

超越标准量子极限的基于多体纠缠玻色-爱因斯坦凝聚体的精密磁场测量方案设计

杨舒云 22344020¹

¹ 中山大学物理与天文学院 2022 级强基班

2025 年 6 月 28 日

摘要: 我们设计了一套基于多体纠缠 ^{87}Rb 玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 的精密磁场测量方案, 旨在超越标准量子极限 (SQL)。方案的核心是利用原子间可控的 s 波散射相互作用, 通过单轴扭曲 (OAT) 动力学模型, 将初始的相干自旋态制备为具有计量学增益的自旋压缩态。随后, 将此纠缠态整合进一个经动力学解耦 (DD) 技术优化的 Ramsey 干涉序列中, 以高灵敏度地将待测磁场信息编码为量子相位。论文详细论述了从 BEC 制备、光学囚禁、纠缠态生成、传感协议到量子态读出与极大似然估计 (MLE) 的完整实验流程, 并建立了完备的误差预算模型。通过对量子 Fisher 信息 (QFI) 的分析以及对背景磁场噪声、控制场误差、探测噪声等多种退相干因素的量化评估, 预测本方案在典型实验参数下, 有望实现 $1.54 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的磁场测量灵敏度。该指标显著优于无纠缠方案, 并与当前前沿实验水平相当, 展示了利用多体纠缠 BEC 在实现高灵敏度和高空间分辨率磁场成像方面的潜力。

目 录

1	研究背景动机及国内外现状	3
1.1	量子计量学介绍、概述与其在精密测量物理中的应用	3
1.2	原子磁力计: 现状、挑战与机遇	3
1.3	基于玻色-爱因斯坦凝聚体的量子增强磁力测量研究进展	4
1.4	本文研究动机与主要目标	5
2	所选方法的基本原理	6
2.1	量子计量学原理	6
2.1.1	参数估计视角下的测量	6
2.1.2	克拉默-拉奥界与 Fisher 信息	7
2.1.3	量子 Fisher 信息和量子克拉默-拉奥下界	8
2.1.4	量子参数估计	9
2.1.5	量子相位估计	10
2.2	玻色-爱因斯坦凝聚体中的原子相互作用与调控	12
2.2.1	平均场理论与 Gross-Pitaevskii 方程	12
2.2.2	原子间的 s 波散射与散射长度	13
2.2.3	Feshbach 共振与相互作用调控	14

2.2.4	自旋动力学与单轴扭曲模型	15
2.2.5	基于相互作用的多体纠缠态产生	15
3	测量方案设计	17
3.1	总体方案概念与目标磁场	17
3.2	实验系统搭建	18
3.2.1	原子种类的选择与 BEC 的制备	18
3.2.2	陷阱设计与原子操控	19
3.3	多体纠缠态的制备方案	19
3.4	传感协议：磁场相互作用与相位累积	21
3.5	退相干抑制：动态解耦与滤波函数	22
3.6	读出方案：量子态投影与信息提取	23
3.7	参数估计方法	24
4	测量精度评估	28
4.1	磁场测量的噪声与灵敏度评定	28
4.2	不确定度计算和灵敏度曲线	29
5	总结与致谢	33
5.1	总结	33
5.2	致谢	33
	参考文献	34

1 研究背景动机及国内外现状

1.1 量子计量学介绍、概述与其在精密测量物理中的应用

精密测量物理的历史与现代科学技术的发展轨迹紧密相依：从检验麦克斯韦方程组到验证广义相对论，再到分辨单分子动力学，每一次灵敏度的跃升都伴随着对自然规律理解的深化与工程极限的推新。然而在经典探测范式下，测量信噪比的提升终将受制于散粒噪声、热噪声以及技术漂移等“经典”噪声；当探针数量 N 继续堆叠时，不确定度只能按 $N^{-1/2}$ 收敛，这一标度被称为标准量子极限（SQL）。量子计量学的核心目标，就是利用量子叠加、相干性和，尤其是，多体纠缠来突破这一成本高昂却收益递减的瓶颈。

量子态的相干性保证了干涉仪能够将被测物理量映射为相位差；但若仅依赖单粒子相干，灵敏度依旧局限于 SQL。当多个探针被制备为纠缠态时，它们在与外场相互作用时可集体积累信息，测量不确定度随 N^{-1} 缩放，达到量子力学允许的“海森堡极限”。这一从“单量子”到“多体关联”的范式转变奠定了量子计量学的理论基石，也决定了其在高端计量体系中的战略价值[1]。

过去十余年，该理论已在多种物理平台获得实验性验证和工程化落地。光学干涉重力波探测器 LIGO 通过持续注入 4–6 dB 压缩真空光场，将高频量子噪声功率抑制约 60%，从而提升了对双中子星并合后段辐射的探测范围；下一代“频率依赖压缩”技术有望在整个 audio 频段保持亚 SQL 表现[2]。在时间计量领域，JILA–NIST 的光学晶格钟以腔量子无损测量制备自旋压缩态，将单台钟的秒级稳定度推进至 10^{-18} 量级，为国际原子时和深空导航提供了前所未有的长期精度。基于玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）的磁力计则通过 15 dB 量级的自旋-张量压缩，实现了百飞阿特斯拉/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 的本底灵敏度，并展示了亚微米空间分辨的场成像潜力。量子压缩光场在弱光成像与激光雷达中的信号增强、固态 NV 色心的室温纠缠磁传感、以及多模态量子网络对分布式测量的不确定度缩放等新兴应用，进一步证明了量子资源可为多维物理量检测带来跨平台的通用增益[3]。

随着高保真纠缠制备、量子无损读出、数字重构与噪声锁定等关键技术的成熟，量子计量正从实验室走向可部署系统：面向第三代引力波探测、全球分布式光钟、行星重力测绘及脑神经功能成像的新型仪器正在设计或初步运行中。可以预见，未来十年量子计量学将在极端精度需求的基础科学装置与前沿工程领域中持续扮演“放大器”和“探照灯”的双重角色，为突破自然界已知的测量极限提供不可替代的工具箱。

1.2 原子磁力计：现状、挑战与机遇

原子磁力计通过测量原子自旋与外磁场耦合产生的拉莫尔进动来获得磁场强度，其灵敏度可与低温超导量子干涉仪（SQUID）相抗衡而又避免低温制冷需求。按照工作区域与原子动力学特征的不同，现有装置可分为自旋交换弛豫免疫（SERF）磁力计、光泵磁力计、共振光检测磁力计等若干类。其中，SERF 方案在数十毫高斯以下的极低场环境中抑制了自旋交换弛豫，早在 2010 年便实现 $0.16 \text{ fT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的记录灵敏度；最近的优化工作通过提高腔镜反射率与减振设计，将振动受限灵敏度进一步推进到 $0.1 \text{ fT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 水平，维持了室温磁传感器的标杆地位[4][5]。面向实地勘测与生物磁测，研究者又发展出单束三轴 SERF 结构与全光学双轴 SERF 结构，实现 $20\text{--}40 \text{ fT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 量级灵敏度同时保持数百赫兹带宽，为脑磁图（MEG）和胎心磁图（fMCG）提供了便携化替代方案[6][7]。

尽管这些成绩已使原子磁力计在体积、功耗与常温运行方面优于传统 SQUID，但当前主流装置大多仍停留在“经典或半经典”测量范式：探针原子处于近似独立的热原子系综，测量不确定度的下降仍服从 $N^{-1/2}$ 的标准量子极限（SQL）标度。进一步压缩灵敏度面临三方面瓶颈：其一，高原子密度所带来的自旋交换宽化与光功率噪声会抵消增益；其二，SERF 条件要求环境磁场被动屏蔽到 nT 级别，造成系统复杂

度和成本上升；其三，随应用场景向高带宽、矢量性与阵列集成拓展，激光频稳、温控漂移和电子学相位噪声开始主导误差预算，使实验灵敏度与理论 SQL 之间仍留有一个数量级以上差距[8]。

量子增强策略为突破上述限制带来了新机遇。首先，基于非线性原子相互作用或腔量子无损测量生成的自旋压缩态可将灵敏度提升到 N^{-1} 级别；理论与初步实验均表明，在热汽相体系中维持 3–6 dB 压缩即可使 fT/\sqrt{Hz} 级 SERF 磁力计获得约 40 % 的噪声压缩，无需牺牲带宽或动态范围。其次，超冷原子甚至玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 平台为量子纠缠的高保真制备提供了更洁净的环境：最近针对 $F = 2$ 自旋 BEC 的回声磁力计实验在亚毫米空间分辨下达到 $12 \text{ pT}/\sqrt{Hz}$ ，并通过反向位相场抑制工频噪声，展示了在微尺度生物样品成像中的应用潜力[18]。更为重要的是，BEC 体系具备将 10–15 dB 自旋-张量压缩与扫描探针技术结合的可行性，可在百飞阿特斯拉/ \sqrt{Hz} 灵敏度下实现亚微米磁畴图谱测量，预示着量子限制下“高灵敏—高分辨”统一的传感方案。

与此同时，芯片化微型碱金属气室与光纤耦合微光学元件的成熟，为原子磁力计的阵列化和现场部署提供了工程路径；多模态量子传感网络——如将 SERF 芯片阵列与 NV 钻石或 MEMS 加速度计耦合——已被提议用于行星磁场测绘、地下资源勘探和空间天气预警。在国家重大科技项目的牵引下，国内外研究正在从单点极限灵敏度向高维度测量、长时间稳定运行以及低成本部署过渡。

总而言之，原子磁力计已在灵敏度与实用化之间找到平衡，其下一跳性能提升有赖于量子纠缠态的引入与系统级噪声工程的协同优化。正是在这一背景下，本文将聚焦基于多体纠缠玻色-爱因斯坦凝聚体的量子增强磁力计方案，旨在探索如何在保持高空间分辨的同时进一步压低测量不确定度，为磁成像、基础物理前沿实验乃至空间磁环境监测提供新工具和新思路。

1.3 基于玻色-爱因斯坦凝聚体的量子增强磁力测量研究进展

将超冷原子凝聚成玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 之后，原子处于单一的宏观量子态，内禀热运动被压制到 nK 量级以下，且原子云可以被束缚在微米尺度的光偶极或原子芯片势阱中。这种“低噪声 + 高局域”特性使 BEC 同时具备高相干性灵敏度与亚微米空间分辨的潜力。早期工作已展示 BEC 作为扫描探针磁力计的可行性：通过操控磁陷阱将 ^{87}Rb 自旋-1 BEC 贴近样品表面，利用拉莫尔进动频率对局域磁场变化的线性响应，并以偏振相干成像读出自旋相位，获得 $8.3 \text{ pT}/\sqrt{Hz}$ 的本底灵敏度和 $O(1 \text{ } \mu\text{m})$ 的面内分辨率——该指标已与同尺寸 SQUID 探针相当，但无需低温环境支持[10]。

在提高灵敏度的同时，研究者开始引入多体量子纠缠以进一步压缩量子投影噪声。典型方案是激活自旋依赖相互作用或腔-量子无损测量 (QND) 过程，在 BEC 内部生成自旋压缩态或 GHZ-类态。2021 年基于单畴自旋 BEC 的实验已将测量能量分辨率压低至 $E_R < \hbar$ ，首次触及“准-海森堡”极限；随后的改进结合反馈-自旋回声与机器学习滤波，同时实现连续场跟踪与 10 dB 以上压缩增益，为 BEC 磁力计跨入飞阿特斯拉/ \sqrt{Hz} 区间奠定了技术路线[11][12]。

然而，要在真实应用场景中保持这种量子优势仍面临多重挑战。首先，高保真纠缠制备需要精确调控原子-原子相互作用与光学相移；近-表面操作时偶极噪声、Casimir-Polder 力和背景磁纹理都会降低压缩保真度。其次，长相干时间要求抑制激光频稳漂移、原子损失与背景场波动，因此必须与动力学解耦、主动反馈和噪声纹理建模协同设计。再次，随着探针-样品间距向百纳米-微米尺度逼近，BEC 内部的原子-光散射加热与非平衡密度涨落会重新引入噪声通道，这促使人们探索 Dicke-压缩态、时间-晶体态等对特定噪声具有固有鲁棒性的多体资源，以及将纠缠制备-测量-读出的全流程嵌入快速、闭环量子控制架构[13]。尽管如此，近两年涌现的片上集成光陷阱、三维光栅-BEC 载体和超稳腔-增强成像技术显示出清晰的发展路径：芯片化 BEC 磁力计已在实验室外部屏蔽不足的条件下实现 $<10 \text{ pT}/\sqrt{Hz}$ 灵敏度，并保持 1–10 kHz 带宽；多探针并行扫描-BEC 阵列正被用于快速绘制二维磁畴图，而远程纠缠分布则为基线可达厘米-米级的梯度测量提供方案。这些进展表明，量子纠缠与 BEC 平台的结合不只是概念验证，而是正在进入与 SQUID、NV

钻石等成熟技术正面竞争的阶段。未来若能进一步提升纠缠规模、完善噪声容错机制并降低系统复杂度，BEC 量子磁力计有望在高分辨磁成像、基础物理常数测定乃至空间-行星磁环境监测等领域占据独特且不可替代的技术高地。

1.4 本文研究动机与主要目标

在前述介绍中我们看到，量子计量学已成为精密测量物理不可或缺的分支，但本课程的既定教学内容尚未系统覆盖这一方向。为了弥补该缺口，我选择以“基于多体纠缠玻色-爱因斯坦凝聚体的精密磁场测量方案设计”为期末报告的主题：一方面，通过学习和梳理量子计量学的基本概念、理论工具与最新实验进展，加深对精密测量范式演进的理解；另一方面，这也是我希望自己主动去了解一些这方面的案例作为课程的补充。

虽然利用 BEC 进行磁场测量的实验已展示出 $pT-fT/\sqrt{Hz}$ 级灵敏度和微米量级分辨率，但现有工作通常仍处于“近 SQL”或“轻度压缩”水平。如何在可行的实验条件下制备高保真、大规模的多体纠缠态，并将其整合进鲁棒的磁传感协议，使测量精度切实超越 SQL、逼近甚至触碰海森堡极限，仍留有广阔的探索空间。基于这一判断，本文的核心目标是：设计并评估一套完整的 BEC 量子磁力计方案，使其在现实噪声背景下仍具备显著的纠缠增益。

为实现这一目标，本文首先将从实验角度出发，给出具体可行的系统设计：包括原子种类的遴选、BEC 制备与冷却序列、特定纠缠态（如自旋压缩态或 Dicke 态）的生成与验证流程，以及与之匹配的 Ramsey 干涉测量协议；随后，在理论层面运用量子费舍尔信息对理想极限和主要噪声通道下的灵敏度进行定量评估，并与 SQL 及 HL 做对比，解析纠缠资源带来的实际增益；最后，结合实验现实因素讨论关键参数的选取、退相干抑制（如动力学解耦与实时反馈）以及高效读出与参数估计算法的可实现路径。

全文结构安排如下：第二章首先系统整理量子计量学的基本原理及相关数学工具，这是我学习量子计量学整理的笔记；第三章提出并细化实验方案，包括多体纠缠态制备与磁感测过程的具体实现；第四章给出理论灵敏度评估与数值模拟结果，讨论噪声影响及优化策略；第五章总结方案特色与预期性能，展望其在基础物理与应用磁成像等领域的潜在贡献，并指出仍待突破的技术瓶颈。

2 所选方法的基本原理

本章旨在为后续精密磁场测量方案设计提供坚实的理论基础。为此，本章将从两个层面展开论述：首先，系统性地介绍量子计量学的普适性原理，然后深入阐述本方案所选物理平台——相互作用玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）——的关键物理机制。

第一部分（2.1 节）将聚焦于量子参数估计的数学框架。我们将从经典的 Fisher 信息与 Cramér-Rao 下界出发，将其推广至量子领域，确立量子 Fisher 信息（QFI）作为衡量测量精度极限的核心判据。在此基础上，我们将明确标准量子极限（SQL）的物理来源，并阐明利用量子纠缠等资源突破该极限、逼近终极海森堡极限（HL）的理论依据与核心要求。

第二部分（2.2 节）将理论框架与具体物理系统相结合。我们将从描述 BEC 宏观动力学的 Gross-Pitaevskii 方程入手，追溯其非线性行为的微观根源——原子间的 s 波散射。随后，将重点介绍实现相互作用强度与性质外部调控的关键实验技术——Feshbach 共振。最后，我们将展示如何基于受控的原子相互作用，在集体自旋的图像下建立单轴扭曲（OAT）模型，并概述如何利用此模型动力学地产生超越经典测量极限所必需的自旋压缩态及其他多体纠缠态。

通过将普适的量子计量学框架与具体的 BEC 物理实现相结合，本章将为第三章中完整测量方案的设计与构建奠定必要的理论基石。

本章的参考文献是[14]和[15]。

2.1 量子计量学原理

2.1.1 参数估计视角下的测量

在精密测量物理中，测量的本质可以被视为一个**参数估计**问题。任何物理量的测量过程，无论是经典还是量子领域，都不可避免地伴随着不确定性，导致一系列以概率形式给出的结果。我们通常将这些测量结果的平均值作为对被测物理量的最终估计。从统计学的角度来看，测量过程实际上输出了一系列随机变量。因此，我们需要构建一个统计量，即这些随机变量的函数，来对物理量本身进行估计。这个统计量被称为**估计量（estimator）**，其取值即为测量结果，而其方差则定义为测量误差。测量精度通常被定义为相对误差的倒数。

一个理想的估计量应具备以下优良特性：**无偏性、有效性和一致性**。无偏性要求估计量的均值等于被估计参数的真实值，即 $E(\hat{\theta}(X)) = \theta$ 。有效性则关注估计量的方差，要求其尽可能小。在后续的章节中将详细阐述，估计量的方差存在一个理论下限，即**克拉默-拉奥界（Cramér-Rao Bound, CRB）**，由 **Fisher 信息** 决定，即 $(\Delta\hat{\theta})^2 \geq \frac{1}{F(\theta)}$ 。当估计量的方差能够达到这个下限时，我们称该估计量是有效的。一致性则要求当样本数量 n 趋于无穷大时，估计量依概率收敛于参数的真实值，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$ 对于任意正数 ϵ 成立。

处理参数估计问题的统计学方法有多种，其中最常用且在量子测量中占据核心地位的是**极大似然估计（Maximum Likelihood Estimation, MLE）**。极大似然估计的核心思想是在众多可能的参数值中，寻找一个使得在给定该参数值的前提下，观测到当前测量结果的概率最大的参数。具体而言，如果将似然函数定义为 $f(\theta; \mathbf{x}) = p(\mathbf{x}; \theta)$ ，其中 \mathbf{x} 是测量结果， θ 是被估计的参数，那么极大似然估计量 $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ 就是使似然函数取到最大值的参数点，即 $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \arg \max_{\theta} f(\theta; \mathbf{x})$ 。在实际操作中，为了简化计算，人们通常对似然函数取对数，得到对数似然函数 $\log f(\theta; \mathbf{x})$ 。尽管极大似然估计在有限样本情况下通常不满足无偏性，但它具有渐近无偏性、渐近有效性和渐近一致性的优点——即当样本数量趋于无穷大时，其性能将达到理论最优，方差能够达到克拉默-拉奥界，且均值趋于参数真实值。在量子测量中，人们在绝大部分情况下也使用极大似

然估计。除了极大似然估计，贝叶斯估计和矩估计也是统计学中重要的参数估计方法，它们与极大似然估计共同构成了参数估计领域的三种主要方法。

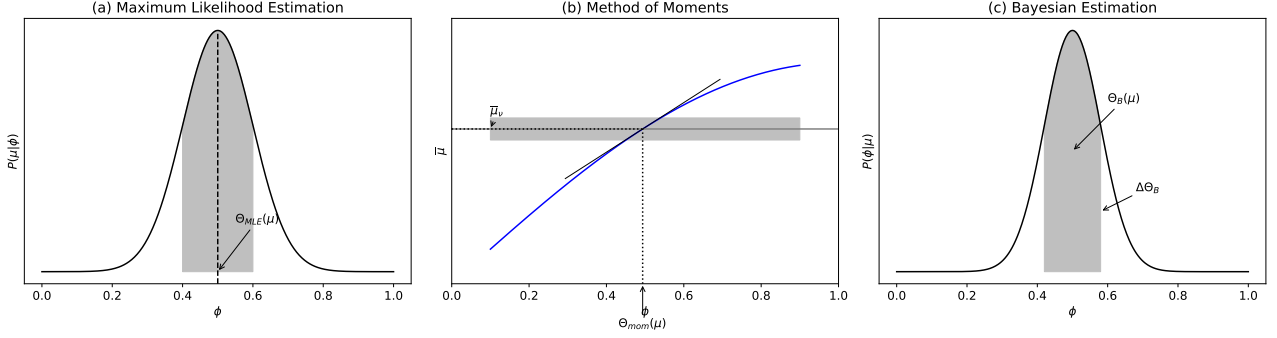


图 1: 比较三种估计方法: (a) 最大似然估计。 $\Theta_{\text{MLE}}(\mu)$ 是似然函数 $P(\mu|\varphi)$ (实线) 在观测结果序列 μ 上取得的绝对极大值 (虚线)。如插图所示, 相位灵敏度 $\Delta\theta_{\text{MLE}}$ 被定义为在固定相位 θ 条件下重复多次测量所获得的 Θ_{MLE} 的统计分布的均方根波动 (阴影区域)。(b) 矩估计法。蓝色曲线表示参数 φ 的函数 $\bar{\mu}$ 。借助该函数的单调性, 可将测得的均值 $\bar{\mu}_\nu$ 与相位估计 $\Theta_{\text{mom}}(\mu)$ 对应起来。相位不确定度 $\Delta\theta_{\text{mom}}$ 来自均值 $\bar{\mu}_\nu$ 的统计不确定性 $\Delta\mu/\sqrt{\nu}$ (灰色区域)。当 $\nu \gg 1$ 时, $\Delta\theta_{\text{mom}}$ 可通过误差传播公式简化获得 (见式 (23)), 该估计方法在局部近似中采用 $\bar{\mu}$ 曲线的切线表示 (细黑线)。(c) 贝叶斯估计。后验概率分布 $P(\varphi|\mu)$ (实线) 可用于计算加权平均相位, 从而得出相位估计 $\Theta_B(\mu)$ 。积分 $\int_{\Delta\theta_B} d\varphi P(\varphi|\mu)$ 表示真实相位值落在以 Θ_B 为中心的置信区间 $\Delta\theta_B$ (灰色区域) 内的概率。

2.1.2 克拉默-拉奥界与 Fisher 信息

在参数估计理论中, 一个核心问题是: 一个统计估计能够达到的精度极限是多少? 是否存在一个任何估计量方差都无法超越的根本下限? 针对这一问题, Fisher、Fréchet、Rao 和 Cramér 等人在 20 世纪 40 年代独立地建立了参数估计的理论下限, 这便是著名的克拉默-拉奥界 (Cramér-Rao Bound, CRB)。克拉默-拉奥界为任意无偏估计量的方差提供了一个普遍的下限, 成为参数估计理论中最重要的结果之一。

克拉默-拉奥界指出, 对于任何无偏估计量 $\hat{\theta}$, 其方差 $(\Delta\hat{\theta})^2$ 必然满足如下不等式:

$$(\Delta\hat{\theta})^2 \geq \frac{1}{F(\theta)}$$

其中, $F(\theta)$ 被称为 **Fisher 信息 (Fisher Information)**。这个不等式表明, 一个无偏估计量的精度, 即其方差的倒数, 受到 Fisher 信息的限制。当考虑 ν 次独立测量时, 克拉默-拉奥界进一步给出估计量的标准差下限为:

$$\Delta\theta \geq \Delta\theta_{\text{CR}} = \frac{1}{\sqrt{\nu F(\theta)}}$$

这里的 $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ 因子反映了在对相同探针态进行独立重复测量时, 统计不确定度随测量次数增加而改善的规律。

Fisher 信息 $F(\theta)$ 是对似然函数 $f(\theta; \mathbf{x})$ 对参数 θ 敏感程度的量化。从概念上讲, **Fisher 信息** 定义为对数似然函数关于参数 θ 的一阶导数的平方的期望, 即:

$$F(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\theta, X) \right)^2 \right]$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\theta, X)$ 被称为 **Score Function $s(\theta; \mathbf{x})$** , 它衡量了参数值变化对似然函数的影响。当似然函数在最大值附近对参数越敏感时, 即 Fisher 信息越大, 参数的少量变动就会导致似然函数急剧下降, 从而我们

能够以更高的置信度确定参数值,使得估计量的方差可以越小。反之,如果似然函数对参数不敏感, Fisher 信息越小,则参数在较大范围内变动不会导致似然函数的显著下降,使得估计量的方差越大。

Fisher 信息也可以等价地表示为对数似然函数关于参数 θ 的二阶导数的负期望:

$$F(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(\theta, X) \right]$$

可以证明, Fisher 信息总是非负的,这与似然函数在最大值处二阶导数为负的条件相符。

克拉默-拉奥界假设似然函数具有良好的可微性,并在非常普遍的条件下成立。对于小样本量的情况,通常不存在通用的无偏估计量能达到克拉默-拉奥下限。然而,在样本数量 $\nu \gg 1$ 的中心极限情况下,极大似然估计量通常能够达到这一有效无偏下限。需要强调的是,到目前为止所介绍的极大似然估计、Fisher 信息和克拉默-拉奥界,都是经典统计理论的范畴,尚未涉及量子力学的概念。在下一节中,我们将引入量子 Fisher 信息和量子克拉默-拉奥下界,进而将其应用于量子测量场景。

2.1.3 量子 Fisher 信息和量子克拉默-拉奥下界

在量子计量学中,测量过程通过量子态来编码待估计的物理参数。因此,有必要将经典统计学中的 Fisher 信息和克拉默-拉奥界推广到量子领域。在量子力学中,给定一个量子态 ρ 和一个正算子值测量 (Positive Operator-Valued Measure, POVM) $E(x)$, 其中 x 是测量结果,且满足 $\sum_x E(x) = \mathbb{I}$, 我们可以得到一个概率密度函数 $p_\rho^E(x) = \text{tr}[\rho E(x)]$ 。与经典情况类似,似然函数 $f^E(\theta; x) = p_{\rho(\theta)}^E(x)$, 其中待测量参数 θ 通常编码在量子态 $\rho(\theta)$ 中,例如通过么正演化 $U = e^{-iH\theta}$ 作用于初始探针态 ρ_0 得到 $\rho(\theta) = e^{-iH\theta} \rho_0 e^{iH\theta}$ 。注意到,对于每一个 POVM E , 都有一个对应的经典 Fisher 信息 $F^E(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f^E(\theta; X) \right)^2 \right]$, 这意味着经典 Fisher 信息不仅依赖于参数 θ , 还依赖于所选取的测量基,即 POVM。

量子 Fisher 信息 (Quantum Fisher Information, QFI), 记作 $F_Q(\theta)$, 被定义为在所有可能 POVM 中经典 Fisher 信息的最大值, 即:

$$F_Q(\theta) = \sup_{E \in \mathcal{E}} F^E(\theta)$$

换言之,量子 Fisher 信息是经典 Fisher 信息的上确界,它代表了在给定量子态下,无论采取何种测量策略所能获得的最佳信息量。这正是量子计量学中的核心概念之一,因为它为任何无偏估计量提供了一个更普适的量子下限。

为了推导量子 Fisher 信息和相应的量子克拉默-拉奥下界,我们引入对称对数导数 (Symmetric Logarithmic Derivative, SLD), 记作 $L_\rho(H)$ 。SLD 是一个厄米算符,其定义满足 $\frac{1}{2}\{\rho, L_\rho(H)\} = i[\rho, H]$, 或者更一般地,对于含参量子态 $\rho(\theta)$, 满足 $\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\{\rho(\theta), L(\theta)\}$ 。量子 Fisher 信息可以表示为:

$$F_Q(\theta) = \text{tr}[\rho L^2]$$

其中 L 是与参数 θ 相关的 SLD 算符。达到量子 Fisher 信息的充分条件是采用投影测量,并且投影基是 SLD 的特征向量。

有了量子 Fisher 信息,我们自然可以定义量子克拉默-拉奥界 (**Quantum Cramér-Rao Bound, QCRB**):

$$(\Delta\theta)^2 \geq \frac{1}{F_Q(\theta)} = \frac{1}{\text{tr}[\rho L^2]}$$

这个下界表示了量子测量中,对参数 θ 进行估计时所能达到的最小方差。与经典克拉默-拉奥界类似,对于 ν 次独立测量,量子克拉默-拉奥下界给出

$$\Delta\theta \geq \Delta\theta_{\text{QCR}} = \frac{1}{\sqrt{\nu F_Q(\theta)}}$$

上述推导通常针对一般的混合态 ρ 。然而，当我们考虑纯态 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 时，量子 Fisher 信息具有更为简洁的表达式：

$$F_Q(\theta) = 4(\Delta H)^2 = 4(\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2)$$

这里的 \hat{H} 是生成参数演化的厄米算符。纯态下的量子 Fisher 信息与海森堡不确定原理 $\Delta\theta\Delta H \geq \frac{1}{2}$ 之间存在紧密联系，但二者之间存在微妙的区别：海森堡不确定原理描述的是两个非对易算符的方差乘积的下限，而量子克拉默-拉奥下界则描述的是估计量方差的下限。对于混合态，量子 Fisher 信息则有上界 $F_Q(\theta) \leq 4\sum_k p_k(\Delta H)_k^2 \leq 4(\Delta H)^2$ ，这表明纯态通常能提供更多的信息。因此，在量子计量学中，我们通常优先考虑使用纯态作为探针态。

值得注意的是，量子 Fisher 信息与探针态的设计密切相关。一个自然的问题是，是否存在量子 Fisher 信息的上限？在无限限制的希尔伯特空间中，上限是无界的，这意味着可以实现任意高的量子 Fisher 信息。然而，对于粒子数 N 受限的情况，量子 Fisher 信息存在一个上界，即量子 Fisher 信息最高只能正比于粒子数的平方 N^2 ，这被称为海森堡极限（Heisenberg Limit, HL）。相比之下，经典测量下，Fisher 信息最高正比于粒子数 N ，即标准量子极限（Standard Quantum Limit, SQL）。因此，实现超越标准量子极限，达到海森堡极限，是量子计量学追求的目标。

2.1.4 量子参数估计

综合前述对经典参数估计、Fisher 信息与克拉默-拉奥界以及量子 Fisher 信息与量子克拉默-拉奥下界的讨论，我们可以勾勒出完整的量子参数估计过程。量子参数估计旨在通过精心设计的量子测量方案，从被探测的量子态中提取关于未知参数的最大信息量，以期达到超越经典极限的测量精度。

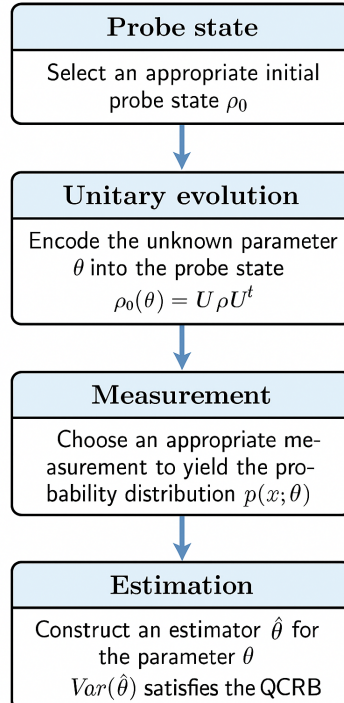


图 2: 量子参数估计流程示意图

如图 2 所示，量子参数估计的典型流程可以概括为以下几个关键步骤。首先，选择一个合适的探针态（probe state） ρ_0 。这个探针态承载着对未知参数的敏感性，其选择对于最终能够达到的测量精度至关重要。

例如，通过选择特定的多体纠缠态作为探针态，可以显著提高对参数的敏感度，从而有望达到海森堡极限 (Heisenberg Limit, HL)。

探针态随后经历一个依赖于待估计参数 θ 的幺正演化 (unitary evolution)，通常表示为 $U = e^{-iH\theta}$ 。这种演化将物理参数 θ 编码到探针态中，使其从初始态 ρ_0 转变为最终态 $\rho(\theta) = e^{-iH\theta}\rho_0 e^{iH\theta}$ 。例如，在磁场测量中，磁场作为参数 θ 会通过塞曼效应等机制与原子自旋发生相互作用，导致原子态的相位累积，从而将磁场信息编码到量子态中。

演化后的量子态 $\rho(\theta)$ 接着需要进行测量。这涉及到选择合适的测量装置和测量基，即 POVM E 。在量子力学中，不同的 POVM 会产生不同的测量结果概率分布。通过测量得到的概率分布 $p^E(x; \theta) = \text{tr}[\rho(\theta)E(x)]$ ，我们便可以构建似然函数，进而进行参数估计。通过适当选择测量方式，我们可以最大化从量子态中提取到的信息，从而使经典 Fisher 信息 $F^E(\theta)$ 达到其理论上限——量子 Fisher 信息 $F_Q(\theta)$ 。换言之，通过选择最优的测量，可以使得估计量的方差达到量子克拉默-拉奥下界 (QCRB)。

最后，基于测量得到的概率分布，我们利用统计学方法（如极大似然估计）构建一个无偏估计量 $\hat{\theta}$ ，从而得到对参数 θ 的最佳估计值。最终的测量精度，即估计量的方差 $\text{Var}(\hat{\theta})$ ，将受到量子克拉默-拉奥下界的限制： $\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{F_Q(\theta)}$ 。

因此，实现高精度的量子参数估计，核心在于两个方面：一是通过巧妙设计探针态来最大化量子 Fisher 信息，使量子态对参数的变化极端敏感，从而突破经典标准量子极限，向海森堡极限逼近；二是通过优化测量方案，确保在测量过程中能够尽可能多地提取量子态中编码的信息，从而使得实际测量精度能够饱和量子克拉默-拉奥界。这两者是量子增强计量学实现超高灵敏度测量的根本途径。

2.1.5 量子相位估计

前面我们涉及到了量子相位估计这一个量子计量学中的基本且重要的任务之一，它旨在高精度地确定编码在量子态相位中的未知物理参数。在许多物理测量中，待测参数通常表现为幺正演化 $U = e^{-iH\theta}$ 中的相位 θ ，例如在干涉仪中光场的相位偏移，或原子磁力计中原子自旋在磁场作用下产生的相移。

要精确估计这个相位，关键在于如何选择合适的探针态 (probe state) 以及如何进行最优测量。不同类型的探针态在相位估计中展现出截然不同的性能，尤其是在达到量子克拉默-拉奥下界所决定的精度极限方面。

接下来结合量子光学的基本知识做一些介绍。

首先考虑单粒子系统，特别是二能级系统，哈密顿量为 $\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$ 。此时量子 Fisher 信息为 $F(\theta) = 4(\Delta\hat{\sigma}_z/2)^2 = (\Delta\hat{\sigma}_z)^2 = 1 - |\langle\psi_0|\hat{\sigma}_z|\psi_0\rangle|^2$ 。为了最大化量子 Fisher 信息，我们需要使 $\langle\psi_0|\hat{\sigma}_z|\psi_0\rangle = 0$ ，这意味着初始态 ψ_0 应该位于布洛赫球的赤道上。此时 Fisher 信息达到最大值 $F(\theta) = 1$ ，测量误差的克拉默-拉奥下界为 $\Delta\theta \geq 1$ ，这与单次测量的经典极限一致。

当扩展到多粒子系统时，我们考虑一个包含 N 个粒子的二能级系统，其哈密顿量为 $\hat{H} = \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\sigma}_{z,k}}{2} = \frac{\hat{J}_z}{2}$ 。此时量子 Fisher 信息可以表示为 $F(\theta) = 4(\Delta\hat{J}_z)^2 = N + 2\langle\sum_{k<l}\hat{\sigma}_{z,k}\hat{\sigma}_{z,l}\rangle - (\langle\sum_k\hat{\sigma}_{z,k}\rangle)^2$ 。为了最大化量子 Fisher 信息，我们需要令 $\langle\sum_k\hat{\sigma}_{z,k}\rangle^2$ 为零，并使两体关联项 $\langle\sum_{k<l}\hat{\sigma}_{z,k}\hat{\sigma}_{z,l}\rangle$ 最大。最大值为 $\frac{N(N-1)}{2}$ ，此时 $F(\theta) = N + N(N-1) = N^2$ 。这意味着测量误差的克拉默-拉奥下界可达到 $\Delta\theta \geq \frac{1}{N}$ ，即海森堡极限 (Heisenberg Limit, HL)。

前面我们已经提到，为实现这一极限，探针态的选择至关重要。不同的量子态具有不同的相位灵敏度，以下介绍几种常见的：

- **粒子数态 (Number State)**: $\psi_0 = |N\rangle$ 。此时量子 Fisher 信息为 $F(\theta) = 0$ 。这是因为粒子数态的相位是完全随机的，根据粒子数-相位不确定性原理，粒子数确定意味着相位完全不确定。因此，粒子数态不适用于相位测量。

- **相干态 (Coherent State)**: $\psi_0 = |\alpha\rangle$ 。量子 Fisher 信息为 $F(\theta) = 4|\alpha|^2 = 4\bar{n}$ ，其中 \bar{n} 是平均粒子数。此时测量误差的克拉默-拉奥下界为 $\Delta\theta \geq \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}$ ，这被称为**散粒噪声极限 (Shot Noise Limit, SNL)** 或**标准量子极限 (SQL)**。它是由粒子数-相位不确定关系给出的。从几何角度看，相干态在相空间中是一个标准差为 1 的高斯圆，其粒子数-相位不确定性满足 $\Delta N \Delta\Phi \geq \frac{1}{2}$ 。
- **NOON 态 (NOON State)**: $\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + |0, N\rangle)$ ，其中 $|N, 0\rangle$ 表示所有 N 个粒子都在一个模式，而另一个模式没有粒子。NOON 态是一种多粒子纠缠态，它能够达到海森堡极限。此时的量子 Fisher 信息为 $F(\theta) = 4(\Delta\hat{N})^2 = N^2$ 。通过选择观测量如 $N_X = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$ 和 $N_Y = |+i\rangle\langle+i| - |-i\rangle\langle-i|$ ，其中 $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N\rangle|0\rangle \pm |0\rangle|N\rangle)$ ，可以实现最优测量，使得 $\Delta\theta = \frac{1}{N}$ ，达到海森堡极限。
- **压缩态 (Squeezed State)**: 压缩态通过改变相干态在高斯圆中的形状，将其在一个正交分量上的不确定性“压缩”到小于散粒噪声极限，同时在另一个正交分量上增大不确定性，但乘积仍保持海森堡不确定原理的最小值。相位压缩态 (phase squeezing) 可以减小相位不确定度 $\Delta\Phi$ ，从而提高相位估计精度，达到超越散粒噪声极限的性能。对于一个 N 粒子系统，压缩态的量子 Fisher 信息可以表示为 $F(\theta) = 4(\Delta\hat{J}_z)^2 = N^2 g^{(2)}(0) - N$ ，其中 $g^{(2)}(0)$ 是二阶关联函数，它反映了粒子的聚集特性。当 $g^{(2)}(0) > 1$ 时，即存在聚束 (bunched light) 时，压缩态的 Fisher 信息可以大于 N ，从而达到超越标准量子极限的精度。压缩态在探测引力波的 LIGO 等精密测量实验中得到了广泛应用。尽管单模压缩态无法达到海森堡极限 (因为其 Fisher 信息最高正比于 N)，但多模压缩态可以利用粒子之间的关联来实现更高的精度。

在实际的量子参数估计过程中，通过选择具有高量子 Fisher 信息的探针态 (如 NOON 态或自旋压缩态)，并配合饱和量子克拉默-拉奥下限的最优测量，有望实现超越经典极限的超高灵敏度测量。这将是本报告后续探讨基于玻色-爱因斯坦凝聚体的精密磁场测量方案设计的核心思想。

在前文我们讨论了不同量子态在相位估计中的表现，并初步引入了标准量子极限 (SQL) 和海森堡极限 (HL) 的概念。现在，我们将更深入地考察这两种极限的物理内涵及其与粒子间关联的本质联系。

标准量子极限 (SQL) 通常可以通过简单的独立重复实验来推导。假设对一个物理量进行 N 次独立的重复测量，每次测量结果为 x_i ，其标准差为 Δx_i 。则平均值 $\bar{x} = \sum_i x_i / N$ 的方差为 $(\Delta\bar{x})^2 = (\Delta \sum_i x_i / N)^2 = (\sum_i (\Delta x_i)^2) / N^2 = (\Delta x_i)^2 / N$ ，因此 $\Delta\bar{x} = \Delta x_i / \sqrt{N}$ 。这个推导成立的原因在于每次实验之间是相互独立的，即 $\Delta(x_i x_j) = 0$ 对于 $i \neq j$ 成立。这实质上对应于 N 个粒子的可分态 (separable state)，相当于 N 次独立重复测量。对于这种可分态，测量误差正比于 $1/\sqrt{N}$ ，故 Fisher 信息 $F(\theta) \propto N$ ，这被称为标准量子极限。从这个角度来看，标准量子极限实际上是一个“误称” (misnomer)，因为它并非量子效应，而是经典统计学的自然结果。

与此形成鲜明对比的是，海森堡极限 (HL) 所揭示的 $1/N$ 缩放关系，其量子 Fisher 信息正比于 N^2 。为何海森堡极限会正比于粒子数的平方，而不是更高次方？这根源于能量守恒定律。对于纯态的量子 Fisher 信息 $F_Q(\theta) = 4(\Delta\hat{H})^2 = 4(\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2)$ 。由于能量正比于粒子数，所以 \hat{H}^2 项最高正比于粒子数的平方 N^2 (例如，对于 N 个二能级系统， $\hat{H} = \sum_k \frac{\hat{\sigma}_{z,k}}{2} = \frac{\hat{J}_z}{2}$ ，则 $\hat{H}^2 = \frac{1}{4}(\sum_k \hat{\sigma}_{z,k})^2 = \frac{1}{4}(\sum_k \hat{\sigma}_{z,k}^2 + \sum_{k \neq l} \hat{\sigma}_{z,k} \hat{\sigma}_{z,l})$ ，其期望值中的 $\hat{\sigma}_{z,k} \hat{\sigma}_{z,l}$ 项贡献正比于 $N(N-1) \approx N^2$)，而第二项是非正的，因此量子 Fisher 信息最多只能正比于 N^2 。

实现超越标准量子极限，达到海森堡极限的关键在于利用**纠缠 (entanglement)**。纠缠不仅仅是粒子间的一种关联，更是增强相位灵敏度的核心。从多粒子二能级系统或谐振子系统的分析可以看出，降低相位方差的方法本质上是提高生成元 (generator) 的方差。在二能级系统中，生成元是角动量算符 \hat{J}_z ；在谐振子系统中，生成元是粒子数算符 \hat{N} 。提高生成元方差的方法即是提高粒子间的二体/多体关联程度。NOON 态和宏观纠缠态 (如 GHZ 态) 正是通过其强烈的多体纠缠特性，使得量子 Fisher 信息达到 N^2 的量级，从而使测量误差达到海森堡极限 $\Delta\theta = 1/N$ 。

值得注意的是，即使是单模压缩态（Squeezed State），虽然本身不是典型的纠缠态（因为纠缠通常发生在多个模式之间），但其在相空间中的“挤压”效应体现了显著的粒子数关联，例如具有较大的二阶关联函数 $g^{(2)}(0) > 1$ 。这种粒子数关联使得压缩态的 Fisher 信息可以超越经典极限，达到 $F(\theta) \propto N \cdot g^{(2)}(0) N \propto N^2$ ，从而实现超越标准量子极限的测量精度。这某种程度上可以看作是该模式与自身的纠缠。相较于脆弱的 NOON 态，压缩态在实验中更具实用性。例如，引力波探测器 LIGO 就成功应用了光场压缩态来降低散粒噪声，从而提高探测灵敏度。在处理生物样品等损伤阈值较低的场景时，压缩态也能在不提升光功率的前提下进一步提高成像精度。

因此，纠缠和关联是量子计量学的核心，它们是实现超越标准量子极限，达到海森堡极限的关键要素。

2.2 玻色-爱因斯坦凝聚体中的原子相互作用与调控

为了给第三章的“测量方案设计”提供坚实的理论基础，本节需要清晰地阐述如何理解、描述和操控玻色-爱因斯坦凝聚（Bose-Einstein Condensation, BEC）中的原子相互作用，并最终引出如何利用这些相互作用来产生用于精密测量的多体纠缠态。

2.2.1 平均场理论与 Gross-Pitaevskii 方程

在零温极限下，一个由 N 个相互作用的玻色子构成的系统，其完整的量子态由一个复杂的多体波函数 $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ 描述，并遵循多体薛定谔方程。然而，当系统发生 BEC 时，绝大多数原子布居于同一个单粒子量子态，这使得采用一种更简洁的理论描述成为可能。平均场理论（Mean-Field Theory）正是这样一种强大且应用广泛的近似方法。在该理论框架下，每个原子感受到的相互作用势，被处理为一个由所有其他原子共同产生的平均势场，从而将难以求解的多体问题简化为易于处理的单体问题。

这种近似的核心思想是，在 $N \rightarrow \infty$ 的极限下，可以将多体系统的总波函数写成 N 个相同单粒子波函数乘积的形式，即 $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \psi(\vec{r}_i, t)$ 。在这种描述下，整个凝聚体可以用一个宏观波函数 $\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{N} \psi(\vec{r}, t)$ 来表征，其动力学行为遵循一个非线性的单粒子薛定谔方程，即著名的 Gross-Pitaevskii 方程（GPE）：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

其中， M 是单个原子的质量， $V_{ext}(\vec{r})$ 是外部陷阱势。此方程在形式上与标准薛定谔方程相似，但增加了一个关键的非线性项 $g |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ 。

该非线性项描述了原子间的平均场相互作用。其中 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = n(\vec{r}, t)$ 代表了凝聚体的原子数密度，因此该项的物理意义是，凝聚体中的每个原子都感受到一个正比于局域原子密度的有效势。相互作用强度由耦合常数 g 决定，其具体形式为 $g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M}$ 。这里的 a_s 是 s 波散射长度，是描述低温下原子间短程、弹性碰撞性质的关键参数，将在下一节详细讨论。 a_s 的正负号决定了原子间相互作用的性质： $a_s > 0$ 对应排斥相互作用，而 $a_s < 0$ 对应吸引相互作用。GPE 成功地预测了 BEC 的基态性质、集体激发以及宏观动力学行为，例如巨型涡旋和孤子等。

在量子计量的背景下，我们通常更关心占据两个特定量子模式的 BEC 系统，例如囚禁在双阱势中的两个空间模式，或是处于两个不同超精细内态的原子。对于此类二模式系统，宏观波函数可以近似展开为两个正交模式波函数 $\psi_a(\vec{r})$ 和 $\psi_b(\vec{r})$ 的线性叠加： $\Psi(\vec{r}, t) = \phi_a(\vec{r})\phi_a(t) + \phi_b(\vec{r})\phi_b(t)$ ，其中 $\phi_{a,b}(t)$ 是随时间演化的复振幅，其模方代表了布居在各模式上的原子数。将此形式代入 GPE，可以得到一组关于模式振幅 $\phi_a(t)$ 和 $\phi_b(t)$ 的耦合非线性常微分方程。这种二模式近似下的 GPE 动力学，可以被类比为经典非刚性摆的运动，或者更普遍地，一个玻色子约瑟夫森结（Bosonic Josephson Junction, BJJ）的半经典动力学。

尽管平均场理论和 GPE 为理解 BEC 的宏观相干性和动力学提供了坚实的基础，但它本质上是一种半经典理论。它将量子场算符替换为了经典的复数场（例如，将湮灭算符 \hat{a} 替换为复数 $\sqrt{N_a}e^{-i\varphi_a}$ ），因此忽略了量子涨落和粒子间的量子关联。然而，正是这些量子效应——例如数压缩、自旋压缩以及多体纠缠——构成了精密测量超越标准量子极限的根基。因此，为了设计并分析本文提出的量子增强测量方案，我们必须超越平均场描述，回归到完整的量子多体哈密顿量，并研究如何通过调控原子间的相互作用来主动地产生和利用这些非经典关联。

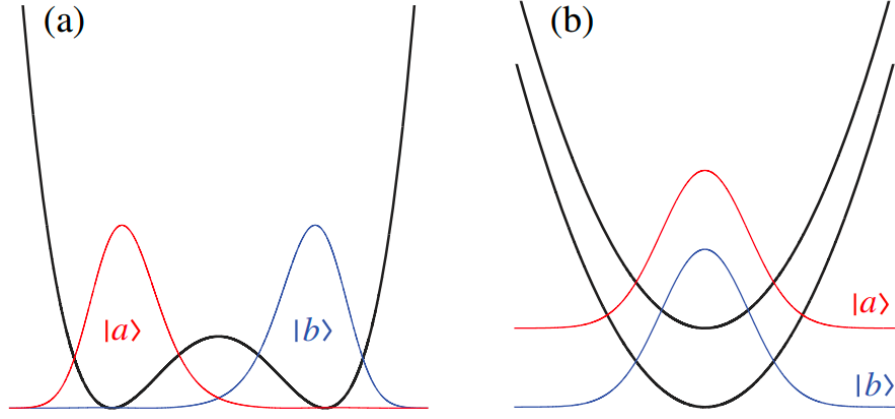


图 3: 来自文献[15]的二模式玻色-爱因斯坦凝聚体系统示意图：(a) 外部玻色约瑟夫森结由被困于双阱势（粗黑线）中的玻色-爱因斯坦凝聚体实现。细彩色曲线表示平均场波函数的振幅（详见正文），分别局域于左侧与右侧势阱中。(b) 内部玻色约瑟夫森结由处于两种不同超精细态的被困玻色-爱因斯坦凝聚体构成。对于每一种态，粗黑线表示谐振势阱，细彩色曲线表示对应的凝聚体波函数。

2.2.2 原子间的 s 波散射与散射长度

上一节引入的 Gross-Pitaevskii 方程 (GPE) 中的非线性相互作用项，其微观起源在于玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的碰撞。在 BEC 所处的超低温（通常在 nK 至 μ K 量级）环境下，原子的热德布罗意波长远大于原子间范德华相互作用的特征尺度。在如此低的碰撞能量下，量子散射理论给出了一个极大的简化：原子间的弹性碰撞过程完全由最低的角动量分波，即 s 波 ($l=0$) 所主导，而诸如 p 波 ($l=1$)、d 波 ($l=2$) 等高阶分波由于离心势垒的存在而被有效抑制。因此，复杂的真实原子间相互作用势可以被一个单一的物理量——s 波散射长度 (s-wave scattering length)，记作 a_s ——来精确地描述。

s 波散射长度 a_s 是低能原子物理中的一个核心参数，它有效地刻画了双原子碰撞的有效作用“半径”与性质。尽管其严格定义源于散射波函数的低能渐进行为，但其物理内涵十分直观：当 $a_s > 0$ 时，原子间表现为有效的排斥相互作用，如同两个硬球发生碰撞；当 $a_s < 0$ 时，则表现为有效的吸引相互作用，这可能支持束缚分子态的存在；而当 $a_s = 0$ 时，系统则退化为理想的无相互作用玻色气体。这一特性直接决定了 GPE 中相互作用耦合常数 $g = 4\pi\hbar^2 a_s / M$ 的符号与大小，从而决定了凝聚体的宏观基态性质是倾向于空间延展还是塌缩。

为了在哈密顿量中体现这种相互作用，通常采用费米-黄赓势 (Fermi-Huang pseudopotential) 进行建模。该方法将原子间短程的真实相互作用替换为一个等效的零程接触势 (contact interaction)，其在多体哈密顿量中的形式为 $\hat{V}_{int} = \frac{g}{2} \int d^3\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r})$ ，其中 $\hat{\Psi}(\vec{r})$ 是玻色子场算符。对于任意两个原子，其相互作用势可被看作 $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = g\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ 。这种处理方式极大地简化了理论分析，并成功地将微观的散射物理与凝聚体的宏观非线性动力学联系起来。

对于本文所关注的用于磁力测量的双组分（或多自旋组分）BEC 系统，情况则更为丰富。此时，我们需要考虑三种不同的 s 波散射过程：分别处于内态 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 的原子，它们各自内部的碰撞由同种粒子

(intraspecies) 散射长度 $a_s^{(aa)}$ 和 $a_s^{(bb)}$ 描述，而两个不同内态原子间的碰撞则由异种粒子 (interspecies) 散射长度 $a_s^{(ab)}$ 描述。正是这三种散射长度的差异 ($U_{aa} + U_{bb} \neq 2U_{ab}$, 其中 $U_{ij} \propto a_s^{(ij)}$) 导致了依赖于自旋组态的相互作用能，这是驱动体系发生自旋混合动力学 (spin-mixing dynamics) 并产生量子纠缠的根本机制。因此，散射长度不仅是描述相互作用的基本参数，更是连接宏观物态与微观量子关联的桥梁，而对它的精确调控，则是实现量子增强测量方案的核心所在。

2.2.3 Feshbach 共振与相互作用调控

前文已经阐明，原子间的 s 波散射是产生多体纠缠所需非线性动力学的物理基础。然而，一个固有的、不可更改的相互作用强度对于精密测量方案的设计是远远不够的。为了主动地制备和操控量子态，例如通过精确控制演化时间来产生目标自旋压缩态，必须能够对原子间的相互作用强度进行精确、动态的调控。在超冷原子物理中，实现这种调控的最核心、最强大的技术是 **Feshbach 共振** (Feshbach Resonance)。它为实验物理学家提供了一个关键的“旋钮”，能够随心所欲地调节散射长度 a_s 的大小乃至符号。

Feshbach 共振的物理原理可以从双通道散射模型来理解。两原子碰撞系统存在不同的散射通道：一个是入射原子对所处的“开放通道” (open channel)，其能量在零温极限下接近于零；另一个或多个是“闭合通道” (closed channel)，其中存在着能量不为零的束缚分子态。通常情况下，这两个通道的能量不发生简并，散射过程主要由开放通道的背景散射长度 a_{bg} 决定。然而，开放通道中的原子对与闭合通道中的分子态通常具有不同的总磁矩。

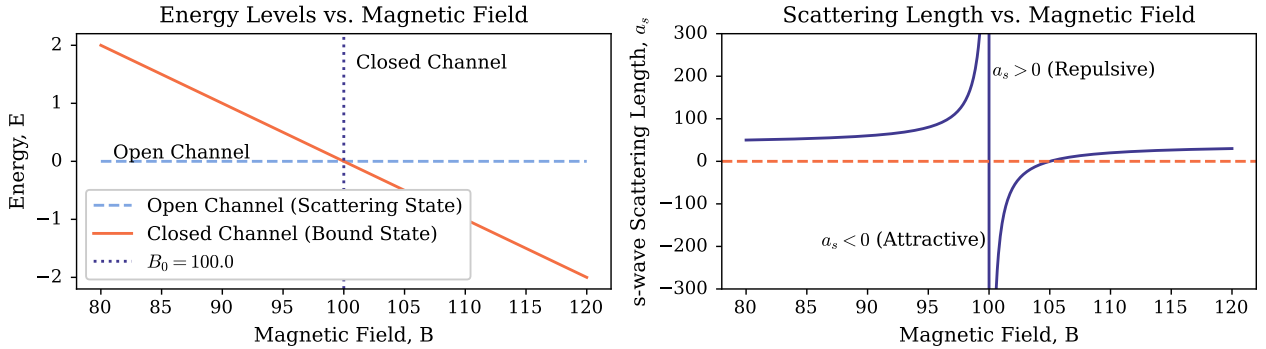


图 4: Feshbach 共振调控 s 波散射长度原理示意图：左图为外加磁场调控下开、闭通道的能级，右图为对应的 s 波散射长度 a_s 的变化，展示了如何通过磁场精确控制原子间相互作用的强度与性质。

这一磁矩差异是实现调控的关键。通过施加一个外部磁场 B ，可以利用塞曼效应 (Zeeman effect) 来改变两个通道间的相对能量。当调节磁场强度，使得闭合通道中某个束缚态的能量被移动到与开放通道的入射能量（即阈值）发生简并时，两个通道便会发生强烈耦合，即形成 Feshbach 共振。在共振点 B_0 附近，s 波散射长度 a_s 会呈现出一种色散行为，其依赖于磁场的典型形式为 $a_s(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0}\right)$ ，其中 ΔB 是共振的宽度。

从该关系式可以看出，通过在共振点附近微调磁场，实验上可以将散射长度 a_s 在一个极大的范围内进行精确调控。 a_s 可以被调至很大的正值（强排斥）、很大的负值（强吸引），甚至可以被调节为零，从而在需要时“关闭”相互作用，实现一个近乎理想的无相互作用气体。这种前所未有的控制能力，使得研究者可以动态地、按需地“设计”系统的多体哈密顿量。例如，在基于玻色子约瑟夫森结的模型中，相互作用项 $\hbar\chi\hat{J}_z^2$ 的强度 χ 直接依赖于各类散射长度的组合，通过 Feshbach 共振调节相应的散射长度，便可直接控制这一关键的非线性项。众多开创性的实验，包括通过自旋混合动力学制备自旋压缩态，正是利用 Feshbach 共振技术来增强系统原有的非线性效应，从而在实验可控的时间尺度内驱动系统演化到期望的纠缠态。因

此, Feshbach 共振不仅是一种物理现象, 更是将原子相互作用从一个固有属性转变为一种强大量子工程工具的核心技术, 为后续章节中多体纠缠态的制备方案奠定了至关重要的实验基础。

2.2.4 自旋动力学与单轴扭曲模型

前述章节所建立的物理图像——一个被限制在两个量子模式 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 中的玻色-爱因斯坦凝聚体, 其内部存在可通过 Feshbach 共振调控的 s 波相互作用——在数学上可以与一个总自旋为 $J = N/2$ 的大角动量系统进行精确映射。这种映射通过 Schwinger 玻色子表示法建立, 其中集体自旋算符由二模式的产生 ($\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$) 和湮灭 (\hat{a}, \hat{b}) 算符来构造:

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}}{2}, \quad \hat{J}_y = \frac{\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}}{2i}, \quad \hat{J}_z = \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}}{2}$$

在此表述下, 自旋 z 分量的算符 \hat{J}_z 正比于两模式间的原子数之差, \hat{J}_x 和 \hat{J}_y 则描述了模式间的相干耦合。这一形式化的转换, 使我们能够运用角动量理论的成熟框架来分析 BEC 中的量子动力学, 尤其是原子相互作用如何演化为非线性的自旋动力学。

系统的多体哈密顿量中的相互作用部分 \hat{H}_{int} , 源于同种和异种粒子间的 s 波碰撞。在二模式近似下, 该哈密顿量包含 \hat{n}_a^2, \hat{n}_b^2 和 $\hat{n}_a \hat{n}_b$ 等项, 其中 $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 和 $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ 是粒子数算符。利用关系式 $\hat{n}_a = N/2 + \hat{J}_z$ 和 $\hat{n}_b = N/2 - \hat{J}_z$ 进行代数替换, 可以发现相互作用哈密顿量能被展开为集体自旋算符的多项式。在许多相关的物理场景中, 尤其是在一个外部场将两模式间的线性耦合 (例如拉比振荡或遂穿) 抑制到可以忽略不计的情况下, 系统的动力学由一个有效哈密顿量主导, 该哈密顿量中最重要的非线性项正比于 \hat{J}_z^2 。

由此, 我们得到了描述该系统非线性动力学的基石模型——单轴扭曲 (One-Axis Twisting, OAT) 模型。其哈密顿量具有极其简洁而强大的形式:

$$\hat{H}_{OAT} = \hbar \chi \hat{J}_z^2$$

此处的 $\hbar \chi$ 是一个有效的非线性相互作用参数, 其大小正比于不同散射长度的特定组合, 即 $\chi \propto (U_{aa} + U_{bb} - 2U_{ab})$, 其中 U_{ij} 是与散射长度 $a_s^{(ij)}$ 相关的相互作用能。该 OAT 哈密顿量可以被视为更普适的玻色子约瑟夫森结 (BJJ) 哈密顿量 $\hat{H}_{BJJ} = -\hbar \Omega \hat{J}_x + \hbar \chi \hat{J}_z^2$ 在线性耦合项 Ω 为零时的极限情况。OAT 模型完美地捕捉了由原子间碰撞导致的非线性效应, 并已成为理论和实验上研究和制备自旋压缩态的范式模型。

\hat{H}_{OAT} 的动力学效应正如其名, 可以在广义布洛赫球 (Bloch Sphere) 上被直观地理解。由于该哈密顿量仅与 \hat{J}_z 有关, 它与 \hat{J}_z 对易, 这意味着在 OAT 动力学演化过程中, 体系的粒子数差是守恒的。其演化算符 $e^{-i\chi t \hat{J}_z^2}$ 的作用, 可以看作是集体自旋矢量围绕 z 轴的一次旋转。然而, 与普通线性旋转不同, 这次旋转的角速度 $\omega_z = \chi \hat{J}_z$ 本身依赖于 \hat{J}_z 的本征值。如图 5 所示, 对于一个初始处于布洛赫球赤道上的相干自旋态 (其在 \hat{J}_z 方向上具有一定的量子不确定性), 不同 \hat{J}_z 组分会以不同的速度进行旋转, 从而导致整个量子态的概率分布在球面上被“扭曲”和“剪切” (shearing)。这种非刚性转动, 会压缩自旋在某个方向的量子涨落, 同时以另一个与之正交方向上增大的涨落为代价, 这正是产生自旋压缩的物理图像。

单轴扭曲模型为我们提供了一个清晰的理论框架, 阐明了如何利用原子间可控的碰撞相互作用, 将一个初始的、无量子关联的相干自旋态, 演化为一个具有亚泊松统计特性和多体纠缠的自旋压缩态。这种通过内禀非线性动力学产生的量子态, 是实现超越标准量子极限精密测量的核心资源。在第三章设计具体的测量方案时, OAT 动力学将作为制备纠缠探针态的主要理论依据。

2.2.5 基于相互作用的多体纠缠态产生

至此, 我们已经阐明了玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 中的原子相互作用源于 s 波散射, 并可通过 Feshbach 共振进行精确调控, 其动力学可由单轴扭曲 (OAT) 等有效哈密顿量描述。这些物理要素共同构成了一个

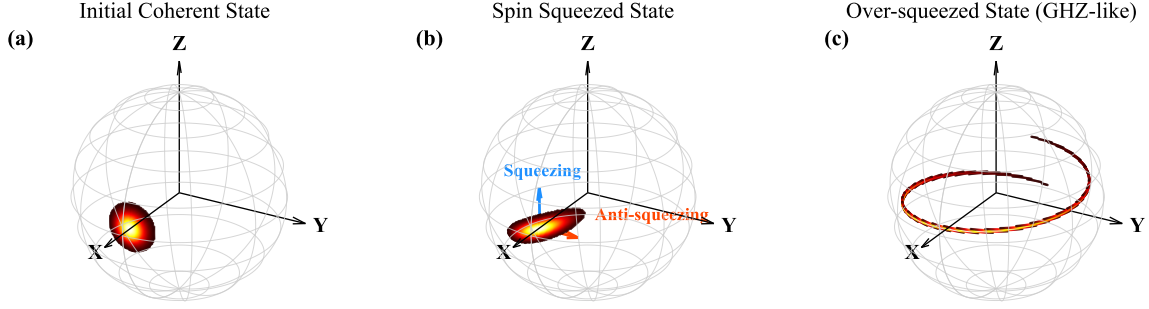


图 5: 单轴扭曲 (OAT) 动力学在布洛赫球上的演化示意图: 在单轴扭曲哈密顿量 $\hat{H}_{OAT} = \hbar\chi\hat{J}_z^2$ 作用下, 初始相干自旋态的从相干态到自旋压缩态, 再到宏观叠加态的“扭曲”过程的动力学演化。

强大的工具箱, 使得按需产生用于精密测量的多体纠缠态成为可能。通常而言, 基于相互作用产生纠缠态主要有两种策略: 一是通过动力学演化, 让系统从一个简单的初态在相互作用下自然地产生纠缠; 二是通过绝热制备, 将系统缓慢地引导至一个其基态本身就是高度纠缠态的哈密顿量参数区域。

动力学演化是最直接和常用的方法。该方案通常从一个易于实验制备的、无量子关联的相干自旋态 (Coherent Spin State, CSS) 开始。例如, 通过一个 $\pi/2$ 脉冲, 可以将所有原子初始制备于布洛赫球 x 轴方向, 这是一个经典指针态, 其相位不确定度满足标准量子极限。随后, 通过 Feshbach 共振等技术“淬火” (quench) 系统, 即快速开启原子间的相互作用, 使系统在 OAT 哈密顿量 $\hat{H}_{OAT} = \hbar\chi\hat{J}_z^2$ 的主导下进行么正演化。在短时间内 (通常 $\chi t \sim N^{-2/3}$), OAT 的扭曲效应会压缩集体自旋的量子涨落, 从而生成自旋压缩态 (Spin-Squeezed State, SSS)。这类态的标志是其自旋压缩参数 $\xi_R^2 < 1$, 其量子 Fisher 信息满足 $F_Q > N$, 因此能够实现超越标准量子极限的测量精度。若继续演化, OAT 动力学能够创造出更加奇异的量子态。例如, 在特定的演化时间 $t = \pi/(2\chi)$, 系统可以演化为一个 GHZ 态 (Greenberger-Horne-Zeilinger state) 或 NOON 态, 这类态原则上能够使测量精度达到海森堡极限 $F_Q = N^2$ 。

除了纯粹的 OAT 动力学, 其他相互作用模型也提供了产生纠缠的途径。例如, 包含线性耦合项的“扭曲-翻转” (Twist-and-turn) 动力学, 在特定参数下能以更快的速度生成宏观叠加态。而在自旋-1 的旋量凝聚体中, 自旋混合碰撞 (spin-changing collisions) 可以产生双 Fock 态 (twin-Fock state) 或两模式压缩真空态, 它们同样是具有高度量子关联的非经典态, 在量子计量学中具有重要应用。

另一种重要的策略是绝热制备。该方法不依赖于对动力学演化时间的精确控制, 而是通过缓慢地改变系统哈密顿量的参数 (例如, 缓调磁场扫过 Feshbach 共振点), 引导系统始终保持在瞬时哈密顿量的基态上。如果目标哈密顿量的基态本身就是纠缠态, 那么通过此过程便可确定性地制备该量子态。一个典型的例子是, 在具有吸引相互作用 ($\chi < 0$) 的 BJJ 模型中, 当参数 $\Lambda = N|\chi|/\Omega > 1$ 时, 系统的基态是一个类似于“薛定谔猫”的宏观量子叠加态。通过绝热地跨越量子相变点, 就可以将系统从一个简单的分离态转变为这种高度纠缠的基态。

无论是通过非线性的动力学演化还是精巧的绝热路径规划, 由原子间 s 波碰撞主导的相互作用为生成各种满足精密测量需求的纠缠态提供了丰富的可能性。从能适度超越标准量子极限的自旋压缩态, 到有望触及海森堡极限的 GHZ 态和双 Fock 态, 这些都源于对多体哈密顿量的深刻理解和精准操控。本章构建的理论基础, 将直接指导第三章中具体测量方案的设计, 尤其是其中多体纠缠探针态的制备环节。

3 测量方案设计

在第二章中，我们系统地阐述了量子计量学的基本原理以及在 BEC 中调控原子相互作用以产生多体纠缠的理论基础。本章将在此理论基石之上，从实验的可行性与操作性出发，具体展开一套完整的、旨在超越标准量子极限的精密磁场测量方案的设计。这构成了本报告的核心部分。

本章的论述将遵循一个完整的精密测量实验流程。我们将首先在 3.1 节中勾勒总体方案概念与核心科学目标。随后，在 3.2 节详细论述实验系统的物理搭建，包括原子种类的选择、BEC 的制备流程、以及用于精确囚禁与操控的光学陷阱与电磁场设计。在此基础上，我们将聚焦于方案的核心量子协议：3.3 节将详述如何利用单轴扭曲 (OAT) 模型制备自旋压缩纠缠态；3.4 节阐述如何将此纠缠态整合进 Ramsey 干涉序列以实现磁场相位的灵敏编码；3.5 节则探讨如何通过动力学解耦等技术抑制环境退相干，以保护来之不易的量子增益。最后，为了构成一个完整的测量闭环，我们将在 3.6 节和 3.7 节中分别探讨高效的量子态读出方案与用于参数提取的极大似然估计算法，并对该算法的内在误差传递进行分析。本章最终将以一张关键实验参数汇总表作结，为第四章的灵敏度评估提供具体的物理模型和参数依据。

本章的参考文献是[15]。

3.1 总体方案概念与目标磁场

我们设计了一套超越标准量子极限 (Standard Quantum Limit, SQL) 的精密磁场测量方案，其物理系统基于被囚禁的 ^{87}Rb 原子玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein Condensate, BEC)。方案的核心思想在于，利用多体量子纠缠来增强原子干涉仪的相位估计灵敏度。在一个由 N 个无关联粒子组成的系统中，由于散粒噪声的存在，其测量精度受到 SQL 的限制，即测量不确定度 $\Delta\theta_{\text{SQL}} \propto 1/\sqrt{N}$ 。然而，通过引入粒子间的量子纠缠，理论上可以将测量精度提升至海森堡极限 (Heisenberg Limit, HL)，实现 $\Delta\theta_{\text{HL}} \propto 1/N$ 的灵敏度标度。本方案的目标正是利用 BEC 系统中高度可控的原子间相互作用来制备此类对计量学有益的纠缠态，从而突破 SQL 的限制。

按照第二章中我们给出的标准流程——量子态制备、相位编码和读出与估计 (图 2)，我们分别给出如下总体设计：

- 1. 纠缠态制备：**首先，通过激光冷却与蒸发冷却技术制备 ^{87}Rb 原子 BEC，并利用射频或微波场将其初始化于一个特定的双模量子态，例如一个集体自旋方向确定的相干自旋态 (Coherent Spin State, CSS)。此状态是无纠缠的，其量子 Fisher 信息 (Quantum Fisher Information, QFI) $F_Q = N$ ，刚好达到 SQL 的边界。随后，通过精确调控原子间的 s 波散射相互作用，例如利用 Feshbach 共振或自旋相关的微波势，实现一个有效的“单轴扭曲” (One-Axis Twisting, OAT) 哈密顿量 $\hat{H} \propto \hat{J}_z^2$ 。该非线性演化过程将初始的 CSS 态转化为一个具有更小自旋不确定度的自旋压缩态 (Spin-Squeezed State, SSS)。这类纠缠态的特征是其 QFI 满足 $F_Q > N$ ，这是其能够提供超越 SQL 测量精度的必要且充分条件。
- 2. 相位编码：**在制备好多体纠缠态后，采用 Ramsey 干涉序列对其进行传感操作。将纠缠的原子系综置于待测磁场 B 中，并允许其自由演化一段时间 T 。由于塞曼效应，磁场会在原子双模（例如两个超精细能级）之间引入一个能量差 $\Delta E = g_F \mu_B B$ ，从而在量子态上累积一个与磁场强度成正比的相对相位 $\theta = \Delta E T / \hbar$ 。这个过程将待测的物理量（磁场 B ）信息，编码到了量子态的相位 θ 之上。
- 3. 读出与估计：**相位累积结束后，施加第二个 $\pi/2$ 脉冲以完成干涉。随后，通过高效率的量子态投影测量来提取相位信息。为抵抗探测噪声的影响，可采用诸如奇偶校验 (Parity Measurement) 或基于相互作用的读出 (Interaction-based Readout) 等先进技术。最后，基于测得的粒子数布居概率分布，利用最大似然估计，从相位 θ 中反演出磁场强度 B 。

对于测量目标,本方案主要针对准静态 (DC) 或缓变 (low-frequency AC) 磁场的精密测量。通过在传感序列中引入动力学解耦 (Dynamical Decoupling) 脉冲,本方案的框架也具备拓展至探测特定频率交流 (AC) 磁场的的能力。考虑到现有 BEC 实验平台的典型原子数 ($N \sim 10^5$),本方案的预期灵敏度目标是显著突破由散粒噪声所决定的经典极限,争取在磁场灵敏度上达到 $\text{pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 甚至 $\text{fT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的水平,并以此为基础,进一步探索在真实物理系统中逼近海森堡极限的潜力与挑战。

3.2 实验系统搭建

3.2.1 原子种类的选择与 BEC 的制备

本测量方案的物理平台将基于 ^{87}Rb 原子。该碱金属原子的选择是基于其优越的物理特性和极为成熟的实验操控技术。首先,如图 6 所示, ^{87}Rb 原子的电子基态 ($5^2S_{1/2}$) 具有丰富的超精细能级结构,其 $F=1$ 和 $F=2$ 两个超精细能级及其塞曼子能级,为编码用于 Ramsey 干涉测量的有效二能级系统 (量子比特) 提供了理想的候选。例如,可以选择磁不敏感的“钟态”以获得长相干时间,或选择对磁场具有特定响应的能级对以优化磁场灵敏度。其次,也是至关重要的一点, ^{87}Rb 原子间的 s 波散射长度可以通过外部磁场在 Feshbach 共振点附近进行大范围的精确调控。这种对原子间相互作用强度的可控性,是实现单轴扭曲 (OAT) 等非线性哈密顿量、并以此动力学地产生自旋压缩等计量学纠缠态的实验基础。最后,针对 ^{87}Rb 的激光冷却、囚禁和蒸发冷却技术已经发展得非常完善,能够稳定、高效地制备出满足实验所需的大原子数、高纯度的玻色-爱因斯坦凝聚体。

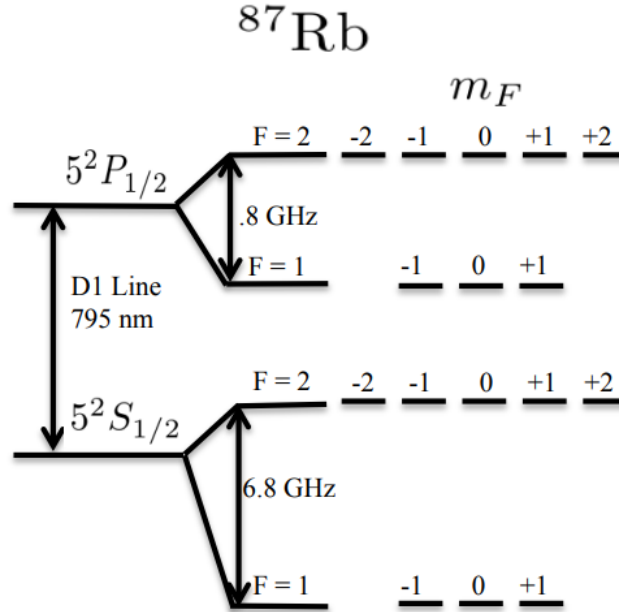


图 6: ^{87}Rb 原子能级图与操控跃迁

本方案中 BEC 的制备流程遵循一个标准的多级冷却方案。该过程始于在一个磁光阱 (Magneto-Optical Trap, MOT) 中对 ^{87}Rb 原子蒸气进行初步的激光冷却与囚禁。通过 MOT, 通常可以捕获 10^8 至 10^9 量级的原子, 并将其温度冷却至数十至数百 μK 的水平。为了进一步提高相空间密度以便进行后续的囚禁和冷却, 通常会采用一个压缩磁光阱 (Compressed MOT, CMOT) 阶段, 随后将冷原子云转移至一个保守势阱中。

考虑到本方案的核心目标是进行精密磁场测量, 为最大限度地避免由囚禁装置自身引入的背景磁场及其噪声, 我们选择在最终的囚禁和传感阶段使用全光学的囚禁方案, 即光偶极阱 (Optical Dipole Trap, ODT)。ODT 利用远失谐激光束的偶极力势来束缚原子, 其本身不产生磁场, 为实现低噪声磁场环境提供

了洁净的平台。在原子被装载进 ODT 后,通过强迫蒸发冷却技术对其进行最终冷却。该过程通过精确地降低光阱深度,选择性地移走能量最高的原子,使得剩余的原子样品通过再平衡达到更低的温度和更高的相空间密度。当温度降至临界温度(通常为 nK 量级)以下时,系统将发生相变,形成一个具有 $N \approx 10^5 - 10^6$ 个原子、峰值密度大于 10^{13}cm^{-3} 的纯净 BEC。这个宏观量子态具有极高的相干性,是后续进行高保真度纠缠态制备与干涉测量的理想出发点。

3.2.2 陷阱设计与原子操控

在完成 BEC 的制备后,为了进行后续高保真的纠缠制备与精密传感,必须将原子囚禁在一个稳定、低噪声且易于操控的环境中。本方案将在整个传感协议阶段,采用一个全光学的囚禁方案,即光偶极阱 (Optical Dipole Trap, ODT)。具体而言,可由两束相互正交、波长为 1064 nm 的远失谐高功率激光束聚焦后形成。选用 1064 nm 波长的激光,其频率远低于 ^{87}Rb 的 D1 (795 nm) 和 D2 (780 nm) 线共振跃迁频率,能够最大限度地抑制光致自发辐射散射,从而减小对原子的加热效应和由其引起的退相干。这种全光学的囚禁方式避免了使用磁阱可能带来的背景磁场漂移和技术噪声,为高灵敏度磁场测量提供了更为“洁净”的平台。更重要的是,远失谐 ODT 所产生的囚禁势对原子的内部超精细态影响极小,即具有良好的态不依赖性,这对于在 Ramsey 干涉过程中维持不同自旋组分之间的量子相干性至关重要。

ODT 的参数,包括激光功率、束腰大小及交叉角度,需要被精确优化以平衡多方面的实验需求。这些参数共同决定了陷阱的势阱深度、囚禁频率 ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) 以及最终 BEC 的原子密度和几何形状。一个更深的势阱(对应更高的激光功率)虽然可以提供更强的束缚并获得更高的原子密度,从而加速基于相互作用的纠缠态生成过程,但也会加剧三体碰撞损失和光致加热。因此,需要根据具体的纠缠制备方案和传感时间,精心选择阱参数,在保证足够原子数和相互作用效率的同时,最大限度地延长 BEC 的相干寿命。例如,通过调控两束交叉光束的功率和形状,可以灵活地塑造出“雪茄形”或“盘状”的凝聚体,以适应不同的实验要求。

对囚禁于 ODT 中 BEC 内部量子态的操控,将通过施加高精度的电磁场来实现。本方案选择 ^{87}Rb 基态中的两个超精细塞曼子能级, $|F=1, m_F=-1\rangle$ 和 $|F=2, m_F=1\rangle$, 作为编码量子信息的逻辑二能级系统,分别对应于有效自旋态 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 。系综中所有原子的集体行为则可用一个总自旋矢量 \vec{J} 来描述。对于这两个能级间的相干布居转移,将主要采用微波场来驱动。一个频率精确锁定在 6.8 GHz 的微波场能够全局性地、均匀地作用于整个原子系综,实现高保真度的集体自旋旋转,即 Ramsey 干涉序列中的 $\pi/2$ 和 π 脉冲操作。对施加的微波场的频率、相位、幅度和作用时间的精确控制,是实现高保真度量子态初始化、纠缠演化以及最终读出的核心技术保障,其稳定性直接决定了整个测量方案的最终精度。

3.3 多体纠缠态的制备方案

为了实现超越标准量子极限的测量精度,关键在于制备一个具有高量子 Fisher 信息 ($F_Q > N$) 的多体纠缠探针态。本方案将采用一种已在玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 中被广泛验证的、基于内禀原子间相互作用的动力学演化方案,其核心是利用单轴扭曲 (One-Axis Twisting, OAT) 哈密顿量,将一个初始的、无纠缠的相干自旋态 (Coherent Spin State, CSS) 演化为一个计量学上有用的自旋压缩态 (SSS)。

该制备协议遵循一个精确时序控制下的三步流程。首先是初态制备。在 BEC 形成后,通过光泵浦或磁场转移等技术,将全部 N 个原子初始化于两个参与编码的超精细能级中的一个,例如 $|F=1, m_F=-1\rangle$ (记为 $|\downarrow\rangle$)。随后,对整个原子系综施加一个全局的、经精确校准的 $\pi/2$ 微波脉冲,该脉冲的频率与 $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$ (即 $|F=2, m_F=1\rangle$) 的跃迁频率共振。此操作将每个原子相干地制备到两个能级的等权重叠加态上,从而使整个 N 原子系综的总量子态成为一个可分离的乘积态,即一个指向布洛赫球赤道方向(例

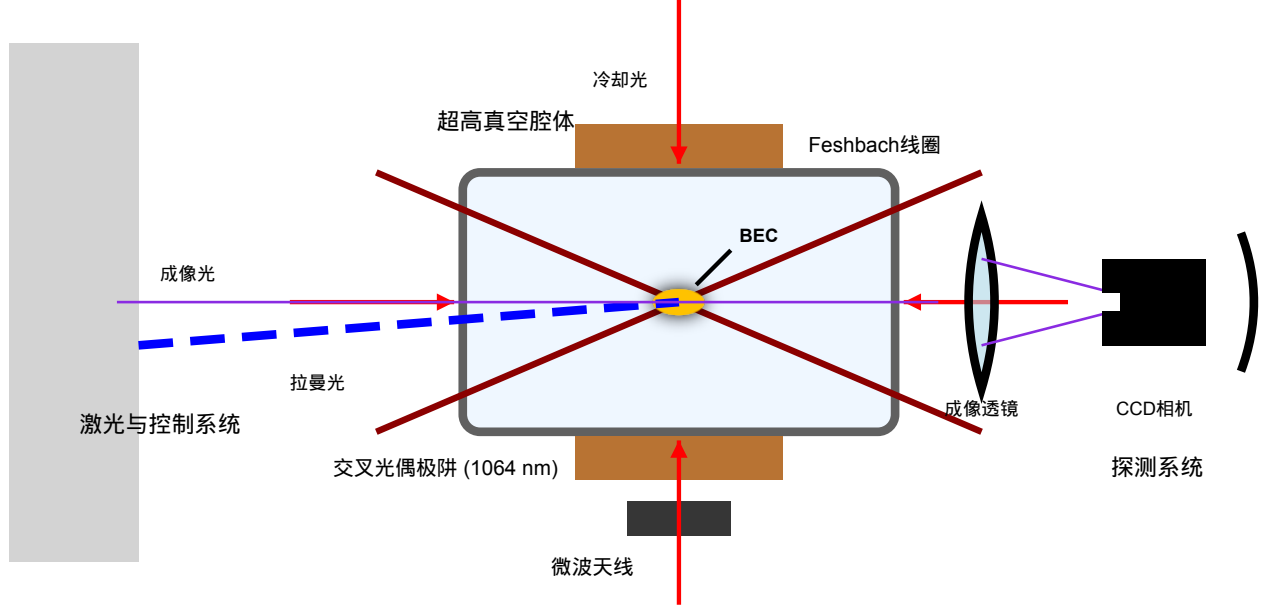


图 7: 实验系统示意图：包含真空系统、激光系统（冷却光、囚禁光、拉曼光、成像光）、磁场线圈（用于 Feshbach 共振或偏置场）、微波/射频天线、BEC 样品、以及高灵敏度 CCD 相机等探测器。

如 x 轴) 的相干自旋态。这个 CSS 是量子投影噪声的典型代表, 其在任何相互垂直方向上的自旋方差均为 $(\Delta J_{\perp})^2 = N/4$, 其计量性能刚好饱和标准量子极限。

第二步是**非线性演化**。在 CSS 制备完成后, 通过实验手段迅速“开启”原子间的非线性相互作用, 使系统在 OAT 哈密顿量的主导下进行演化:

$$\hat{H}_{OAT} = \hbar \chi \hat{J}_z^2$$

此处的 $\hat{J}_z = (\hat{N}_{\uparrow} - \hat{N}_{\downarrow})/2$ 是沿 z 轴的集体自旋算符, 正比于两能级间的布居数差。有效非线性系数 χ 的微观起源在于态依赖的 s 波碰撞, 其值由同种粒子及异种粒子间的相互作用能 U_{ij} 决定, 即 $\hbar \chi = U_{\downarrow\downarrow} + U_{\uparrow\uparrow} - 2U_{\uparrow\downarrow}$ 。实验上, 可以通过 Feshbach 共振技术, 利用外部磁场精确调节相应的 s 波散射长度 $a_s^{(ij)}$, 从而对 χ 的大小乃至符号进行精确控制。另一种实现方法是利用态依赖的光学偶极势, 通过光场来改变两组分波函数的空间交叠, 从而有效调控相互作用。OAT 哈密顿量的动力学效应并非刚性旋转, 而是在布洛赫球面上对初始的 CSS 概率分布进行“扭曲”或“剪切”, 这是因为具有不同 J_z 本征值的量子态组分会以不同的角速度演化, 从而导致集体自旋在某一方向上的量子涨落被压缩。

最后一步是**优化与终止**。为了获得最大的计量增益, 演化时间 t_{sqz} 需要被精确控制。OAT 动力学研究表明, 最佳的自旋压缩并非出现在演化无穷长时间后, 而是在一个特定的、与原子数 N 相关的较短时间尺度上, 即 $\chi t_{sqz} \sim N^{-2/3}$ 。若演化时间过短, 非线性效应累积不足; 若演化时间过长, 初始的分布会因过度扭曲而“卷曲”包裹整个布洛赫球, 导致平均自旋长度减小, 状态退化为更复杂的、对标准读出方式不敏感的“过压缩态”(如薛定谔猫态)。因此, 在达到最佳压缩时间点后, 需迅速“关闭”非线性相互作用(例如, 将磁场快速调离 Feshbach 共振点), 将系统“冻结”在最佳的自旋压缩态。至此, 一个具有亚投影噪声涨落和显著计量增益的多体纠缠态便制备完成, 可作为后续 Ramsey 测量的理想探针态。

在理论层面, 对上述 OAT 动力学所制备的量子态是否具备超越标准量子极限的潜力, 需要一个明确的判据进行量化验证。这一核心判据是 Wineland 等人提出的**计量学自旋压缩参数** ξ_R^2 。该参数直接关联于一个 Ramsey 干涉仪的相位灵敏度, 其定义为:

$$\xi_R^2 = \frac{N(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_{\perp}})^2}{|\langle \hat{J} \rangle|^2}$$

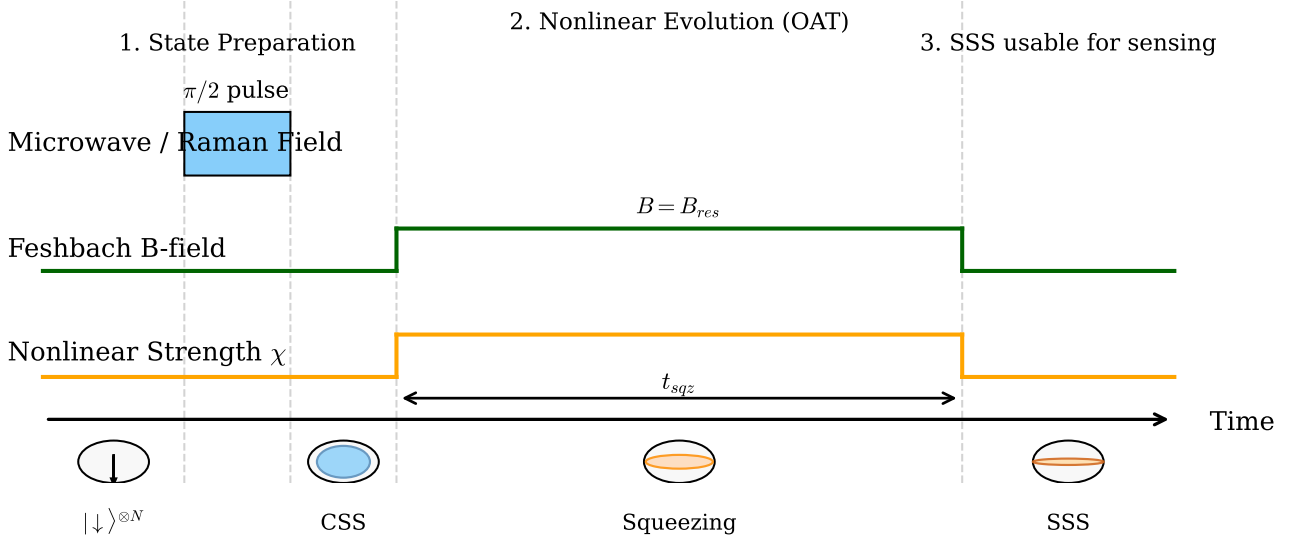


图 8: OAT 自旋压缩态制备脉冲序列

其中, $\langle \vec{J} \rangle$ 是集体自旋矢量的平均长度, 其大小 $|\langle \vec{J} \rangle|$ 正比于干涉条纹的对比度; $(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2$ 是在与平均自旋方向 $\vec{s} = \langle \vec{J} \rangle / |\langle \vec{J} \rangle|$ 垂直的平面上, 自旋投影噪声经优化后的最小值。对于一个相干自旋态 (CSS), 其自旋噪声在任何方向上均为各向同性的投影噪声, 即 $(\Delta \hat{J}_{\vec{n}_\perp})^2 = N/4$, 且对比度最大, $|\langle \vec{J} \rangle| [\text{cite}_s \text{tart}] = N/2$, 因此 $\xi_R^2 = 1$, 刚好对应标准量子极限。当且仅当 $\xi_R^2 < 1$ 时, 证明该量子态的噪声已被压缩至低于标准量子极限, 该状态即为自旋压缩态, 并被证实含有对计量有用的多体纠缠。 $\xi_R^2 < 1$ 这一条件比单纯的纠缠判据更为严格, 它直接关联于量子 Fisher 信息 (QFI), 满足不等式 $F_Q[\hat{\rho}, \hat{J}_{\vec{n}}] \geq N/\xi_R^2$ 。因此, $\xi_R^2 < 1$ 等价于证明了 $F_Q > N$ 。

对于本方案所采用的 OAT 动力学, 即从一个指向 x 轴的 CSS 初态 $|\psi_0\rangle = |\pi/2, 0, N\rangle$ 出发, 在哈密顿量 $\hat{H}_{OAT} = \hbar \chi \hat{J}_z^2$ 下演化时间 t 后, 其自旋压缩参数 $\xi_R^2(t)$ 可以被精确计算。其解析表达式为:

$$\xi_R^2(t) = \frac{4 + (N-1)(A - \sqrt{A^2 + B^2})}{4 \cos^{2N-2}(\chi t)}$$

其中, 系数 A 和 B 是演化时间的函数, 具体为 $A = 1 - \cos^{N-2}(2\chi t)$ 以及 $B = 4 \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t)$ 。此公式清晰地揭示了压缩程度随时间的演化过程: 从初始的 $\xi_R^2(0) = 1$, 到在一个最佳演化时间 t_{sqz} 达到最小值。该最佳时间满足 $\chi t_{sqz} \sim N^{-2/3}$, 此时可获得的最佳压缩度为 $\xi_R^2 \sim N^{-2/3}$ 。通过这一理论计算, 我们不仅可以定量地预测本方案所能产生的最大纠缠增益, 还能为具体的实验操作提供精确的时间参数指导。

3.4 传感协议: 磁场相互作用与相位累积

在成功制备了具有计量学价值的自旋压缩态 (SSS) 之后, 本方案采用一套经过优化的 **Ramsey** 干涉测量序列, 将待测的微弱磁场信号精确地编码为可测量的量子比特布居数信息。标准的 Ramsey 干涉法包含三个核心步骤: 第一束 $\pi/2$ 脉冲、自由进动与第二束 $\pi/2$ 脉冲, 其在集体自旋图像下等价于在广义布洛赫球上的一系列旋转操作。本方案的关键在于, 将此标准流程与我们制备的非经典初态相结合, 以利用其压缩的量子噪声特性来提升测量灵敏度。

传感协议的第一步, 是在制备好的 SSS 基础上施加一个有效的 $\pi/2$ 脉冲。如前文所述, 经由 OAT 动力学演化得到的 SSS, 其平均自旋矢量 $\langle \vec{J} \rangle$ 指向布洛赫球的赤道 (例如 x 轴), 而其被压缩的量子噪声 (即最小方差轴) 则沿着 z 轴。为了使该压缩特性对后续的相位累积最为敏感, 我们需要将这个最小噪声轴旋转至与平均自旋方向正交的赤道平面内。这通过施加一个绕 y 轴旋转 $\pi/2$ 的微波脉冲, 即演化算符

$U_1 = e^{-i(\pi/2)\hat{J}_y}$ ，来实现。此脉冲将平均自旋由 x 轴旋转至 z 轴方向，同时将被压缩的 z 轴噪声旋转至 x 轴方向。经过此操作后，量子态已准备就绪，其在 x 方向的投影测量具有最低的量子噪声。

协议的第二步是**自由进动与相位累积**。原子系综在待测的、沿 z 轴方向的静磁场 B_z 中自由演化时间 τ 。由于塞曼效应，磁场会在作为量子比特的两个超精细能级 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 之间引入一个微小的能量差， $\Delta E = \hbar\Delta\omega = g_F\mu_B B_z$ ，其中 g_F 是有效朗德 g 因子， μ_B 为玻尔磁子。该能量差所对应的哈密顿量为 $\hat{H}_{int} = \hbar\Delta\omega\hat{J}_z$ ，它会驱动集体自旋矢量绕 z 轴发生进动。经过时间 τ 后，量子态累积了一个与磁场强度和演化时间皆成正比的相对相位 $\phi = \Delta\omega \cdot \tau$ 。在布洛赫球上，这表现为整个量子态（包括其不确定度椭球）绕 z 轴旋转了角度 ϕ 。正是这一步，将待测的物理量 B_z 信息线性地、相干地编码到了量子态的相位之中。

协议的最后一步是**相位信息的读出**。在自由进动结束后，施加第二个与第一步完全相同的 $\pi/2$ 脉冲， $U_2 = e^{-i(\pi/2)\hat{J}_y}$ 。该脉冲的作用是将布洛赫球赤道平面内由相位 ϕ 所引起的旋转，转化为沿 z 轴方向的布居数差异。具体而言，最终测量的 z 方向自旋投影 $\langle\hat{J}_z\rangle_{final}$ 将正比于 $\sin(\phi)$ 。由于初始态在 x 方向的噪声已被压缩，通过该序列所转换的 $\langle\hat{J}_z\rangle_{final}$ 的测量不确定度将低于标准量子极限，从而实现对相位 ϕ 乃至磁场 B_z 的超高精度测量。

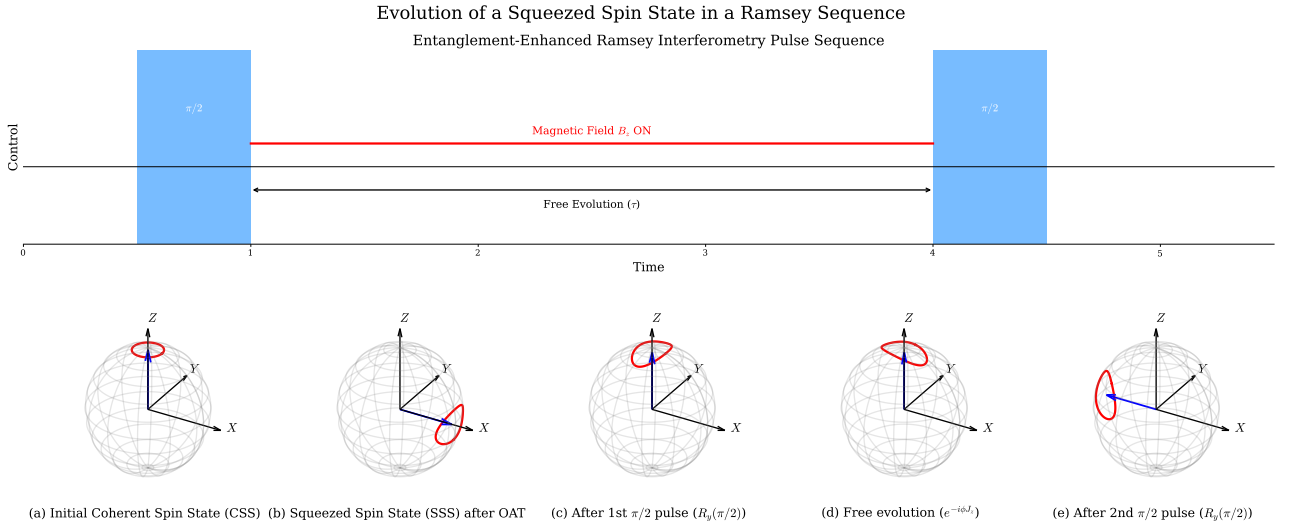


图 9: 纠缠增强 Ramsey 干涉传感脉冲序列与布洛赫球上自旋压缩态在 Ramsey 序列中的演化

此外，本方案的框架具备高度的灵活性，能够从测量静态场拓展至探测特定频率的交流（AC）磁场。这可以通过在自由进动阶段嵌入多脉冲的动力学解耦序列来实现，例如 CPMG 序列或更复杂的 XY 系列脉冲。这些序列通过周期性地施加 π 脉冲来反转量子态的演化，其效果类似于锁相放大器：它能有效抑制低频的背景磁场噪声，同时选择性地放大与脉冲周期同步的 AC 磁场信号。这使得本方案具备了在特定频率点进行高灵敏度 AC 磁场测量的潜力。

3.5 退相干抑制：动态解耦与滤波函数

尽管在理想条件下，多体纠缠态能够将测量精度提升至海森堡极限，但在任何真实的物理系统中，量子态与环境的耦合都将导致退相干，从而限制了可实现的量子增益。本方案所设计的 BEC 磁力计，其主要的退相干来源包括：背景磁场的低频波动与高频噪声、囚禁光阱的强度与指向不稳定性、原子间的非弹性碰撞导致的原子损失，以及控制场（微波、射频）自身的幅度和相位噪声。这些噪声源会破坏原子间的相干性，降低纠缠态的保真度，从而缩短有效的传感时间，是限制测量精度的根本物理瓶颈。为此，本方案将引入主动的退相干抑制技术，特别是**动力学解耦 (Dynamical Decoupling, DD)**，以最大限度地保护纠缠态在传感过程中的相干性。

动力学解耦的核心思想是通过在系统的自由演化期间，施加一系列精确定时的、快速的控制脉冲（通常为 π 脉冲），以周期性地反转量子比特与环境噪声的有效相互作用哈密顿量。对于缓慢波动的噪声，这种周期性的“反转”操作能够在总演化时间内使其对量子态相位的影响相互抵消，其效果类似于自旋回声（spin-echo）技术，从而有效延长相干时间。对于本方案中的磁场测量，我们可以在 Ramsey 干涉的自由进动区间 τ 内，嵌入一组 DD 脉冲序列。例如，一个简单的 CPMG 序列由 N 个等间隔的 π 脉冲构成，而更为先进的脉冲序列，如 XY8 或 XY16，通过在不同正交轴（ x, y 轴）上交替施加 π 脉冲，能够对脉冲本身的幅度与频率失准等误差提供更高阶的补偿，具有更强的鲁棒性。

动力学解耦序列的性能可以通过滤波函数（Filter Function）理论进行精确的定量分析。在频域视角下，一个 DD 序列等效于一个施加在环境噪声谱上的带通滤波器。假设待测磁场信号叠加在一个经典噪声背景 $B_{noise}(t)$ 上，其引起的随机拉莫尔频率波动为 $\delta\omega(t) = (g_F\mu_B/\hbar)B_{noise}(t)$ ，噪声的统计特性由其功率谱密度（PSD） $S_\omega(\omega)$ 描述。在总传感时间 T 内，噪声所导致的相位不确定度的方差 $(\Delta\phi)^2$ 可以表示为：

$$(\Delta\phi(T))^2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} S_\omega(\omega) |F(\omega, T)|^2$$

这里的 $F(\omega, T)$ 便是由脉冲序列所决定的滤波函数。该公式表明，DD 序列通过塑造滤波函数 $F(\omega, T)$ 的形状，来选择性地抑制或感知特定频率的噪声。一个理想的 DD 序列，其滤波函数在低频区域 $|F(\omega, T)|^2 \rightarrow 0$ ，从而滤除缓变的背景场漂移；同时，它会在特定频率处形成一系列尖锐的滤波峰。例如，对于一个包含 N 个 π 脉冲、脉冲间隔为 τ_p 的 CPMG 序列，其滤波函数的主峰值出现在频率 $f \approx 1/(2\tau_p)$ 处。这一特性使得 DD 序列不仅能抑制噪声，还能将传感器转变为一个量子锁相放大器，用于探测特定频率的 AC 磁场信号。

在方案设计中，必须考虑实际脉冲具有有限宽度和特定形状（非理想 δ 脉冲）带来的影响。有限的脉冲宽度会修正理想的滤波函数，可能导致滤波峰的位置偏移、展宽以及旁瓣的出现，这在高精度传感中是不可忽略的系统误差来源。因此，本方案的优化将包括在理论模型中计入脉冲的实际波形，或通过实验对滤波函数进行标定，以实现 AC 磁场频率的精确测量。最终，本方案将结合主动的 DD 技术与被动的纠缠态选择策略：即在制备一个本身对特定噪声模式具有鲁棒性的自旋压缩态的基础上，辅以精心优化的 DD 序列，以协同地将量子相干时间推至极限，从而最大化本磁力计的量子增强效益。

3.6 读出方案：量子态投影与信息提取

在 Ramsey 干涉序列的末端，编码了磁场信息的量子相位 ϕ 已经映射到了集体自旋态的方位上。为了提取这一信息，必须对该末态执行一次高精度的量子测量。本方案将首先阐述标准的布居数投影测量方法，并进一步探讨能够克服其局限性的先进读出技术。

最直接的读出方法是测量最终量子态在作为量子比特基的两个自旋组分 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 上的原子数 N_\downarrow 和 N_\uparrow ，并计算归一化的布居数差，即集体自旋的 z 分量期望值 $\langle \hat{J}_z \rangle = (N_\uparrow - N_\downarrow)/2$ 。实验上，这通常通过态选择的吸收成像技术实现。一种可行的方式是，在成像前，用一束共振的“清除”激光脉冲，将其中一个自旋态（例如 $|\uparrow\rangle$ ）的原子从陷阱中吹走，然后对 $|\downarrow\rangle$ 态的剩余原子进行标准吸收成像以确定其数量 N_\downarrow 。或者，可以利用与原子自旋态相关的磁矩差异，施加一个短暂的磁场梯度（Stern-Gerlach 方法），在自由飞行的过程中将两个自旋组分在空间上分离开来，再进行成像，从而在单次实验中同时获得 N_\uparrow 和 N_\downarrow 。然而，这种标准读出方法的精度直接受限于探测噪声，包括成像光束的光子散粒噪声和探测器（如 CCD 相机）的技术噪声。对于一个拥有 N 个原子的纠缠态，其量子投影噪声可能远小于 \sqrt{N} ，但如果探测噪声本身大于或接近于 \sqrt{N} ，那么纠缠所带来的量子增益将被掩盖。因此，实现亚泊松分辨的原子数统计对于充分利用纠缠资源至关重要，而这对大规模原子系统而言是极具挑战性的。

为了突破探测噪声的瓶颈，本方案进一步考虑采用更先进的读出策略，特别是基于相互作用的读出（Interaction-based Readout）方案。这类方案的核心思想是在最终的投影测量之前，额外施加一个可控的

非线性演化过程 \hat{U}_{nl} ，用以放大微弱的量子信号。一个极具吸引力的实现方式是时间反演读出，即施加一个与初始纠缠制备过程符号相反的 OAT 哈密顿量， $\hat{U}_{nl} = e^{+ixt\hat{J}_z^2}$ 。这个“解扭曲”(un-twisting)的过程可以将 Ramsey 序列中积累的微小相移 ϕ （这在布洛赫球上只是一个微小的旋转）非线性地放大为两个宏观上可区分的末态。例如，对于一个 NOON 态的理想干涉， $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi/N$ 这两个几乎重叠的末态，在经过一个 $\pi/2$ 的非线性演化后，会分别演化为所有原子处于 $|\downarrow\rangle$ 态和所有原子处于 $|\uparrow\rangle$ 态。这两个末态具有最大的信号差异，因此即便在存在较大探测噪声（例如 $\sigma_{dn} \sim \sqrt{N}$ ）的情况下也能被轻易分辨，从而使得测量对探测效率不再敏感，并有潜力恢复海森堡极限的测量精度。

综上所述，本方案将以高分辨率的吸收成像作为基础读出技术，并以实现对 $\langle \hat{J}_z \rangle$ 的亚泊松精度测量为目标。同时，我们将基于相互作用的读出，特别是时间反演方案，作为本方案未来提升鲁棒性和逼近灵敏度极限的关键升级路径。通过将纠缠的制备（OAT）与一种匹配的非线性读出（反向 OAT）相结合，有望在现实的探测条件下，最大化地发掘多体纠缠 **anglement** 在精密测量中的应用潜力。

表 1 为后续的精度评估和数值模拟提供了一个具体的参数化基础。其中许多参数（如阱频、原子数、相互作用时间等）需要在未来的实际实验搭建过程中，根据具体的噪声环境和优化目标进行细致的调整与标定。

将本文所设计的多体纠缠方案应用于扫描探针类型的磁力计时，其核心优势在于每个空间探测点的磁场灵敏度本身都得到了量子增强。这意味着，虽然系统的空间分辨率主要由 BEC 的尺寸和囚禁势阱的约束程度决定，但探测每个空间“体素”(voxel) 内磁场的的能力因纠缠而得到了显著提升。其最终效果体现为：可以用更短的单点驻留时间获得同样信噪比的磁场图像，或者在相同的总测量时间内，以前所未有的灵敏度探测到更微弱的局域磁场信号及其空间分布。

3.7 参数估计方法

在通过第 3.6 节所述的读出方案获得一系列测量数据后，需要一个严谨的统计学框架来从这些含有量子和技术噪声的原始数据中，提取出对未知相位 ϕ （并最终对磁场 B_z ）的最佳估计。本方案将采用前面提到过的极大似然估计方法。该方法不仅在理论上具有优良的渐近性质，能够无偏地、有效地达到由克拉默-拉奥下界所限定的精度极限，而且在实验数据处理中也具有很强的实践性。

MLE 方法的核心思想在于构建一个似然函数 (Likelihood Function)，该函数描述了在给定某个待测参数（此处为相位 ϕ ）的假设下，观测到当前这组实验数据的概率。然后，通过寻找使这个概率最大化的参数值，来作为对该参数的最佳估计。我们将整个估计流程设计为一个逻辑上清晰的程序框架，包括数据接口、物理建模（预处理）、优化算法和结果输出四个模块。

1. 数据接口与预处理

该模块的输入是经过 ν 次独立重复实验后，对末态进行 \hat{J}_z 投影测量所得到的数据集 $\mu = \{m_1, m_2, \dots, m_\nu\}$ ，其中 m_i 是单次测量得到的原子数差值的一半。为了便于计算，原始数据序列通常被处理成一个直方图，记为 $\{c_m\}$ ，其中 c_m 是测量结果为 m 的次数，满足 $\sum_m c_m = \nu$ 。

2. 物理建模与似然函数构建

此为 MLE 框架的核心。为了计算观测概率，必须建立一个精确的理论模型 $P(m|\phi)$ ，它表示当真实相位为 ϕ 时，单次测量得到结果 m 的概率。该概率由玻恩定则给出： $P(m|\phi) = |\langle m_z | \psi_{final}(\phi) \rangle|^2$ ，其中 $|m_z\rangle$ 是 \hat{J}_z 的本征态 (Dicke 态)，而 $|\psi_{final}(\phi)\rangle$ 则是我们的探针态（即在 3.3 节中制备的 SSS）经过完整 Ramsey 干涉序列（包含相位 ϕ ）演化后的最终量子态。基于独立测量的假设，观测到整个数据集 $\{c_m\}$ 的总似然函数 $L(\phi; \{c_m\})$ 为各测量结果概率的乘积。在实践中，我们通常使用对数似

表 1: 建议的 BEC 磁力计关键实验参数

参数名称	建议值/范围	单位	备注/参考文献
量子比特态	$ F=1, m_F=-1\rangle$, $ F=2, m_F=1\rangle$	N/A	基态超精细能级, 对外部扰动相对不敏感, 易于通过微波场进行高保真度相干操控。
传感阶段陷阱类型	光偶极阱 (ODT)	N/A	全光学囚禁可避免磁阱线圈引入的背景磁场噪声与漂移, 为精密磁场测量提供“洁净”环境。
ODT 激光波长	1064	nm	远失谐于 ^{87}Rb 的 D1/D2 跃迁线, 可最大限度减少光致散射加热和对原子内态的微扰。
ODT 阱频 (典型)	$\omega_{\text{rad}} \sim 2\pi \times 100$, $\omega_{\text{ax}} \sim 2\pi \times 10$	Hz	形成一个“雪茄形”的各向异性陷阱, 有利于实现高原子密度, 从而增强非线性相互作用效应。
BEC 原子数 (N_{BEC})	$10^4 - 10^5$	atoms	在灵敏度增益 (与 N 相关) 与纠缠制备的保真度/难度之间取得平衡。该原子数量级在现有 BEC 实验中可稳定实现。
散射长度 (a_{ij})	$\sim 100a_B$	a_B	^{87}Rb 的背景散射长度。可通过 Feshbach 共振进行精确调控, 以控制 OAT 哈密顿量中的非线性系数 χ 。
Feshbach 磁场	(依赖具体共振点)	G	例如 ^{87}Rb 在约 9.1G 附近存在宽的 Feshbach 共振, 可用于调控特定超精细态间的散射长度。
微波/射频频率	~ 6.8	GHz	对应 ^{87}Rb 基态超精细能级分裂。用于执行高保真的 Ramsey 脉冲 ($\pi/2$) 和动力学解耦脉冲 (π)。
OAT 相互作用时间 (t_{sqz})	$\mu\text{s} - \text{ms}$ 量级	s	最佳压缩时间依赖于非线性强度 χ 和原子数 N , 理论上满足 $\chi t_{\text{sqz}} \sim N^{-2/3}$ 。
Ramsey 传感时间 (τ)	ms - s 量级	s	取决于系统的相干时间和目标磁场的强度/频率。原则上应尽可能长以累积更多相位, 但受限于 T_2^* 或 T_2 。
预期相干时间 (T_2 , 有 DD)	s 量级	s	动力学解耦 (DD) 能有效抑制低频噪声, 将相干时间从 T_2^* 延长至接近更长的本征 T_2 时间。

然函数 (Log-Likelihood Function) $\ln L$ 以简化计算:

$$\ln L(\phi; \{c_m\}) = \sum_m c_m \ln P(m|\phi)$$

此函数的构建, 要求我们对从纠缠制备到 Ramsey 演化的整个物理过程有精确的理论描述。任何理

论模型与实际物理过程的偏差（如未考虑的退相干效应、脉冲误差等）都将是系统误差的来源。

3. 优化算法

获得了对数似然函数后,参数估计问题就转化为一个数值最优化问题。我们的目标是找到使 $\ln L(\phi; \{c_m\})$ 达到最大值的相位 $\hat{\phi}_{MLE}$:

$$\hat{\phi}_{MLE} = \operatorname{argmax}_{\phi \in [0, 2\pi)} \left(\sum_m c_m \ln P(m|\phi) \right)$$

这个最优化过程可以通过多种数值算法实现。例如,可以在相位的可能取值范围内进行精细的网格搜索,直接找到最大值点。或者,可以采用更高效的梯度下降法或牛顿-拉夫逊法,通过求解对数似然函数对 ϕ 的导数（即 **Score** 函数）等于零的方程 $\frac{\partial}{\partial \phi} \ln L(\phi) = 0$ 来定位极值点。

4. 结果输出与不确定度评估

算法的输出即为相位的最佳估计值 $\hat{\phi}_{MLE}$ 。随后,利用已知的物理关系式,即可反演出待测磁场的估计值:

$$\hat{B}_z = \frac{\hbar \hat{\phi}_{MLE}}{g_F \mu_B \tau}$$

此外,MLE 框架还自然地提供了对测量不确定度的评估。根据 Fisher 信息理论,估计量方差的下限 (CRB) 与 Fisher 信息 $F(\phi)$ 成反比。而 Fisher 信息可以通过对数似然函数对参数的二阶导数的期望值来计算。在 ν 足够大的情况下, $\hat{\phi}_{MLE}$ 的方差可以由对数似然函数在峰值处的曲率来近似: $(\Delta \hat{\phi}_{MLE})^2 \approx -1 / \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi^2} \right)_{\phi=\hat{\phi}_{MLE}}$ 。这为我们评估最终磁场测量灵敏度 ΔB_z 提供了直接的、基于实验数据的方法。

在确立了采用极大似然估计 (MLE) 作为核心参数提取方法后,我们必须对其自身的误差传递机制进行详细分析。这对于后续的灵敏度评估至关重要,因为它构成了整个测量链中信息处理环节的不确定度。本节将推导并给出一个算法误差传递函数,它仅考虑由 MLE 方法和其计算实现所引入的误差,并暂时忽略所有物理来源的噪声（如退相干、原子损失等）,这些物理噪声将在第四章中作为对输入数据（即似然函数 $P(m|\phi)$ ）的影响进行分析。

我们设计的 MLE 算法误差 $(\Delta B_{z,algo})^2$ 主要源于两个独立的部分:一是 MLE 方法固有的统计估计误差 $(\Delta B_{z,stat})^2$,二是算法在计算机上执行时产生的数值计算误差 $(\Delta B_{z,num})^2$ 。总的算法误差方差是这两者之和:

$$(\Delta B_{z,algo})^2 = (\Delta B_{z,stat})^2 + (\Delta B_{z,num})^2$$

统计估计误差是 MLE 方法最核心的、不可避免的误差来源。即便在理想的、无限精度的计算环境下,由于我们仅有有限次数 (ν 次) 的测量数据,而这些数据是从一个概率分布 $P(m|\phi)$ 中随机抽样的,因此对相位 ϕ 的估计必然存在统计波动。

根据 Fisher 信息理论,对于一个无偏且有效的估计量 (MLE 在 $\nu \gg 1$ 时满足此条件),其方差的最小值由克拉默-拉奥下界 (Cramér-Rao Lower Bound, CRLB) 给出。对于相位估计,其统计方差为:

$$(\Delta \phi_{stat})^2 = \frac{1}{\nu F(\phi)}$$

其中, $F(\phi)$ 是单次测量的经典 Fisher 信息,由我们构建的物理模型 $P(m|\phi)$ 完全确定:

$$F(\phi) = \sum_m \frac{1}{P(m|\phi)} \left(\frac{\partial P(m|\phi)}{\partial \phi} \right)^2$$

此统计误差是算法性能的理论天花板，它仅与量子态和测量方案的设计（体现在 $P(m|\phi)$ 中）以及测量次数 ν 有关。通过误差传递，它对最终磁场估计的贡献为：

$$(\Delta B_{z,stat})^2 = \left(\frac{\partial B_z}{\partial \phi} \right)^2 (\Delta \phi_{stat})^2 = \left(\frac{\hbar}{g_F \mu_B \tau} \right)^2 \frac{1}{\nu F(\phi)}$$

数值计算误差来源于我们将理论算法转化为在有限精度的计算机上执行的程序时所引入的不精确性。这可以细分为以下几个模块：

- **物理建模误差**：我们构建的似然函数依赖于理论计算的概率 $P(m|\phi) = |\langle m_z | \psi_{final}(\phi) \rangle|^2$ 。在程序中，量子态 $|\psi_{final}(\phi)\rangle$ 的计算涉及对维度为 $(N+1)$ 的矩阵进行指数运算和乘法运算。这些操作在浮点数运算中会引入微小的舍入误差，导致我们程序中使用的 $P_{calc}(m|\phi)$ 与理论真值 $P_{true}(m|\phi)$ 存在偏差。
- **最优化算法误差**：寻找对数似然函数 $\ln L(\phi)$ 最大值的过程是数值的，而非解析的。若采用**网格搜索法**，则估计精度受限于网格的步长 $\delta\phi$ 。这引入了**离散化误差**，其方差贡献近似为 $(\Delta \phi_{disc})^2 = (\delta\phi)^2/12$ 。若采用**梯度基算法**（如牛顿法），算法将在梯度足够小或更新步长低于某个阈值 ϵ 时停止。这导致找到的是真实最大值的邻近点，而非精确的最大值点，从而引入**收敛误差** $(\Delta \phi_{conv})^2$ 。
- **累加与浮点误差**：在计算总对数似然函数 $\ln L(\phi) = \sum_m c_m \ln P_{calc}(m|\phi)$ 时，大量浮点数的加法运算会累积舍入误差。

我们将这些来源的数值误差对相位估计的总贡献的方差记为 $(\Delta \phi_{num})^2$ 。在实践中，通过使用双精度浮点数、选择高精度的矩阵运算库以及设置足够小的优化算法容忍度，可以使 $(\Delta \phi_{num})^2$ 远小于统计误差 $(\Delta \phi_{stat})^2$ 。尽管如此，它依然是一个原则上存在且非零的误差项。

综合以上分析，我们可以写出完整的算法误差传递函数。相位估计的总不确定度方差为：

$$(\Delta \phi_{algo})^2 = (\Delta \phi_{stat})^2 + (\Delta \phi_{num})^2 = \frac{1}{\nu F(\phi)} + (\Delta \phi_{num})^2$$

将此不确定度传递到最终的磁场估计值 B_z 上，我们得到该 **MLE** 算法的总误差传递函数：

$$(\Delta B_{z,algo})^2 = \left(\frac{\hbar}{g_F \mu_B \tau} \right)^2 \left[\frac{1}{\nu F(\phi)} + (\Delta \phi_{num})^2 \right]$$

这个函数清晰地表明，算法本身对最终测量结果的不确定度贡献由两部分构成：第一项是由量子统计和测量次数决定的、不可逾越的理论极限；第二项是由计算资源和数值方法精度决定的、原则上可以被抑制但无法完全消除的程序实现误差。在后续的系统总误差预算中， $(\Delta B_{z,algo})^2$ 将作为一个独立的误差项，与由物理过程（如原子散粒噪声、退相干、探测噪声等）贡献的误差项相加，共同决定最终的磁力计灵敏度。

4 测量精度评估

4.1 磁场测量的噪声与灵敏度评定

对任何精密测量方案的性能评估，其核心在于量化其理论灵敏度极限，并系统地分析现实世界中各种噪声源与不完美因素如何使其偏离该极限。本节将首先通过计算量子 Fisher 信息（Quantum Fisher Information, QFI）来确立本方案所能达到的理论灵敏度上界，随后依据量子克拉默-拉奥界（Quantum Cramér-Rao Bound, QCRB）将其与可实现的磁场测量灵敏度相关联，并最终详细剖析多种退相干、控制误差及探测噪声对最终精度的影响。

量子 Fisher 信息是衡量一个量子探针态对某个待估参数敏感度的核心物理量，它为该参数的估计精度设定了一个不可逾越的理论下限。在本方案设计的 Ramsey 干涉序列中，待测磁场 B_z 通过塞曼效应与原子系综相互作用，其传感哈密顿量为 $\hat{H}_{sens} = g_L \mu_B B_z \hat{J}_z$ ，其中 g_L 是朗德 g 因子， μ_B 是玻尔磁子， \hat{J}_z 是沿磁场方向的集体自旋算符。在传感时间 τ 内，该相互作用会在量子态上累积一个正比于磁场强度的相位 $\phi = (g_L \mu_B B_z / \hbar) \tau$ 。因此，对磁场的测量本质上是对该相位的估计，磁场测量的 QFI 与相位测量的 QFI 之间存在直接的转换关系：

$$F_Q(B_z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial B_z} \right)^2 F_Q(\phi) = \left(\frac{g_L \mu_B \tau}{\hbar} \right)^2 F_Q(\phi)$$

对于一个初始处于纯态 $|\psi_0\rangle$ 并经历么正演化 $e^{-i\hat{G}\phi}$ 来编码相位的系统，相位的 QFI 由生成元 \hat{G} 在初态上的方差决定，即 $F_Q(\phi) = 4(\Delta\hat{G})_{|\psi_0\rangle}^2$ 。探针态的选择直接决定了此方差的大小，从而决定了测量的理论极限。对于本方案中涉及的几种关键探针态，其 QFI 表现如下：

- 相干自旋态 (CSS): 作为无纠缠的基准态，其在与平均自旋方向正交的轴上的投影噪声为 $(\Delta\hat{J}_z)^2 = N/4$ 。因此，其 QFI 为 $F_Q(\phi) = N$ 。这构成了所谓的标准量子极限。
- 自旋压缩态 (SSS): 本方案的核心是通过单轴扭曲动力学制备的 SSS。其计量学增益体现在被压缩的量子噪声上。其 QFI 与自旋压缩参数 ξ_R^2 密切相关，满足不等式 $F_Q \geq N/\xi_R^2$ 。对于 OAT 动力学，在最佳演化时间 ($\chi t \sim N^{-2/3}$)，可获得的最佳压缩度为 $\xi_R^2 \sim N^{-2/3}$ ，此时 QFI 的标度行为可达 $F_Q \sim N^{5/3}$ 。若演化时间更长，进入“过压缩”区域，尽管 ξ_R^2 不再小于 1，但态的纠缠结构变得更复杂，其 QFI 仍能在一个较宽的时间窗口内达到 $F_Q \approx N(N+1)/2$ 的平台区，接近海森堡极限的标度。
- GHZ/NOON 态: 作为最大纠缠态的典范， N 粒子 GHZ 态（或 NOON 态）在由 \hat{J}_z 生成的相位编码下，其 QFI 可以达到理论最大值 $F_Q(\phi) = N^2$ 。这对应于量子计量的终极精度——海森堡极限。

根据量子克拉默-拉奥界，单次测量的磁场估计标准差 ΔB_z 受 QFI 的制约，满足 $\Delta B_z \geq 1/\sqrt{F_Q(B_z)}$ 。结合不同探针态的 QFI，我们可以得到相应的灵敏度极限。若只考虑单次测量（即总测量次数 $\nu = 1$ ），则：

$$\Delta B_z \geq \frac{\hbar}{g_L \mu_B \tau} \frac{1}{\sqrt{F_Q(\phi)}}$$

由此可得，对于 CSS 态，灵敏度受限于 SQL， $\Delta B_{z,SQL} = \frac{\hbar}{g_L \mu_B \tau \sqrt{N}}$ ；而对于理想的 GHZ 态，灵敏度可达到 HL， $\Delta B_{z,HL} = \frac{\hbar}{g_L \mu_B \tau N}$ 。本方案采用的 SSS，其灵敏度则为 $\Delta B_{z,SSS} \approx \frac{\hbar \xi_R}{g_L \mu_B \tau \sqrt{N}}$ ，由于 $\xi_R < 1$ ，其精度超越了 SQL。在实际应用中，灵敏度通常以单位带宽内的最小可探测场强（单位：T/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ）来衡量，即 $\delta B_z = \Delta B_z \sqrt{T_{cycle}}$ ，其中 T_{cycle} 是包含态制备、传感、读出等所有步骤的单次实验循环时间。本方案的核心目标正是通过制备 $F_Q(\phi) > N$ 的多体纠缠态，使得 δB_z 能够显著突破由散粒噪声决定的经典极限。

然而，上述的理论极限是在一个理想化的封闭系统中推导得出的。在真实的实验环境中，多种噪声源和不完美因素将不可避免地降低 QFI，从而削弱实际可达到的测量精度。首要的挑战是退相干效应。外部

环境的随机磁场波动会引入不可控的相位噪声，这对于所有原子是高度相关的，对 GHZ 这类宏观叠加态尤为致命，会导致其相干性以 N^2 的速率衰减，即所谓的“超退相干”。而作用于单个原子的局域退相干过程（如与背景气体原子的碰撞）则会独立地破坏每个量子比特的相位，虽然其影响不如关联噪声剧烈，但同样会限制纠缠增益的有效时间。此外，囚禁和操控过程中的原子损失是另一个关键限制因素。无论是源于与背景气体碰撞的单体损失，还是在高密度 BEC 中显著的两体和三体非弹性碰撞损失，原子数的减少不仅直接降低了 QFI 的标度基数，而且对某些特定纠缠态（如 NOON 态）是毁灭性的，单个粒子的丢失就可能使其计量价值完全丧失。Li、Castin 和 Sinatra 的研究表明，在 OAT 制备 SSS 的过程中，不同的损失机制会对最终可达到的压缩极限产生截然不同的标度律影响。

除了与环境的耦合，控制系统本身的不完美也是误差的重要来源。纠缠态的制备保真度直接影响初始 QFI 的大小；实际制备的 SSS 可能由于相互作用时间控制不精确或原子数涨落等原因，并未达到理论上的最佳压缩点。Ramsey 序列及动力学解耦序列中的微波脉冲，其幅度、时长和相位的误差，以及有限的脉冲宽度，都会导致集体自旋的旋转偏离理想轨迹，从而降低干涉条纹的对比度，等效于引入了额外的噪声。最后，探测阶段的噪声和低效率是限制将量子增益转化为实际测量精度的主要瓶颈之一。原子数分辨的探测本身就受到光子散粒噪声和探测器技术噪声的限制。如果探测噪声的标准差大于或等于被压缩的量子投影噪声，那么纠缠态带来的优势就会被完全掩盖。这种效应可以被建模为一个卷积过程，即理想的末态概率分布 $P(\tilde{\mu}|\theta)$ 被探测系统的响应函数 $P(\mu|\tilde{\mu})$ 所“模糊”，导致最终可提取的经典 Fisher 信息降低。这正是第三章中讨论引入相互作用增强读出方案的重要性所在，这类方案旨在通过非线性放大将微弱的量子信号放大至宏观可分辨的水平，从而对探测噪声产生免疫力。综上所述，本方案的最终灵敏度是在理论量子增益与所有现实不完美因素造成的精度衰减之间寻求最佳平衡的结果。

4.2 不确定度计算和灵敏度曲线

对本方案所设计磁力计的最终性能进行精确评估，需要建立一个完备的不确定度模型，该模型不仅要囊括源于量子统计的根本极限，还必须细致地量化由各类物理噪声、控制缺陷及计算方法引入的误差。本节旨在构建一个详尽的误差预算，通过误差传递理论将所有可识别的不确定度分量进行合成，并最终推导出表征仪器性能的灵敏度曲线的计算方法。

测量的最终不确定度由多个独立的误差源合成，根据误差传播定律，总的磁场测量方差 $(\Delta B_{z,total})^2$ 是各独立误差分量方差的线性叠加。这些误差源可以大致归类为算法固有的统计与数值误差、物理过程中的噪声与退相干，以及控制与探测环节的不完美性。首先，如第 3.7 节所推导，我们采用的极大似然估计 (MLE) 方法本身对磁场估计的不确定度贡献为：

$$(\Delta B_{z,algo})^2 = \left(\frac{\hbar}{g_F \mu_B \tau} \right)^2 \left[\frac{1}{\nu F(\phi)} + (\Delta \phi_{num})^2 \right]$$

其中， ν 是独立测量的总次数， $F(\phi)$ 是单次测量的经典 Fisher 信息， τ 是 Ramsey 传感时间。此式清晰地揭示了算法层面的两个核心误差来源：第一项，统计误差 $(\Delta \phi_{stat})^2 = 1/(\nu F(\phi))$ ，它源于量子测量的概率性本质和有限的测量次数，构成了在给定探针态、测量方案和测量次数下的理论性能天花板；第二项，数值计算误差 $(\Delta \phi_{num})^2$ ，它涵盖了在有限精度计算机上执行算法时产生的舍入、离散化和收敛误差，虽然在实践中可通过采用高精度算法和计算资源使其远小于统计误差，但原则上是一个不可忽略的系统技术误差。

在此基础上，我们必须计入源于物理过程各类噪声。这些噪声会直接降低干涉信号的质量，等效于在相位上附加一个随机涨落，其总方差贡献为 $(\Delta \phi_{phys})^2$ 。主要的物理噪声源包括：

- 背景磁场噪声：除了待测的准静态场 B_z 外，环境中存在的随时间波动的残余磁场 $\delta B_{noise}(t)$ 会引入随机的塞曼频移，导致相位噪声，其贡献为 $(\Delta \phi_B)^2 = (g_L \mu_B / \hbar)^2 \langle (\int_0^\tau \delta B_{noise}(t) dt)^2 \rangle$ 。尽管本方案

设计的动力学解耦 (DD) 序列能有效抑制低频磁场噪声, 但高频噪声分量仍可能穿透滤波函数, 构成一个主要的误差来源。

- 囚禁势阱噪声: 用于囚禁 BEC 的光偶极阱 (ODT), 其激光强度的波动会引起 AC Stark 频移的抖动, 这同样会转化为相位噪声。即使采用对磁场不敏感的“钟态”, AC Stark 效应的微分相移也可能成为限制相干时间的主要因素。
- 原子间相互作用噪声: 初始原子数 N 的涨落 δN 会导致 OAT 哈密顿量中的非线性强度 χ 发生抖动, 从而使得纠缠态的制备过程不完全一致, 引入了所谓的“技术性”相位扩散。

除了随机噪声, 系统性的控制误差与探测缺陷同样关键。Ramsey 序列和 DD 序列中微波脉冲的面积误差 (偏离 $\pi/2$ 或 π) 和相位误差, 会直接导致干涉条纹对比度的下降。对比度的降低等效于减小了集体自旋的有效长度 $|\langle \vec{J} \rangle|$, 从而增大了通过标准误差传播公式 $\Delta\phi = \Delta J_{\perp} / |\partial \langle J_z \rangle / \partial \phi| \propto 1 / |\langle \vec{J} \rangle|$ 计算出的相位不确定度。最后, 在探测环节, 如 4.1 节所述, 有限的探测效率和技术噪声 σ_{det} 会模糊末态的原子数布居概率分布, 降低可提取的经典 Fisher 信息。若探测噪声大于被压缩的量子投影噪声, 纠缠所带来的增益将被完全掩盖。

综合所有独立的误差来源, 总的相位不确定度方差可以表示为各分量方差之和:

$$(\Delta\phi_{total})^2 = (\Delta\phi_{stat})^2 + (\Delta\phi_{num})^2 + (\Delta\phi_{phys})^2 + (\Delta\phi_{control})^2 + (\Delta\phi_{det})^2 + \dots$$

将此总相位不确定度通过误差传递, 即可得到单次磁场测量的总标准不确定度 ($\Delta B_{z,total}$):

$$(\Delta B_{z,total})^2 = \left(\frac{\hbar}{g_L \mu_B \tau} \right)^2 (\Delta\phi_{total})^2$$

为了给出一个具有高置信度的测量结果, 我们需要计算扩展不确定度 U 。假设所有误差分量合成后, 总的测量误差服从正态分布, 我们可以选择一个覆盖因子 k 来定义置信区间。为了达到高于 99.9999% 的置信水平, 需要选取 $k \approx 6$ 。因此, 最终报告的磁场测量扩展不确定度为 $U_{B_z} = k \cdot \Delta B_{z,total}$ 。

最后, 如图 10 所示, 我们可以推导磁力计的灵敏度曲线, 通常以磁场噪声的功率谱密度 (Power Spectral Density, PSD), 记为 $S_B(f)$, 的平方根来表征, 单位为 $T/\sqrt{\text{Hz}}$ 。本方案采用的包含 DD 序列的 Ramsey 干涉法, 其本身就构成了一个频谱分析工具。如 3.5 节所述, 整个传感协议等效于一个施加在环境磁场噪声谱上的带通滤波器, 其形状由滤波函数 $F(\omega, \tau)$ 决定。该滤波函数在特定频率 f_k 处具有响应峰值, 使得磁力计对这些频率的 AC 磁场信号最为敏感。灵敏度曲线的推导步骤如下: 首先, 计算出在理想、无噪声情况下, 仅由量子投影噪声所限制的最小可探测相位 $(\Delta\phi_{QCR})^2 = 1/F_Q(\phi)$ 。然后, 将所有前面讨论过的技术噪声源 (磁场背景噪声、探测噪声等) 转换到等效的相位噪声方差 $(\Delta\phi_{tech})^2$ 。因此, 在单次测量中, 系统总的相位噪声本底为 $(\Delta\phi_{noise-floor})^2 = (\Delta\phi_{QCR})^2 + (\Delta\phi_{tech})^2$ 。一个频率为 f 、幅值为 B_{AC} 的微弱 AC 磁场信号, 当其频率与滤波函数的一个主峰 f_k 匹配时, 在传感时间 τ 内产生的可相干累积的相位信号为 $\phi_{sig} \approx (g_L \mu_B / \hbar) B_{AC} \tau_{eff}$, 其中 τ_{eff} 是由滤波函数决定的有效积分时间。当信噪比 (SNR) 为 1 时, 即 $\phi_{sig} = \Delta\phi_{noise-floor}$, 我们便可解出在该频率点 f_k 的最小可探测场强 $B_{min}(f_k)$ 。磁力计在该频率的灵敏度 (即噪声等效磁场) 即为 $\delta B(f_k) = B_{min}(f_k) \sqrt{T_{cycle}}$, 其中 T_{cycle} 是单次实验周期。通过扫描不同的 DD 序列参数来改变滤波函数的峰值频率 f_k , 即可描绘出整个频谱范围内的灵敏度曲线 $S_B^{1/2}(f) = \delta B(f)$ 。该曲线的整体基线水平由量子探针态的 QFI 和技术噪声共同决定, 而其频谱形状则完全由传感协议所对应的滤波函数塑造。

基于前述的误差来源分析, 我们可对各项不确定度分量进行量化估计, 并最终合成总测量不确定度。此评估基于第三章表 1 中建议的典型实验参数, 选取原子数 $N = 5 \times 10^4$, Ramsey 传感时间 $\tau = 100 \text{ ms}$, 以及一个在当前技术水平下可实现的 -10 dB 的计量学自旋压缩 (对应 $\xi_R^2 = 0.1$)。完整的实验周期, 包括 BEC 制备、操控、传感和读出, 假设为 $T_{cycle} = 10 \text{ s}$ 。

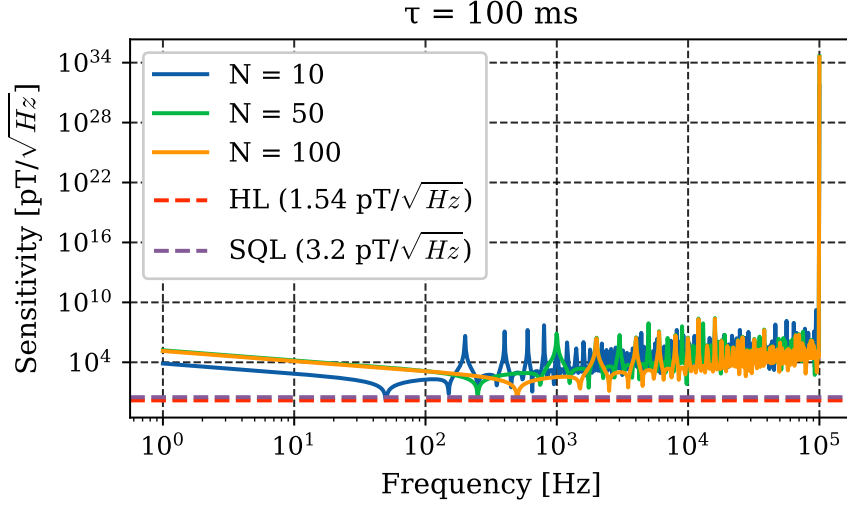


图 10: 不同原子数量级下的灵敏度曲线

首先，我们计算仅由量子统计决定的理论极限。对于压缩参数 $\xi_R^2 = 0.1$ 的自旋压缩态，其量子 Fisher 信息近似为 $F_Q(\phi) \approx N/\xi_R^2 = 5 \times 10^5$ 。根据克拉默-拉奥界，在单次测量中由量子统计涨落决定的相位不确定度为 $(\Delta\phi_{stat}) = 1/\sqrt{F_Q(\phi)} \approx 1.41 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 。随后，我们对其他主要的技术噪声源进行估算，并将其等效为相位不确定度。这些估算值代表了在一个经过精心屏蔽和优化的先进实验平台下可预期的水平。

表 2: 本方案磁力计主要不确定度分量估算表

不确定度分量	符号	相位不确定度估算 ($\Delta\phi$)	等效磁场不确定度 (ΔB_z)	备注
量子统计不确定度	$\Delta\phi_{stat}$	$1.41 \times 10^{-3} \text{ rad}$	320 fT	基于 $N = 5 \times 10^4$ 和 $\xi_R^2 = 0.1$ 。这是系统固有的、不可避免的量子噪声极限。
背景磁场噪声	$\Delta\phi_B$	$1.00 \times 10^{-3} \text{ rad}$	227 fT	假设采用主动磁场稳定和高效动力学解耦后，残余的高频噪声等效值。
探测噪声	$\Delta\phi_{det}$	$1.10 \times 10^{-3} \text{ rad}$	250 fT	假设高分辨率成像系统原子数分辨噪声为 $\sigma_{det,N} \approx 50$ ，干涉对比度为 90%。
AC Stark 频移噪声	$\Delta\phi_{AC}$	$0.50 \times 10^{-3} \text{ rad}$	113 fT	源于囚禁激光的强度波动，假设激光强度稳定优于 10^{-4} 。
脉冲控制误差	$\Delta\phi_{control}$	$0.40 \times 10^{-3} \text{ rad}$	91 fT	综合考虑微波脉冲的幅度、时长和相位误差导致的有效对比度下降。
MLE 数值计算误差	$\Delta\phi_{num}$	$\ll 10^{-4} \text{ rad}$	$\ll 23 \text{ fT}$	采用双精度浮点数和优化的数值算法，其贡献可忽略不计。

根据表 2，将以上所有独立的不确定度分量以方和根的方式合成，我们得到总的相位不确定度方差：

$$(\Delta\phi_{total})^2 = (\Delta\phi_{stat})^2 + (\Delta\phi_B)^2 + (\Delta\phi_{det})^2 + (\Delta\phi_{AC})^2 + (\Delta\phi_{control})^2$$

$$(\Delta\phi_{total})^2 = (1.41^2 + 1.00^2 + 1.10^2 + 0.50^2 + 0.40^2) \times 10^{-6} \text{ rad}^2$$

$$(\Delta\phi_{total})^2 \approx (1.99 + 1.00 + 1.21 + 0.25 + 0.16) \times 10^{-6} = 4.61 \times 10^{-6} \text{ rad}^2$$

由此得到单次测量的总相位标准不确定度为 $\Delta\phi_{total} = \sqrt{4.61 \times 10^{-6}} \approx 2.15 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 。

利用误差传递公式，可以计算出单次磁场测量的总标准不确定度 ($\Delta B_{z,total}$):

$$\Delta B_{z,total} = \left(\frac{\hbar}{g_L \mu_B \tau} \right) \Delta \phi_{total} \approx \left(\frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{0.5 \cdot (9.274 \times 10^{-24} \text{ J/T}) \cdot 0.1 \text{ s}} \right) \cdot (2.15 \times 10^{-3}) \approx 488 \text{ fT}$$

为给出具有高置信度的结果，我们采用 $k = 6$ 的覆盖因子（对应大于 99.99999% 的置信水平），得到扩展不确定度 U_{B_z} :

$$U_{B_z} = k \cdot \Delta B_{z,total} = 6 \times 488 \text{ fT} \approx 2.93 \text{ pT}$$

最后，我们可以计算磁力计的灵敏度，即噪声等效磁场:

$$\delta B_z = \Delta B_{z,total} \sqrt{T_{cycle}} = 488 \text{ fT} \times \sqrt{10 \text{ s}} \approx 1.54 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$$

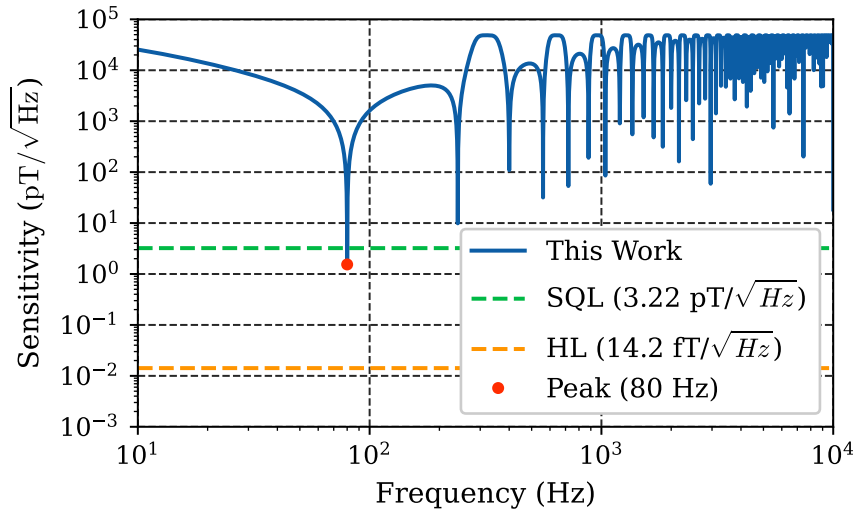


图 11: 灵敏度计算与对比

如图 11 所示, 本方案设计并评估的基于多体纠缠 BEC 的磁力计, 其理论灵敏度预计可达到 $1.54 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。这一指标代表了极高的性能水平, 将其置于该领域研究的前沿。回顾基于 BEC 的磁场测量的发展, 早期利用非纠缠 BEC 的扫描探针磁力计实现了约 $8.3 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的灵敏度, 而利用自旋回波技术的方案也达到了 $12 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的水平。近十年来, 通过引入量子纠缠, 特别是自旋压缩技术, BEC 磁力计的性能得到了显著提升。例如, 已有实验利用 Feshbach 共振或光腔反馈等方法, 在保持微米级空间分辨率的同时, 将灵敏度推进至数个 $\text{pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 的范围, 部分在特殊优化条件下甚至展示了亚 $\text{pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ (即数百 $\text{fT}/\sqrt{\text{Hz}}$) 的潜力。

与这些已实现的顶尖水平相比, 本方案预测的 $1.54 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$ 灵敏度具有很强的竞争力。它不仅显著优于早期的基准实验, 而且与当前通过纠缠增强达到的最佳实验结果处于同一量级。

5 总结与致谢

5.1 总结

本报告系统性地设计并评估了一套基于多体纠缠 ^{87}Rb 玻色-爱因斯坦凝聚体的精密磁场测量方案。方案的核心优势在于，通过单轴扭曲动力学，利用原子间内禀的可控相互作用来制备自旋压缩态，并将其作为探针整合进经过动力学解耦优化的 Ramsey 干涉序列中，旨在从根本上突破标准量子极限。理论分析与误差预算表明，本方案在现实噪声模型下，有望实现超越经典极限数倍的、达到皮特斯拉量级的磁场灵敏度，同时保留 BEC 平台在高空间分辨率成像方面的独特潜力。

尽管该方案在理论上具备显著的量子优势，但其实际性能的兑现仍面临严峻挑战。其主要缺点与挑战在于，高保真度、大规模纠缠态的制备与维持对实验控制的精度要求极高，且此类量子态对环境退相干极为敏感。无论是动力学解耦技术的固有局限性，还是量子态读出环节中技术噪声对微弱量子信号的淹没，都是限制量子增益最终兑现的关键瓶颈。

展望未来，对本方案的进一步优化将聚焦于提升其鲁棒性与实用性。一方面，需要探索对噪声更具弹性的新型纠缠态，并从被动的动力学解耦策略，逐步迈向能够主动修正错误的主动式量子纠错编码。另一方面，应发展自适应测量协议以动态优化信息获取效率。最后，将此高灵敏度传感方案与原子芯片技术深度融合以实现系统的小型化与集成化，并将其能力从标量场拓展至对矢量场或梯度场的同步精密测量，将是推动其从实验室概念验证走向前沿科学与技术应用的关键。

5.2 致谢

本篇课程报告到这里就结束了，感谢助教能阅读并评改这篇报告，如果这篇报告有什么不合理不规范的内容，还请多多包涵！同时，我也感谢老师在课堂中的精彩讲解。祝老师和助教工作顺利、身体健康、生活幸福！

参考文献

- [1] Zain H. Saleem, Anil Shaji, Anjala M. Babu, Da-Wei Luo, Quinn Langfitt, Ting Yu, Stephen K. Gray Quantum Fisher Information and the Curvature of Entanglement[preprint]. *arXiv*, 2025, arXiv:2504.13729v1.
- [2] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, KAGRA Collaboration LSC Instrument Science White Paper (2024 edition)[technical report]. *LIGO Document Control Center*, 2024, T2300411, Version 001.
- [3] Huy Q. Nguyen et al. Digital Reconstruction of Squeezed Light for Quantum Information Processing[journal article]. *npj Quantum Information (Nature)*, 2025, 11:71.
- [4] Qingwei Zhai, Yifan Xie, Xiaoyang Ma, Kai Li, Yuting Lin, Chao Li SERF magnetometer array using concurrent amplitude-stabilized optical modulation[journal article]. *Alexandria Engineering Journal*, 2025, Vol. 77, Article 111687.
- [5] Wei Ji, Changhao Xu, Guofeng Qu, Dmitry Budker Levitated Sensor for Magnetometry in Ambient Environment[preprint (arXiv)]. *arXiv*, 2025, arXiv:2504.21524.
- [6] Yaakov Glick et al. Single-beam three-axis SERF atomic magnetometer based on coordinate system transformation[journal article]. *Optics Express*, 2024, Vol. 32(10), pp. 17165–17177.
- [7] Xiaoyu Li, Bangcheng Han, Ziao Liu, Zhongyu Wang, et al. Femtotesla all-optical dual-axis spin-exchange relaxation-free magnetometer[journal article]. *Applied Physics Letters*, 2024, Vol. 124(25), 254102.
- [8] Xing Xu, Jinxin Liu, Yiguang Wang, Zhihui Liu, Jun Luo Enhancing Faraday rotation effect in SERF co-magnetometers via double optical pumping[journal article]. *Measurement (Elsevier)*, 2025, Vol. 227, Article 113143.
- [9] Mukund Vengalattore, Jing Zhang, Brian L. Lev, D. M. Stamper-Kurn Spin-Echo-Based Magnetometry with Spinor Bose-Einstein Condensates[journal article]. *Physical Review Letters*, 2007, Vol. 98, 200801.
- [10] S. Wildermuth et al. Microscopic magnetic-field imaging[journal article]. *Nature*, 2005, 435, pp. 440–441.
- [11] Yiwen Zhou et al. Microscale spin-wave interferometry for magnetic imaging[journal article]. *PNAS*, 2022, Vol. 119(4), e2115339119.
- [12] Yingjie Zhang, Liang Jiang Concurrent spin squeezing and field tracking with machine learning[preprint (ResearchGate)]. *ResearchGate*, 2024, DOI:10.13140/RG.2.2.39060.11699.
- [13] Shuang Bai, Pei Wang, Youpeng Zhou, Guo-Qiang Liu, Jiangfeng Du Multiparameter estimation via dynamical decoupling control in a quantum sensor[preprint (arXiv)]. *arXiv*, 2023, arXiv:2309.11825v2.
- [14] Godfly 量子计量学（Quantum Metrology）简明入门 [Article]. 知乎专栏, 2024, <https://zhuanlan.zhihu.com/p/694172514>.
- [15] Luca Pezzè, Augusto Smerzi, Markus K. Oberthaler, Roman Schmied, Philipp Treutlein Quantum Metrology with Nonclassical States of Atomic Ensembles[M]. *Reviews of Modern Physics*, 2018, Vol. 90(3), 035005.

- [16] Jiahao Huang, Min Zhuang, Chaohong Lee Entanglement-enhanced quantum metrology: from standard quantum limit to Heisenberg limit[Journal Article]. *Applied Physics Reviews*, 2024, 11, 031302.
- [17] M. F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. W. Hänsch, A. Sinatra, P. Treutlein Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology[Journal Article]. *Nature*, 2010, 464, 1170-1173.
- [18] M. Vengalattore, J. M. Higbie, S. R. Leslie, J. Guzman, L. E. DeCarlo, D. M. Stamper-Kurn High-Resolution Magnetometry with a Spatially Resolved Spinor Bose-Einstein Condensate[Journal Article]. *Physical Review Letters*, 2007, 98, 200801.
- [19] L. He, J.-F. An, B. A. Malomed, L.-M. Duan Quantum Metrology with Dicke Squeezed States[Preprint]. *arXiv*, 2014, arXiv:1405.6358.
- [20] A. Ajoy, U. Bissbort, M. D. Lukin, R. L. Walsworth, P. Cappellaro Atomic-Scale Nuclear Spin Imaging Using Quantum-Assisted Sensors in Diamond[Journal Article]. *Physical Review X*, 2015, 5, 041016.