个被称为 B 数的最小度数(minimum degree)的固定整数 $t \ge 2$ 来表示这些界
   - 除了根节点以外的每个节点必须至少有 t-1 个关键字，因此除了根节点以外的每个内部节点至少有 t 个孩子，如果树非空，根节点至少含有一个关键字
   - 每个节点至多可包含 2t-1 个关键字，因此，一个内部节点最多可有 2t 个孩子，当一个节点恰好有 2t-1 个关键字时，称该节点是满的
   - t=2 时的 B 数是最简单的，在实际中，t 的值越大，B 树的高度就越小

15.1.2. 树

1、属性

1) t：B 树的度
2) root：B 树的根节点

2、对于节点 x ，关键字 $x.key_i$ 与子树指针 $x.c_i$ 的索引相同，就说 $x.c_i$ 是关键字 $x.key_i$ 对应的子树指针

3、子树 $x.c_i$ 的元素介于 $x.key_{i-1}$~$x.key_i$ 之间 $1 \le i \le x.n+1$，为保持一致性，记 $x.key_0 = -\infty$，$x.key_{x.n+1} = +\infty$

15. 2. 基本操作

15. 2. 1. 查找

B-TREE-SEARCH(x,k)

```
1 i=1
2 while i ≤ x.n and k > x.key_i
3         i=i+1
4 if i ≤ x.n and k==x.key_i
5         return (x,i)
6 elseif x.leaf
7         return NIL
8 else DISK-READ(x,c_i)
9         return B-TREE-SEARCH(s.c_i,k)
```

15. 2. 2. 分裂

B-TREE-SPLIT-CHILD(x,i)//x.ci 是满节点，x 是非满节点

```
1 z=ALLOCATE-NODE()//z 是由 y 的一半分裂得到
2 y=x.c_i
3 z.leaf=y.leaf
4 z.n=t-1
5 for j=1 to t-1
6         z.key_j=y.key_j+t //将 y 中[t+1…2t-1]总共 t-1 个关键字复制到节点 z 中作为[1…t-1]的关键字，其中第 t 个关键字会提取出来作为 x 节点的关键字
7 if not y.leaf//如果 y 不是叶节点，那么 y 还有 t 个指针需要复制到 z 中
8         for j=1 to t
9                 z.c_j=y.c_j+t
10 y.n=t-1
11 for j=x.n+1 downto i+1//指针 y 和 z 必然是相邻的，并且他们所夹的关键字就是原来 y 中第 t 个
12         x.c_j+1=x.c_j
13 x.c_i+1=z
14 for j=x.n downto i
15         x.key_j+1=x.key_j
16 x.key_i=y.key_t
17 x.n=x.n+1
18 DISK-WRITE(y)
19 DISK-WRITE(z)
20 DISK-WRITE(x)
```

15. 2. 3. 前继节点

B-TREE-PRECURSOR(x,k)//得保证 k 必须存在于 B 树中

```
1 if !B-TREE-SEARCH(k) or k==B-TREE-MINIMUM(T.root)
2 throw error(no precursor)
3 B-TREE-PRECURSORAUX(T.root,k)
```

B-TREE-PRECURSORAUX(x,k)

```
1 i=1
2 if x.leaf//若为叶节点
3       while i≤x.n and k>x.key_i ++i //找到第一个不小于 k 的关键字(大于或等于都可以)
4       return x.key_{i-1}
5 else //若不为叶节点
6       while i≤x.n and k>x.key_i ++i //找到第一个不小于 k 的关键字
7       if k==x.key_i return B-TREE-MAXIMUM(x.c_i) //若这个关键字等于 k，那么在对应子树中找最大值
8       if MINIMUM(x.c)≥k //如果该关键字对应的子树的最小值大于 k
9             return x.k_{i-1} //那么前驱必然是当前节点中的前一个关键字
10      return B-TREE-PRECURSORAUX(x.c_i,k)//否则在该关键字对应的子树中继续寻找
```

15. 2. 4. 后继节点

B-TREE-SEARCH-SUCCESSOR(x,k)

```
1 if !B-TREE-SEARCH(x,k) or k=B-TREE-MAXIMUM(T.root)
2 throw error (no successor)
3 B-TREE-SEARCH-SUCCESSORAUX(x,k)
```

B-TREE-SEARCH-SUCCESSORAUX(x,k)

```
1 i=x.n
2 if x.leaf
3       while i≥1 and k<x.key_i --i
4       return x.key_{i+1}
5 else
6       while i≥1 and k<x.key_i --i
7       if k==x.key_i return B-TREE-MINIMUMAUX(x.c_{i+1})
8       if k≥B-TREE-MAXIMUM(x.c_{i+1})
9             return x.key_{i+1}
9       return B-TREE-SEARCH-SUCCESSORAUX(x.c_{i+1},k)
```

15.2.5. 最值

B-TREE-MINIMUM(x)

1 **if** x.leaf **return** $x.key_1$

2 **return** B-TREE-MIMIMUM($x.c_1$)

B-TREE-MAXIMUM(x)

1 **if** x.leaf **return** $x.key_{x.n}$

2 **return** B-TREE-MAXIMUM($x.c_{x.n+1}$)

15.2.6. 合并

B-TREE-MERGE(x,i,y,z)

1 y.n=2t-1

2 **for** j=t+1 **to** 2t-1

3 $y.key_j=z.key_{j-t}$

4 $y.key_t=x.key_i$ **//the key from node x merge to node y as the tth key**

5 **if not** y.leaf

6 **for** j=t+1 **to** 2t

7 $y.c_j=z.c_{j-t}$

8 **for** j=i+1 **to** x.n

9 $x.key_{j-1}=x.key_j$

10 $x.c_j=x.c_{j+1}$

11 x.n=x.n-1

12 Free(z)

15.2.7. shift

B-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i,y,z)

```
1 y.n=y.n+1
2 y.key_{y.n}=x.key_i
3 x.key_i=z.key_1
4 z.n=z.n-1
5 j=1
6 while j≤z.n
7         z.key_j=z.key_{j+1}
8         j=j+1
9 if not z.leaf
10          y.c_{y.n+1}=z.c_1
11          j=1
12          while j≤z.n+1
13                  z.c_j=z.c_{j+1}
14                  j++
15 DISK-WRITE(y)
16 DISK-WRITE(z)
17 DISK-WRITE(x)
```

B-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,i,y,z)

```
1 z.n=z.n+1
2 j=z.n
3 while j>1
4         z.key_j=z.key_{j-1}
5         j--
6 z.key_1=x.key_i
7 x.key_i=y.key_{y.n}
8 if not z.leaf
9         j=z.n
10        while j>0
11                z.c_{j+1}=z.c_j
12                j--
13        z.c_1=y.c_{y.n+1}
14 y.n=y.n-1
15 DISK-WRITE(y)
16 DISK-WRITE(z)
17 DISK-WRITE(x)
```

15. 3. 插入

B-TREE-INSERT(T,k)

```
1 r=T.root
2 if r.n==2t-1 //需要处理根节点，若满了，则进行一次分裂，这是树增高的唯一方式
3       s=ALLOCATE-NODE()//分配一个节点作为根节点
4       T.root=s
5       s.leaf=FLASE//显然由分裂生成的根必然是内部节点
6       s.n=0
7       s.c1=r//之前的根节点作为新根节点的第一个孩子
8       B-TREE-SPLIT-CHILD(s,1)
9       B-TREE-INSERT-NONFULL(s,k)
10else B-TREE-INSERT-NONFULL(r,k)
```

B-TREE-INSERT-NONFULL(x,k)

```
1 i=x.n
2 if x.leaf //如果是叶节点，保证是非满的，找到适当的位置插入即可
3       while i ≥1 and k<x.keyi
4             x.keyi+1=x.keyi
5             i=i-1
6       x.keyi+1=k
7       x.n=x.n+1
8       DISK-WRITE(x)
9 else while i ≥ 1 and k<x.keyi
10            i=i-1
11      i=i+1//转到对应的指针坐标
12      DISK-READ(x.ci)
13      if x.ci.n==2t-1
14            B-TREE-SPLIT-CHILD(x,i)
15            if k>x.keyi   //原来在 i 位置的关键字现在在 i+1 位置上，i 位置上是 y.keyt
16                  i=i+1
17      B-TREE-INSERT-NONFULL(x.ci,k)
```

从左往右遍历，第一个大于指定关键字的关键字的索引就是指针的索引
从右往左遍历，第一个小于指定关键字的关键字的索引+1 就是指针的索引

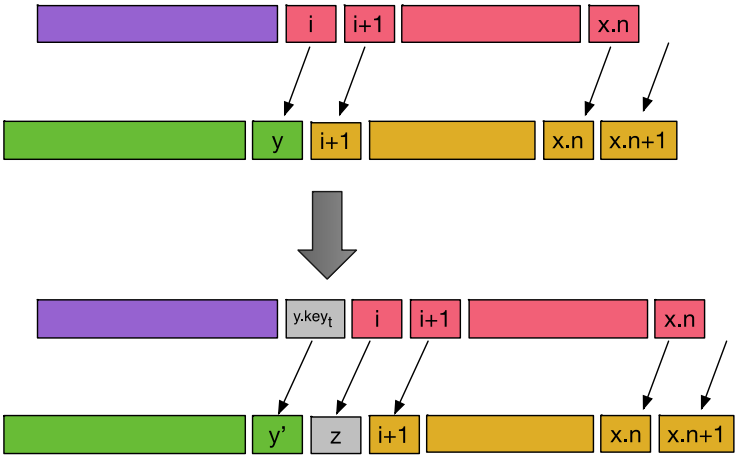
15. 4. 删除

B-TREE-DELETE(T,k) //以下都是 delete 会用到的函数

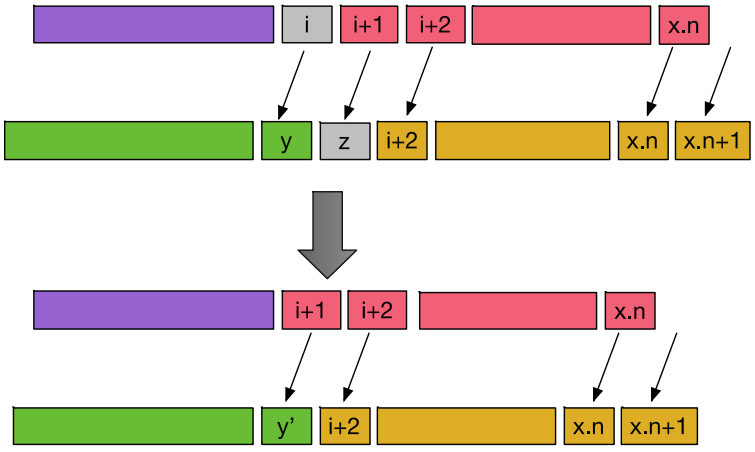
```
1 r=T.root
2 if r.n==1
3       DISK-READ(r.c1)
4       DISK-READ(r.c2)
5       y=r.c1
6       z=r.c2
7       if not r.leaf and y.n==z.n==t-1
8             B-TREE-MERGE-CHILD(r,1,y,z)
9             T.root=y
10            FREE-NODE(r)
11            B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k)
12      else B-TREE-DELETE-NOTNONE(r,k)
13 else B-TREE-DELETE-NOTNONE(r,k)
```

```
B-TREE-DELETE-NOTNONE(x,k)
1 i=1
2 if x.leaf
3       while i ≤ x.n and k>x.key_i
4             i=i+1
5       if k==x.key_i
6           for j=i+1 to x.n
7                 x.key_{j-1}=x.key_j
8           x.n=x.n-1
9           DISK-WRITE(x)
10      else error:"the key does not exist"
11 else while i ≤ x.n and k>x.key_i
12            i=i+1
13       DISK-READ(x.c_i)
14       y=x.c_i
15       if i ≤ x.n
16            DISK-READ(x.c_{i+1})
17            z=x.c_{i+1}
18       if i ≤ x.n and k==x.key_i          //Cases 2
19            if y.n>t-1       //Cases 2a
20                 k'=B-TREE-MIMIMUM(y)
21                 B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k')
22                 x.key_i=k'
23            elseif z.n>t-1    //Case 2b
24                 k'=B-TREE-MAXIMUM(z)
25                 B-TREE-DELETE-NOTNONE(z,k')
26                 x.key_i=k'
27            else B-TREE-MERGE-CHILD(x,i,y,z) //Cases 2c
28                 B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k)
29       else     //Cases3
30            if i>1
31                 DISK-READ(x.c_{i-1})
32                 p=x.c_{i-1}
33            if y.n==t-1
34                 if i>1 and p.n>t-1    //Cases 3a
35                      B-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,i-1,p,y)
36                 elseif i ≤ x.n and z.n>t-1
37                      B-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i,y,z)
38                 elseif i>1    //Cases3b
39                      B-TREE-MERGE-CHILD(x,i-1,p,y)
40                      y=p
41                 else B-TREE-MERGE-CHILD(x,i,y,z) //Cases 3b
42            B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k)
```

SPLID


i
i+1
x.n
y
i+1
x.n
x.n+1
y.key$_t$
i
i+1
x.n
y'
z
i+1
x.n
x.n+1

Merge


i
i+1
i+2
x.n
y
z
i+2
x.n
x.n+1
i+1
i+2
x.n
y'
i+2
x.n
x.n+1

Chapter 16. B+树

16.1. 定义

16.1.1. 节点

1、节点的属性

1) n：关键字个数
2) key：关键字数组
3) c：孩子数组
4) leaf：是否为叶节点
5) next：右兄弟节点

2、节点的性质

1) 节点关键字的个数
   - 根节点：[1,2t]个关键字
   - 非根节点[t,2t]个关键字
2) 所有叶子节点连接成一个单向链表

16.1.2. 树

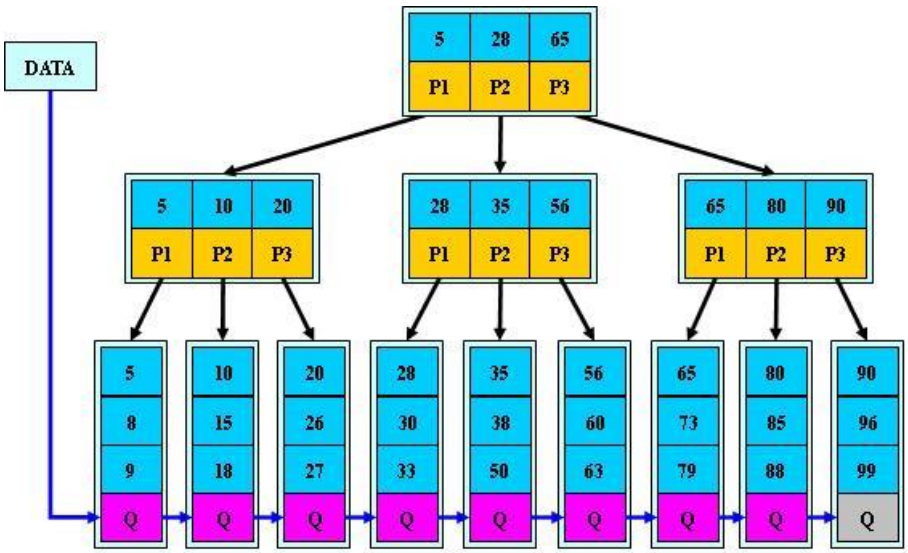
1、属性

1) t：B+树的度
2) root：根节点
3) data：第一个叶节点

2、与 B 树的区别

1) 所有的关键字均存储在叶节点中
2) 非叶节点中的关键字仅仅起到索引作用
3) 索引关键字不一定存在于叶节点中(由于删除，会导致该索引关键字从叶节点删除，但是索引关键字的索引作用仍然成立)
4) 每个非叶节点的索引关键字是该索引关键字对应的子树的最值的上届(由于删除，可能取不到)，可以任选一种来实现(本章选用的是最大值)

3、示意图



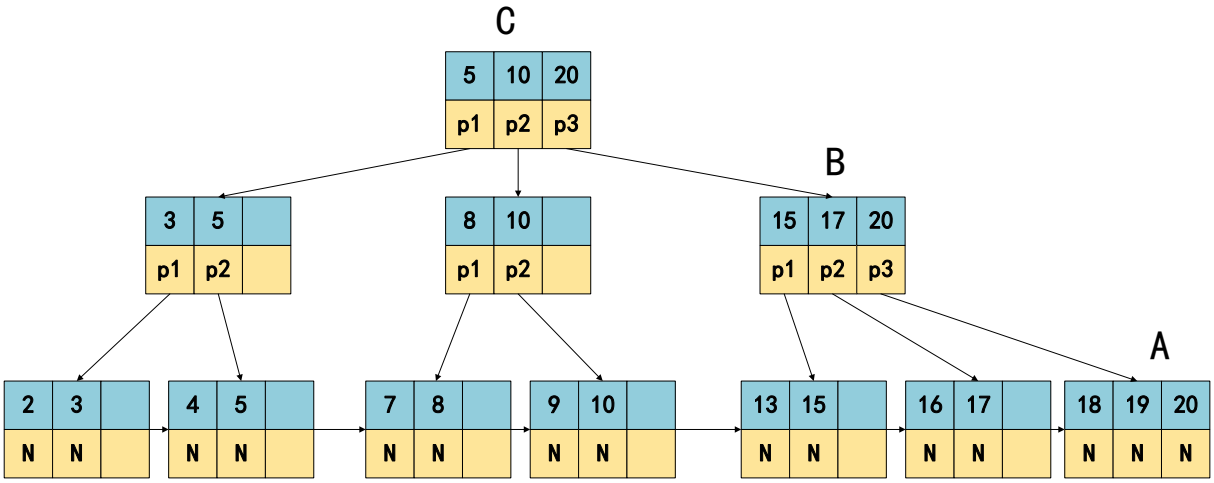
16.2. B+树度的不同定义

1、B+树有如下一种定义：规定 B+树的度 t，那么非叶节点的关键字数量为[|(t+1)/2|,t]，下面将以这种定义方式叙述 B+树的操作，并阐明这种定义方式的缺点，最后给出另一种 B+树度的定义方式

16.2.1. 插入操作

1、假设 B+树的度为 3，根据上面的定义，非叶节点的关键字数量为[2,3]

2、B+树此刻状态如下，将要插入一个关键字 25



3、直观上讲，B 树与 B+树的插入操作是从叶节点开始

1) 首先定位到节点 A，将节点插入到 A 中
2) 由于每个节点最多容纳 3 个关键字，因此节点 A 需要分裂
3) A 分裂后会导致 B 关键字数量多 1，而此时 B 又需要分裂
4) B 分裂后会导致 C 节点关键字数量多 1，而此时 C 又需要分裂

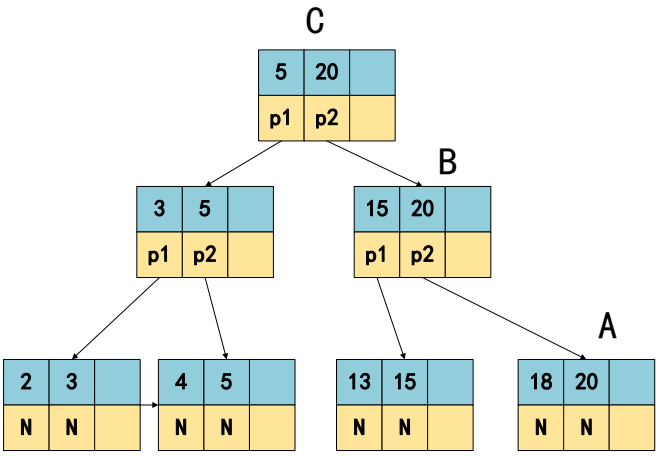
4、上面这种情况会导致从叶节点向上传递一个分裂操作，而向上传递需要定位父节点

1) 若采用额外的字段标记父节点，会造成节点维护复杂度增加，并且增加节点的空间复杂度
2) 若不采用额外的字段标记父节点，则只能从根节点向下查找，造成了额外的时间复杂度

16.2.2. 删除操作

1、假设 B+树的度为 3，根据上面的定义，非叶节点的关键字数量为[2,3]

2、2、B+树此刻状态如下，将要删除一个关键字 18



3、直观上讲，B 树与 B+树的删除操作是从叶节点开始

1) 首先定位到节点 A，将关键字 18 删除，由于 A 的关键字数量 1，需要合并操作
2) A 节点合并之后，会导致 B 节点关键字数量少 1，而此时又导致 B 节点的合并操作
3) B 节点合并之后，会导致 C 节点关键字数量少 1，又引发了 C 节点的合并操作

4、上面这种情况会导致从叶节点向上传递一个合并操作，而向上传递需要定位父节点

1) 若采用额外的字段标记父节点，会造成节点维护复杂度增加，并且增加节点的空间复杂度
2) 若不采用额外的字段标记父节点，则只能从根节点向下查找，造成了额外的时间复杂度

16.2.3. 预留式的插入删除操作

1、现在想用另一种办法，将自底向上的分裂或者合并操作转化为自顶向下的操作，这样可以减少节点额外的字段

2、当插入节点时，从根节点到叶节点的路径上的所有节点满足以下性质：

每个节点 x 可以允许其子节 $x.c_i$ 点进行一次分裂操作，即当前节点的关键字数量非满(x.n<t)

3、当删除节点时，从根节点到叶节点的路径上的所有节点满足以下性质：

每个节点 x 可以允许其子节 $x.c_i$ 点进行一次合并操作，即当前节点的关键字数量非空(x.n>⌊(t+1)/2⌋)

4、在这种度的定义下，这种预留式的操作未必能进行，原因如下

1) 当度 t 为奇数时，一个节点无法在 x.n=t 的情况下进行分裂，因为分裂后的两个节点必定有一个不满足性质，即 x.n<⌊(t+1)/2⌋
2) 当度 t 为奇数时，一个节点无法在 x.n=⌊(t+1)/2⌋的情况下进行合并，因为合并后的节点，其关键字的数量将会大于 t

16.2.4. B+树度的合理定义方式

1、参考 B 树的定义，B+树度的定义如下

给定 B+树的度，非根节点的关键字数量为[t,2t]

2、这种定义方式可以很好地解决上一小节提出的预留式操作，请自行验证

16.3. 基本操作

16.3.1. 分裂

B+-TREE-SPLIT-CHILD(x,i)//x.ci 是满节点，x 是非满节点

```
1 y=x.ci
2 z= ALLOCATE-NODE()
3 y.n=z.n=t
4 for j=1 to t
5         z.keyj=y.keyj+t
6 if not y.leaf
7         for j=1 to t
8                 z.cj=y.cj+t
9 else
10        z.next=y.next
11        y.next=z
12 z.leaf=y.leaf
13 for j=x.n+1 downto i+2
14        x.keyj=x.keyj-1
15        x.cj=x.cj-1
16 x.keyi+1=x.keyi
17 x.keyi=y.keyy.n
18 x.ci+1=z
19 x.n++
```

16.3.2. 合并

B+-TREE-MERGE(x,i)

```
1 y=x.c_i
2 z=x.c_{i+1}
3 y.n=2t
4 for j=1 to t
5         y.key_{j+t}=z.key_j
6 if not y.leaf
7         for j=1 to t
8                 y.c_{j+t}=z.c_j
9 else
10        y.next=z.next
11 for j=i+1 to x.n-1
12          x.key_j=x.key_{j+1}
13          x.c_j=x.c_{j+1}
14 x.key_i=y.key_{y.n}
15 x.n--
```

16.3.3. shift

B+-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i)

1 $y=x.c_i$

2 $z=x.c_{i+1}$

3 $y.key_{y.n+1}=z.key_1$

4 **for** j=1 **to** z.n-1

5 $z.key_j=z.key_{j+1}$

6 **if not** y.leaf

7 $y.c_{y.n+1}=z.c_1$

8 **for** j=1 **to** z.n-1

9 $z.c_j=z.c_{j+1}$

10 y.n++

11 z.n--

12 $x.key_i=y.key_{y.n}$

shift 操作会导致左侧节点的索引失效，但仅仅需要改动该父节点即可，因为父节点需要修改的索引必定不是父节点的最值

B+-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,i)

```
1 p=x.c_i
2 y=x.c_{i+1}
3 for j=y.n+1 downto 2
4         y.key_j=y.key_{j-1}
5 y.key_1=p.key_{p.n}
6 if not y.leaf
7         for j=y.n+1 downto 2
8                 y.c_j=y.c_{j-1}
9         y.c_1=p.c_{p.n}
10 y.n++
11 p.n--
12 x.key_i=p.key_{p.n}
```

16.4. 插入

B+-TREE-INSERT(k)

1 **if** root.n==2t
2 newRoot= **ALLOCATE-NODE()**
3 newRoot.n=1
4 newRoot.k_1=root.key_{2t}
5 newRoot.c_1=root
6 newRoot.leaf=false
7 root=newRoot
8 **B+-TREE-SPLIT-CHILD** (root,1)
9 **B+TREE-INSERT-NOT-FULL**(root,k)

B+TREE-INSERT-NOT-FULL(x,k)

1 i=x.n
2 **if** x.leaf
3 **while** i>=1 **and** x.key[i]>k
4 x.key_{i+1}=x.key_i
5 i--
6 i++
7 x.key_i=k
8 x.n++
9 **else**
10 **while** i>=1 **and** x.key_i>=k **//这个等于至关重要，虽然 B+树节点不会重复，但是由于删除操作的存在，留在树中的索引关键字未必存在于叶节点中，因此这里需要加上等号**
11 i--
12 i++
13 **if** x.n+1==i **//这里至关重要，插入节点时需要维护索引的正确性，就在这唯一一处进行维护**
14 x.$key_{x.n}$=k
15 i--
16 y=x.c_i
17 **if** y.n==2t
18 **B+-TREE-SPLIT-CHILD**(x,i)
19 **if** k>y.$key_{y.n}$
20 i++
21 **B+TREE-INSERT-NOT-FULL**(x.c_i,k)

16.5. 删除

```
B+-TREE-DELETE(k)
1 if not root.leaf and root.n==1
2       root=root.c1
3 if root.n==2
4       if not root.leaf and root.c1.n==t and root.c2.n==t
5             B+-TREE-MERGE(root,1)
6 B+-TREE-DELETE-NOT-NONE(root,k)

B+-TREE-DELETE-NOT-NONE(x,k)
1 i=1
2 if x.leaf
3       while i<=x.n and x.keyi<k
4             i++
5       while i<=x.n-1
6             x.keyi=x.keyi+1
7             i++
8       x.n--
9 else
10      while i<=x.n and x.keyi<k    //这里必须严格小于，找到第一个满足 k<=x.keyi 的 i
11            i++
12      y=x.ci
13      if i>1
14            p=x.ci-1
15      if i<x.n
16            z=x.ci+1
17 if y.n==t
18      if p!=null and p.n>t
19            B+-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,i-1)
20      else if z!=null and z.n>t
21            B+-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i)
22      else if p!=null
23            B+-TREE-MERGE(x,i-1)
24            y=p
25      else
26            B+-TREE-MERGE(x,i)
27 B+-TREE-DELETE-NOT-NONE(y,k)
```

Chapter 17. 斐波那契堆

17.1. 定义

17.1.1. 节点

1、key：节点的值
2、degree：节点的度???
3、left：左兄弟
4、right：右兄弟
5、p：父节点
6、child：第一个孩子节点
7、marked：是否被删除第一个孩子节点

17.2. 堆

1、n：堆节点的总数
2、min：最小节点，也就是斐波那契堆的根

17. 3. 插入操作

```
FIB-HEAP-INSERT(H,x)
1 x.degree=0
2 x.p=NULL
3 x.child=NULL
4 x.mark=FLASE
5 if H.min==NULL
6       create a root list for H containing just x
7       H.min=x
8 else
9       insert x into H's root list
10      if x.key<H.min.key
11            H.min=x
12 H.n=H.n+1
```

17.4. 堆合并

```
FIB-HEAP-UNION(H1,H2)
1 H=MAKE-FIB-HEAP
2 H.min=H1.min
3 concatenate the root list of H2 with the root list of H
4 if(H1.min==NULL) or (H2.min!=NULL and H2.min.key<H1.min.key)
5         H.min=H2.min
6 H.n=H1.n+H2.n
7 return H
```

17.5. 抽取最小节点

```
FIB-HEAP-EXTRACT-MIN(H)
1 z=H.min
2 if z!=NULL
3       for each child x of z
4             add x to the root list of H
5             x.p=NULL
6       remove z from the root list of H
7       if z==z.right
8             H.min=NULL
9       else
10            H.min=z.right
11            CONSOLIDATE(H)
12      H.n=H.n-1
13 return z
```

17. 6. 抽取最小节点时维护斐波那契堆的性质

```
CONSOLIDATE(H)
1 let A[0...D(H.n)] be a new array
2 for i=0 to D(H.n)
3       A[i]=NULL
4 for each node w in the root list of H
5       x=w
6       d=x.degree
7       while A[d]!=NULL
8             y=A[d]
9             if x.key>y.key
10                  exchange(x,y)
11            FIB-HEAP-LINK(H,y,x)
12            A[d]=NULL
13            d=d+1
14      A[d]=x
15 H.min=NULL
16 for i=0 to D(H.n)
17      if A[i]!=NULL
18            if H.min==NULL
19                  create a root list for H containing just A[i]
20                  H.min=A[i]
21            else
22                  insert A[i] into H's root list
23                  if A[i].key<H.min.key
24                        H.min=A[i]

FIB-HEAP-LINK(H,y,x)
1 remove y from the root list of H
2 make y a child of x, incrementing x.degree
3 y.mark=FLASE
```

17. 7. 关键字减值和删除节点

```
FIB-HEAP-DECREASE-KEY(H,x,k)
1 if k>x.key
2       error "new key is greater than current key"
3 x.key=k
4 y=x.p
5 if y!=NULL and x.key<y.key
6       CUT(H,x,y)
7       CASCADING-CUT(H,y)
8 if x.key<H.min.key
9       H.min=x

CUT(H,x,y)
1 remove x from the child list of y, decrementing y.degree
2 add x to the root list of H
3 x.p=NIL
4 x.mark=FALSE

CASCADING-CUT(H,y)
1 z=y.p
2 if z!=NULL
3       if y.mark==FALSE
4             y.mark=TRUE
5       else
6             CUT(H,y,z)
7             CASCADING-CUT(H,z)
```

Chapter 18. 基本图算法

18.1. BFS

BFS(G,s)

```
1 for each vertex u∈G.V-{s}
2         u.color=WHITE
3         u.d=+∞
4         u. π=NIL
5 s.color=GRAY
6 s.d=0
7 s. π=NIL
8 let queue be a new Queue
9 queue.offer(s)
10 while not queue.isEmpty()
11          u=queue.poll()
12          for each v∈ G.Adj[u]
13                  if v.color==WHITE
14                          v.color=GRAY
15                          v.d=u.d+1
16                          v. π=u
17                          queue.offer(v)
18          u.color=BLACK
```

18.2. DFS

DFS(G)

```
1 for each vertex u∈G.V
2       u.color=WHITE
3       u. π=NIL
4 time=0
5 for each vertex u∈G.V
6       if u.color==WHITE
7             DFS-VISIT(G,u)
```

```
DFS-VISIT(G,u)
1 time=time+1
2 u.d=time
3 u.color=GRAY
4 for each v∈G:Adj[u]
5       if v.color==WHITE
6       v. π=u
7       DFS-VISIT(G,v)
8 u.color=BLACK
9 time=time+1
10 u.f=time
```

Chapter 19. 字符串匹配

19.1. KMP 算法

KMP-MATCHER(T,P)

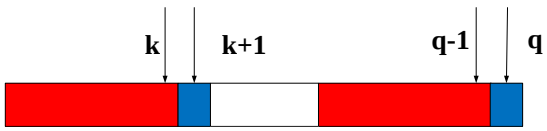
```
1 n=T.length
2 m=P.length
3 π=COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P)
4 k=0
5 for q=1 to n
6       while k>0 and P[k+1]≠T[q]
7             k=π[k]
8       if P[k+1]==T[q]
9             k=k+1
10      if k==m
11            print “Pattern occurs with shift” q-m
12            k=π[k]
```

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P)

```
1 m=P.length
2 let π[1...m] be a new array
3 π[1]=0
4 k=0
5 for q=2 to m
6       while k>0 and P[k+1]≠P[q]//若当前字符 q 与第 k+1 个不匹配，需要调整 k
7             k=π[k]
8       if P[k+1]==P[q]//如果
9             k=k+1
10      π[q]=k
11 return π
```

line 6：while 循环开始前，k 代表的是前一个 q 所对应的模式子串 P[1...q-1]的最大前后缀长度即 k=π[q-1]

①若 k>0 也就是红色部分不为空，且 P[k+1]==P[q],那么 π[q]就等于 π[q-1]+1



②若 k>0 也就是红色部分不为空，且 P[k+1]≠P[q],那么 π[q]，那么需要在 P[1...k]中寻找是否存在包含 P[q]的最长前后缀，因此递归找出 P[1...k]的最大前后缀长度 π[k]，再看 P[k+1]是否与 P[q]相等