# 插入、归并排序

## 插入排序(稳定，原址)

INSERTION-SORT(A)

1 **for** j=2 **to** A.length

2 key=A[j]

3 **//Insert A[j] into the sorted sequence A[1…j-1]**

4 i=j-1

5 **while** i>0 and A[i]>key

6 A[i+1]=A[i]

7 i=i-1

8 A[i+1]=key

## 归并排序

MERGE(A,p,q,r)

1 n1=q-p+1

2 n2=r-q

3 let L[1…n1+1] and R[1…n2+1] be new arrays

4 **for** i=1 **to** n1

5 L[i]=A[p+i-1]

6 **for** j=1 **to** n2

7 R[j]=A[q+j]

8 L[n1+1]=∞

9 R[n2+1]=∞

10 i=1

11 j=1

12 **for** k=p **to** r

13 **if** L[i]≤R[j]

14 A[k]=L[i]

15 i=i+1

16 **else** A[k]=R[j]

17 j=j+1

MERGE-SORT(A,p,r)(稳定)

1 **if** p<r **//当只有一个元素(p=r)或者没有元素(p>r)时递归终止**

2 q=

3 MERGE-SORT(A,p,q)

4 MERGE-SORT(A,q+1,r)

5 MERGE(A,p,q,r)

# 最大和子数组

FIND-MAX-CROSING-SUBARRAY(A,low,mid,high)**//求包含mid的最大字数组**

1 left-sum=-∞**//mid左侧最大值，包括mid**

2 sum=0

3 **for** i=mid **downto** low//这里从mid算起，因此max-left最大为mid

4 sum=sum+A[i]

5 **if** sum>left-sum

6 left-sum=sum

7 max-left=i

8 right-sum=-∞**//mid 右侧最大值**

9 sum=0

10 **for** j=mid+1 **to** high //这里从mid+1算起，因此max-right最小为mid+1

11 sum=sum+A[j]

12 **if** sum>right-sum

13 right-sum=sum

14 max-right=j

15 **return** (max-left,max-right,left-sum+right-sum)

FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A,low,high)

1 **if** high==low**//递归终止**

2 **return**(low,high,A[low])

3 **else** mid=

4 (left-low,left-high,left-sum)=

FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A,low,mid)**//这里包含只含有单个mid的情况**

5 (right-low,right-high,right-sum)=

FIND-MAXMUM-SUBARRAY(A,mid+1,high)**//这里不包含只含有单个mid的情况**

6 (cross-low,cross-high,cross-sum)=

FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A,low,mid,high) **//这里不包含只含有单个mid的情况**

7 **if** left-sum≥right-sum and left-sum≥cross-sum

8 **return** (left-low,left-high,left-sum)

9 **elseif** right-sum≥left-sum and right-sum≥cross-sum

10 **return**(right-low,right-high,right-sum)

11 **else** return(cross-low,cross-high,cross-sum)

**注意：cross必然包含两个元素，至少为[mid,mid+1]**

# 堆排序

## 堆性质维护

维护最大堆的性质(**单独对某一个节点调用该函数，并不能保证以该节点为根节点的子堆满足最大堆的性质，即不发生递归调用的时候(该节点的子节点比该节点小)，可能该节点子节点的子节点比该节点大**)

MAX-HEAPIFY(A,i)

1 l=LEFT(i)

2 r=RIGHT(i)

3 **if** l≤A.heap-size and A[l]>A[i]

4 largest=l

5 **else** largest=i

6 **if** r≤A.heap-size and A[r]>A[largest]

7 largest=r

8 **if** largest≠i

9 exchange A[i] with A[largest]

10 MAX-HEAPIFY(A,largest)

## 构造最大堆

BUILD-MAX

1 A.heap-size=A.length**//这句什么用?**

2 **for** i= **downto** 1

3 MAX-HEAPIFY(A,i)

## 堆排序(非原址，非稳定)

HEAPSORT(A)

1 BUILD-MAX-HEAP(A)

2 **for** i=A.length **downto** 2

3 exchange A[1] with A[i]

4 A.heap-size=A.heap-size-1

5 MAX-HEAPIFY(A,1)

**若堆索引从1开始算，那么L=2\*i R=2\*i+1**

**若堆索引从0开始算，那么L=2\*i+1 R=2\*i+2**

## 基于最小最大二叉堆的优先队列

HEAP-MAXIMUM(A)

1 **return** A[1]

HEAP-EXTRACT-MAX(A)

1 **if** A.*heap-size*<1

2 error”heap underflow”

3 max=A[1]

4 A[1]=A[A.heap-size]//将最后一个数放置到第一个

5 A.*heap-size*=A.*heap-size*-1//减少堆的维度

6 MAX-HEAPIFY(A,1)//维护堆的性质

7 **return** max

HEAP-INCREASE-KEY(A,i,key)

1 **if** key<A[i]

2 error”new key is smaller than current key”

3 A[i]=key

4 **while** i>1 **and** A[PARENT(i)]<A[i]

5 exchange A[i] with A[PARENT(i)]

6 i=PARENT(i)

MAX-HEAP-INSERT(A,key)

1 A.heap-size=A.heap-size+1

2 A[A.heap-size]=-∞

3 HEAP-INCREASE-KEY(A,A.heap-size,key)

# 快速排序

## 快速排序(原址，非稳定)

QUICKSORT(A,p,r)

1 **if** p<r

2 q=PARTITION(A,p,r)

3 QUICKSORT(A,p,q-1)

4 QUICKSORT(A,q+1,r)

**PARTITION(A,p,r)//其实p=r的情况下也能运行**

1 x=A[r]

2 i=p-1

3 **for** j=p **to** r-1**//循环到r-1的原因：等于x的值已经放在最右侧了，对该值不需要循环**

4 **if** A[j]≤x

5 i=i+1

6 exchange A[i] with A[j]

7 exchange A[i+1] with A[r]

8 **return** i+1

PARTITION的随机化版本

RANDOMIZED-PARTITION(A,p,r)

1 i=RANDOM(p,r)

2 exchang A[r] with A[i]**//必须将该值置于最后，才能调用PARTITION**

3 **return** PARTITION(A,p,r)

## 优化版本1

**对于重复元素较多的情况下，采用这种方式效率较高**

PARTITION\_REPEAT1(A,p,r)

1 x=A[r]

2 i=p-1 **//小于x的最大索引**

3 boundary=r-1  **//以最后一个元素为主元，非主元的最大索引**

4 **for** j=p **to** boundary

5 **if** A[j]<x

6 i=i+1

7 EXCHANGE A[i] with A[j]

8 **elseif** A[j]==x

9 EXCHANGE A[j] with A[boundary]  **//将于x相同的值先放到最后**

10 j=j-1**//将索引为cnt的数放到j位置，但这个数尚未进行判断，因此要将j-1(抵消自增量)**

11 boundary = boundary -1**//由于boundary位置上已经是与x相同的数，因此循环边界递减**

12 n=r- boundary

13 **for** j=0 **to** n-1

14 EXCHANGE A[i+1+j] with A[r-j]

15 **return** i+1 and i+n

i+1是与x值相同的区间内的开始，i+rn 是与x值相同的区间的结束

[p,i]区间内的元素小于x

[i+1,i+rn]区间内的元素等于x，[i+rn+1,r]的元素大于x

MODIFIED\_PARTITION(A,p,r,M)

1 i=p-1

2 cnt=r **//非主元M的最大索引**

3 **for** j=p **to** cnt **//与上一个版本有差异，因为最后一个元素并不是M，M的位置是未知的**

4 **if** A[j]<M

5 i=i+1

6 EXCHANGE A[i] with A[j]

7 **elseif** A[j]==M **//关键：将于M相同的值暂时放到A的最后边**

8 EXCHANGE A[j] with A[cnt] **//将于x相同的值先放到最后**

9 j=j-1**//将第cnt个数放到j位置上，但这个数尚未进行判断，因此要将j-1(抵消自增量)**

10 cnt=cnt-1  **//由于cnt位置的值已经与M相等，因此递减循环边界cnt**

11 rn=r-cnt

12 **for** j=0 **to** rn-1 //将等于M的区间挪到中间

13 EXCHANGE A[i+1+j] with A[r-j]

14 return i+1 and i+rn

i+1是与x值相同的区间内的开始，i+rn 是与x值相同的区间的结束

[p,i]区间内的元素小于x

[i+1,i+rn]区间内的元素等于x

[i+rn+1,r]的元素大于x

## 优化版本2

**对于重复元素较多的情况下，采用这种方式效率较高**

PARTITION\_REPEAT2(A,p,r)

1 x=A[r]

2 i1=p-1 **//小于x的最大索引**

3 i2=p-1 **//等于x的最大索引(算最后一个)**

4 **for** j=p **to** r-1

5 **if** A[j]<x

6 i1=i1+1

7 EXCHANGE A[i1] with A[j]

8 i2=i2+1

9 if i1≠i2

10 EXCHANGE A[i2] with A[j]

11 **elseif** A[j]==x

12 i2=i2+1

13 EXCHANGE A[i2] with A[k]

14 i2=i2+1

15 EXCHANGE A[i2] with A[r]

15 **return** i1+1 and i2

# 线性时间排序

## 计数排序(稳定，非原址)

COUNTING-SORT(A,B,k)

1 let C[0…k] be a new array

2 **for** i=0 **to** k

3 C[i]=0

4 **for** j=1 **to** A.length

5 C[A[j]]=C[A[j]]+1

6 //C[i] now contains the number of elements equal to i

7 **for** i=1 **to** k

8 C[i]=C[i]+C[i-1]

9 //C[i] now contains the number of elements less than or equal to i

**//存的是值为i的元素的最大索引**

10 **for** j=A.length **down** to 1

11 B[C[A[j]]]=A[j]

12 C[A[j]]=C[A[j]]-1

## 基数排序

RADIX-SORT(A,d)

1 for i=1 to d

2 use a stable sort to sort array A on digit i

## 桶排序

BUCKET-SORT(A)

1 n=A.length

2 let B[0…n-1] be a new array

3 **for** i=0 **to** n-1

4 make B[i] an empty list

5 **for** i=1 **to** n

6 insert A[i] into list B[]

7 **for** i=0 **to** n-1

8 sort list B[i] with insertion sort

9 concatenate the lists B[0],B[1],…,B[n-1] together in order

## 遗忘比较交换算法

COMPARE-EXCHANGE(A,i,j)

1 if A[i]>A[j]

2 exchange A[i] with A[j]

INSERTION-SORT(A)

1 for j=2 to A.length**//循环不变式：A[1…j-1]是已排序的序列**

2 for i=j-1 down to 1

3 COMPARE-EXCHANGE(A,i,i+1)

# 中位数和顺序统计量

RANDOMIZED\_SELECT(A,p,r,i)**//这里的pr是绝对下标，i是相对大小**

1 **if** p==r**//只有一个元素时，退出**

2 **return** A[p]

3 q=RANDOMIZED\_PARTITION(A,p,r);

4 k=q-p+1

5 **if** k==i**//若q就是要找的下标**

6 **return** A[**q**] **~~//别写成了A[i]~~**

7 **elseif** i<k

8 **return** RANDOMIZED\_SELECT(A,p,q-1,i)

9 **else** **return** RANDOMIZED\_SELECT(A,q+1,r,i-k)

# 基本数据结构

## 二叉树前序遍历非递归算法

**外循环体：对于当前指针cur：**

**首先：内循环体：对于当前指针cur**

1. **cur不为空：访问该节点，并将该节点压入栈，并使cur指向该节点的左孩子(无论左孩子是否存在**)
2. **cur为空：栈顶元素为最左端的节点，内循环结束**

**然后：对于栈**

1. **栈为空：树已遍历，外循环结束**
2. **栈不为空：弹出栈顶节点(该节点已被访问过)，将指针指向该节点的右孩子(无论右孩子是否存在)**

PRE-ORDER-STACK(T)

1 let S be a STACK sized T.size

2 cur=T.root

3 **while**( S.empty==False or cur≠NULL) **//这个条件怎么理解：栈为空且指针为空才表明树已经完全输出**

4 **while**(cur≠NULL) **//循环终止时，栈顶元素(节点指针)指向没有左孩子的节点，cur指向空**

5 visit(cur)

6 S.PUSH(cur)

7 cur=cur.left

8 **if** S.empty==Flase

9 cur=S.POP

10 cur=cur.right

## 二叉树中序遍历非递归算法

**外循环体：对于当前指针cur：**

**首先：内循环体：对于当前指针cur**

1. **cur不为空：将cur指向的节点压入栈，并使cur指向该节点的左孩子(无论左孩子是否存在)**
2. **cur为空：栈顶元素为最左端的节点，内循环结束**

**然后：对于栈**

1. **栈为空：树已遍历，外循环结束**
2. **栈不为空，则弹出栈顶节点，并访问该节点，并使cur指向该节点的右孩子(无论右孩子是否存在**

IN-ORDER-STACK(T)

1 let S be a STACK sized T.size

2 cur=T.root

3 **while**( S.empty==False or cur≠NULL) **//这个条件怎么理解：栈为空且指针为空才表明树已经完全输出**

4 **while**(cur≠NULL) **//循环终止时，栈顶元素(节点指针)指向没有左孩子的节点，cur指向空**

6 S.PUSH(cur)

7 cur=cur.left

8 **if** S.empty==Flase

9 cur=S.POP

9 visit(cur)

10 cur=cur.right

## 二叉树后序遍历非递归算法1

**外循环体：对于当前指针cur**

**首先：内循环体：对于当前指针cur**

1. **cur不为空：将入栈计数增加1(该节点的入栈计数变成了1)，然后将该节点压入栈，并使cur指向该节点的左孩子(无论左孩子是否存在)**
2. **cur为空：栈顶元素为最左端的节点，内循环结束**

**然后：对于栈：**

1. **栈为空：树已遍历，外循环结束**
2. **栈不为空：弹出栈顶元素记为N1**

* N1的入栈计数为2，访问该元素
* **N1的入栈计数为1，入栈计数增加1(入栈计数变成了2)，重新将该节点压入栈，并使cur指向该节点的右孩子(无论右孩子是否存在)**

POST-ORDER-STACK(T)

1 let S be a STACK sized T.size

2 let every Node’s cnt be zero

3 cur=T.root

4 **while**( S.empty==False **or** cur≠NULL) **//这个条件怎么理解：栈为空且指针为空才表明树已经完全输出**

5 **while**(cur≠NULL) **//循环终止时，栈顶元素(节点指针)指向没有左孩子的节点，cur指向空**

6 cur.cnt=cur.cnt+1

7 S.PUSH(cur)

8 cur=cur.left

9 **if** S.empty==Flase

10 cur=S.POP

11 **if** cur.cnt==2

12 visit(cur)

13 cur=NULL **//保证下一次循环直接跳过内层的while**

14 **else** cur.cnt=cur.cnt+1

15 S.PUSH(cur)

16 cur=cur.right

## 二叉树后序遍历非递归算法2

**初始化：首先将根节点入栈，cur置空，pre置空(cur指向栈顶元素，pre指向上一次访问的元素)**

**循环体：对于栈**

1. **栈不为空：cur指向栈顶元素，记为N1**

* **若N1的左右孩子均不存在，或pre指针指向的节点是N1的孩子：弹出栈顶元素N1，并访问，并将pre指向该已被访问过的节点N1**
* **若N1存在孩子，且pre指向的节点不是N1的孩子：若N1的右孩子存在，则将右孩子入栈，若N1的左孩子存在，再将左孩子入栈**

1. **栈为空：树已遍历，循环结束**

**关键点：节点压入栈的顺序为后序遍历的反序，即先当前，再有孩子，再左孩子**

POST-ORDER-STACK

1 let S be a STACK sized T.size

2 S.PUSH(T.root)

3 pre=cur=NULL

3 **while** S.empty==False**//栈不为空时进入循环**

4 cur=S.TOP**//获取栈顶元素(非弹出)**

5 **if** cur.left==NULL and cur.right==NULL **or** pre≠NULL **and** pre.p=cur

6 visit(cur)

6 S.POP**//弹出该元素**

7 pre=cur

14 **else\_if** cur.right≠NULL

15 S.PUSH(cur.right)

16 **if** cur.left≠NULL

17 S.PUSH(cur.left)

## 二叉树的前序遍历的非递归非栈算法

POST-ORDER-ELSE

1 pre=NULL**//前一节点初始化为空**

2 cur=T.root**//当前节点初始化为根节点**

3 **while**(cur≠NULL)

4 **if** pre==cur.p **//当前节点是上一节点的子节点**

5 visit(cur) **//访问当前节点**

6 pre=cur

7 **if** cur.left≠NULL

8 cur=cur.left

9 **elseif** cur.right≠NULL

10 cur=cur.right

11 **else**

12 cur=cur.p

13 **elseif** pre==cur.left**//上一节点是当前节点的左孩子**

14 pre=cur

15 **if** cur.right≠NULL

16 cur=cur.right

17 **else**

18 cur=cur.p

19 **else//上一节点是当前节点的右孩子**

20 pre=cur

21 cur=cur.p

**访问出现在左孩子判断前**

## 二叉树的中序遍历的非递归非栈算法

IN-ORDER-ELSE

1 pre=NULL**//前一节点初始化为空**

2 cur=T.root**//当前节点初始化为根节点**

3 **while**(cur≠NULL)

4 **if** pre==cur.p **//当前节点是上一节点的子节点**

5 pre=cur

6 **if** cur.left≠NULL

7 cur=cur.left

8 **elseif** cur.right≠NULL

9 visit(cur) **//访问当前节点**

10 cur=cur.right

11 **else**

12 visit(cur) **//访问当前节点**

13 cur=cur.p

14 **elseif** pre==cur.left**//上一节点是当前节点的左孩子**

15 pre=cur

16visit(cur) **//访问当前节点**

17 **if** cur.right≠NULL

18 cur=cur.right

19 **else**

20 cur=cur.p

21 **else//上一节点是当前节点的右孩子**

22 pre=cur

23 cur=cur.p

**访问出现在右孩子判断前**

## 二叉树的后序遍历的非递归非栈算法

POST-ORDER-ELSE

1 pre=NULL**//前一节点初始化为空**

2 cur=T.root**//当前节点初始化为根节点**

3 **while**(cur≠NULL)

4 **if** pre==cur.p **//当前节点是上一节点的子节点**

5 pre=cur

6 **if** cur.left≠NULL

7 cur=cur.left

8 **elseif** cur.right≠NULL

9 cur=cur.right

10 **else**

11 visit(cur) **//访问当前节点**

12 cur=cur.p

13 **elseif** pre==cur.left**//上一节点是当前节点的左孩子**

14 pre=cur

15 **if** cur.right≠NULL

16 cur=cur.right

17 **else**

18 visit(cur) **//访问当前节点**

19 cur=cur.p

20 **else//上一节点是当前节点的右孩子**

21 visit(cur) **//访问当前节点**

22 pre=cur

23 cur=cur.p

**访问出现在返回父节点之前**

## 二叉树树的析构：

### 通过后续遍历的栈算法2的变形来实现

~TREE(T)

1 let S be a STACK sized T.size

2 pre=cur=NULL

3 S.PUSH(T.root)

4 **while** S.empty==False**//栈不为空时进入循环**

5 cur=S.TOP**//获取栈顶元素(非弹出)**

**6 if cur.left==NULL and cur.right==NULL //与后续遍历的不同之处**

7 S.POP**//弹出该元素**

8 pre=cur

9 cur=cur.p

10 **if** cur≠NULL

11 **if** pre==cur.left

12 cur.left==NULL

13 **else** cur.right=NULL

14 delete pre**//释放被弹出的栈顶元素的内存**

15 **else\_if** cur.right≠NULL

16 S.PUSH(cur.right)

17 **if** cur.left≠NULL

18 S.PUSH(cur.left)

### 通过指针路径算法的变形来实现

~TREE(T)

1 pre=NULL**//前一节点初始化为空**

2 cur=T.root**//当前节点初始化为根节点**

3 **while**(true)

4 **if** cur==NULL

5 break **//当前节点为空时，退出循环**

6 **if** pre==cur.p **//当前节点是上一节点的子节点**

7 **if** cur.left≠NULL

8 pre=cur

9 cur=cur.left

10 continue

11 **if** cur.right≠NULL

12 pre=cur

13 cur=cur.right

14 continue

15 pre=cur

16 cur=cur.p

17 **if** cur≠NULL and pre==cur.left

18 i=1

19 **elseif** cur≠NULL and pre==cur.right

20 i=2

21 delete pre continue

22 **elseif** pre==cur.left**//上一节点是当前节点的左孩子**

23 **if** cur.right≠Null

24 pre=cur

25 cur=cur.right

26 continue

27 pre=cur

28 cur=cur.p

29 **if** cur≠NULL and pre==cur.left

30 i=1

31 **elseif** cur≠NULL and pre==cur.right

32 i=2

33 delete pre continue

34 **elseif** pre==cur.right**//上一节点是当前节点的右孩子**

35 pre=cur

36 cur=cur.p

37 **if** cur≠NULL and pre==cur.left

38 i=1

39 **elseif** cur≠NULL and pre==cur.right

40 i=2

41 delete pre continue

42 else switch(i)

43 case 1: **if** cur.right≠Null

44 pre=cur

45 cur=cur.right

46 continue

47 pre=cur

48 cur=cur.p

49 **if** cur≠NULL and pre==cur.left

50 i=1

51 **elseif** cur≠NULL and pre==cur.right

52 i=2

53 delete pre continue

54 case 2: pre=cur

55 cur=cur.p

56 **if** cur≠NULL and pre==cur.left

57 i=1

58 **elseif** cur≠NULL and pre==cur.right

59 i=2

60 delete pre continue

## 二叉树的遍历总结

对于后续遍历的栈算法2与非栈非递归算法的比较：

两者均有pre与cur指针,但不同的是

**Stack2算法中：cur指向的是栈顶元素,pre指向的是上一次访问的元素**

**Fix算法中：cur指向的是指针路径的顶端元素，pre指向的是指针路径的顶端第二个元素，cur 与pre必定为父子或子父关系。注意：pre并非指向访问的元素，只是指针路径中的顶端第二个元素**

**对于如下的一棵树，Fix算法中的指针路径(不存在跳跃，必须连续前进)为**

**1-2-4-8-4-9-4-2-5-10-5-2-1-3-6-11-6-3-7-3-1-Null**

**1**

**2 3**

**4 5 6 7**

**8 9 10 11**

# 二叉搜索树

## 插入二叉搜索树

TREE\_INSERT(T,z)

1 y=T.nil

2 x=T.root

3 **while** x≠T.nil**//循环结束时x指向空，y指向上一个x**

4 y=x

5 **if** z.key<x.key

6 x=x.left

7 **else** x=x.right

8 z.p=y**//将这个叶节点作为z的父节点**

9 **if** y==T.nil

10 T.root=z

11 **elseif** z.key<y.key

12 y.left=z

13 **else** y.right=z

TREE-SEARCH(x,k) x指向根节点

1 **while** x≠T.nil **and** k≠x.key**//当找到该元素或者达到搜索路径的顶端(叶节点的孩子节点)循环结束**

2 **if** k<x.key

3 x=x.left

4 **else** x=x.right

5 **return** x

以x为根节点的子树的最大值

TREE-MAXIMUM(x)

1 **while** x.right≠T.nil**//沿着右孩子路径一直搜索到没有右孩子的节点**

2 x=x.right

3 **return** x

以x为根节点的子树的最小值

TREE-MINIMUM(x)

1 **while** x.left≠T.nil**//沿着左孩子路径一直搜索到没有左孩子的节点**

2 x=x.left

3 **return** x

## 后继元素

1、**若该元素含有右孩子，那么后驱元素必定在以右孩子为根节点的子树中**

2、**若该元素没有右孩子，那么搜索子树的根节点y第一次以左孩子的身份作作为其父节点的孩子，那么该父节点就是后驱元素(第一次父比子大)**

TREE-SUCCESSOR(x)

1 **if** x.right≠T.nil

2 **return** TREE-MINIMUM(x.right)**//找到以右孩子为根节点的最大值**

3 y=x.p

4 **while** y≠T.nil **and** x≠y.left**//循环结束时x为y的左孩子**

5 x=y

6 y=y.p

7 **return** y**//y若为空，则代表无后继元素**

## 前驱元素

1、**若该元素含有左孩子，那么前驱元素必定在以左孩子为根节点的子树中**

2、**若该元素没有左孩子，那么搜索子树的根节点y第一次以右孩子的身份作作为其父节点的孩子，那么该父节点就是后驱元素(第一次父比子小)**

TREE-PREDECESSOR(x)

1 **if** x.left≠T.nil

2 **return** TREE-MAXIMUM(x.left)**//找到以左孩子为根节点的最大值**

3 y=x.p

4 **while** y≠T.nil **and** x≠y.right**//循环结束时x为y的右孩子**

5 x=y

6 y=y.p

7 **return** y**//y若为空，则代表无前驱元素**

查找关键字为k的元素

## 删除

**删除节点的辅助函数**：用另一棵树替换一棵树并成为其双亲的孩子节点

**需要更改的指针：v的父节点，以及u的父节点的相应的孩子节点**

TRANSPLANT(T,u,v)

1 **if** u.p==T.nil

2 T.root=v

3 **elseif** u==u.p.left

4 u.p.left=v

5 **else** u.p.right=v

6 **if** v≠T.nil

7 v.p=u.p

**//u.p=u.left=u.right=NIL这句不能有，需要完整保留以u为根节点的子树(u的双亲未必是NIL)**

删除元素**版本1**：(假定删除z节点)

**①若z节点没有孩子，那么直接删除z即可**

**②若z节点只有一个孩子，那么将这个孩子作为根节点的子树替换以z为根节点的子树，并成为z的双亲的孩子**

**③若z节点有两个孩子，那么找到z的后继y(一定在右子树中)，并让y占据z的位置。z的原来右子树部分成为y的新的右子树，并且z的左子树成为y的新左子树**

删除指定关键字的节点

TREE-DELETE1(T,z)

1 **if** z.left==T.nil

2 TRANSPLANT(T,z,z.right)

3 **elseif** z.right==T.nil

4 TRANSPLANT(T,z,z.left)

5 **else** y=TREE-MINIMUM(z.right) **//找到z的后继，由于z存在左右孩子，故后继为右子树中的最小值**

6 **if** y≠z.right**//如果y是z的右孩子，那么y的右子树会保留，只需要更新y的左子树即可**

7 TRANSPLANT(T,y,y.right)

8 y.right=z.right

9 y.right.p=y

10 TRANSPLANT(T,z,y)

11 y.left=z.left

12 y.left.p=y

**6-12行可改为以下形式：无论何种情况都会更新y的左右子树**

6 TRANSPLANT(T,y,y.right)

7 y.right=z.right

8 y.right.p=y

9 TRANSPLANT(T,z,y)

10 y.left=z.left

11 y.left.p=y

删除元素**版本2**：(假定删除z节点)

**①若z节点没有孩子，那么直接删除z即可**

**②若z节点只有一个孩子，那么将这个孩子作为根节点的子树替换以z为根节点的子树，并成为z的双亲的孩子**

**③若z节点有两个孩子，那么找到z的前驱y(一定在左子树中)，并让y占据z的位置。z的原来左子树部分成为y的新的左子树，并且z的右子树成为y的新右子树**

删除指定关键字的节点

TREE-DELETE2(T,z)

1 if z.left==T.nil

2 TRANSPLANT(T,z,z.right)

3 elseif z.right==T.nil

4 TRANSPLANT(T,z,z.left)

5 else y=MAXIMUM(T,z.left)**//找到z的前驱，由于z存在左右孩子，故前驱为左子树中的最大值**

6 if y≠z.left**//如果y是z的左孩子，那么y的左子树会保留，只需要更新y的右子树即可**

7 TRANSPLANT(T,y,y.left)

8 y.left=z.left

9 y.left.p=y

10 TRANSPLANT(T,z,y)

11 y.right=z.right

12 y.right.p=y

**6-12行可改为以下形式：无论何种情况都会更新y的左右子树**

6 TRANSPLANT(T,y,y.left)

7 y.left=z.left

8 y.left.p=y

9 TRANSPLANT(T,z,y)

10 y.right=z.right

11 y.right.p=y

# 红黑树

## 定义

### 节点

1、节点的属性

1. val：关键字
2. left：左孩子节点
3. right：右孩子节点
4. parent：父节点
5. color：颜色

2、节点的性质

1. 每个节点或是红色的，或是黑色的
2. 根节点是黑色的
3. 每个叶节点(nil)是黑色的
4. 如果一个节点是红色的，则它的两个子节点都是黑色的
5. 对每个节点，从该节点到其所有后代叶节点的简单路径上，均包含相同数目的黑色节点

### 树

1、属性

1. nil：哨兵节点
2. root：根节点

## 旋转

**y** 右旋 **x**

**x** γ α **y**

α β 左旋 β γ

**左右旋的变换中，需要改变的就是节点β，节点α和γ不需要改变**

### 左旋

LEFT-ROTATE(T,**x**)

1 y=x.right

2 x.right=y.left

3 **if** y.left≠T.nil

4 y.left.p=x **//1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)**

5 y.p=x.p

6 **if** x.p==T.nil

7 T.root=y

8 **elseif** x==x.p.left

9 x.p.left=y

10 **else** x.p.right=y **// 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)**

11 y.left=x

12 x.p=y **//11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)**

### 右旋

RIGHT-ROTATE(T,**y**)

1 x=y.left

2 y.left=x.right

3 **if** x.right≠T.nil

4 x.right.p=y **//1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)**

5 x.p=y.p

6 **if** y.p==T.nil

7 root=x

8 **elseif** y==y.p.left

9 y.p.left=x

10 **else** y.p.right=x **// 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)**

11 x.right=y

12 y.p=x **//11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)**

**(颜色改动+旋转变换)后性质5是否成立：看变换后x、y节点的父节点黑高是否发生变化即可**

## 插入

RB-INSERT(T,z)

1 y=T.nil

2 x=T.root

3 **while** x≠T.nil

4 y=x

5 **if** z.key<x.key

6 x=x.left

7 **else** x=x.right

8 z.p=y

9 **if** y==T.nil

10 T.root=z

11 **elseif** z.key<y.key **//这里与567行最好保持一致**

12 y.left=z

13 **else** y.right=z

14 z.left=T.nil

15 z.right=T.nil

16 z.colcor=RED

17 RB-INSERT-FIXUP(T,z)

**插入的节点被设定为红色：**

那么可能会违背性质2或4，但只能是其中之一

**①当插入的节点是第一个时，此时根节点是红色，违背了性质2，但其子节点与父节点均为T.nil 是黑色，没有违反性质4**

**②当插入的节点不是根节点，并且其父节点也为红色时，违背了性质4**

纠正思路：

**对于错误①的修正，只需要将根节点设为黑色即可**

**对于错误②的修正，由于z与其父节点均为红色，那么祖父节点必为黑色，根据z的叔节点的颜色状况以及z作为z.p的左右孩子，分三种情况讨论：**

### 插入辅助

**①当z的父节点是祖父节点的左孩子时：(叔节点为祖父节点的右孩子)**

情况1：**z节点的父节点**以及**z节点的叔节点**都是**红色**：将**z节点的父节点**以及**叔节点置为黑色**，**z节点的祖父节点置为红色**，**继续循环z的祖父节点**(z=z.p.p)

**z.p.p z.p.p**

**z.p**   **y z.p y**

孩子

**z z**

z可为z.p的左或右孩子

情况2：**z节点的父节点**为**红色**，**叔节点**为**黑色**，**z为父节点**的**右孩子**，对z的父节点做一次**左旋**，转为情况3:**(旋转前后z所表示的关键字发生改变，但是z的祖父节点没有变)**

**z.p.p z.p.p**

**z.p y z y**

孩子

**z z.p--------->z’**

情况3：**z节点的父节点**为**红色**，**叔节点**为**黑色**，**z为父节点**的**左孩子**，首先将**父节点**设为**黑色**，**祖父节点**设为**红色**，然后对**祖父节点**做一次**右旋**

**z.p.p z.p**

**z.p** **y z z.p.p**

孩子

**z y**

**②当z的父节点是祖父节点的右孩子时，(叔节点为祖父节点的左孩子)**

情况1：**z节点的父节点**以及**z节点的叔节点**都是**红色**：将**z节点的父节点**以及**叔节点置为黑色**，**z节点的祖父节点置为红色**，**继续循环z的祖父节点**(z=z.p.p)

**z.p.p z.p.p**

**y**   **z.p y z.p**

孩子

**z z**

z可为z.p的左或右孩子

情况2：**z节点的父节点**为**红色**，**叔节点**为**黑色**，**z为父节点**的**左孩子**，对z的父节点做一次**右旋**，转为情况3：(旋转前后z所表示的关键字发生改变，但是z的祖父节点没有改变)

**z.p.p z.p.p**

**y z.p y z**

孩子

**z z.p--------->z’**

情况3：**z节点的父节**点是**红色**，**叔节点**是**黑色**，**z为父节点**的**右孩子**，首先将**父节点**设为**黑色**，**祖父节点**设为**红色**，然后对**祖父节点**做一次**左旋**

**z.p.p z.p**

**y z.p z.p.p z**

孩子

**z y**

旋转前插入红z不会导致性质5破坏:bh(z.p.p)=bh(z)=bh(z.p)=bh(y)+1

旋转后: 由于bh(z)=by(y)+1保持不变，因此

bh(z.p)=bh(z.p.p)= bh(z)=by(y)+1 性质5依然成立

RB-INSERT-FIXUP(T,z)

1 **while** z.p.color==RED**//由于z.p是红色，因此访问z.p.p的任何属性都是安全的**

2 **if** z.p==z.p.p.left

3 y=z.p.p.right

4 **if** y.color==RED

5 z.p.color=BLACK

6 y.color=BLACK

7 z.p.p.color=RED

8 z=z.p.p**//继续循环**

9 **else**\_**if** z==z.p.right

10 z=z.p

11 LEFT-ROTATE(T,z)

12 z.p.color=BLACK

13 z.p.p.color=RED

14 RIGHT-ROTATE(T,z.p.p)**//循环结束**

15 **else** z.p==z.p.p.right

16 y=z.p.p.left

17 **if** y.color==RED

18 z.p.color=BLACK

19 y.color=BLACK

20 z.p.p.color=RED

21 z=z.p.p**//继续循环**

22 **else\_if** z==z.p.left

23 z=z.p

24 RIGHT-ROTATE(T,z)

25 z.p.color=BLACK

26 z.p.p.color=RED

27 LEFT-ROTATE(T,z.p.p) **//循环结束**

28 T.root.color=BLACK**//针对第一个插入的z，不会进入循环(性质4成立，但性质2破坏，这里纠正)**

将v为根节点的子树代替u为根节点的子树

RB-TRANSPLANT(T,u,v)

1 **if** u.p==T.nil

2 T.root=v

3 **elseif** u==u.p.left

4 u.p.left=v

5 **else** u.p.right=v

6 v.p=u.p **//与搜索二叉树相比，这里没有判断，即使v是哨兵，也执行此句,对于移动到y位置的节点x(可能是哨兵)，会访问x.p，因此这里需要进行赋值**

## 删除函数：

RB-DELETE(T,z)

1 y=z

2 y-original-color=y.color

3 **if** z.left==T.nil

4 x=z.right

5 RB-TRANSPLANT(T,z,z.right)

6 **elseif** z.right==T.nil

7 x=z.left

8 RB-TRANSPLANT(T,z,z.left)

9 **else** y=TREE-MINIMUM(z.right)

10 y-original-color=y.color

11 x=y.right

12 **if** y.p==z

13 x.p=y**//使得x为哨兵节点时也成立**

14 **else** RB-TRANSPLANT(T,y,y.right)**//即使y.right是哨兵，也会指向y的父节点**

15 y.right=z.right

16 y.right.p=y

17 RB-TRANSPLANT(T,z,y)

**//17行运行之后，13、14行都会保证x指向原始y父节点的位置**

18 y.left=z.left

19 y.left.p=y

20 y.color=z.color

21 **if** y-original-color==BLACK

22 RB-DELETE-FIXUP(T,x)

总结：

1. 删除最终转化为删除一个最多只有一个孩子的节点

* 当被删除节点z最多只有只有一个孩子，满足该条规律
* 当被删除节点z有两个孩子，那么找到该节点的后继节点y，此时y节点必然最多只有一个右孩子，于是将其右孩子y.right transplant到到y节点处以删除y节点，然后再将y节点移动到z节点处，并保持z节点原来的颜色，那么等价于删除y节点

1. 当被删除节点的颜色为红色，那么不会破坏红黑树的性质
2. 当被删除的节点是黑色，那么transplant到该节点的节点x如果是黑色，那么为了保持黑高不变的性质，x必须含有双重黑色，此时又破坏了性质1，需要进行维护矫正

### 删除辅助

RB-DELETE(T,z)

1 y=z

2 y-original-color=y.color

3 **if** z.left==T.nil

4 x=z.right

5 RB-TRANSPLANT(T,z,z.right)

6 **elseif** z.right==T.nil

7 x=z.left

8 RB-TRANSPLANT(T,z,z.left)

9 **else** y=TREE-MINIMUM(z.right)

10 y-original-color=y.color

11 x=y.right

**12 RB-TRANSPLANT(T,y,y.right)//即使y.right是哨兵，也会指向y的父节点**

**13 y.right=z.right**

**14 y.right.p=y**

15 RB-TRANSPLANT(T,z,y)

16 y.left=z.left

17 y.left.p=y

18 y.color=z.color

19 **if** y-original-color==BLACK

20 RB-DELETE-FIXUP(T,x)

蓝色部分为不同之处，即不用讨论(y.parent==z)也可以

y节点：**为删除节点z(z的孩子至少有一个为nil)**或者**将要移动到被删除节点z的节点(z有两个非nil的孩子)**

y-original-color：**y节点的原始颜色**

x：**指向将要移动到y节点的节点(x代表占有y原来位置的节点)**

1、**当y-original-color为红色时：不会违反红黑树的任何性质。**

**①当y为被删除节点时**：若y为红色，那么它的父节点为黑色，孩子节点也必为黑色，将孩子移植到该位置不会违反任何性质。

**②当y节点为z节点的后继时**：若y为红色，那么y节点的父节点以及y节点的右子节点(可能为哨兵)必为黑色，将y.right移植到y的位置，不会违反任何性质；**如果z节点是黑色的**，那么删除z节点后z的任意祖先的黑高将少一，但是由于将y的颜色设为黑色，做了补偿。**如果z节点是红色的**，将y节点也设为红色，那么删除z节点不会违反性质5

**因此y-original-color为红色时，不会违反红黑树的任何性质**

2、**当y-original-color为黑色时：可能会违反性质2或4或5。**

**①如果y是根节点，而y的一个红色孩子成为新的根节点，违反了性质2**

**②如果x和x.p是红色，违反了性质4**

**③在树中删除或移动y将导致先前包含y的简单路径上的黑色节点少1**

**若z节点的孩子均不为T.nil，会违反性质的部分是以y的原位置为根节点的子树(包括其父节点)**

**①当x是其父亲的左孩子时：x为双重黑色**

***情况1：*x的兄弟节点w是红色的(w必有两个黑色的非哨兵子节点，且父亲必为黑色)**

**将x.p置为红色，w置为黑色，对x.p做一次左旋并更新w，即可将情况1转为234的一种**

**B 互换BD颜色 D**

**A(x) D(w) B E**

孩子

**C E 对B做一次左旋 A(x) C(w’)**

***情况2：*x的兄弟节点w是黑色，并且w的两个子节点都是黑色(可以是哨兵)**

**由于x为双重黑色，为了取消x的双重性，将x与w都去掉一层黑色属性，因此x变为单黑，w变为红色，并更新x(将双重属性赋予x的父节点)，并继续循环**

**B 除去x的双重特性，w置为红色 B(x’)**

**A(x) D(w) A D**

孩子

**C E 将双重特性移交给父节点 C E**

***情况3：*x的兄弟节点w是黑色，w的左孩子是红色，右孩子是黑色**

**交换w与其左孩子的颜色，对w进行右旋，并更新w，即可转为情况4**

**B 互换DC颜色 B**

**A(x) D(w) A(x) C(w’)**

孩子

**C E 对w做一次右旋 D**

**E**

***情况4：*x的兄弟节点是黑色，且w的右孩子是红色**

**交换BD颜色，将E置为黑色，并对B做一次左旋，即可退出循环**

**B 互换BD颜色 D**

**A(x) D(w) B E**

孩子

**C E 对B做一次左旋 A C**

**②当x是其父亲的右孩子时：x为双重黑色**

***情况1：*x的兄弟节点w是红色的(w必有两个黑色的非哨兵子节点，且父亲必为黑色)**

**将x.p置为红色，w置为黑色，对x.p做一次右旋并更新w，即可将情况1转为234的一种**

**B 互换BD颜色 D**

**D(w) A(x) C B**

孩子

**C E 对B做一次右旋 E(w’) A(x)**

***情况2：*x的兄弟节点w是黑色，并且w的两个子节点都是黑色(可以是哨兵)**

**由于x为双重黑色，为了取消x的双重性，将x与w都去掉一层黑色属性，因此x变为单黑，w变为红色，并更新x(将双重属性赋予x的父节点)，并继续循环**

**B 除去x的双重特性，w置为红色 B(x’)**

**D(w) A(x) D A**

孩子

**C E 将双重特性移交给父节点 C E**

***情况3：*x的兄弟节点w是黑色，w的左孩子是黑色，右孩子是红色**

**交换w与其右孩子的颜色，对w进行左旋，并更新w，即可转为情况4**

**B 互换DC颜色 B**

**D(w) A(x) E(w’) A(x)**

孩子

**C E 对w做一次左旋 D**

**C**

***情况4：*x的兄弟节点是黑色，且w的左孩子是红色**

**交换BD颜色，将C置为黑色，并对B做一次右旋，即可退出循环**

**B 互换BD颜色 D**

**D(w) A(x) C B**

孩子

**C E 对B做一次右旋 E A**

RB-DELETE-FIXUP(T,x)

1 **while** x≠T.root **and** x.color ==BLACK**//若x是红色的，那么将x改为黑色即可**

2 **if** x==x.p.left**//x可以是哨兵，访问x.p是合法的，因为在Delete中已经设置过**

3 w=x.p.right

4 **if** w.color==RED

5 w.color=BLACK

6 x.p.color=RED

7 LEFT-ROTATE(T,x.p)

8 w=x.p.right

9 **if** w.left.color==BLACK and w.right.color==BLACK

10 w.color=RED

11 x=x.p

12 **else\_if** w.right.color==BLACK

13 w.left.color=BLACK

14 w.color=RED

15 RIGHT-ROTATE(T,w)

16 w=x.p.right

17 w.color=x.p.color

18 x.p.color=BLACK

19 w.right.color=BLACK

20 LEFT-ROTATE(T,x.p)

21 x=T.root

22 **elseif** x==x.p.right

23 w=x.p.left

24 **if** w.color==RED

25 w.color=BLACK

26 x.p.color=RED

27 RIGHT-ROTATE(T,x.p)

28 w=x.p.left

29 **if** w.left.color==BLACK and w.right.color==BLACK

30 w.color=RED

31 x=x.p

32 **else\_if** w.left.color==BLACK

33 w.right.color=BLACK

34 w.color=RED

35 LEFT-ROTATE(T,w)

36 w=x.p.left

37 w.color=x.p.color

38 x.p.color=BLACK

39 w.left.color=BLACK

40 RIGHT-ROTATE(T,x.p)

41 x=T.root

42 **x**.color=BLACK

# AVLTree(版本1)

## 定义

1、节点的属性

1. val
2. left
3. right
4. parent
5. height

2、节点的性质

1. 每个节点的左子树与右子树的高度最多不超过1
2. 节点的高度：从给定节点到其最深叶节点所经过的边的数量

## 平衡性破坏分析

1、调整前某节点X的高度记为HX，调整后，该节点的高度记为HX+

### 可旋性分析

1、对于左旋，必须满足如下性质

* 首先，只有当右子树的高度大于左子树的高度才会有左旋的需求，因此HD=HA-1或HD=HA-2
* 其次，只有HC>=HE时，旋转后该子树的所有节点才满足AVL树的性质，分析如下
* 旋转前，各节点高度如下
* HD=HA-1或HD=HA-2
* HC=HA-1
* HE=HA-1或HE=HA-2
* 旋转后，各节点高度如下
* HD+=HD=HA-1或HA-2
* HE+=HE=HA-1或HA-2
* HC+=HC=HA-1
* 旋转后，B节点平衡，HB+=HA或HB+=HA-1
* 旋转后，A节点平衡，HA+=HA或HA+=HA+1



2、对于右旋，必须满足如下性质

* 首先，只有当左子树的高度大于右子树的高度才会有右旋的需求，因此HC=HB-1或HC=HB-2
* 其次，只有HD>=HE时，旋转后该子树的所有节点才满足AVL树的性质，分析如下
* 旋转前，各节点高度如下
* HC=HB-1或HC=HB-2
* HD=HB-1
* HE=HB-1或HE=HB-2
* 旋转后，各节点高度如下
* HD+=HD=HB-1
* HE+=HE=HB-1或HB-2
* HC+=HC=HB-1或HB-2
* 旋转后，A节点平衡，且HA+=HB或HA+=HB-1
* 旋转后，B节点平衡，且HB+=HB或HB+=HB+1



### 平衡性破坏分析

1、当C为平衡被破坏的节点，且C的左子树比右子树的高度大2

* 需要对C进行一次右旋
* 右旋的前提是HB>=HD
* 若不满足HB>=HD，则需要首先对A进行一次左旋，而左旋又存在前提
* 一直往下递归，直至满足旋转条件



2、当A为平衡被破坏的节点，且A的右子树比左子树的高度大2

* 需要对A进行一次左旋
* 左旋的前提是HE>=HD
* 若不满足HE>=HD，则需要首先对C进行一次右旋，而右旋又存在前提
* 一直往下递归，直至满足旋转条件



## 基本操作

HEIGHT(T,x)

1 **if** x.left.height≥x.right.height **//左右节点均存在**

2 x.height=x.left.height+1

3 **else** x.height=x.right.height+1

TRANSPLANT(T,u,v)  **//该函数与红黑树完全一致(都含有哨兵节点)**

1 **if** u.p==T.nil

2 T.root=v

3 **elseif** u==u.p.left

4 u.p.left=v

5 **else** u.p.right=v

6 v.p=u.p

### 左旋

LEFT-ROTATE(T,**x**)

1 y=x.right

2 x.right=y.left

3 **if** y.left≠T.nil

4 y.left.p=x **//1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)**

5 y.p=x.p

6 **if** x.p== T.nil

7 T.root=y

8 **elseif** x==x.p.left

9 x.p.left=y

10 **else** x.p.right=y **// 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)**

11 y.left=x

12 x.p=y **//11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)**

**13 HEIGHT(T,x)**

**14 HEIGHT(T,y) //13 14两行顺序不得交换**

**15 return y //返回旋转后的子树根节点**

### 右旋

RIGH-TROTATE(T,**y**)

1 x=y.left

2 y.left=x.right

3 **if** x.right≠T.nil

4 x.right.p=y **//1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)**

5 x.p=y.p

6 **if** y.p==T.nil

7 root=x

8 **elseif** y==y.p.left

9 y.p.left=x

10 **else** y.p.right=x **// 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)**

11 x.right=y

12 y.p=x **//11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)**

**13 HEIGHT(T,y)**

**14 HEIGHT(T,x) //13 14两行顺序不得交换**

**15 return x //返回旋转后的子树根节点**

### 维护AVL树的性质

**HOLD-ROTATE(T,x,orientation)**

1 let stack1,stack2 be two stacks**//不考虑实际用到的大小，直接用树的大小来分配堆栈空间大小**

2 stack1.push(x)

3 stack2.push(orientation)

4 cur=Nil

5 rotateRoot=Nil **//对x尝试旋转后，返回最终旋转后的根节点**

6 curOrientation=INVALID;

7 **while**(!stack1.Empty())

8 cur=stack1.top()

9 curOrientation=stack2.top()

10 **if** curOrientation==LEFT **//需要对cur尝试进行左旋**

11 **if** cur.right.right.height≥cur.right.left.height

12 stack1.pop()

13 stack2.pop()

14 rotateRoot=LEFT-ROTATE(T,cur)

15 **else**

16 stack1.push(cur.right)**//否则cur右孩子需要尝试进行右旋来调整**

17 stack2.push(RIGHT);

18 **elseif** curOrientation ==RIGHT**//需要对cur尝试进行右旋**

19 **if** cur.left.left.height≥cur.left.right.height

20 stack1.pop()

21 stack2.pop()

22 rotateRoot=RIGHT-ROTATE(T,cur)

23 **else**

24 stack1.push(cur.left) **//否则cur左孩子需要尝试进行左旋来调整**

25 stack2.push(LEFT)

26 return rotateRoot

## 插入

TREE-INSERT(T,z)

1 y=T.nil

2 x=T.root

3 **while** x≠T.nil**//循环结束时x指向空，y指向上一个x**

4 y=x

5 **if** z.key<x.key

6 x=x.left

7 **else** x=x.right

8 z.p=y**//将这个叶节点作为z的父节点**

9 **if** y==T.nil

10 T.root=z

11 **elseif** z.key<y.key

12 y.left=z

13 **else** y.right=z

14 z.left=T.nil

15 z.right=T.nil

**16 FIXUP(T,z)**

**FIXUP(T,y)**

1 **if** y==T.nil**//为了使删除函数也能调用该函数，因为删除函数传入的参数可能是哨兵**

2 y=y.p

3 **while**(y≠T.nil) **//沿着y节点向上遍历该条路径**

4 HEIGHT(y)

5 **if** y.left.height==y.right.height+2 **//左子树比右子树高2**

6 y= HOLD-ROTATE(T,y,2)

7 **elseif** y.right.height=y.left.height+2

8 y= HOLD-ROTATE(T,y,1)

9 y=y.p

## 删除

TREE-DELETE(T,z)

1 y=z **//x指向将要移动到y原本位置的节点，或者原本y节点的父节点**

2 **if** z.left==T.nil

3 x=y.right

4 TRANSPLANT(T,z,z.right)

5 **elseif** z.right==T.nil

6 x=y.left

7 TRANSPLANT(T,z,z.left)

8 **else** y=TREE-MINIMUM(z.right) **//找到z的后继，由于z存在左右孩子，故后继为右子树中的最小值**

9 x=y.right

10 **if** y.p==z**//如果y是z的右孩子，需要将x的parent指向y(使得x为哨兵节点也满足)**

11 x.p=y

12 **else** TRANSPLANT(T,y,y.right)

13 y.right=z.right

14 y.right.p=y

15 TRANSPLANT(T,z,y)

16 y.left=z.left

17 y.left.p=y

**18 FIXUP(T,x)**

**参考函数HoldRotate思考该数数在插入77后的如何旋转以维持AVL性质**



# AVLTree(版本2)

## 定义

1、节点的属性

1. val
2. left
3. right
4. parent
5. height

2、节点的性质

1. 每个节点的左子树与右子树的高度最多不超过1
2. 节点的高度：从给定节点到其最深叶节点所经过的边的数量

## 平衡性破坏分析

1、与版本1的分析不同，这个版本的分析将会更加精确

2、当插入一个节点后，某节点A为从插入节点网上的第一个平衡性被破坏的节点，可以分为如下四种情况，又可分为两大类

1. 插入点位于A的左子节点的左子树--左左--第一类(外侧)
2. 插入点位于A的左子节点的右子树--左右--第二类(内侧)
3. 插入点位于A的右子节点的左子树--右左--第二类(内侧)
4. 插入点位于A的右子节点的右子树--右右--第一类(外侧)

### 第一类不平衡(以左左为例)



1、调整前某节点X的高度记为HX，调整后，该节点的高度记为HX+

2、调整前，各节点的高度如下

* HB=HC+2
* HA=HC+2(为什么A和B高度相同，因为B的高度已经更新过了，而A仍然是是插入新节点之前的高度，即尚未维护A节点的height字段)
* HD=HB-1=HC+1
* HE必定小于HD(否则在新节点插入到节点D为根节点的子树之前，A节点就是不平衡的)，因此HE=HC

3、右旋调整后，各节点的高度如下

* HD+=HD=HC+1
* HE+=HE=HC
* HC+=HC
* 由于HE+=HC+，于是A节点平衡，且HA+=HC+1
* B节点也是平衡的，且HB+=HC+2

4、可以发现，调整前后子树根节点的高度都是HC+2，因此该节点上层的节点的平衡性不会被破坏，于是通过一次右旋，不平衡性即被消除

### 第二类不平衡(以左右为例)



1、调整前某节点X的高度记为HX，第一次调整后，该节点的高度记为HX+，第二次调整后记为HX++

2、调整前，各节点的高度如下

* HB=HC+2
* HA=HC+2(为什么A和B高度相同，因为B的高度已经更新过了，而A仍然是是插入新节点之前的高度，即尚未维护A节点的height字段)
* HE=HB-1=HC+1
* HD必定小于HE，因此HD=HC
* HH与HI至少有一个是HC，另一个可以是HC或HC-1

3、对B节点进行一次左旋后，各节点高度如下

* HD+=HD=HC
* HH+=HH=HC or HC-1
* HI+=HI=HC or HC-1
* HC+=HC
* HA+=HA=HC+2
* HB+=HC+1
* 当HI+=HC-1时，节点E可能是不平衡的，但是没关系，这只是个中间状态，HE=HC+2

4、对A节点进行一次右旋，各节点高度如下

* HD++=HD+=HC
* HH++=HH+= HC or HC-1
* HI++=HI+=HC or HC-1
* HC++=HC+=HC
* 旋转后，B节点平衡，HB++=HC+1
* 旋转后，A节点平衡，HA++=HC+1
* 因此旋转后，E节点平衡，HE++=HC+2

5、可以发现，调整前后子树根节点的高度都是HC+2，因此该节点上层的节点的平衡性不会被破坏，于是通过一次左旋和一次右旋，不平衡性即被消除

## 基本操作

HEIGHT(T,x)

1 **if** x.left.height≥x.right.height **//左右节点均存在**

2 x.height=x.left.height+1

3 **else** x.height=x.right.height+1

TRANSPLANT(T,u,v)  **//该函数与红黑树完全一致(都含有哨兵节点)**

1 **if** u.p==T.nil

2 T.root=v

3 **elseif** u==u.p.left

4 u.p.left=v

5 **else** u.p.right=v

6 v.p=u.p

### 左旋

LEFT-ROTATE(T,**x**)

1 y=x.right

2 x.right=y.left

3 **if** y.left≠T.nil

4 y.left.p=x **//1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)**

5 y.p=x.p

6 **if** x.p== T.nil

7 T.root=y

8 **elseif** x==x.p.left

9 x.p.left=y

10 **else** x.p.right=y **// 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)**

11 y.left=x

12 x.p=y **//11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)**

**13 HEIGHT(T,x)**

**14 HEIGHT(T,y) //13 14两行顺序不得交换**

**15 return y //返回旋转后的子树根节点**

### 右旋

RIGH-TROTATE(T,**y**)

1 x=y.left

2 y.left=x.right

3 **if** x.right≠T.nil

4 x.right.p=y **//1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)**

5 x.p=y.p

6 **if** y.p==T.nil

7 root=x

8 **elseif** y==y.p.left

9 y.p.left=x

10 **else** y.p.right=x **// 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)**

11 x.right=y

12 y.p=x **//11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)**

**13 HEIGHT(T,y)**

**14 HEIGHT(T,x) //13 14两行顺序不得交换**

**15 return x //返回旋转后的子树根节点**

## 插入

TREE-INSERT(T,z)

1 y=T.nil

2 x=T.root

3 **while** x≠T.nil//循环结束时x指向空，y指向上一个x

4 y=x

5 **if** z.key<x.key

6 x=x.left

7 **else** x=x.right

8 z.p=y//将这个叶节点作为z的父节点

9 **if** y==T.nil

10 T.root=z

11 **elseif** z.key<y.key

12 y.left=z

13 **else** y.right=z

14 z.left=T.nil

15 z.right=T.nil

16 INSERT-FIX(T,z)

INSERT-FIX(T,z)

1 originHigh=z.h

2 HEIGHT(z)

3 r=z

4 **if** z.left.h==z.right.h+2

5 **if** z.left.left.h>z.left.right.h //第一类

6 r=RIGHT-ROTATE(z)

7 **elseif** z.left.left.h<z.left.right.h //第二类

8 LEFT-ROTATE(z.left)

9 r=RIGHT-ROTATE(z)

//不可能出现左右子树高度相同的情况，但是DELETE-FIX中可能出现，注意

10 **elseif** z.right.h==z.left.h+2

11 **if** z.right.right.h>z.right.left.h //第一类

12 r=LEFT-ROTATE(z)

13 **elseif** z.right.right.h<z.right.left.h //第二类

14 RIGHT-ROTATE(z.right)

15 r=LEFT-ROTATE(z)

//不可能出现左右子树高度相同的情况，但是DELETE-FIX中可能出现，注意

16 **if** r.h!=originHigh **and** r!=root

17 INSERT-FIX(r.parent)

## 删除

TREE-DELETE(T,z)

1 y=z **//x指向将要移动到y原本位置的节点，或者原本y节点的父节点**

2 **p=y.parent** //p为被删除节点的父节点

3 **if** z.left==T.nil

4 TRANSPLANT(T,z,z.right)

5 **elseif** z.right==T.nil

6 TRANSPLANT(T,z,z.left)

7 **else** y=TREE-MINIMUM(z.right) **//找到z的后继，由于z存在左右孩子，故后继为右子树中的最小值**

8 **if** y==z.right //这个边界判断必须，因为p必须定位到被删除节点的父节点

9 p=y

10 **else**

11 p=y.parent

12 TRANSPLANT(y,y.right)

13 y.right=z.right

14 y.right.parent=y

15 y.left=z.left

16 y.left.parent=y

17 TRANSPLANT(T,z,y)

18 if p!=nil

19 DELETE-FIX(p)

DELETE -FIX(T,z)

1 HEIGHT(z)

2 r=z

3 if z.left.h==z.right.h+2

4 if z.left.left.h**>=**z.left.right.h //第一类

5 r=RIGHT-ROTATE(z)

6 else //第二类

7 LEFT-ROTATE(z.left)

8 r=RIGHT-ROTATE(z)

9 elseif z.right.h==z.left.h+2

10 if z.right.right.h**>=**z.right.left.h //第一类

11 r=LEFT-ROTATE(z)

12 else //第二类

13 RIGHT-ROTATE(z.right)

14 r=LEFT-ROTATE(z)

15 if r!=root

16 DELETE-FIX(r.parent)

# 数据结构扩张

红黑树的扩展：每个节点带有另一个属性(以该节点为根节点的子树的节点个数(不包括Nil)

查找第i个顺序统计量(秩)

OS-SELECT(x,i)

1 r=x.left.size+1

2 if i==r

3 return x

4 elseif i<r

5 return OS-SELECT(x.left,i)

6 else return OS-SELECT(x,right,i-r)

OS-RANK(T,x)

1 r=x.left.size+1

2 y=x

3 while y≠T.root**//循环不变式：每次迭代开始时，r为以y为根的子树中x节点的秩**

4 if y==y.p.right

5 r=r+y.p.left.size+1

6 y=y.p

7 return r

为了维护这个额外的属性，红黑树以下函数需要作出修改

左旋：

LEFT-ROTATE(T,**x**)

1 y=x.right

2 x.right=y.left

3 **if** y.left≠T.nil

4 y.left.p=x **//1-4行首先令节点b成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 b.p)**

5 y.p=x.p

6 **if** x.p==T.nil

7 T.root=y

8 **elseif** x==x.p.left

9 x.p.left=y

10 **else** x.p.right=y **// 5-10行再令节点y代替x(改动两个指向：y.p 以及 x.p.left or x.p.right or root)**

11 y.left=x

12 x.p=y **//11-12最后令x成为y的左孩子(改动两个指向：y.left 以及 x.p)**

13 y.size=x.size **//上述操作后，x.size未被改动，且改变子树的根节点不会导致节点数变化**

14 x.size=x.left.size+x.right.size+1 **//更新x.size**

右旋：

RIGHT-ROTATE(T,**y**)

1 x=y.left

2 y.left=x.right

3 **if** x.right≠T.nil

4 x.right.p=y **//1-4行首先令节点b成为y的左孩子(改动两个指向：y.l 以及 b.p)**

5 x.p=y.p

6 **if** y.p==T.nil

7 root=x

8 **elseif** y==y.p.left

9 y.p.left=x

10 **else** y.p.right=x **// 5-10行再令节点x代替y(改动两个指向：x.p 以及 y.p.left or y.p.right or root)**

11 x.right=y

12 y.p=x **//11-12最后令y成为x的右孩子(改动两个指向：x.right 以及 y.p)**

13 x.size=y.size **//上述操作后，y.size未被改动，且改变子树的根节点不会导致节点数变化**

14 y.size=y.left.size+y.right.size+1 **//更新y.size**

RB-INSERT(T,z)

1 y=T.nil

2 x=T.root

3 **while** x≠T.nil

4 y=x

5 y.size=y.size+1**//新节点插入的路径上每一个父节点都需要将大小增加1**

6 **if** z.key<x.key

7 x=x.left

8 **else** x=x.right

9 z.p=y

10 **if** y==T.nil

11 T.root=z

12 **elseif** z.key<y.key

13 y.left=z

14 **else** y.right=z

15 z.left=T.nil

16 z.right=T.nil

17 z.colcor=RED

18 z.size=1**//新插入的节点大小为1**

19 RB-INSERT-FIXUP(T,z)

RB-DELETE(T,z)

1 y=z

2 y-original-color=y.color

3 **if** z.left==T.nil

4 x=z.right

5 RB-TRANSPLANT(T,z,z.right)

6 **elseif** z.right==T.nil

7 x=z.left

8 RB-TRANSPLANT(T,z,z.left)

9 **else** y=TREE-MINIMUM(z.right)

10 y-original-color=y.color

11 x=y.right

12 **if** y.p==z

13 x.p=y**//使得x为哨兵节点时也成立**

14 **else** RB-TRANSPLANT(T,y,y.right)**//即使y.right是哨兵，也会指向y的父节点**

15 y.right=z.right

16 y.right.p=y

17 RB-TRANSPLANT(T,z,y)

**//17行运行之后，13、14行都会保证x指向原始y父节点的位置**

18 y.left=z.left

19 y.left.p=y

20 y.color=z.color

21 p=x.p **//由于x是挪到y原本位置的节点，因此x的属性未发生变动，x的所有父节点需要更新**

22 while p≠T.nil

23 p.size=p.size-1

24 p=p.p

25 if y-original-color==BLACK

26 RB-DELETE-FIXUP(T,x)

# 动态规划DP

## 钢条切割问题

**朴素递归**

CUT-ROD(p,n)

1 **if** n==0

2 **return** 0

3 q=-∞

4 **for** i=1 **to** n **//i表示的是从左边切下的长度**

5 q=max(q,p[i]+CUT-ROD(p,n-i))

6 **return** q

**带备忘的自顶向下递归(因为需要有初始化的变量，因此需要两个函数！！！)**

MEMOIZED-CUT-ROD(p,n)

1 let r[0…n] be a new array **//为什么要保存r[0]，见MEMOIZED-CUT-ROD-AUX第7行，会访问该元素**

2 **for** i=0 **to** n

3 r[i]=-∞

4 **return** MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)

MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)

1 **if** r[n]≥0**//已存入备忘录，返回**

2 **return** r[n]

3 **if** n==0//正常递归的返回

4 q=0

5 **else** q=-∞

6 **for** i=1 **to** n

7 q=max(q,p[i]+MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n-i,r)

8 r[n]=q

9 **return** q

**自底向上非递归**

BOTTOM-UP-CUT-ROD(p,n)

1 let r[0...n]be a new array **//为什么要保存r[0]，见第6行，会访问r[0]**

2 r[0]=0

3 **for** j=1 **to** n **//按大小次序依次求解该问题以及其所有子问题**

4 q=-∞

5 **for** i=1 **to** j **//在求解子问题j之前，j的所有子问题必然已经求解出来**

6 q=max(q,p[i]**+r[j-i]**)**//与CUT-ROD不同之处，直接访问结果而非递归调用**

7 r[j]=q

8 **return** r[n]

**保存最优解的自底向上非递归**

EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p,n)

1 let r[0...n] and s[0...n] be new arrays

2 r[0]=0

3 **for** j=1 **to** n

4 q=-∞

5 **for** i=1 **to** j

6 if q<p[i]+r[j-i]

7 q=p[i]+r[j-i]

8 s[j]=i**//只保存第一段长度**

9 r[j]=q

10 **return** r and s

## 矩阵链相乘完全括号化问题

**自底向上非递归法：**

MATRIX-CHAIN-ORDER(p)

1 n=p.length-1**//n为矩阵的个数**

2 let m[1…n,1…n] and s[1…n-1,2…n] be new tables

3 for i=1 to n

4 m[i,i]=0

5 for g=2 to n **//依次计算长度为g的子链的最优括号化(不同的子链长度)**

6 for i=1 to n- g +1**//i为该长为g的子链的起始索引(索引从1开始)(不同的起始位置)**

7 j=i+ g -1**//长为g子链以i为起始索引时，终止索引为j**

8 m[i,j]=∞

9 for k=i to j-1**//子链[i,j]的分割点**

10 q=m[i,k]+m[k+1,j]+pi-1pkpj**//计算m[i,j]时，长度小于j-1+1的子链的最优括号化已求得**

11 if q<m[i,j]

12 m[i,j]=q

13 s[i,j]=k

14 return m and s

**其中m[i,j]代表计算矩阵Ai…j所需标量乘法次数的最小值**

**其中s[i,j]代表满足Ai…j所需标量乘法次数的最小值时的分割点，故i≤s[i,j]<j**

**若矩阵为A1=30\*35; A2=35\*15; A3=15\*5; A4=5\*10; A5=10\*20; A6=20\*25;**

**那么p=[30,35,15,5,10,20,25] 即Ai=p[i-1]\*[i]**

PRINT-OPTIMAL-PARENS(s,i,j)

1 if i==j

2 print “A”i

3 else print”(”

4 PRINT-OPTIMAL-PARENS(s,i,s[i,j])

5 PRINT-OPTIMAL-PARENS(s,s[i,j]+1,j)

6 print”)”

**自带备忘的自顶向下法：**

MATRIX-CHAIN-MEMOIZED(p)

1 int n=p.length-1

2 let m[1…n,1…n] and s[1…n-1,2…n]be new tables

3 for i=1 to n//该循环初始化，使得备忘录为特殊值

4 for j=i to n

5 m[i,j]=∞

6 MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,1,n)

7 return m and s

MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,i,j)

1 if m[i,j]<∞//若不为特殊值说明该情况已求得最优解

2 return m[i,j]

3 if i==j

4 m[i,j]=0

5 else for k=i to j-1

6 q= MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,i,k)+

MATRIX-CHIAN-MEMOIZED-AUX(p,m,s,k+1,j)+ pi-1pkpj

7 if q<m[i,j]

8 m[i,j]=q

9 s[i,j]=k

10 return m[i,j]

自带备忘的自顶向下法的特点

**1、需要两个函数，其中一个为递归函数**

**2、递归函数中，有3个返回点：备忘录中已有该问题的结果；平凡结果；非平凡结果**

**3、递归函数需要返回值：该问题的一个最优解**

## LCS-LENGTH

LCS(X,Y) longest common subsequence

1 m=X.length

2 n=Y.length

3 let b[1...m,1...n] and c[1...m,1...n]be new tables//c[i,j]表示X1...i与Y1...i的最长公共子序列的长度

//b[i,j]表示c[i,j]分解成子问题的方式(存储即作出选择，该选择只有3种)

4 **for** i=1 **to** m

5 c[i,0]=0

6 **for** j=0 **to** n

7 c[0,j]=0

8 **for** i=1 **to** m

9 **for** j=1 **to** n

10 **if** xi==yj

11 c[i,j]=c[i-1,j-1]+1

12 b[i,j]= ↖

13 else**if** c[i-1,j]≥c[i,j-1]

14 c[i,j]=c[i-1,j]

15 b[i,j]= ↑

16 **else** c[i,j]=c[i,j-1]

17 b[i,j]= ←

18 **return** c and b

**LMS-LENGTH**(X) longest monotonous sunsequence

1 n=X.length

2 let c[1...n] b[1...n] be new tables //其中c[i]表示以元素X[i]结尾的最长单调子序列(子问题形式与原问题不同！)

//b[i]表示以元素X[i]结尾的最长单调子序列中第二大的元素的下标

3 **for** i=1 **to** n

4 c[i]=1//至少为1嘛

5 **for** i=2 **to** n

6 **for** j=1 **to** i-1

7 **if** X[i]>X[j] **and** c[i]<c[j]+1

8 c[i]=c[j]+1

9 b[i]=j

## 0BST

0BST(p,q)

1 let e[1...n+1,0...n],w[1...n+1,0...n],and root[1...n,1...n]be new tables

//其中p1...pn代表关键字k1...kn的概率，q0...qn代表伪关键字d0...dn的概率

//e[i,j]表示包含关键字ki...kj的子树的搜索期望代价，其中e[i,i-1]=q[i-1]

//w[i,j]表示包含关键字ki...kj的子树的关键字以及伪关键字di-1...dj概率之和

//root[i,j]表示包含关键字ki...kj的子树的根节点

//包含关键字ki...kj的子树中必然包含伪关键字di-1...dj

2 **for** i=1 **to** n+1

3 e[i,i-1]=q[i-1];

4 w[i,i-1]=q[i-1];

5 **for** L=1 **to** n //L代表子树的长度

6 **for** i=1 **to** n-L+1//i代表长为L的子树的起始索引

7 j=i+L-1//j代表长为L的子树的终止索引

8 e[i,j]=∞

9 w[i,j]=w[i,j-1]+p[j]+q[j]

10 **for** r=i **to** j//r代表长为L的子树的分割点

11 t=e[i,r-1]+e[r+1,j]+w[i,j]

12 **if** t<e[i,j]

13 e[i,j]=t

14 root[i,j]=r

15 **return** e and root

PRINT\_TREE(i,j,last)

1 cur=SUB\_ROOT(i,j)//若j<i会返回0

2 **if** i==1 **and** j==root.Length

3 print(“K”+cur+”为根”)

4 **elseif** cur==0

5 **if** j<last

6 print(“D”+j+”为”+”K”+last+”的左孩子)

7 else print(“D”+j+”为”+”K”+last+”的左孩子)

8 **elseif** index<last

9 print(“K”+index+”为”+”K”+last+”的左孩子)

10 PRINT\_TREE(i,index-1,index)

11 PRINT\_TREE(index+1,j,index)

12 **else** print(“K”+index+”为”+”K”+last+”的右孩子)

13 PRINT\_TREE(i,index-1,index)

14 PRINT\_TREE(index+1,j,index)

SUB\_ROOT(i,j)

**if** i<=j

**return** root[i,j]

**return** 0 //当i=1，j=0时也能起作用，而root[i,j]此时会异常

# 贪心算法

RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)

1 m=k+1

2 **while** m≤n **and** s[m]<f[k] //在k之后，n之前的活动中，找到活动开始时间小于活动k结束时间的活动，由于活动结束时间已排序，因此第一个满足条件的活动一定是活动时间最早结束的活动

3 m=m+1

4 **if** m≤n

5  **return** {am}URECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,m,n)

GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)

1 n=s.length

2 A={a1} **//由于活动按结束时间排序，第一个活动必定会选择**

3 k=1

4 **for** m=2 **to** n

5 **if** s[m]≥f[k]

6 A=A∪{am}

7 k=m

8 **return** A

## 0-1背包问题

**MaxValue(p,w,V)**

1 n=p.length

2 let dp[1...n][1...V] be a new array

3 **for** v=1 to V //初始化，对于不同的背包容量，对第一个商品的最大利益

4 if w[1]<=v

5 dp[1][v]=p[1] //装得下就装下

6 else dp[1][v]=0 //装不下就舍弃

7 **for** i=2 **to** n

8 for v=1 **to** V

9  **if** v<w[i] //若大小为v的背包容量小于第i件商品的重量，那么第i件商品无法取得

10 dp[i][v]=dp[i-1][v]

11 **else** dp[i][v]=max(dp[i-1][v],dp[i-1][v-w[i]]+p[i])

12 **return** dp[n][V]

**核心关系式：dp[i][v]=max(dp[i-1][v],dp[i-1][v-w[i]]+p[i])**

**子问题模式：dp[i][v]：对于前i个商品，给定背包容量v所能获取的最大收益(可以取可以不取)**

## 哈夫曼编码

HUFFMAN(C)

1 n=|C|

2 Q=C//将C中的元素全部存入优先队列(优先队列用最小二叉堆实现)

3 **for** i=1 **to** n-1

4 allocate a new node z

5 z.left=x=EXTRACT-MIN(Q)//提取出优先队列中的第一项

6 z.right=y=EXTRACT-MIN(Q) //提取出优先队列中的第一项

7 z.freq=x.freq+y.freq

8 INSERT(Q,z)

9 **return** EXTRACT-MIN(Q)

Q是一个优先队列

# B树

## 定义

### 节点

1、节点的属性

1. n：关键字个数
2. key：关键字数组
3. c：孩子数组
4. leaf：是否为叶节点

2、每个节点具有以下性质

1. x.n：当前存储在节点x中的关键字个数
2. x.n个关键字本身x.key1, x.key2, ..., x.keyx.n，以非降序存放，使得

x.key1≤x.key2≤...≤x.keyx.n

1. x.leaf：一个布尔值，如果x是叶节点，则为TRUE，如果x为内部节点，则为FALSE
2. 每个内部节点x还包含x.n+1个指向其孩子的指针，x.c1, x.c2, ..., x.cx.n+1，叶节点没有孩子，所以他们的ci属性没有定义
3. 关键字x.keyi对存储在各子树中的关键字范围加以分割：如果ki为任意一个存储在以x.ci为根的子树中的关键字，那么

k1≤x.key1≤k2≤x.key2≤…≤x.keyx.n≤kx.n+1

1. 每个叶节点都具有相同的深度，即树的高度h
2. 每个节点所包含的关键字个数有上界和下界，用一个被称为B数的最小度数(minimum degree)的固定整数t≥2来表示这些界

* 除了根节点以外的每个节点必须至少有t-1个关键字，因此除了根节点以外的每个内部节点至少有t个孩子，如果树非空，根节点至少含有一个关键字
* 每个节点至多可包含2t-1个关键字，因此，一个内部节点最多可有2t个孩子，当一个节点恰好有2t-1个关键字时，称该节点是满的
* t=2时的B数是最简单的，在实际中，t的值越大，B树的高度就越小

### 树

1、属性

1. t：B树的度
2. root：B树的根节点

2、对于节点x ，关键字x.keyi 与子树指针x.ci 的索引相同，就说x.ci是关键字x.keyi对应的子树指针

3、子树x.ci的元素介于 x.keyi-1~x.keyi之间 1≤i≤x.n+1，为保持一致性，记x.key0= -∞，x.keyx.n+1=+∞

## 基本操作

### 查找

**B-TREE-SEARCH(x,k)**

1 i=1

2 **while** i ≤ x.n **and** k > x.keyi

3 i=i+1

4 **if** i ≤ x.n and k==x.keyi

5 **return** (x,i)

6 **elseif** x.leaf

7 **return** NIL

8 **else** DISK-READ(x,ci)

9 **return** B-TREE-SEARCH(s.ci,k)

### 分裂

**B-TREE-SPLIT-CHILD(x,i)**//x.ci是满节点，x是非满节点

1 z=ALLOCATE-NODE()//z是由y的一半分裂得到

2 y=x.ci

3 z.leaf=y.leaf

4 z.n=t-1

5 **for** j=1 **to** t-1

6 z.keyj=y.keyj+t //将y中[t+1…2t-1]总共t-1个关键字复制到节点z中作为[1…t-1]的关键字，其中第t个关键字会提取出来作为x节点的关键字

7 **if** **not** y.leaf//如果y不是叶节点，那么y还有t个指针需要复制到z中

8 **for** j=1 **to** t

9 z.cj=y.cj+t

10 y.n=t-1

11 **for** j=x.n+1 **downto** i+1//指针y和z必然是相邻的，并且他们所夹的关键字就是原来y中第t个

12 x.cj+1=x.cj

13 x.ci+1=z

14 **for** j=x.n **downto** i

15 x.keyj+1=x.keyj

16 x.keyi=y.keyt

17 x.n=x.n+1

18 DISK-WRITE(y)

19 DISK-WRITE(z)

20 DISK-WRITE(x)

### 前继节点

**B-TREE-PRECURSOR(x,k)**//得保证k必须存在于B树中

1 **if** !B-TREE-SEARCH(k) **or** k==B-TREE-MINIMUM(T.root)

2 throw error(no precursor)

3 B-TREE-PRECURSORAUX(T.root,k)

**B-TREE-PRECURSORAUX(x,k)**

1 i=1

2 **if** x.leaf//若为叶节点

3 while i≤x.n **and** k>x.keyi ++i //找到第一个不小于k的关键字(大于或等于都可以)

4 **return** x.keyi-1

5 **else** //若不为叶节点

6 **while** i≤x.n **and** k>x.keyi ++i //找到第一个不小于k的关键字

7 **if** k==x.keyi return B-TREE-MAXIMUM(x.ci) //若这个关键字等于k，那么在对应子树中找最大值

8 **if** MINIMUM(x.c)≥k **//如果该关键字对应的子树的最小值大于k**

9 **return** x.ki-1 **//那么前驱必然是当前节点中的前一个关键字**

10 **return** B-TREE-PRECURSORAUX(x.ci,k)//否则在该关键字对应的子树中继续寻找

### 后继节点

**B-TREE-SEARCH-SUCCESSOR(x,k)**

1 **if** !B-TREE-SEARCH(x,k) **or** k=B-TREE-MAXIMUM(T.root)

2 throw error (no successor)

3 B-TREE-SEARCH-SUCCESSORAUX(x,k)

**B-TREE-SEARCH-SUCCESSORAUX(x,k)**

1 i=x.n

2 **if** x.leaf

3 **while** i≥1 **and** k<x.keyi --i

4 **return** x.keyi+1

5 **else**

6 **while** i≥1 **and** k<x.keyi --i

7 **if** k==x.keyi **return** B-TREE-MINIMUMAUX(x.ci+1)

8 **if** k≥B-TREE-MAXIMUM(x.ci+1)

9 **return** x.keyi+1

9 **return** B-TREE-SEARCH-SUCCESSORAUX(x.ci+1,k)

### 最值

**B-TREE-MINIMUM(x)**

1 **if** x.leaf **return** x.key1

2 **return** B-TREE-MIMIMUM(x.c1)

**B-TREE-MAXIMUM(x)**

1 **if** x.leaf **return** x.keyx.n

2 **return** B-TREE-MAXIMUM(x.cx.n+1)

### 合并

**B-TREE-MERGE(x,i,y,z)**

1 y.n=2t-1

2 **for** j=t+1 **to** 2t-1

3 y.keyj=z.keyj-t

4 y.keyt=x.keyi //the key from node x merge to node y as the tth key

5 **if** **not** y.leaf

6 **for** j=t+1 **to** 2t

7 y.cj=z.cj-t

8 **for** j=i+1 **to** x.n

9 x.keyj-1=x.keyj

10 x.cj=x.cj+1

11 x.n=x.n-1

12 Free(z)

### shift

**B-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i,y,z)**

1 y.n=y.n+1

2 y.keyy.n=x.keyi

3 x.keyi=z.key1

4 z.n=z.n-1

5 j=1

6 **while** j≤z.n

7 z.keyj=z.keyj+1

8 j=j+1

9 **if** **not** z.leaf

10 y.cy.n+1=z.c1

11 j=1

12 **while** j≤z.n+1

13 z.cj=z.cj+1

14 j++

15 DISK-WRITE(y)

16 DISK-WRITE(z)

17 DISK-WRITE(x)

**B-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,i,y,z)**

1 z.n=z.n+1

2 j=z.n

3 **while** j>1

4 z.keyj=z.keyj-1

5 j--

6 z.key1=x.keyi

7 x.keyi=y.keyy.n

8 **if** **not** z.leaf

9 j=z.n

10 **while** j>0

11 z.cj+1=z.cj

12 j--

13 z.c1=y.cy.n+1

14 y.n=y.n-1

15 DISK-WRITE(y)

16 DISK-WRITE(z)

17 DISK-WRITE(x)

## 插入

**B-TREE-INSERT(T,k)**

1 r=T.root

2 **if** r.n==2t-1 //需要处理根节点，若满了，则进行一次分裂，这是树增高的唯一方式

3 s=ALLOCATE-NODE()//分配一个节点作为根节点

4 T.root=s

5 s.leaf=FLASE//显然由分裂生成的根必然是内部节点

6 s.n=0

7 s.c1=r//之前的根节点作为新根节点的第一个孩子

8 B-TREE-SPLIT-CHILD(s,1)

9 B-TREE-INSERT-NONFULL(s,k)

10**else** B-TREE-INSERT-NONFULL(r,k)

**B-TREE-INSERT-NONFULL(x,k)**

1 i=x.n

2 **if** x.leaf //如果是叶节点，保证是非满的，找到适当的位置插入即可

3 **while** i ≥1 **and** k<x.keyi

4 x.keyi+1=x.keyi

5 i=i-1

6 x.keyi+1=k

7 x.n=x.n+1

8 DISK-WRITE(x)

9 **else** **while** i ≥ 1 **and** k<x.keyi

10 i=i-1

11 i=i+1//转到对应的指针坐标

12 DISK-READ(x.ci)

13 **if** x.ci.n==2t-1

14 B-TREE-SPLIT-CHILD(x,i)

15 **if** k>x.keyi //原来在i位置的关键字现在在i+1位置上，i位置上是y.keyt

16 i=i+1

17 B-TREE-INSERT-NONFULL(x.ci,k)

**从左往右遍历，第一个大于指定关键字的关键字的索引就是指针的索引**

**从右往左遍历，第一个小于指定关键字的关键字的索引+1就是指针的索引**

## 删除

**B-TREE-DELETE(T,k)** //以下都是delete会用到的函数

1 r=T.root

2 **if** r.n==1

3 DISK-READ(r.c1)

4 DISK-READ(r.c2)

5 y=r.c1

6 z=r.c2

7 **if** **not** r.leaf **and** y.n==z.n==t-1

8 B-TREE-MERGE-CHILD(r,1,y,z)

9 T.root=y

10 FREE-NODE(r)

11 B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k)

12 **else** B-TREE-DELETE-NOTNONE(r,k)

13 **else** B-TREE-DELETE-NOTNONE(r,k)

**B-TREE-DELETE-NOTNONE(x,k)**

1 i=1

2 **if** x.leaf

3 **while** i ≤ x.n **and** k>x.keyi

4 i=i+1

5 **if** k==x.keyi

6 **for** j=i+1 **to** x.n

7 x.keyj-1=x.keyj

8 x.n=x.n-1

9 DISK-WRITE(x)

10 **else** error:”the key does not exist”

11 **else** **while** i ≤ x.n **and** k>x.keyi

12 i=i+1

13 DISK-READ(x.ci)

14 y=x.ci

15 **if** i ≤ x.n

16 DISK-READ(x.ci+1)

17 z=x.ci+1

18 **if** i ≤ x.n **and** k==x.keyi //Cases 2

19 **if** y.n>t-1 //Cases 2a

20 k’=B-TREE-MIMIMUM(y)

21 B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k’)

22 x.keyi=k’

23 **elseif** z.n>t-1 //Case 2b

24 k’=B-TREE-MAXIMUM(z)

25 B-TREE-DELETE-NOTNONE(z,k’)

26 x.keyi=k’

27 **else** B-TREE-MERGE-CHILD(x,i,y,z) //Cases 2c

28 B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k)

29 **else** //Cases3

30 **if** i>1

31 DISK-READ(x.ci-1)

32 p=x.ci-1

33 **if** y.n==t-1

34 **if** i>1 **and** p.n>t-1 //Cases 3a

35 B-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,**i-1**,p,y)

36 **elseif** i ≤ x.n **and** z.n>t-1

37 B-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i,y,z)

38 **elseif** i>1 //Cases3b

39 B-TREE-MERGE-CHILD(x**,i-1**,p,y)

40 y=p

41 **else** B-TREE-MERGE-CHILD(x,i,y,z) //Cases 3b

42 B-TREE-DELETE-NOTNONE(y,k)

**SPLID**



**Merge**



# B+树

## 定义

### 节点

1、节点的属性

1. n：关键字个数
2. key：关键字数组
3. c：孩子数组
4. leaf：是否为叶节点
5. next：右兄弟节点

2、节点的性质

1. 节点关键字的个数

* 根节点：[1,2t]个关键字
* 非根节点[t,2t]个关键字

1. 所有叶子节点连接成一个单向链表

### 树

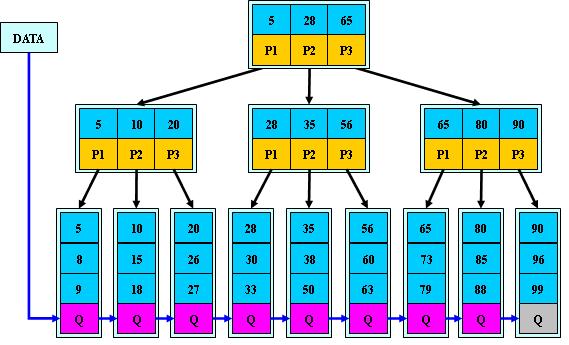
1、属性

1. t：B+树的度
2. root：根节点
3. data：第一个叶节点

2、与B树的区别

1. 所有的关键字均存储在叶节点中
2. 非叶节点中的关键字仅仅起到索引作用
3. 索引关键字不一定存在于叶节点中(由于删除，会导致该索引关键字从叶节点删除，但是索引关键字的索引作用仍然成立)
4. 每个非叶节点的索引关键字是该索引关键字对应的子树的最值的上届(由于删除，可能取不到)，可以任选一种来实现(本章选用的是最大值)

3、示意图



## B+树度的不同定义

1、B+树有如下一种定义：规定B+树的度t，那么非叶节点的关键字数量为[⌊(t+1)/2⌋,t]，下面将以这种定义方式叙述B+树的操作，并阐明这种定义方式的缺点，最后给出另一种B+树度的定义方式

### 插入操作

1、假设B+树的度为3，根据上面的定义，非叶节点的关键字数量为[2,3]

2、B+树此刻状态如下，将要插入一个关键字25



3、直观上讲，B树与B+树的插入操作是从叶节点开始

1. 首先定位到节点A，将节点插入到A中
2. 由于每个节点最多容纳3个关键字，因此节点A需要分裂
3. A分裂后会导致B关键字数量多1，而此时B又需要分裂
4. B分裂后会导致C节点关键字数量多1，而此时C又需要分裂

4、上面这种情况会导致从叶节点向上传递一个分裂操作，而向上传递需要定位父节点

1. 若采用额外的字段标记父节点，会造成节点维护复杂度增加，并且增加节点的空间复杂度
2. 若不采用额外的字段标记父节点，则只能从根节点向下查找，造成了额外的时间复杂度

### 删除操作

1、假设B+树的度为3，根据上面的定义，非叶节点的关键字数量为[2,3]

2、2、B+树此刻状态如下，将要删除一个关键字18



3、直观上讲，B树与B+树的删除操作是从叶节点开始

1. 首先定位到节点A，将关键字18删除，由于A的关键字数量1，需要合并操作
2. A节点合并之后，会导致B节点关键字数量少1，而此时又导致B节点的合并操作
3. B节点合并之后，会导致C节点关键字数量少1，又引发了C节点的合并操作

4、上面这种情况会导致从叶节点向上传递一个合并操作，而向上传递需要定位父节点

1. 若采用额外的字段标记父节点，会造成节点维护复杂度增加，并且增加节点的空间复杂度
2. 若不采用额外的字段标记父节点，则只能从根节点向下查找，造成了额外的时间复杂度

### 预留式的插入删除操作

1、现在想用另一种办法，将自底向上的分裂或者合并操作转化为自顶向下的操作，这样可以减少节点额外的字段

2、当插入节点时，从根节点到叶节点的路径上的所有节点满足以下性质：

**每个节点x可以允许其子节x.ci点进行一次分裂操作，即当前节点的关键字数量非满(x.n<t)**

3、当删除节点时，从根节点到叶节点的路径上的所有节点满足以下性质：

**每个节点x可以允许其子节x.ci点进行一次合并操作，即当前节点的关键字数量非空(x.n>⌊(t+1)/2⌋)**

4、在这种度的定义下，这种预留式的操作未必能进行，原因如下

1. 当度t为奇数时，一个节点无法在x.n=t的情况下进行分裂，因为分裂后的两个节点必定有一个不满足性质，即x.n<⌊(t+1)/2⌋
2. 当度t为奇数时，一个节点无法在x.n=⌊(t+1)/2⌋的情况下进行合并，因为合并后的节点，其关键字的数量将会大于t

### B+树度的合理定义方式

1、参考B树的定义，B+树度的定义如下

**给定B+树的度，非根节点的关键字数量为[t,2t]**

2、这种定义方式可以很好地解决上一小节提出的预留式操作，请自行验证

## 基本操作

### 分裂

**B+-TREE-SPLIT-CHILD(x,i)**//x.ci是满节点，x是非满节点

1 y=x.ci

2 z= **ALLOCATE-NODE()**

3 y.n=z.n=t

4 **for** j=1 **to** t

5 z.keyj=y.keyj+t

6 **if** **not** y.leaf

7 **for** j=1 **to** t

8 z.cj=y.cj+t

9 **else**

10 z.next=y.next

11 y.next=z

12 z.leaf=y.leaf

13 **for** j=x.n+1 **downto** i+2

14 x.keyj=x.keyj-1

15 x.cj=x.cj-1

16 x.keyi+1=x.keyi

17 x.keyi=y.keyy.n

18 x.ci+1=z

19 x.n++

### 合并

**B+-TREE-MERGE(x,i)**

1 y=x.ci

2 z=x.ci+1

3 y.n=2t

4 **for** j=1 **to** t

5 y.keyj+t=z.keyj

6 **if** **not** y.leaf

7 **for** j=1 **to** t

8 y.cj+t=z.cj

9 **else**

10 y.next=z.next

11 **for** j=i+1 **to** x.n-1

12 x.keyj=x.keyj+1

13 x.cj=x.cj+1

14 x.keyi=y.keyy.n

15 x.n--

### shift

**B+-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD(x,i)**

1 y=x.ci

2 z=x.ci+1

3 y.keyy.n+1=z.key1

4 **for** j=1 **to** z.n-1

5 z.keyj=z.keyj+1

6 **if not** y.leaf

7 y.cy.n+1=z.c1

8 **for** j=1 **to** z.n-1

9 z.cj=z.cj+1

10 y.n++

11 z.n--

12 **B+-TREE-INDEX-FIX**(y,y.keyy.n)

**shift操作会导致左侧节点的索引失效，但仅仅需要改动该父节点即可，因为父节点需要修改的索引必定不是父节点的最值**

**B+-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD(x,i)**

1 p=x.ci

2 y=x.ci+1

3 **for** j=y.n+1 **downto** 2

4 y.keyj=y.keyj-1

5 y.key1=p.keyp.n

6 **if** **not** y.leaf

7 **for** j=y.n+1 **downto** 2

8 y.cj=y.cj-1

9 y.c1=p.cp.n

10 y.n++

11 p.n--

12 **B+-TREE-INDEX-FIX**(p,p.keyp.n)

### 维护索引正确性

**B+-TREE-INDEX-FIX(y,k)**

1 x=root

2 **while** **not** x.leaf

3 i=1

4 **while** i<=x.n **and** y!=x.ci

5 i++

6 **if** i<=x.n

7 x.keyi=k

8 **return**//这是该函数唯一的出口，while的条件不用太在意，改为true也行

9 i=1

10 **while** i<=x.n **and** x.keyi<k

11 i++

12 x=x.ci

## 插入

**B+-TREE-INSERT(k)**

1 **if** root.n==2t

2 newRoot= **ALLOCATE-NODE()**

3 newRoot.n=1

4 newRoot.k1=root.key2t

5 newRoot.c1=root

6 newRoot.leaf=false

7 root=newRoot

8 **B+-TREE-SPLIT-CHILD** (root,1)

9 **B+TREE-INSERT-NOT-FULL**(root,k)

**B+TREE-INSERT-NOT-FULL**(x,k)

1 i=x.n

2 **if** x.leaf

3 **while** i>=1 **and** x.key[i]>k

4 x.keyi+1=x.keyi

5 i--

6 i++

7 x.keyi=k

8 x.n++

9 **else**

10 **while** i>=1 **and** x.keyi>=k **//这个等于至关重要，虽然B+树节点不会重复，但是由于删除操作的存在，留在树中的索引关键字未必存在于叶节点中，因此这里需要加上等号**

11 i--

12 i++

13 **if** x.n+1==i **//这里至关重要，插入节点时需要维护索引的正确性，就在这唯一一处进行维护**

14 x.keyx.n=k

15 i--

16 y=x.ci

17 **if** y.n==2t

18 **B+-TREE-SPLIT-CHILD**(x,i)

19 **if** k>y.keyy.n

20 i++

21 **B+TREE-INSERT-NOT-FULL**(x.ci,k)

## 删除

**B+-TREE-DELETE**(k)

1 **if not root**.leaf **and** root.n==1

2 root=root.c1

3 **if** root.n==2

4 **if not** root.leaf **and** root.c1.n==t **and** root.c2.n==t

5 **B+-TREE-MERGE**(root,1)

6 **B+-TREE-DELETE-NOT-NONE**(root,k)

**B+-TREE-DELETE-NOT-NONE**(x,k)

1 i=1

2 **if** x.leaf

3 **while** i<=x.n **and** x.keyi<k

4 i++

5 **while** i<=x.n-1

6 x.keyi=x.keyi+1

7 i++

8 x.n--

9 **else**

10 **while** i<=x.n **and** x.keyi<k //这里必须严格小于，找到第一个满足k<=x.keyi的i

11 i++

12 y=x.ci

13 if i>1

14 p=x.ci-1

15 if i<x.n

16 z=x.ci+1

17 if y.n==t

18 if p!=null and p.n>t

19 **B+-TREE-SHIFT-TO-RIGHT-CHILD**(x,i-1)

20 else if z!=null and z.n>t

21 **B+-TREE-SHIFT-TO-LEFT-CHILD**(x,i)

22 else if p!=null

23 **B+-TREE-MERGE**(x,i-1)

24 y=p

25 else

26 **B+-TREE-MERGE**(x,i)

27 **B+-TREE-DELETE-NOT-NONE(**y,k**)**

# 斐波那契堆

## 定义

### 节点

1、key：节点的值

2、degree：节点的度???

3、left：左兄弟

4、right：右兄弟

5、p：父节点

6、child：第一个孩子节点

7、marked：是否被删除第一个孩子节点

## 堆

1、n：堆节点的总数

2、min：最小节点，也就是斐波那契堆的根

## 插入操作

FIB-HEAP-INSERT(H,x)

1 x.degree=0

2 x.p=NULL

3 x.child=NULL

4 x.mark=FLASE

5 if H.min==NULL

6 ***create a root list for H containing just x***

7 H.min=x

8 else

9 ***insert x into H's root list***

10 if x.key<H.min.key

11 H.min=x

12 H.n=H.n+1

## 堆合并

FIB-HEAP-UNION(H1,H2)

1 H=MAKE-FIB-HEAP

2 H.min=H1.min

3 ***concatenate the root list of H2 with the root list of H***

4 if(H1.min==NULL) or (H2.min!=NULL and H2.min.key<H1.min.key)

5 H.min=H2.min

6 H.n=H1.n+H2.n

7 return H

## 抽取最小节点

FIB-HEAP-EXTRACT-MIN(H)

1 z=H.min

2 if z!=NULL

3 for each child x of z

4 ***add x to the root list of H***

5 x.p=NULL

6 ***remove z from the root list of H***

7 if z==z.right

8 H.min=NULL

9 else

10 H.min=z.right

11 CONSOLIDATE(H)

12 H.n=H.n-1

13 return z

## 抽取最小节点时维护斐波那契堆的性质

CONSOLIDATE(H)

1 let A[0...D(H.n)] be a new array

2 for i=0 to D(H.n)

3 A[i]=NULL

4 for each node w in the root list of H

5 x=w

6 d=x.degree

7 while A[d]!=NULL

8 y=A[d]

9 if x.key>y.key

10 exchange(x,y)

11 FIB-HEAP-LINK(H,y,x)

12 A[d]=NULL

13 d=d+1

14 A[d]=x

15 H.min=NULL

16 for i=0 to D(H.n)

17 if A[i]!=NULL

18 if H.min==NULL

19 ***create a root list for H containing just A[i]***

20 H.min=A[i]

21 else

22 ***insert A[i] into H's root list***

23 if A[i].key<H.min.key

24 H.min=A[i]

FIB-HEAP-LINK(H,y,x)

1 ***remove y from the root list of H***

2 ***make y a child of x, incrementing x.degree***

3 y.mark=FLASE

## 关键字减值和删除节点

FIB-HEAP-DECREASE-KEY(H,x,k)

1 if k>x.key

2 error "new key is greater than current key"

3 x.key=k

4 y=x.p

5 if y!=NULL and x.key<y.key

6 CUT(H,x,y)

7 CASCADING-CUT(H,y)

8 if x.key<H.min.key

9 H.min=x

CUT(H,x,y)

1 remove x from the child list of y, decrementing y.degree

2 add x to the root list of H

3 x.p=NIL

4 x.mark=FALSE

CASCADING-CUT(H,y)

1 z=y.p

2 if z!=NULL

3 if y.mark==FALSE

4 y.mark=TRUE

5 else

6 CUT(H,y,z)

7 CASCADING-CUT(H,z)

# 基本图算法

## BFS

**BFS(G,s)**

1 **for** each vertex u∈G.V-{s}

2 u.color=WHITE

3 u.d=+∞

4 u. π=NIL

5 s.color=GRAY

6 s.d=0

7 s. π=NIL

8 let queue be a new Queue

9 queue.offer(s)

10 **while** **not** queue.isEmpty()

11 u=queue.poll()

12 **for** each v∈ G.Adj[u]

13 **if** v.color==WHITE

14 v.color=GRAY

15 v.d=u.d+1

16 v. π=u

17 queue.offer(v)

18 u.color=BLACK

## DFS

**DFS(G)**

1 **for** each vertex u∈G.V

2 u.color=WHITE

3 u. π=NIL

4 time=0

5 **for** each vertex u∈G.V

6 **if** u.color==WHITE

7 DFS-VISIT(G,u)

DFS-VISIT(G,u)

1 time=time+1

2 u.d=time

3 u.color=GRAY

4 **for** each v∈G:Adj[u]

5 **if** v.color==WHITE

6 v. π=u

7 DFS-VISIT(G,v)

8 u.color=BLACK

9 time=time+1

10 u.f=time

# 字符串匹配

## KMP算法

**KMP-MATCHER(T,P)**

1 n=T.length

2 m=P.length

3 π=COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P)

4 k=0

5 **for** q=1 **to** n

6 **while** k>0 **and** P[k+1]≠T[q]

7 k=π[k]

8 **if** P[k+1]==T[q]

9 k=k+1

10  **if** k==m

11 print “Pattern occurs with shift” q-m

12 k=π[k]

**COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P)**

1 m=P.length

2 let π[1...m] be a new array

3 π[1]=0

4 k=0

5 **for** q=2 **to** m

6 **while** k>0 **and** P[k+1]≠P[q]//若当前字符q与第k+1个不匹配，需要调整k

7 k=π[k]

8 **if** P[k+1]==P[q]//如果

9 k=k+1

10 π[q]=k

11 **return** π

line 6：while循环开始前，k代表的是前一个q所对应的模式子串P[1...q-1]的最大前后缀长度

即k=π[q-1]

①若k>0也就是红色部分不为空，且P[k+1]==P[q],那么π[q]就等于π[q-1]+1



②若k>0也就是红色部分不为空，且P[k+1]≠P[q],那么π[q]，那么需要在P[1...k]中寻找是否存在包含P[q]的最长前后缀，因此递归找出P[1...k]的最大前后缀长度π[k]，再看P[k+1]是否与P[q]相等