



引力波物理学习笔记

杨舒云

中山大学物理与天文学院

致虚极，守静笃。

2025年7月6日

目 录

1 物理基础	2
2 思考题与回答	4
3 引力波数据处理入门实践	5
3.1 简介	5
3.2 说明	6
3.3 数据的寻找、下载与预处理	7
3.4 白化与带通滤波	8
3.5 匹配滤波	11
3.6 基于简单的统计原理的误警率评估	12
3.7 时频图	14
参考文献	17
附录	18
A 课程讲义大纲	18
A.1 狹义相对论的几何诠释	18
A.2 狹义相对论的运动学	18
A.3 张量及其运算	19
A.4 广义相对论与微分几何	19
A.5 线性化场方程与引力波	21
A.6 引力波的产生	23
A.7 引力辐射的能量与角动量	24
A.8 双星的波形	25
A.9 椭圆轨道双星的引力波	26
B 习题与解答	29
C 公式表速查	36
D 抽象指标	38
E 一个坐标变换示例	39
E.1 偏导数的倒数关系	39
E.2 从笛卡尔坐标系 (x, y, z) 到球坐标系 (r, θ, ϕ) 的坐标变换下的偏导数关系推导	39
F 采样、傅里叶变换与能谱泄露	42



1. Weak-Field Approximation and Linearised Einstein Equations

Assume a small perturbation $h_{\mu\nu}$ on flat spacetime¹:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1)$$

Introduce the **trace-reversed** perturbation $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ and impose the Lorenz (harmonic) gauge $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Then the linearised field equations take the wave form

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

which in vacuum reduces to $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$.

2. TT Gauge and Plane-Wave Solutions

Further demand the **transverse-traceless (TT) gauge**

$$h_{0\mu} = 0, \quad \partial^i h_{ij} = 0, \quad h_i^i = 0, \quad (3)$$

leaving only two physical polarisation states (+ and \times). A monochromatic plane wave propagating along \mathbf{k} reads

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = A_{ij}^{\text{TT}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (4)$$

3. Geodesic Deviation and Detector Response

The separation ξ^i between neighbouring geodesics satisfies

$$\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} = -R_{0j0}^i \xi^j, \quad R_{0j0}^i = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}. \quad (5)$$

Hence a ring of test masses is stretched and squeezed with

$$\ddot{\xi}^i = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} \xi^j.$$

4. Energy–Momentum of Gravitational Waves

Averaging over several wavelengths (Isaacson prescription) defines the effective GW energy–momentum tensor

$$t_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{\text{TT}} \partial_\nu h_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (6)$$

For a single-frequency plane wave $\rho_{\text{GW}} = \omega^2 A^2 / (32\pi G)$.

5. Radiation and the Quadrupole Formula

In the wave zone ($R \gg$ source size) the metric perturbation is

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 R} \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}} \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (7)$$

The total radiated power is the celebrated quadrupole formula

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle, \quad (8)$$

with $Q_{ij} = \int \rho (x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2) d^3 x$.

¹ $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ throughout.

6. Typical Examples

Equal - Mass Binary:

$$h \sim \frac{4GM\Omega^2 a^2}{c^4 R}, \quad (9)$$

$$P = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 a^4 \Omega^6, \quad (10)$$

where M is the total mass, $\mu = M/2$ the reduced mass, a the orbital radius and Ω the angular frequency.



引力波的物理性质

研究引力波物理性质时，我们通常考虑平面波解：

在这样的形式下，公式(2.8)中，等式左边的后三项均变为零。我们也就得到了线性化
引力在洛伦兹规范下的Einstein场方程

$$-\square h_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

引力波只有两个自由度，规范条件10-4=6，以下给出横向无迹6-4=2：

为了简化计算，我们来考虑一个沿z轴传播的平面波解：

- $h_{\mu\nu}$ 描述的是沿传播方向的位移（即物理长度和坐标之间关系）的振动。这家伙就是通过操作z坐标和对称来消除的。
- 虽然这些不太对称，但是数学上的对称性容易让你相信操作时间坐标可以去掉 h_{00} 。
- 虽然引力波并不在x和y方向上移动，但是操作x、y坐标还是可以干涉 h_{10} 和 h_{20} （这类似于动态地调节x轴上各点的x、y方向和z轴的关系以消去交叉项）。

我们这里定义 $h_{+} = A_1 \exp[i\omega(t+z/c)]$ ，以及 $h_{\times} = A_2 \exp[i\omega(t+z/c)]$ ，将其称为
在横向无迹规范下引力波的加模 (+ 模，plus mode) 和乘模 (× 模，cross mode)。这

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此给出TT规范下的平面波解析

接下来考虑规范条件与“bar”操作：

$\tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$ 规范变换

$\delta^b \tilde{h}_{ab} = 0$ (称为线性引力论的洛伦兹规范条件)。

进阶和坐标：

我们这里只讨论一个线性化的。用 η_{ab} 行指标升降的小量 ℓ_{ab} ，我们都可以定义

$$\ell_{ab} = f_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}f_{\mu\nu}$$

那么线性化的爱因斯坦方程就可以写成

$$R_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

更有意思的是，两次应用bar操作相当于没有操作，也就是要因斯方程两边同时做bar操作才成立。

根据

$$\square \circ \text{bar} = \text{bar} \circ \square$$

在笛卡尔坐标系， $t = x^0$ 分别表示三个坐标轴都为零，所以笛卡尔坐标系中可以得到

$$\ell^{ab} = 0$$

自然，也可以写成

$$\ell_{ab} = g^{ab}\ell_{ab} = 0$$

bar操作

我们这里只讨论一个线性化的。用 η_{ab} 行指标升降的小量 ℓ_{ab} ，我们都可以定义

$$\ell_{ab} = f_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}f_{\mu\nu}$$

那么线性化的爱因斯坦方程就可以写成

$$R_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

更有意思的是，两次应用bar操作相当于没有操作，也就是要因斯方程两边同时做bar操作才成立。

根据

$$\square \circ \text{bar} = \text{bar} \circ \square$$

在笛卡尔坐标系， $t = x^0$ 分别表示三个坐标轴都为零，所以笛卡尔坐标系中可以得到

$$\ell^{ab} = 0$$

自然，也可以写成

$$\ell_{ab} = g^{ab}\ell_{ab} = 0$$

参考：[1] <http://zhijihuang.top/gr/lectures.php> ; [2] <https://wuli.wiki/online/index.html> ; [3] <https://yiminghu-sysu.github.io/>



另一个值得考虑的物理效应是引力波携带的“能量”，这是因为：

在有引力场的情况下，可以定义等效质量能量 ϵ^{ab} 不仅包括了物质的能量 ρ^{ab} ，也包含着 $O(\eta)$ 的引力能。

$$\square \epsilon^{ab} = \frac{16\pi G}{c^4} \rho^{ab} \quad (3.1)$$

利用作用量近似（近似作用量 -> 拉格朗日量 -> 哈密顿量）：

对应的“哈密顿量密度（能量密度）”

$$H = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \rho^{\mu\nu} - \mathcal{L} = \frac{1}{64\pi G} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla h^{\mu\nu} \cdot \nabla h_{\mu\nu} \right)$$

如前所述，这个“能量密度”并不是通常意义上局域能量动量张量的00分量，对其物理意义进行解释时须谨慎！

对于横向无迹单色平面波：

$$\rho_{\text{ew}} = \frac{1}{32\pi G} (h_{+}^2 + h_{\times}^2 + |\nabla h_{+}|^2 + |\nabla h_{\times}|^2)$$

进一步，在低速、局域惯性系忽略二阶小量和小间隔（度规空间偏导为零）：

$$F_j = m a_j = \frac{m}{2} \frac{\partial h_{jk}^{\text{TT}}}{\partial r^2} \xi^k \quad \text{Newtonian力学意义下的检验质量动力学方程}$$

在度规微扰很小的前提下可以直接积分

不妨设一个事件处于原点(0,0,0,0)，另一个事件则为 $x^\alpha = (0, \xi \sin \theta \cos \phi, \xi \sin \theta \sin \phi, \xi \cos \theta)$ ，代入公式2.33，可以得到：

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d^2 x^1}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \xi \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \xi \sin \theta \sin \phi \\ a_2 &= \frac{d^2 x^2}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \xi \sin \theta \sin \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx} \xi \sin \theta \cos \phi \\ a_3 &= \frac{d^2 x^3}{dt^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

注意到，两个事件的距离在z轴上的分量保持不变，这是因为引力波是横波，而我们选用的横向无迹规范中，引力波的传播方向为z轴方向。因此，在引力波传播方向上(z轴)，引力波不会产生作用。

按上述方程做数值模拟，可得引力波的两种偏振图像：

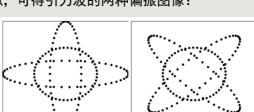


Figure 2-1展示了广义相对论下的两种偏振模式。

先做简单的考虑：

推迟势+远场近似+TT规范

$$\tilde{h}_{\text{TT}}^{ij}(t, x) \approx \frac{2G}{c^4 D} \tilde{h}_{\text{TT}}^{ij}(t) \quad \text{四极辐射引力波}$$

$$I^{ij}(t) = \int x^i x^j \frac{r^{(0)}(t-D/c, x)}{c^2} dx, \quad \text{质量四极矩}$$

接下来做更复杂的考虑：

$$T_{\mu\nu}(t, x) = M_{\mu\nu}(x) e^{-i\omega t} + c.c.$$

远场近似：

当满足 $r \gg a$ (a 为事件方面的单位矢量, r 代表距离) 时，由之前给出的辐射公式有

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(t, x) = -4G \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} M_{\mu\nu}(k) e^{-i\omega(t-r/c|\mathbf{k}|)} + c.c.$$

这里的

$$M_{\mu\nu}(k) = \int d^3 x M_{\mu\nu}(x) e^{-i\omega x \cdot k}$$

是 $M_{\mu\nu}(x)$ ($T_{\mu\nu}$ 的振幅) 的三维傅立叶变换。

单位立体角功率：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \rho_{\text{ew}}(t, \mathbf{n})^2 \rightarrow \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = \frac{r^2}{64\pi G} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla h^{\mu\nu} \cdot \nabla h_{\mu\nu} \right)$$

对单频率源，在方向 \mathbf{n} ，单位立体角内的引力辐射功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{\pi} \left(\mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega n) \mathcal{M}_{\mu\nu}^*(\omega n) - \frac{1}{2} |\mathcal{M}^{\alpha\beta}(\omega n)|^2 \right)$$

这里的 $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ 是 $T_{\mu\nu}$ 的振幅的三重傅立叶变换。

参考：[1] <http://zhijihuang.top/gr/lectures.php> ; [2] <https://wuli.wiki/online/index.html> ; [3] <https://yiminghu-sysu.github.io/>

引力波物理·笔记

对于连续谱，我们考虑的是一段时间的总能量（而非功率）：

$$h_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2G e^{-i\omega(t-t')}}{\pi r} T_{\mu\nu}(k)$$

对连续谱源，在方向 \mathbf{n} 单位立体角内，单位频率间隔的引力辐射总能量为

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2} (T_{\mu\nu}(k) T^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2} |T^0(k)|^2)$$

这里的 $T_{\mu\nu}$ 是 $T_{\mu\nu}$ 的四维傅立叶变换，四维波矢 $k^\mu = (\omega, \omega\mathbf{n})$ 。

进一步，我们仍要考虑四极辐射：

用空空间分量表示的引力波辐射公式

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2} T_{ij}^*(k) T_{ij}(k) P^{(ij)}(\mathbf{n})$$

这里的

$$P^{(ij)}(\mathbf{n}) = (\delta^{ii} - \delta^{jj}) (\delta^{ii'} - \delta^{jj'}) - \frac{1}{2} (\delta^{ii'} - \delta^{jj'}) (\delta^{ii'} - \delta^{jj'})$$

叫做 横向无进波辐射算符。

单频的情况也类似，就不重複推导了：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2}{4\pi} M_1^2(\omega) M_2^2(\omega) P^{(ij)}(\mathbf{n})$$

利用守恒条件，可以将时间分量用空间分量全部表示出来

四极近似的物理场景

如果引力波的运动是半相对论的，那么波源的尺度可能比引力波的波长大多（因两者频率相同，所以可以认为光速传播）。这时就又有了操作的空间——

单频四极辐射公式

记能量密度的四极矩(quadrupole)

$$Q^0 = \int x^i x^j M^0(x) d^3x$$

则 $M^0(\omega) \approx \frac{Q^0}{\omega}$ 。代入到引力波辐射公式里

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Gc^2}{4\pi} Q_1^0 Q_2^0 P^{(ij)}(\mathbf{n})$$

于是

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2} T_{ij}^*(k) T_{ij}(k) P^{(ij)}(\mathbf{n})$$

这叫做 (张量) Virial 定理

在Minkowski时空，对局域、守恒的能量动量张量 $T^{\mu\nu}(x, t)$ ，定义能量密度的四极矩：

$$Q^0(x, t) = \int x^i x^j T^0(x, t) d^3x$$

能量密度四极矩 (含时表述，与T有关)

以单频引力波辐射为例

如果波源的尺度远小于1，那么对波源的振幅 $M^0(\omega)$ 要傅立叶变换时， $e^{i\omega t}$ 可以近似看成1。

$$M^0(\omega) = \int M^0(x) d^3x$$

对质量 $M^0(x)$ 做 $-i\omega$ 变换时，使用virial定理

$$\int M^0(x) d^3x = -\frac{1}{2} \int x^i x^j M^0(x) d^3x$$

连续谱的四极辐射公式

对连续谱，推导完全类似，可以定义

$$Q^0(\omega) = \int e^{i\omega t} dt \int x^i x^j T^0(x, t) d^3x$$

有

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) \approx \frac{G\omega^2}{16\pi^2} Q_1^0(\omega) Q_2^0(\omega) P^{(ij)}(\mathbf{n})$$

简单的双星系统示例

例1：求解振幅

$$I_{11} = m_1(r_1 \cos \varphi)^2 + m_2(r_2 \cos(\varphi + \pi))^2$$

$$= \mu r^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}\mu r^2 (1 + \cos 2\varphi)$$

$$I_{22} = m_1(r_1 \sin \varphi)^2 + m_2(r_2 \sin(\varphi + \pi))^2$$

$$= \mu r^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}\mu r^2 (1 - \cos 2\varphi)$$

$$I_{12} = I_{21} = m_1 r_1 \cos \varphi \sin \varphi + m_2 [r_2 \cos(\varphi + \pi)] [r_2 \sin(\varphi + \pi)]$$

$$= \mu r^2 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2}\mu r^2 \sin 2\varphi$$

$$h_z = -\frac{4G\mu r^2 \omega^2}{c^2 D} \cos 2\varphi$$

$$h_x = \frac{4G\mu r^2 \omega^2}{c^2 D} \sin 2\varphi$$

$$\begin{bmatrix} h_y \\ h_z \\ h_x \end{bmatrix} = \frac{4G\mu r^2 \omega^2}{c^2 D} \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于

$$\int T_{00}(t, x, y, z) x^2 d^3x = MR^2[1 + \cos(2\omega t)]$$

$$\int T_{00}(t, x, y, z) y^2 d^3x = MR^2[1 - \cos(2\omega t)]$$

$$\int T_{00}(t, x, y, z) z^2 d^3x = MR^2[\sin(2\omega t)]$$

所以这是角频率为 2ω 的简谐振荡。且

$$Q_{11} = \frac{MR^2}{2}, Q_{22} = -\frac{MR^2}{2}, Q_{12} = -\frac{MR^2}{2}$$

代入四极辐射公式，得到角频率为 2ω 的引力波辐射强度为

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{2GM^2 R^4 \omega^6}{c^5 D^5} (\sin^2 \theta - 8 \sin^2 \theta + 8)$$

这里的 θ 是 \mathbf{n} 和 x 轴的夹角。

如果对所有方向积分，则得到辐射功率

$$P = \frac{128GM^2 R^4 \omega^6}{5}$$

补充：关于TT投影算符

在一般情况下，对于一个双星系统 T_{ij} (不含时)，分解为2个转动惯量的双曲面和一个无关质量 (2个自由度)。和一个轴向无关的双曲面。

这里的 Φ 是转量。 A_i 是无关质量三矩量，满足 $\nabla A = 0$ (质点间作用力平衡)。可以在 Φ 上和下标加上 i ，这样 T_{ij} 就是 T_{ij}^{TT} 的缩写。

然后乘以 n^i 并代入 Φ, Ψ, Ψ 的解，得到

$$n^i T_{ij} = \frac{T}{3} \eta_j + \eta_j \left(n^k n^l T_{kl} - \frac{T}{3} \right) + A_j$$

即

$$A_j = n^i T_{ij} - \left(n^k n^l T_{kl} \right) \eta_j$$

最后，把 Φ, Ψ, A_j 都代入，得出 $(T^{TT})^{\bar{i}} = P^{(ij)}$ 。

参考：[1] [\[1\] http://zhijihuang.top/gr/lectures.php](http://zhijihuang.top/gr/lectures.php) ; [2] [\[2\] https://wuli.wiki/online/index.html](https://wuli.wiki/online/index.html) ; [3] [\[3\] https://yiminghu-sysu.github.io/](https://yiminghu-sysu.github.io/)

思考题与回答

考考你！

- 往水里扔一块石头，水的流体元的空间位置随着时间波动性地变化。可以说这样：水波是水相对于空间背景的时间周期性振动。引力波通常在科普读物中被描述为“时空的涟漪”那引力波是?? 相对于??? 的?? 周期性振动?
- 爱因斯坦场方程为: $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ ，这里的 $T^{\mu\nu}$ 要包含引力波的能量动量吗?
- 引力波经过引力源附近也会发生偏折吗?
- 引力(波)只有2个物理自由度，神马意思?
- 引力波是横向无迹的，解释下?
- 为什么引力波自旋是2?

(课堂提问) 在常见的引力波相关科普材料中，通常描述的说法是：引力波会引起时空的变化，通过类似于激光干涉，可以测出微小的位移，从而探测出引力波的踪迹。但这里似乎存在一个矛盾之处，引力波的效应对待测的臂长和用于测量的激光波长而言是完全相同的。就好像用热膨胀系数相同的木尺去测量木桌的长度，由于温度对待测物和测量标准的影响相同，不同温度下量出的读数不会发生变化。这样的逻辑似乎没有问题，那么 LIGO 究竟是如何探测到引力波呢?

杨舒云

4



引力波数据处理入门实践

这份笔记来自我的课程期末大作业，仅供参考。

3.1 简介

自 2015 年激光干涉引力波天文台（LIGO）首次成功探测到源于双黑洞并合的引力波事件 GW150914 以来，引力波天文学开启了一个全新的时代。这一成就不仅直接证实了爱因斯坦广义相对论在强引力场区域的预言，更重要的是，它为我们提供了一个前所未有的、观测宇宙的崭新窗口。引力波天文学是一个内容广博、发展迅速的交叉领域，其研究范畴涵盖了从引力波源的物理建模与天体物理研究，到多波段、多信使的协同观测，再到引力波信号的数据处理与分析等多个层面。

一方面，引力波天文学致力于理解引力波源的物理本质。这包括对致密天体（如黑洞、中子星）的形成与演化机制进行建模，研究不同波源（如双黑洞、双中子星、超新星爆发、极端质量比旋近等）的引力波波形与频谱特性，并通过数值相对论、后牛顿近似、有效单体理论等方法精确计算这些波形。另一方面，引力波天文学的发展也极大推动了观测手段的革新，形成了从地面到空间，覆盖纳赫兹到千赫兹的“多波段”观测网络，并开启了与电磁波、中微子、宇宙线等协同观测的“多信使”天文学时代。这些观测不仅有望揭示大质量恒星的生命终点、检验星系与超大质量黑洞的协同演化模型，更能在检验广义相对论、限制引力子质量、探测暗物质、测量宇宙学参数等基础物理学的核心问题上发挥关键作用。

引力波数据处理扮演着连接理论预言与实验观测的核心桥梁角色。引力波信号极其微弱，通常远低于探测器噪声的平均振幅，且探测器数据中广泛存在着非高斯、非稳态的噪声伪影（glitches）。因此，如何从强噪声背景中有效地挖掘出真实的引力波信号，是整个领域面临的首要挑战。与传统的天文观测不同，引力波探测器几乎是全天向的（omni-directional），以宽带（broadband）方式连续采集数据，并且通过相干（coherently）的方式记录引力波的相位信息而非仅仅是强度。这些特性决定了其数据处理策略的独特性和复杂性。

总体而言，引力波数据处理可以根据其核心目标分为两个紧密联系但各有侧重的分支：信号的探测（Detection）与参数的测量（Measurement）。探测的首要任务是回答“数据中是否存在引力波信号？”这一基本问题。它旨在将真实的引力波事件从随机的仪器噪声和环境干扰中区分出来，其核心在于信号识别与误报率评估，即在一定的置信水平上确认信号的存在性。一旦信号被确认探测到，测量的任务便接踵而至，其目标是回答“该信号源于何种天体物理过程，其物理参数如何？”。这涉及从引力波波形中精确地提取出源的质量、自旋、距离、天区位置等一系列物理参数，这一过程也被称为参数估计（parameter estimation）。

引力波探测的核心问题可以表述为：“在一段给定的探测器数据中，是否存在我们感兴趣的引力波信号？”。然而，由于引力波信号的固有强度极其微弱，几乎完全淹没在探测器自身以及周边环境产生的噪声海洋中，我们永远无法对这个问题给出绝对“是”或“否”的回答。因此，探测问题本质上是一个统计决策问题：“我们有多大的信心认为这段数据中包含一个真实的天体物理信号，而不仅仅是噪声的随机涨落？”。为了回答这个问题，科学家们发展出了一系列精密的探测策略，其核心思想是根据信号的先验知识来设计最优的“过滤器”，以最大化信号在噪声背景下的显著性。

对于形态已知的引力波信号，如致密双星并合（Compact Binary Coalescence, CBC）或连续引力波（Continuous Waves），最有效的方法是匹配滤波（Matched Filtering）。这种方法堪称在数据海洋中“大海捞针”的利器。探测器记录的数据流 $s(t)$ 可以看作是引力波信号 $h(t)$ 与噪声 $n(t)$ 的线性叠加，即 $s(t) = n(t) + h(t)$ ，而噪声的强度通常远大于信号。匹配滤波的强大之处在于，尽管我们不知道信号何时到达，但基于广义相对论等物理理论，我们可以相当精确地预测信号的波形形态。这些理论预测的波形被称为模板（tem-

plate)。通过建立一个覆盖不同物理参数（如天体质量、自旋等）的庞大模板库，匹配滤波算法将每一个模板 $h_{\text{template}}(t)$ 在数据流上“滑动”进行相关性计算。这一过程在频率域中通过下式实现，以获得信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR) ρ :

$$\rho \propto \int \frac{\tilde{s}(f) \cdot \tilde{h}_{\text{template}}^*(f)}{S_n(f)} df$$

其中， $\tilde{s}(f)$ 和 $\tilde{h}_{\text{template}}(f)$ 分别是数据和模板的傅里叶变换，而 $S_n(f)$ 是噪声的功率谱密度 (**Power Spectral Density, PSD**)。 $S_n(f)$ 在此处作为权重因子，压低了噪声较强频段的贡献，从而突显出信号。一个高的信噪比意味着数据与某个模板高度匹配。然而，一个高信噪比的“触发”(trigger) 或“候选事件”(candidate event) 也可能由剧烈的非高斯噪声伪影 (glitch) 引起，这构成了假警报 (false alarm)。为了确认一次真实的探测，必须经过一系列严格的检验：首先，候选事件的信噪比必须超过一个预设的阈值；其次，作为一个源于宇宙深处天体的信号，它必须被全球多个地理位置分离的探测器在物理允许的时间窗内同时记录到，即多探测器符合 (multi-detector coincidence)；最后，信号的能量应平滑地分布在各个频段，而非集中于某个窄带，这可以通过信号一致性检验 (如 χ^2 检验) 来排除 glitch 的干扰。只有通过了所有检验，并计算出其假警报率 (False Alarm Rate, FAR) 低至数万年乃至更长时间一遇的候选者，才能被确认为一次引力波事件。

然而，对于那些理论模型尚不完善或完全未知的引力波源，如核心坍缩超新星 (core-collapse supernovae)、宇宙弦 (cosmic strings) 的振荡等，我们无法构建精确的模板，匹配滤波方法便无从谈起。针对这类引力波暴 (Gravitational Wave Bursts) 信号，数据处理采用的是非模板化的暴搜 (burst search) 策略。其核心思想不再是寻找特定的波形形态，而是在时频域中寻找局域性的超额能量 (excess power)。算法通常利用小波变换 (Wavelet Transform) 等工具将一维的时间序列数据转换为二维的时频图，然后在图上寻找能量显著高于背景噪声的“像素团”。区分真实信号与本地噪声伪影的关键，依然是相干性分析 (**coherent analysis**)。一个真实的引力波信号在不同探测器中的时频图上应表现出由其天空方位决定的、特定的时间延迟和能量振幅关系。像 cWB (**Coherent WaveBurst**) 这样的算法，正是通过在多个探测器数据中寻找满足这种相干性约束的能量团来实现探测的。

还有一类更为特殊的信号是随机引力波背景 (Stochastic Gravitational Wave Background, SGWB)。它并非孤立事件，而是由大量无法分辨的、来自全天区的独立信号（如宇宙早期产生的原初引力波或遥远致密双星的并合信号）叠加而成的持续性背景。探测这种信号的策略是利用“相关性”。单个探测器内部的噪声是相互独立的，而来自宇宙的随机背景对于所有探测器而言是相关的 (correlated)。因此，通过计算一对 (或多对) 探测器数据流的交叉相关 (cross-correlation)，噪声的贡献会随着积分时间的增长而平均为零，而共享的引力波背景信号则会逐渐累积并凸显出来。当然，在实际计算中还需考虑探测器的几何位置和方向对信号相关性的影响，这由重叠折减函数 (Overlap Reduction Function) 来描述。

由是观之，引力波之探测，实乃层叠精微、奥旨无穷之域。因人间智者所怀先验之知，遂衍化出种种探微之术，各臻其妙：或凭精确物理之图谱，如同古琴调弦，匹声而和，觅那时空微澜；或布苍穹之罗网，搜寻未识之能团，若夜猎流星，捕其倏忽光华；或凝神谛听，凭微光之暗合，交织幽隐之响，读那宇宙背景之绵绵低语。斯诸法融汇，若匠心所铸华章，共成一部聆听星河秘语之瑰丽乐章，使吾辈得以窥探乾坤深处之无声回响。

3.2 说明

本章实践主要围绕以下流程展开：数据检索、下载与预处理；数据白化与带通滤波；匹配滤波；基于简单统计方法的误警率 (false-alarm rate) 评估；以及时频图可视化。为具体展示上述流程，本文选取了四个代表性引力波事件作为分析对象，它们分别是 GW150914、LVT151012、GW151226 与 GW170104。为保证正文的简洁与流畅，本章将主要以首例引力波事件 GW150914 的数据处理结果作为示例进行阐述，而针对其他几个事件的分析结果则统一收录于文末的附录 A 中，以免多图影响阅读体验。

考虑到本章所涉及的基础理论与操作方法在教材 [4] 与教程 [5] 中已有详尽的论述，本章将不再赘述其理论细节，而是将重点置于实践过程的复现与结果的展示。

所有结果均由本人编写的 Python 脚本生成，完整代码已上传至 GitHub 仓库。如有需要，敬请查阅。

3.3 数据的寻找、下载与预处理

这篇调研报告的引力波数据均源于引力波开放科学中心(Gravitational Wave Open Science Center, GWOSC)，这是一个由 LIGO-Virgo-KAGRA (LVK) 合作组织维护的公开数据发布平台。为入门学习与实践，我首先采用了由教程[5]所提供的一套结构化的数据集，该数据集可从其 GitHub 仓库中获取。此数据集为后续的分析流程提供了一个理想的起点，其中包含一个名为 `BBH_events_v3.json` 的元数据文件，该文件以 JSON 格式详细记录了四个双黑洞并合事件的关键信息，例如事件发生的 GPS 时间、推荐的采样率、用于带通滤波的频率范围，以及对应的原始应变数据和理论波形模板的文件名。

原始的引力波应变 (strain) 数据以 HDF5 (Hierarchical Data Format v5) 格式存储，每个文件包含对应事件前后总计 32 秒的探测器记录。在 HDF5 文件内部，核心的时序应变数据位于路径 `strain/Strain` 下。与原始数据相匹配的，是用于匹配滤波的理论波形模板，它们同样以 HDF5 格式提供。值得注意的是，这些模板数据包含了引力波的两种独立偏振模式，即“+”模 (plus polarization) 与“×”模 (cross polarization)，这为后续进行更精细的信号分析提供了可能。

作为初步的预处理，我通过自定义脚本将 HDF5 中的时序数据提取为 CSV 格式以方便使用。

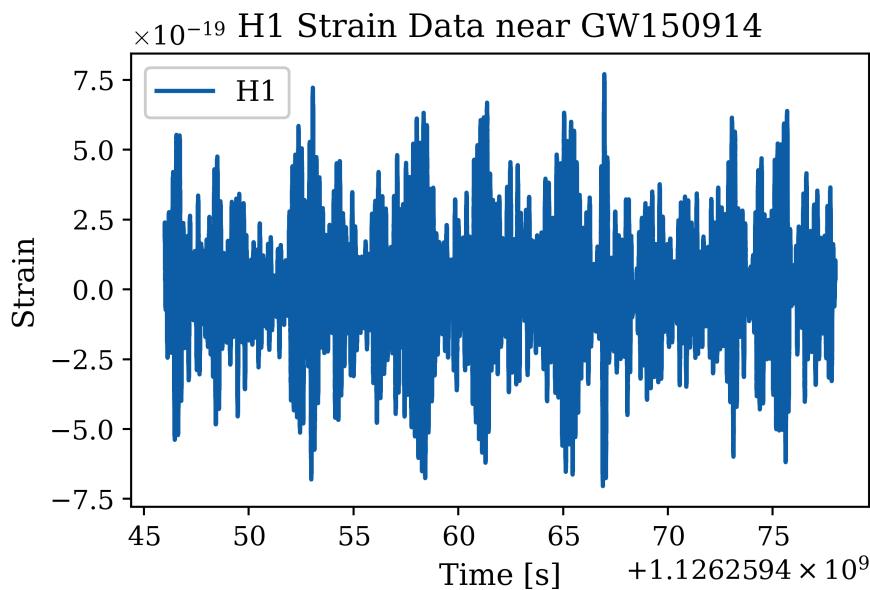


图 1: 32s 的 GW150914-H1 原始应变数据

但接下来我找到了 `GWpy` 这一工具包，它专为引力波数据分析设计，提供了强大的数据读取、处理和可视化功能，能够直接与 GWOSC 发布的标准 HDF5 文件进行交互，从而极大地简化了数据预处理的流程。

此外，考虑到后续章节将要进行的基于统计原理的误警率评估（将在 2.4 节详述），仅仅 32 秒的事件数据在估计背景噪声的随机涨落时是远远不够的。因此，我从 GWOSC 的数据档案中，额外获取了针对首次直接探测到的引力波事件 GW150914 的、长达 4096 秒的连续背景噪声数据（具体文件为 `L-L1_LOSC_4_V2-1126257414-4096.hdf5`）。在这篇调查报告的这个步骤及之后流程中，所有数据的读取与预处理工作，均由此前述的 `GWpy` 工具包完成。

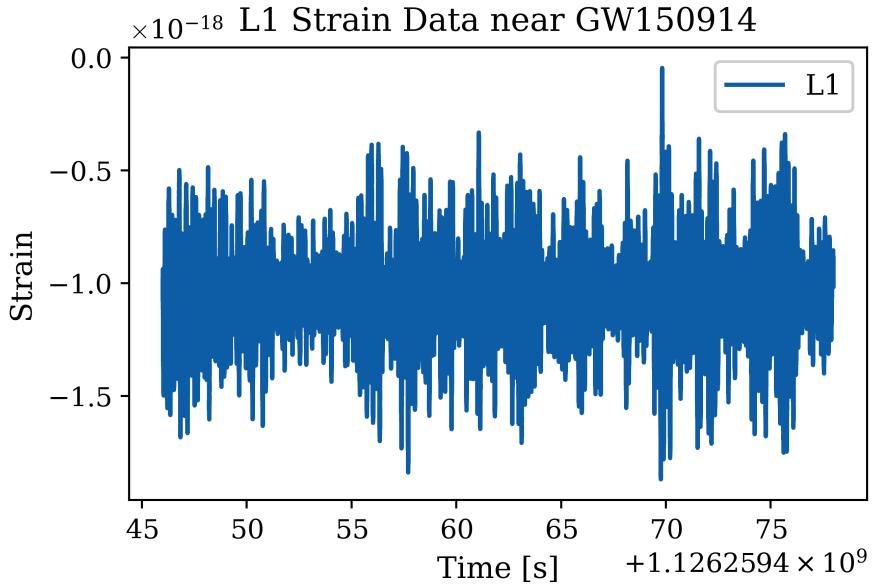


图 2: 32s 的 GW150914-L1 原始应变数据

在此基础上，我对 GWOSC 提供的数据也做了一些了解。数据流的非稳态特性，很大程度上源于探测器本身的故障或外界环境干扰所引入的短时脉冲式噪声，这些噪声伪影通常被称为“glitch”。由于这些脉冲在时域上的形态与致密天体并合产生的引力波信号有相似之处，它们极易与匹配滤波所用的短周期波形模板产生较高的匹配度，从而导致极高的误报率（false alarm rate）。为解决此问题，LIGO-Virgo-KAGRA 合作组织建立了一套完善的数据质量（Data Quality, DQ）评估体系。该体系利用成千上万个辅助通道（例如地震仪、磁力计、麦克风等）持续监控着探测器的运行状态和周边环境，并为数据流的每一秒都标记上相应的质量等级。数据质量标记被划分为几个层级。第一类（CAT1）是最低级别，代表数据存在严重问题，完全不可用于科学分析，这些数据段会被直接废除。第二类（CAT2）标记则指向那些已知存在仪器或环境噪声来源的数据时段，例如附近发生强烈地震。第三类（CAT3）则标识出引力波主通道与某些环境监控通道之间存在不明原因的统计相关性的时段。这些标记是逐级否决的，即一段被标记为 CAT1 的数据，必然也无法满足 CAT2 及更高等级的要求。

3.4 白化与带通滤波

引力波探测器输出的原始应变数据，其噪声并非是统计特性均匀的白噪声，而是表现出极强的频率依赖性，主要由低频段的地震噪声、量子噪声以及各种共振线噪声叠加而成。这种有色噪声的功率谱密度（Power Spectral Density, PSD）在不同频率上可相差数个数量级，会掩盖频谱特性与噪声相似的微弱引力波信号。因此，在进行信号搜索之前，必须对数据进行白化（Whitening）。此外，带通滤波（Band-pass Filtering）选择探测器更灵敏的频段能帮助我们更好地看到信号。

白化的首要前提是准确估计出噪声的功率谱密度 $S_n(f)$ 。与教程不同，我采用了韦尔奇方法（Welch's method）来计算 PSD，该方法是周期图法（Periodogram）的一种改进。与直接对整段数据进行傅里叶变换计算 PSD 的周期图法相比，韦尔奇方法通过将长时间序列数据分割成若干可能重叠的子段（segments），对每一子段应用窗函数（window function）以抑制频谱泄漏（spectral leakage），然后分别计算其周期图，最后将所有子段的周期图进行平均。这个平均过程能够有效地减小估计的方差，从而得到一个更为平滑和可靠的 PSD 估计。结果如图 4 所示。

白化是在频域中进行的一种数据归一化操作。具体而言，我们将数据的傅里叶变换 $\tilde{h}(f)$ 除以噪声功

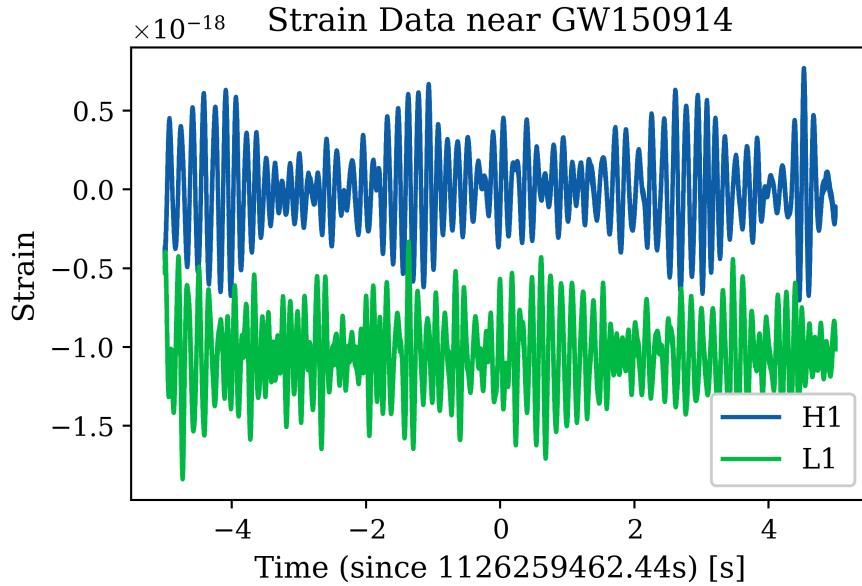


图 3: GW150914 事件发生时刻附近的原始应变数据

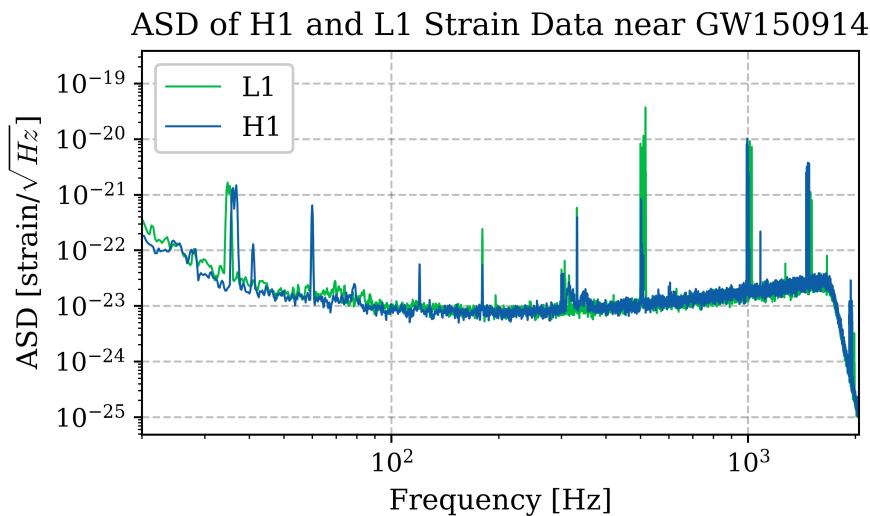


图 4: GW150914 的噪声加速度谱密度

率谱密度的平方根 $\sqrt{S_n(f)}$, 从而使得处理后的数据在频域上具有近似平坦的功率谱。数学上, 白化后的数据 $\tilde{h}_w(f)$ 可以表示为:

$$\tilde{h}_w(f) = \frac{\tilde{h}(f)}{\sqrt{S_n(f)/2}}$$

此处的因子 $1/2$ 是由于通常使用单边 PSD。白化后的应变数据如图 5 所示。

通过白化, 噪声的统计特性变得接近高斯白噪声, 这使得信号在噪声背景中具有了均等的权重, 是后续匹配滤波等算法能够高效运行的基础。尽管白化是后续分析中不可或缺的步骤, 但完成白化后的时序数据在视觉上依然是噪声主导的, 通常无法直接辨认出引力波信号的踪迹。

在此过程中, 我也注意到有限时长数据进行傅里叶分析时固有的频谱泄漏问题, 如图 6 所示, 该问题的详细理论分析与图示已收录于附录中。

为了进一步提高信噪比并剔除不包含信号信息的频段, 我接着对白化后的数据进行了带通滤波。根据教程[5]中的建议, 我选择了 30 Hz 到 300 Hz 作为信号存在的容许频段。低于此范围的噪声主要由地面振动

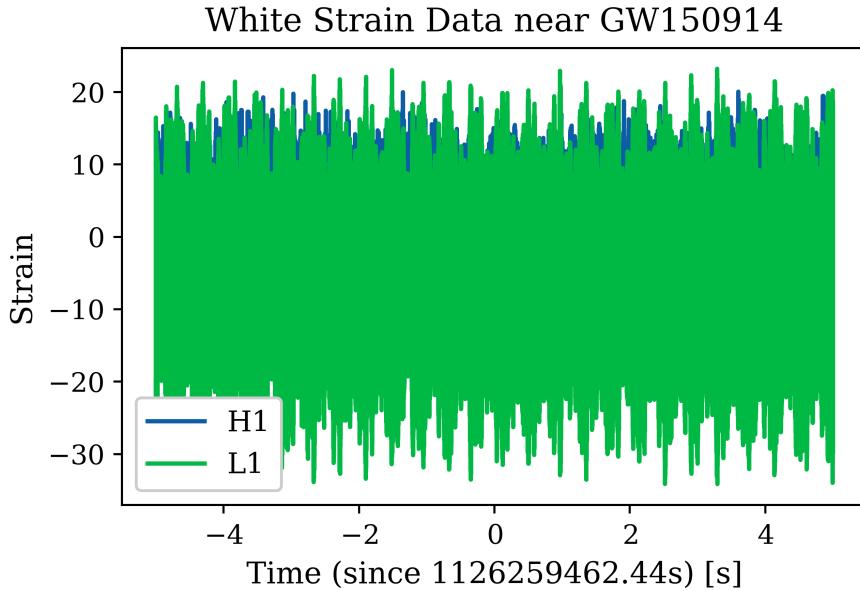


图 5: GW150914 白化后的事件发生时刻附近的应变数据

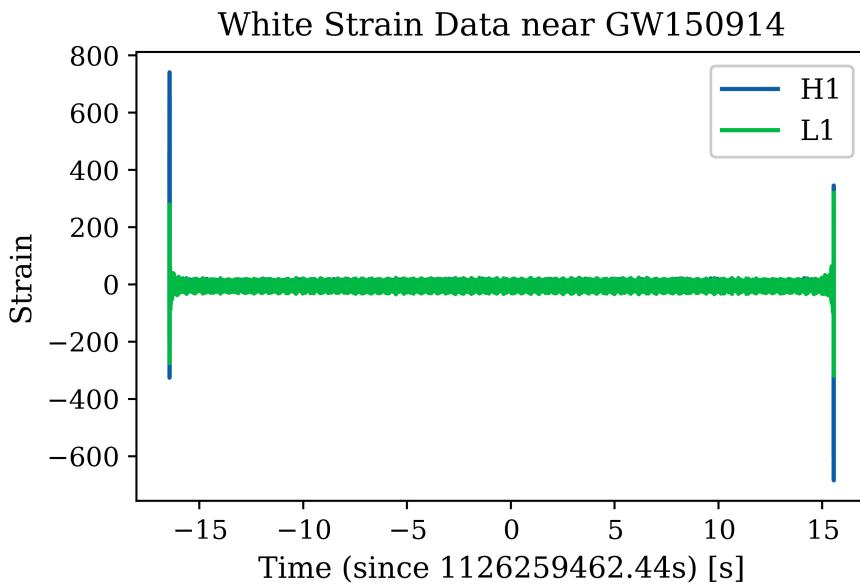


图 6: GW150914 白化后的完整应变数据：可以注意到在边缘出现了不对劲的高峰。

引起，而高于此范围的噪声则以探测器的散粒噪声 (shot noise) 为主。滤波器的选择上，我采用了巴特沃斯滤波器 (Butterworth filter)，该滤波器因其在通带内具有最大限度平坦的频率响应、无波纹 (ripple) 的特性而被广泛应用。为了避免滤波过程引入的相位延迟导致波形失真，我使用了 ‘scipy.signal’ 库中的 ‘filtfilt’ 函数。该函数通过对信号进行一次前向滤波和一次反向滤波，实现了零相位失真的效果，从而精确地保留了引力波信号的形态与到达时间信息。如图 7 所示，经过带通滤波后，引力波信号的轮廓，特别是其频率随时间演化的“啁啾”(chirp) 特征，在数据中已然变得清晰可辨。

此外，如果通过校正光锥延迟并其中一个探测器（如 L1）的信号进行反相，我们可以观察到不同探测器记录到的信号在很大程度上能够重合。

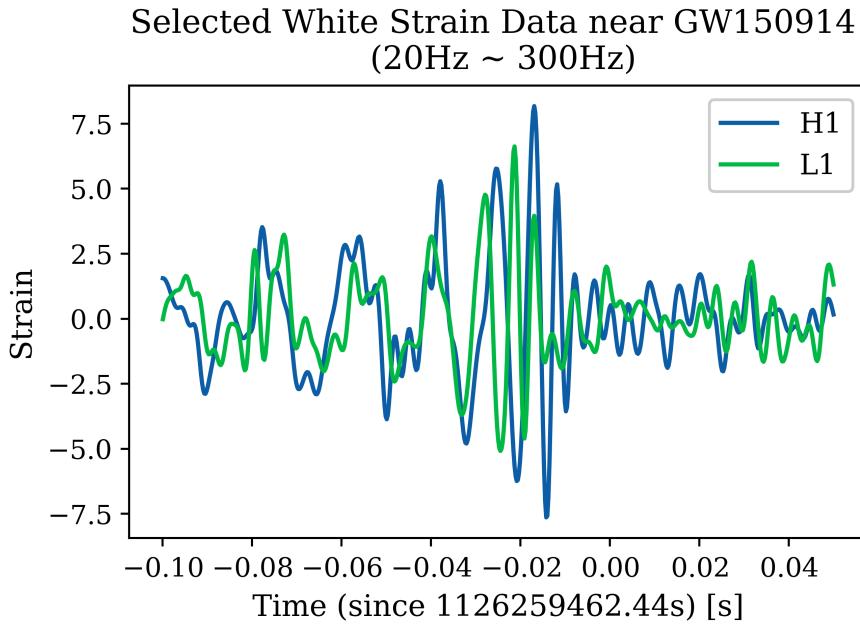


图 7: GW150914 带通滤波后的事件发生时刻附近的应变数据

3.5 匹配滤波

在完成了数据的预处理与滤波之后，我们进入了从噪声中识别引力波信号的核心步骤——匹配滤波 (Matched Filtering)。匹配滤波是在假定噪声为高斯且平稳的条件下，从含噪数据中寻找一个已知形态的信号（即波形模板）的最优线性滤波器。其基本思想是计算信号与模板的互相关，当模板的形态与数据中嵌入的信号形态高度吻合时，滤波器的输出，即信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR)，将达到最大值。在这篇调查报告的实践中，我的目标是应用匹配滤波来计算经过白化处理的应变数据与同样经过白化处理的波形模板之间的 SNR 时间序列，并验证在已知的事件发生时刻附近，该 SNR 序列是否能如预期般呈现一个显著的峰值。

在具体实施中，一个关键的技术细节是如何处理波形模板的两个正交偏振分量 $h_+(t)$ 和 $h_\times(t)$ 。由于探测器对引力波的响应是这两个分量的线性组合，而其具体的组合系数（即天线模式函数）取决于波源在天空中的方位和偏振角，这些参数在搜索阶段是未知的。为了解决这个问题，我们将两个偏振分量通过引入一个单位复数相位因子的方式，整合成一个有效的复合波形模板。通过将此复合模板与数据进行匹配，我们可以最大化 SNR，并同时估计出最佳的相位参数，从而实现对真实信号的有效恢复。

采用上述方法，我们对 GW150914 事件的数据进行了匹配滤波处理。如图 8 和图 9 所示，结果非常理想，滤波后的应变数据与最优匹配的波形模板展现了高度的一致性，并在预期的 GPS 时间点附近得到了极高的信噪比。具体地，如图 10 所示，对于 Hanford (H1) 探测器，SNR 的最大值出现在 GPS 时间 1126259462.4395 处，大小为 18.6；如图 11 所示，对于 Livingston (L1) 探测器，SNR 的最大值出现在 GPS 时间 1126259462.4324 处，大小为 13.2。这一成功的验证表明我们的数据处理流水线在基本流程上是正确且有效的。

然而，在处理数据集中其余三个事件时，该流程遇到了阻碍。最初的尝试无法复现出预期的 SNR 峰值，即出现了“匹配不上”的问题。通过对代码的排查以及对相关教程和文献的深入学习，我意识到这个问题的根源在于前文提及的能量泄露。由于数据段的截取引入了不连续性，在傅里叶变换后产生了虚假的频率分量，严重干扰了白化和匹配滤波的准确性。为此，我们在傅里叶变换之前，对数据应用了窗函数 (Window Function) 进行平滑处理。在将此项改进整合进代码后，先前遇到的匹配失败问题得以解决，所有事件的

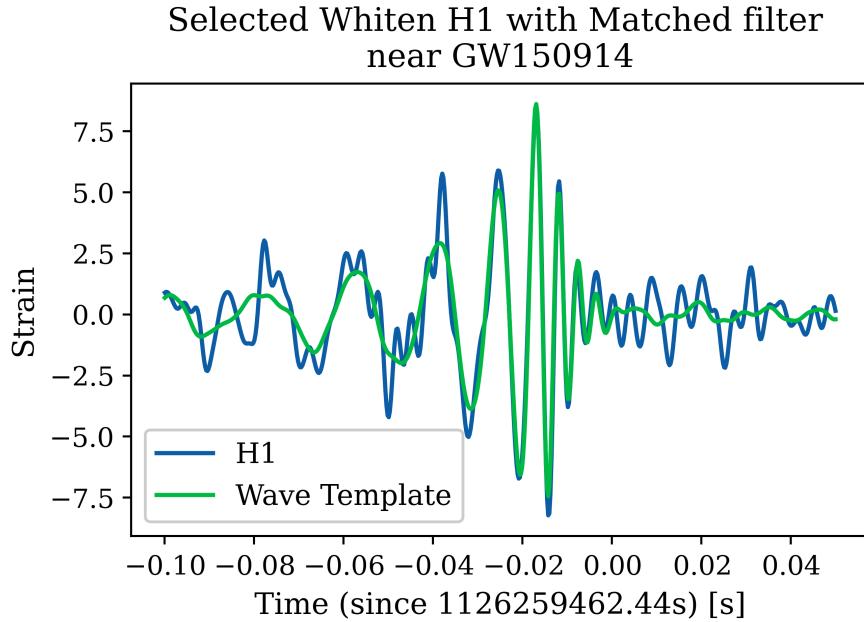


图 8: GW150914-H1 波形匹配

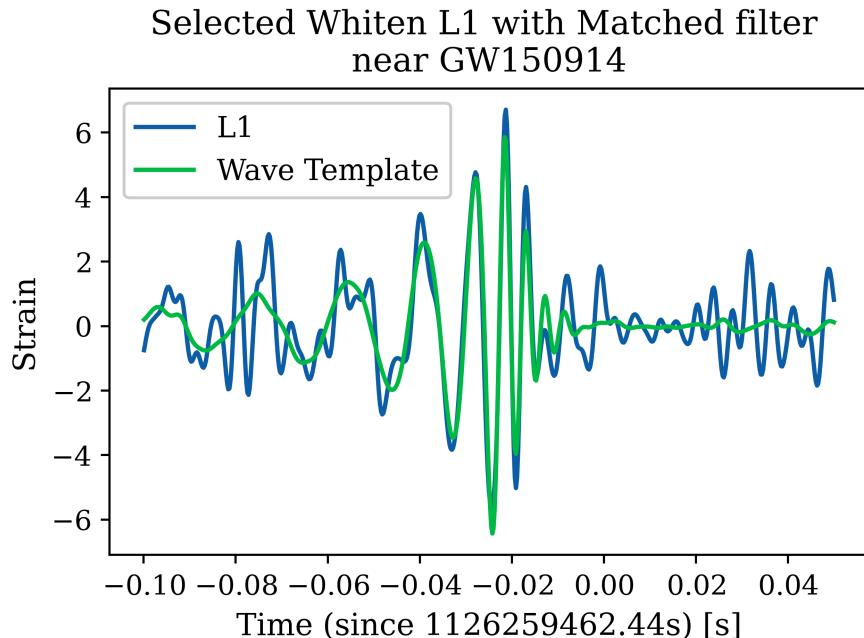


图 9: GW150914-L1 波形匹配

匹配滤波流程均得以顺利完成，并获得了显著的 SNR 峰值。

3.6 基于简单的统计原理的误警率评估

尽管在 2.3 节中，我们通过匹配滤波成功地在预期的 GPS 时间附近识别出了高信噪比（SNR）的候选信号，但这本身并不足以作为引力波事件的确凿证据。探测器本质上是复杂的物理仪器，其输出数据中不可避免地会包含由环境扰动或仪器自身不稳定性产生的非高斯、非平稳的噪声伪影（glitch）。这些伪影有时也可能在匹配滤波后产生较高的 SNR 值。因此，必须对候选信号的统计显著性进行评估，量化其由随

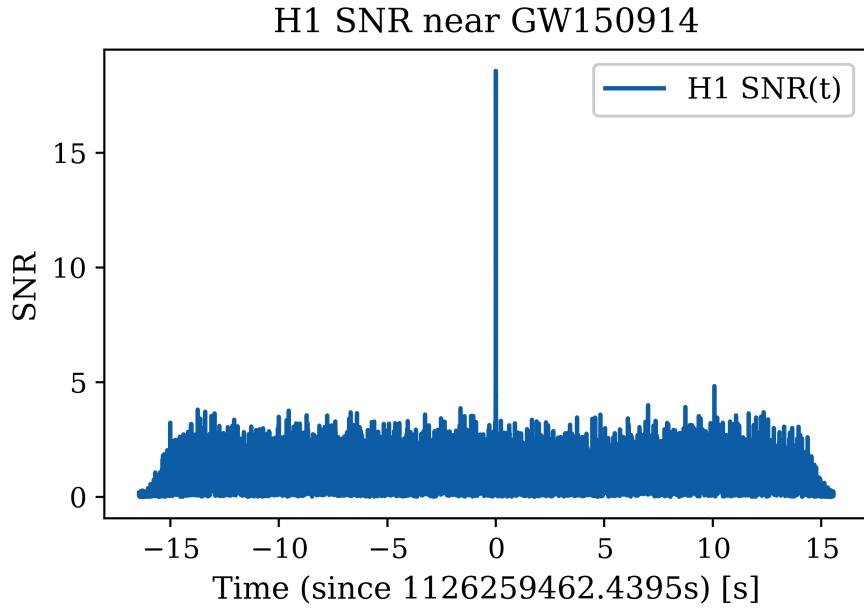


图 10: GW150914-H1 信噪比

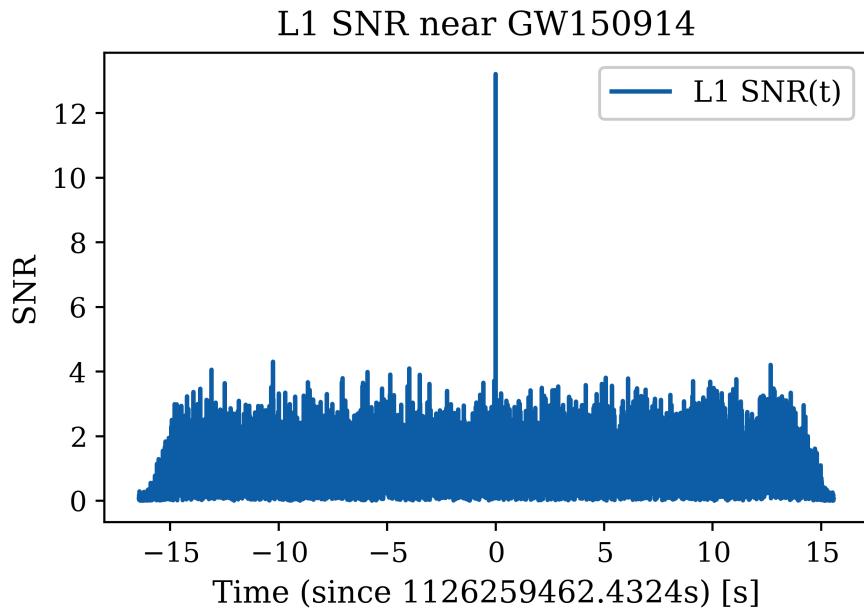


图 11: GW150914-L1 信噪比

机噪声偶然产生的可能性，这一评估通常通过误警率（False Alarm Rate, FAR）来表征。

为了评估误警率，我们利用了引力波探测网络的一个核心优势：一个真实的、源于遥远宇宙的天体物理信号，会在地理位置分离的多个探测器中产生具有内在一致性的响应；而局域的噪声伪影则通常是相互独立的。基于这一原理，我设计了一种综合一致性检验评分机制，用以量化由匹配滤波找到的、来自 LIGO-Hanford (H1) 和 LIGO-Livingston (L1) 两个探测器的候选者之间的一致性。该评分由三个关键部分加权构成。第一部分是到达时间一致性得分 (S_{time})，它惩罚那些到达时间差 $|\Delta t|$ 超出光在两探测器间传播所需最大时间 ($\Delta t_{max} \approx 10.014$ ms) 的候选事件对。第二部分是相干信噪比得分 (S_{SNR})，它基于多探测器联合分析得到的网络信噪比 ρ_{net} 进行评分，一个更高的一致性信噪比意味着信号在网络中整体表现更强、更一致。第三部分是参数一致性得分 (S_{param})，该得分旨在检验从两个探测器数据中独立估计出

的信号参数是否自洽，在这篇调查报告的简化框架下，我们主要比较了有效距离 d_{eff} 的相对差异和合并相位 ϕ_c 的周期性差异。这三项子得分最终通过加权平均汇成一个最终的一致性得分 S_{final} ，其值域为 [0, 1]，分数越接近 1，代表两个探测器的候选信号越符合来自同一天体物理源的预期。

为了确定一个给定的 S_{final} 得分的统计意义，我采用了在引力波数据分析中广泛应用的“时域平移”(time-slide) 方法来构建背景噪声模型。如图 12 所示，该方法的核心思想是，通过将一个探测器的数据流相对于另一个在时间轴上进行一个远大于 Δt_{max} 的平移（例如数秒），可以完全打破任何可能存在的真实天体物理信号在两个探测器之间的物理关联性。在此之后，对这对时间错位的数据进行同样的一致性分析，任何被发现的“共事”事件都只能归因于两个探测器中不相关的噪声涨落的随机偶合。通过重复进行多次不同的时间平移，我们便可以生成大量的、纯粹由噪声构成的背景样本，从而建立起一致性得分 S_{final} 的背景分布。

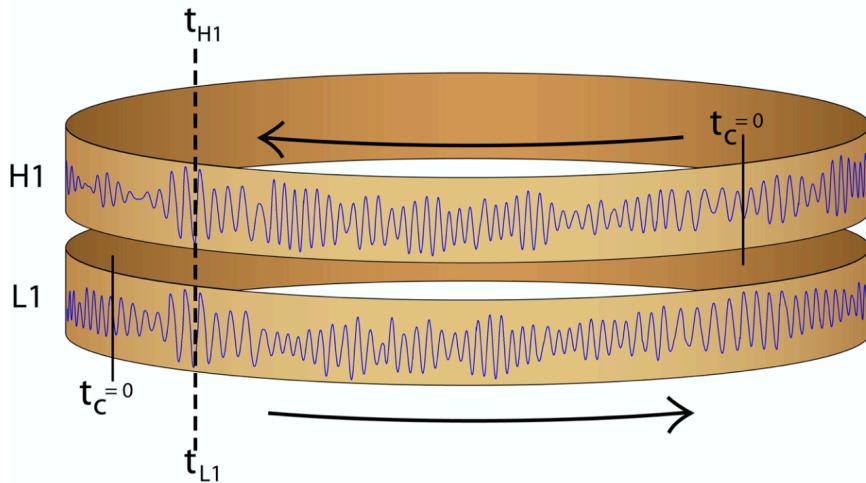


图 12：时域信号平移技术的示意图（来自参考文献[8]）

具体到本次对 GW150914 事件的分析，作为对原理的简单学习和应用，我采用了如下流程：将 H1 探测器包含事件的 32 秒数据段保持不动，同时将 L1 探测器一段长达 4096 秒的背景数据切分为 128 个不重叠的 32 秒数据段。对这 128 个 L1 数据段中的每一个，都执行了 10 次独立的随机时间平移（平移量在 1 至 3 秒之间，并采用环状连接以保证数据长度不变），从而总共生成了 $128 \times 10 = 1280$ 组时间错位的 H1-L1 数据对。有次对这 1280 个背景样本中的每一个都执行了完整的匹配滤波与一致性检验流程，计算出其 S_{final} 得分。

这一过程的结果如图 13 所示。图中蓝色直方图展示了通过时域平移方法生成的 1280 个背景事件的一致性得分 (Background Scores) 的统计分布，该分布的均值约为 $\mu = 0.31$ ，标准差为 $\sigma = 0.05$ 。这个分布代表了随机噪声能够产生的 S_{final} 得分的概率密度。与之形成鲜明对比的是图中由绿色虚线标出的真实 GW150914 事件的得分，其值为 0.46。从图中可以清晰地看出，真实引力波事件的得分是一个显著的离群值，远远位于背景分布的右侧尾部。这直观地表明，由随机噪声偶然产生一个如此之高、乃至更高的一致性得分的概率是极低的。通过计算该得分在背景分布中的 p-value，我们便可以量化此事件的误警率，从而以极高的置信度断定 GW150914 是一个真实的引力波信号，而非探测器噪声的偶然涨落。

3.7 时频图

除了在前述章节中依赖于波形模板的匹配滤波分析方法，时频分析为我们观察和理解引力波这类瞬变信号提供了另一种强大而直观的视角。时频图 (Spectrogram) 能够将一维的时序信号在二维平面上展开，

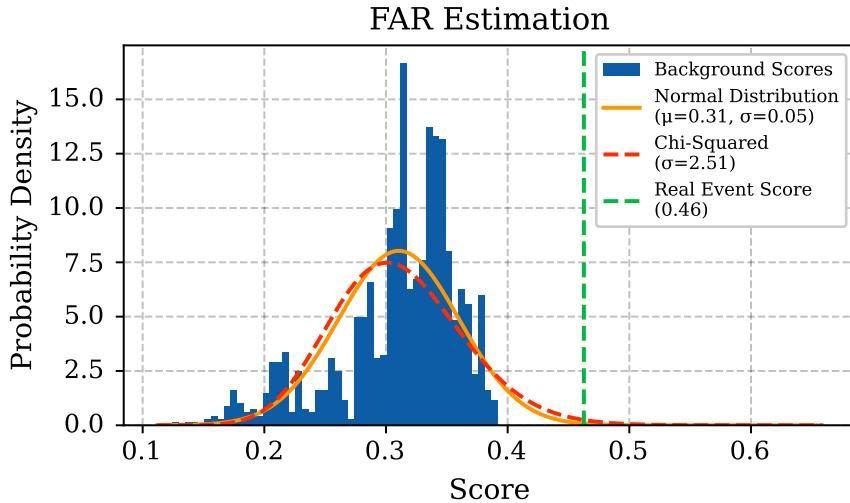


图 13: 对 GW150914 进行基于简单的统计原理的误警率评估

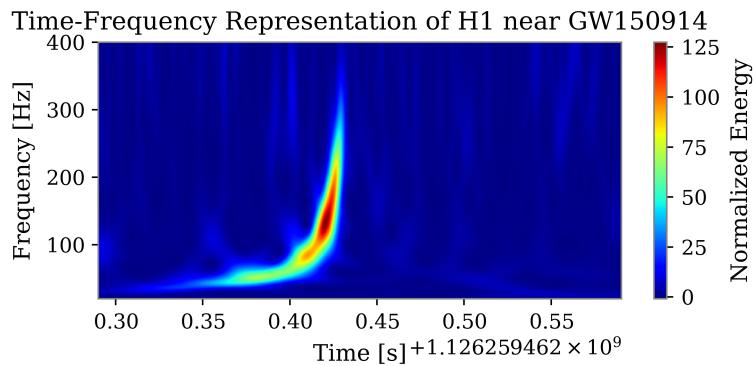


图 14: GW150914-H1 时频图 (20~400Hz)

同时展示信号的能量（或功率）是如何随时间和频率两个维度共同演化的。对于如同双黑洞并合这类事件所产生的啁啾信号（chirp signal）——其频率和振幅随时间演进——时频图能够将其特征形态直接可视化，从而作为一种重要的辅助分析与识别工具。

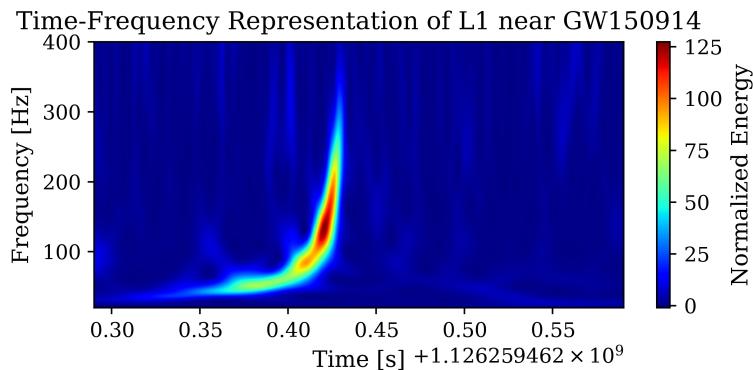


图 15: GW150914-L1 时频图 (20~400Hz)

在本次学习与实践中，我采用了 Q 变换（Q-transform）来生成引力波数据的时频图，该方法的具体实现得益于 Gwpy 软件包提供的便捷接口。Q 变换是一种在时频分析中具有独特优势的技术，特别适用于分

析像引力波啁啾信号这样频率随时间变化的信号。与标准的短时傅里叶变换（STFT）使用固定的窗函数长度不同，Q 变换的窗函数长度会根据频率进行调整，其核心特性是拥有一个恒定的品质因子 Q （即频率与分辨率之比）。这使得它在低频段具有较高的频率分辨率（能够分辨精细的频率变化），在高频段具有较高的时间分辨率（能够精确定位快速变化的事件），这与双黑洞系统在旋进末期频率快速扫过高频区域的物理特性完美契合。

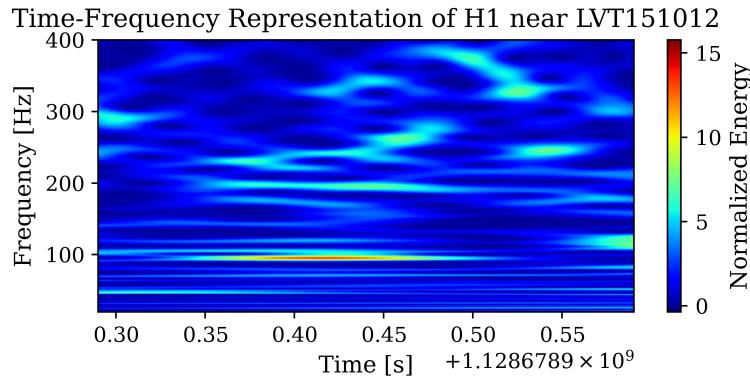


图 16: LVT151012-H1 时频图 (20~400Hz)

将 Q 变换方法应用于 GW150914 事件的真实数据，其结果如图 14 和图 15 所示。图中可以清晰地观察到一条能量显著的轨迹，该轨迹的频率随着时间的推移而单调升高，振幅也随之增强，最终在信号峰值处截止。这正是致密双星系统在旋进、并合阶段所辐射引力波的典型“啁啾”形态，该图像为 2.3 节中匹配滤波所得到的高信噪比结果提供了一个鲜明、直观的视觉佐证。特别地，我展示了对 LVT151012 事件进行了同样的时频分析得到的时频图，如图 16 和图 17 所示。令人疑惑的是，其上没有任何时频图痕迹，到目前为止我还不知道为什么。

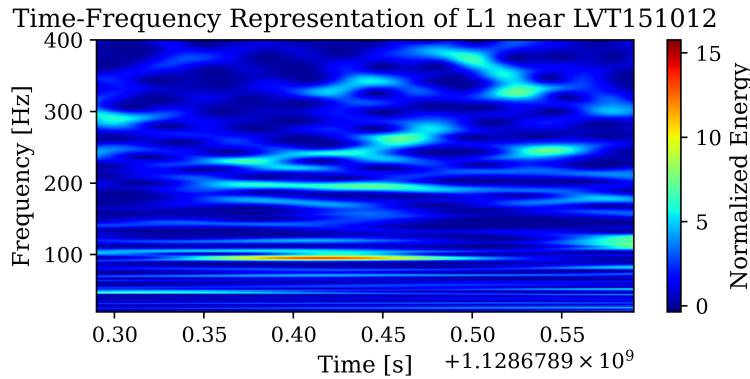


图 17: LVT151012-L1 时频图 (20~400Hz)

参考文献

- [1] 胡一鸣 引力波物理 [U]. 未出版讲义, 中山大学物理与天文学院天琴中心, 2022, 20220624 版, <https://yiminghu-sysu.github.io/>.
- [2] 黄志琦 广义相对论 (课件 GR20~GR23) [U]. 课件, 中山大学物理与天文学院, 2023, 在线获取: <http://zhiqihuang.top/gr/lectures.php>.
- [3] 梁灿彬, 周彬 微分几何入门与广义相对论 (第二版, 上中下册) [B]. 高等教育出版社, 2020, 全三册.
- [4] 胡一鸣 引力波物理概论 [讲义]. https://github.com/yiminghu-SYSU/GW_DA_notes, 2025 年 5 月 14 日, N/A.
- [5] LIGO Scientific Collaboration Gravitational Wave Open Science Center BBH Event Tutorial Notes[在线教程]. *Gravitational Wave Open Science Center (GWOSC)*, 2019 年 6 月, N/A.
- [6] Duncan M. Macleod, Joseph S. Areeda, Scott B. Coughlin, Thomas J. Massinger, Alexander L. Urban GWpy: A Python package for gravitational-wave astrophysics[期刊文章]. *SoftwareX (Elsevier)*, 2021 年, 第 13 卷, 100657 页.
- [7] 王赫 引力波探测中关于深度学习数据分析的研究 [博士论文]. 北京师范大学物理系, 2020 年 6 月, N/A.
- [8] Paul Thomas Baker Distinguishing Signal from Noise: New Techniques for Gravitational Wave Data Analysis[博士论文]. *Montana State University*, 2013 年 8 月, N/A.

附 录

A 课程讲义大纲

以下内容均来自张建东老师的课程讲义，所有编写均由老师完成，版权所有归属张建东老师，这里默认按 CC BY-NC-SA 4.0 协议仅做转载。

来源参考<https://www.overleaf.com/project/67c6f33a7cbc219727780fb1>，张建东老师个人信息见<https://spa.sysu.edu.cn/zh-hans/teacher/181>，如有侵权请联系本人<https://github.com/pifuyuini>。

A.1 狹义相对论的几何诠释

1. 狹义相对论的基本原理：狹义相对性原理、光速不变原理。

伽利略相对性原理：所有运动规律在不同的惯性系中形式相同。

伽利略变换： $\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{A} + \vec{v}t, t' = t$

狹义相对性原理：任何物理规律在不同的惯性系中形式相同。

洛伦兹变换： $t' = \gamma(t - vx), x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

光速不变：在不同的惯性系中，光在真空中的速度相同。

几何单位制： $c = G = 1$

2. 基本概念：时空、事件、世界线、固有时、光锥

时空：时间和空间的统称。四维（3+1 维）坐标： (x^0, x^1, x^2, x^3) 或 (t, x, y, z)

线元：时空中相邻两点间的距离： $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ，在坐标变换下不变。

线元的分类： $ds^2 > 0$ 为类空， $ds^2 < 0$ 为类时， $ds^2 = 0$ 为类光。

度规： $g_{\mu\nu}$ ，平直时空（适用狹义相对论）为闵氏度规 $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$

在洛伦兹变换 $y^\alpha = \Lambda_\mu^\alpha x^\mu$ 下，闵氏度规不变： $\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta_{\mu\nu}$

事件：时空中的一个点。

世界线：时空中的一条曲线，可以用参数方程表示： $x^\nu(\lambda)$

世界线的切矢量： $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

世界线的分类：根据切矢量的模方 $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ 的符号分为类时、类空、类光

光锥：从某个事件发出的类光世界线的集合，是标志时空中两点之间是否有因果性的分界面

因果性：可以用类时曲线相连的两点之间具有因果关联。

固有时：沿类时世界线运动的时钟的走时 τ ，对应类时曲线的长度， $ds^2 = -d\tau^2$

$\Delta\tau = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{-ds^2} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$

若沿 x 方向运动，有 $\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{dt^2 - dx^2} = \int_A^B \sqrt{1 - v^2} dt < t_B - t_A$

动钟变慢，两点之间的世界线的固有时，直线最长

A.2 狹义相对论的运动学

1. 运动粒子：世界线、四速度、四动量

类时世界线参数：可选择 $\lambda = \tau$

四速度： $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, \vec{v})$ ，三速度 $v^i = \frac{u^i}{u^0}$

四动量： $p^\mu = mu^\mu = (E, \vec{P})$ ， $E = m\gamma \sim m + \frac{1}{2}mv^2$ ， $\vec{P} = m\gamma\vec{v} \sim mv$

满足性质： $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1$ ， $p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = -m^2$ ， m 为粒子静止质量

四加速度: $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$

例 1: 速度的变换

无质量粒子的四速度: $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$, 不可定义固有时, 采用仿射参数 λ

无质量粒子的四动量: $p^\mu = \hbar k^\mu$, $E = \hbar\omega$, $\vec{P} = \hbar\vec{k}$

2. 观测余观测者

观测者: 某条类时世界线, 当与其它世界线相交于某一点时, 发生观测。

实验室系: 观测者共动参照系, 观测者静止。

坐标基矢: 时间基矢为观测者四速度: $e_0 = u_{obs}$, 空间基矢满足正交关系。

能量的观测: 四动量为 p^μ 被观测者观测到的能量为 $E = -p^\mu u_{obs}^\nu g_{\mu\nu}$

例 2: 光的多普勒效应

A.3 张量及其运算

1. 张量的定义

张量的(不严格)定义: 有多个指标的量, 在坐标变换下分量按特定规则变换。

一般坐标变换: $x^\mu \rightarrow y^\alpha(x^\mu)$

逆变矢量(切矢量): 一个上指标 A^μ , 变换为 $A^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu$

协变矢量(余矢量、对偶矢量): 一个下指标 A_μ , 变换为 $A_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} A_\mu$

(k,l)型张量: 有 k 个上指标, l 个下指标

例子: 标量为 (0,0), 逆变矢量为 (1,0), 协变矢量为 (0,1), 度规张量为 (0,2)

逆度规: (2,0) 张量, $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} g_{\mu\rho} = \delta_\rho^\nu$

指标的对称: 两个指标(上下相同)交换后, 分量不变, 则两个指标对称

指标的反对称: 两个指标交换后, 分量变号, 则两个指标反对称

2. 张量的基本运算

张量积: 几个张量直接写在一起, 如 $C_\nu^\mu = (A \otimes B)_\nu^\mu = A^\mu B_\nu$

缩并: 一对上下指标相同, 并求和, 如 $S_\sigma^\mu = T_{\nu\sigma}^{\mu\nu}$

指标的对称化与反对称化: 对特定的 n 个指标进行轮换求和或交错求和

$T_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)\rho_1\cdots\rho_m}^{\sigma_1\cdots\sigma_l} = \frac{1}{n!}$ (括号内 n 个指标轮换求和)

$T_{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_n]\rho_1\cdots\rho_m}^{\sigma_1\cdots\sigma_l} = \frac{1}{n!}$ (括号内 n 个指标交错求和)

指标的升降: $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$, $A^2 = A^\mu A_\mu = A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}$

张量的导数: 平直时空下 $T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l}$ 变为 (k, l+1) 型张量 $\partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l}$

A.4 广义相对论与微分几何

1. 广义相对论与时空的弯曲

牛顿引力: $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = m\vec{a}$, 引力势为 $\Phi = \frac{GM}{r}$

引力源产生的引力势: $\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3\vec{x}'$, $\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$

物体在引力势中的运动: $\vec{a} = \vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi$

惯性质量: $\vec{F} = m_i \vec{a}$, 引力质量: $\vec{F} = -m_g \vec{\nabla} \Phi$

自由下落: 物体只在引力的作用下运动

弱等效原理: 引力质量等于惯性质量

电梯实验: 引力与加速运动参照系中的惯性力不可区分

局域惯性系: 自由下落的观测者的参照系。

相邻两个局域惯性系具有相对加速度，表明引力可以看成时空的弯曲

弱等效原理等价描述：局域惯性系中的运动学定律，形式与平直时空中一致。

爱因斯坦等效原理：局域惯性系中的任何不包含引力束缚能的物理学定律，形式与平直时空中一致。

强等效原理：局域惯性系中的任何物理学定律，形式与平直时空中一致。

广义相对论：物质告诉时空如何弯曲，时空告诉物质如何运动

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

2. 微分几何简介

基本概念：流形、微分流形

张量的偏导数： $\partial\hat{V}(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\hat{V}(x+\delta x) - \hat{V}(x)}{\delta x}$ 涉及两个不同点上的切空间中矢量的比较，一般而言不是张量。

一般的坐标变换 $x^\mu \rightarrow y^\alpha$ 下，偏导数的变换为：

$$\partial_\mu A^\nu \rightarrow \partial_\alpha A^\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \partial_\mu A^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} A^\nu$$

联络：弯曲空间中，需要建立不同点的切空间的关系，描述基矢的变化。

协变导数：对应张量的平行移动， $\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A^\sigma$

若要求协变导数为张量，在坐标变换 $x^\mu \rightarrow y^\alpha$ 下，联络的变换为：

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y_\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y_\gamma} \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\gamma}$$

联络不是张量，选择不唯一。

广义相对论要求：1、无挠： $T_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ 2、度规相容： $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$

此时为 Christoffel 联络，可由度规唯一确定： $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$

无挠和度规相容条件保证了局域惯性系的存在，也即等效原理的成立。

局域惯性系：对应黎曼正则坐标系，使得 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 且 $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ ， $\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu}$ 则一般不为零。

自由度分析：

1) $g_{\mu\nu}$ 自由度为 10, $\partial_\alpha x^\mu$ 自由度为 16, 具有 6 个冗余自由度，对应 6 个洛伦兹变换

2) $\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ 自由度为 40, $\partial_\alpha \partial_\beta x^\mu$ 自由度为 40, 恰好一致。

3) $\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu}$ 自由度为 100, $\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma x^\mu$ 自由度为 80, 欠缺 20 个自由度，对应黎曼曲率张量。

3. 弯曲时空

矢量沿曲线的平移：若 V^μ 为曲线 $x^\mu(\lambda)$ 切矢，当矢量 W^μ 满足 $V^\nu \nabla_\nu W^\mu = 0$ 时，则称 W 沿曲线平行移动。

弯曲时空中的测地线：曲线的切矢沿曲线平行移动， $V^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0$

$$\text{若选仿射参数 } \lambda \text{ 为固有时 } \tau, \text{ 则有: } \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

黎曼张量：描述时空的弯曲，对应矢量沿无穷小闭合曲线平移一周的变化量

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho$$

其中黎曼张量为： $R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$

黎曼张量的对称性：1. $R_{\sigma\mu\nu}^\rho = -R_{\sigma\nu\mu}^\rho$ 2. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$ 3. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$

第一 Bianchi 恒等式： $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$

第二 Bianchi 恒等式： $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$, 来源为 $[[\nabla_\lambda, \nabla_\rho], \nabla_\sigma] = 0$

n 维时空的黎曼张量共有 $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ 个自由度， $n = 4$ 时为 20。

里奇张量： $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$, 里奇标量： $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ 。

4. 爱因斯坦场方程

爱因斯坦张量为： $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, 将第二 Bianchi 恒等式缩并指标，可得

$$0 = g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 2\nabla^\mu G_{\mu\rho}$$

对于物质的能动张量为 $T_{\mu\nu}$ ，根据守恒定律，应有 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$

爱因斯坦场方程为: $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, 为非线性方程, 难以求解。

缩并指标, 可得: $G_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R - 2R = -R = \kappa T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \kappa T$

等价形式: $R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$

若要求弱场近似时回到牛顿定理, 可得比例系数 $\kappa = 8\pi G$

若 $T_{\mu\nu} = 0$, 则为真空场方程, 等价于 $R_{\mu\nu} = 0$, 满足真空场方程的为真空解。

史瓦西黑洞为真空解: $ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 + \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$

A.5 线性化场方程与引力波

1. 弱场近似与线性化场方程

弱场近似下, 可将曲率张量展开到线性阶, 其中 $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ 。

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma})$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu})$$

$$R = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu}\square h)$$

考虑无穷小坐标变换: $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu\xi^\mu$

度规扰动变换为: $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu$

曲率张量变换为: $R'_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$, 表明该变换为规范变换。

$h_{\mu\nu}$ 具有规范自由度, 可选择调和规范 $\square x^\mu = 0$ 来减少非物理自由度。

调和规范等价于: $\partial_\mu h_\lambda^\mu - \frac{1}{2}\partial_\lambda h = 0$ 。

场方程可约化为: $\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h = -16\pi GT_{\mu\nu}$

可定义反迹张量, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, 其中 $\bar{h} = -h$ 。

对应的规范条件为: $\partial_\mu\bar{h}_\lambda^\mu = 0$, 也称为洛伦兹规范。场方程为有源波动方程: $\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}$

2. 牛顿极限

弱场近似: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, 指标升降采用 η_μ , $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda}h_{\sigma\lambda}$ 。

依据 $g_{\mu\lambda}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\nu$, 可得 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$

缓变近似: $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$ 。

低速近似: $\frac{dx^i}{dt} \ll 1$, 或 $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$ 。

弱场近似下, 联络近似为: $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \approx \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu})$

依据低速和缓变近似, 测地线方程可近似为

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

当 $\mu = 0$ 时, 有 $\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$, $\frac{dt}{d\tau}$ 为常数, 可选为 1。

当 $\mu = i$ 时, 有 $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}$ 。

对比牛顿引力下粒子方程 $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\partial_i\Phi$, 应有 $h_{00} = -2\Phi$ 。

计算可得: $R_{0\nu 0}^\mu = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\partial_\sigma\partial_\nu h_{00}$, $R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \nabla^2\Phi$

考虑静态物质分布 ρ , 可得能动张量唯一非零分量为 $T_{00} = \rho$, $T = -\rho$

可得: $\nabla^2\Phi = \kappa(T_{00} - \frac{1}{2}T\eta_{00}) = \frac{1}{2}\kappa\rho$, 对比牛顿引力, 可得 $\kappa = 8\pi G$

由于 $T_{\mu\nu}$ 由 $T_{00} = \rho$ 主导, 因此 \bar{h}_{00} 远大于其它分量。

因此 $h = -\bar{h} = \bar{h}_{00}$, $\bar{h}_{00} = h_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}h$

因此 $\bar{h}_{00} = -4\Phi$, $\bar{h} = 4\Phi$

可得 $h_{i0} = \bar{h}_{i0} - \frac{1}{2}\eta_{i0}\bar{h} = 0$, $h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}\bar{h} = -2\Phi\delta_{ij}$

度规为 $ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

3. 线性化场方程的波动解对于真空解: $\square h_{\mu\nu} = \square\bar{h}_{\mu\nu} = 0$, 可得 $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}$ 。

将解带入方程，可得 $k^\alpha k_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ，因此 $k^\alpha k_\alpha = 0$ ，引力波速度为光速。

带入调和规范，可得 $k_\mu A^{\mu\nu} = 0$ ，共 4 个约束条件，还剩 6 个自由度。

仍未固定所有自由度，还可做满足 $\square \xi^\mu = 0$ 的规范变换，可令 $\xi^\mu = B^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}$ 。

通过选择 B^μ 可固定 4 个自由度，还剩 2 个自由度，均为物理自由度。

可选择横向无迹规范 (TT 规范): $A_\mu^\mu = 0$, $A_{0\mu} = 0$, 共 4+1 个约束条件。

$k_\mu^{\mu 0} = 0$ 与约束 $A_{0\mu} = 0$ 等价，实际共 8 个约束。

假设引力波沿 z 方向传播，可设 $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ 。

仅 $A_{22} = -A_{11}$ 和 $A_{12} = A_{21}$ 非零，对应两个物理自由度。

真空场方程成立是可以选择 TT 规范的前提条件。

4. 引力波的偏振

在绕 z 轴转动 θ 角时

$$A'_{11} = \cos 2\theta A_{11} + \sin 2\theta A_{12}, \quad A'_{12} = -\sin 2\theta A_{11} + \cos 2\theta A_{12}$$

可定义左手和右手偏振: $h_{R,L} = A_{11} \pm iA_{12}$

在转动下 $h'_{R,L} = e^{\mp 2i\theta} h_{R,L}$ ，对应螺旋度为 2 的张量偏振模式

对 $h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\lambda k^\lambda}$ ，在规范变换 $\xi^\mu = i\varepsilon^\mu e^{ik_\lambda k^\lambda}$ 下

有 $A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu$ ，同时在 $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ 的条件下

由调和规范条件 $k^\mu A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k_\mu A_\nu^\mu$ 可得

$$A_{01} = -A_{13}, \quad A_{02} = -A_{23}, \quad A_{22} = -A_{11}, \quad A_{03} = -\frac{1}{2}(A_{00} + A_{33})$$

在规范变换下， $A'_{11} = A_{11}$, $A'_{12} = A_{12}$ 为物理自由度

$$A'_{13} = A_{13} + \omega \varepsilon_1, \quad A'_{23} = A_{23} + \omega \varepsilon_2, \quad A'_{33} = A_{33} + 2\omega \varepsilon_3, \quad A'_{00} = A_{00} - 2\omega \varepsilon_0$$

5. 投影算子

可利用投影算子，将满足调和规范的 $h_{\mu\nu}$ 投影为满足 TT 规范。

其中 $h_{0\mu}$ 部分可直接取为 0，只需考虑空间分量。

对于一般的传播方向 $k_\mu = (\omega, k_1, k_2, k_3)$ ，有 $\omega^2 = \delta_{ij} k^i k^j$

令 n^μ 为沿传播方向类空矢量， $n_0 = 0, n_i = k_i/\omega$ ，有 $n_i n^i = 1$ 。

可得投影算子 $P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ ，对任意矢量 V_i ，有 $P_{ij} V^i n^j = 0$

同时具有性质: $P_i^i = 2$, $P_{ij} P_{jk} = P_{ik}$ ，可将任意矢量投影到与 n 垂直的方向

张量横向投影: $h'_{ij} = P_{ik} P_{jl} h_{kl}$ ，迹为 $P_{ij} h_{ij}$

可定义横向无迹投影算子: $\Lambda_{ij,kl} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}$ ，展开可得

$$\Lambda_{ij,kl} = \delta_{ik} \delta_{kl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l$$

6. 粒子的运动

初始静止粒子， $\frac{dx^0}{d\tau} = 1, \frac{dx^i}{d\tau} = 0$ 带入测地线方程，并取 TT 规范

$$\text{可得 } \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} (2\partial_0 h_{\alpha 0} - \partial_\alpha h_{00}) = 0$$

可得 TT 坐标下，初始静止粒子保持静止，坐标不变。

考虑坐标为 $(0, 0, 0)$, $(L_0, 0, 0)$ 两点，在 h_+ 作用下，固有长度为

$$L(t) = \int_0^{L_0} dx \sqrt{1 + h_+} \approx L_0 (1 + \frac{1}{2} h_+)$$

一般情形，假设两条相邻世界线 $x^\mu(\tau)$ 与 $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$ 均为测地线

取 ξ^μ 为小量，将两个测地线方程相减，并保留一阶，可得测地偏离方程

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \xi^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

引入沿测地线方向导数 $\frac{DV^\mu}{D\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \nabla_\nu V^\mu$ ，可得 $\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = -R_{\nu\rho\sigma}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}$

同样假设粒子初始静止

$$\text{TT 坐标下有 } \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = -2\Gamma_{0\rho}^i \frac{dx^\rho}{d\tau} + \xi^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{00}^i = -\dot{h}_{ij} \frac{dx^j}{d\tau} = 0$$

局域惯性系，也称探测器固有坐标，满足 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$

因此有 $\ddot{\xi}^i = -R^i_{0j0}\xi^j = \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}\xi^j$

考虑 h_+ 的效果，可得 $\ddot{\xi}^1 = \frac{1}{2}\xi^1\ddot{h}_+$, $\ddot{\xi}^2 = -\frac{1}{2}\xi^2\ddot{h}_+$

假设 $\xi(t) = \xi(0) + \delta\xi(t)$, 其中 $\delta\xi(t)$ 为小量，带入方程保留一阶求解

可得 $\xi^1(t) = \xi^1(0) + \frac{1}{2}h_+(t)\xi^1(0)$, $\xi^2(t) = \xi^2(0) - \frac{1}{2}h_+(t)\xi^2(0)$

考虑 h_\times 的效果，可得 $\ddot{\xi}^1 = \frac{1}{2}\xi^2\ddot{h}_\times$, $\ddot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\xi^1\ddot{h}_\times$

同理可得 $\xi^1(t) = \xi^1(0) + \frac{1}{2}h_\times(t)\xi^2(0)$, $\xi^2(t) = \xi^2(0) + \frac{1}{2}h_\times(t)\xi^1(0)$

A.6 引力波的产生

1. 引力辐射

考虑有源线性化方程 $\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}$

其格林函数满足 $\square_x G(x^\mu - y^\mu) = \delta^{(4)}(x^\mu - y^\mu)$

引力辐射为： $\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) dy$

其中格林函数为： $G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \delta(|\vec{x}-\vec{y}| - (x^0 - y^0)) \eta(x^0 - y^0)$

因此有 $\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y}) d^3\vec{y}$

对 t 做傅里叶变换，并定义推迟时间 $t_r = t - |\vec{x}-\vec{y}|$, 可得

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x})$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3\vec{y} e^{-i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3\vec{y} e^{-i\omega t_r} e^{i\omega|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$= 4G \int d^3\vec{y} \frac{e^{i\omega|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(t_r, \vec{y})$$

若假设源的尺度 δR 远小于距离 $R = |\vec{x}-\vec{y}|$, 则可化简为

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \frac{e^{i\omega R}}{R} \int d^3\vec{y} \tilde{T}_{\mu\nu}(t_r, \vec{y})$$

根据规范条件 $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$, 可得 $\partial_0 \bar{h}^{0\nu} = -\partial_i \bar{h}^{i\nu}$ 。

因此 $i\omega \bar{h}^{0\nu} = -\partial_i \bar{h}^{i\nu}$, 由 $\tilde{\bar{h}}^{ij}$ 即可得出 $\tilde{\bar{h}}^{0i}, \tilde{\bar{h}}^{00}$

对于积分的计算，可得 $\int d^3\vec{y} \tilde{T}^{ij} = \int \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) d^3\vec{y} - \int y^i \partial_k \tilde{T}^{kj} d^3\vec{y}$

由于源在有限区域，无穷远处能动张量为 0，所以第一项为零。因此

$$\int d^3\vec{y} \tilde{T}^{ij} = - \int y^i \partial_k \tilde{T}^{kj} d^3\vec{y} = i\omega \int y^i \partial_0 \tilde{T}^{0j} d^3\vec{y}$$

根据指标对称性，可以将被积函数对称化

$$\int d^3\vec{y} \tilde{T}^{ij} = \frac{i\omega}{2} \int y^i \partial_0 \tilde{T}^{0j} + y^j \partial_0 \tilde{T}^{0i} d^3\vec{y}$$

$$= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j \partial_l \tilde{T}^{0l}] d^3\vec{y}$$

$$= -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3\vec{y}$$

若定义源的四极矩为 $I_{ij} = \int y^i y^j T^{00} d^3\vec{y}$, 则有

$$\tilde{\bar{h}}_{ij} = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}$$

引力波辐射领头阶为四极辐射： $\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}$

偶极矩的一阶导数对应源的总动量，二阶导数由于动量守恒一定为零。

2. 等质量双星的引力波

考虑等质量的以圆轨道互相绕转的双星，各自的质量为 M , 双星的间距为 $2R$ 。

双星的轨道角速度为 $\sqrt{\frac{GM}{4R^3}}$ 。

假设双星在 $x-y$ 平面上运动，以 a, b 标记两个星体，则轨道为

$$x_a^1 = -x_b^1 = R \cos \Omega t, \quad x_a^2 = -x_b^2 = R \sin \Omega t$$

能动张量为： $T^{00} = M\delta(x^3)[\delta(x^1 - x_a^1)\delta(x^2 - x_a^2) + \delta(x^1 - x_b^1)\delta(x^2 - x_b^2)]$

代入公式，可得

$$\bar{h}_{11} = -\bar{h}_{22} = -\frac{8GM}{r}\Omega^2 R^2 \cos 2\Omega t_r$$

$$\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} = -\frac{8GM}{r}\Omega^2 R^2 \sin 2\Omega t_r$$

考虑沿 z 方向传播的引力波，此时 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 已满足 TT 规范，

考虑沿 x 方向传播的引力波，此时 $\hat{n} = (1, 0, 0)$ 。

利用 $\bar{h}_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}\bar{h}_{kl}$ ，可得 $\bar{h}_{22}^{TT} = -\bar{h}_{33}^{TT} = \frac{1}{2}\bar{h}_{22}$

考虑沿一般方向 (θ, ϕ) ，则有

$$h_+ = -\frac{4MR^2\Omega^2}{r}(1 + \cos^2\theta)\cos(2\Omega t + 2\phi)$$

$$h_\times = -\frac{8MR^2\Omega^2}{r}\cos\theta\cos(2\Omega t + 2\phi)$$

考虑质量为 m_1, m_2 的双星，原点选为质心，两者到质心距离分别为 r_1, r_2 。

可定义约化质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ，总质量 $m = m_1 + m_2$ ，双星间距 $r_{12} = r_1 + r_2$

可做替换 $MR^2 \rightarrow \frac{1}{2}\mu r_{12}^2$

A.7 引力辐射的能量与角动量

1. 引力波的能量

引力波具有能量，因此也会导致时空的弯曲，实际中需要区分背景和扰动。

可以根据变化的尺度和频率，将大尺度、缓变部分视为背景， $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ 。

引力波的能量计算，需要将场方程 $R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$ 展开到二阶。

此时可得 $R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}$

其中 $\bar{R}_{\mu\nu}$ 由 \bar{g} 决定，为低频项， $R^{(1)}$ 由 h 决定，为高频项，

而 $R^{(2)}$ 由 h^2 决定，同时包含低频项与高频项。因此可将场方程按频率分为两部分。

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}} + 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)^{\text{low}}$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -R_{\mu\nu}^{(2)\text{high}} + 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)^{\text{high}}$$

在弯曲背景 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 下，里奇张量的一阶和二阶形式为：

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\alpha} + \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\alpha} + \bar{\nabla}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} + \bar{\nabla}^\mu \bar{\nabla}_\nu h)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\sigma}\bar{g}^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2}\bar{\nabla}_\mu h_{\rho\alpha} \bar{\nabla}_\nu h_{\sigma\beta} + \bar{\nabla}_\rho h_{\nu\alpha} (\bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\beta} - \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\sigma}) \right. \\ & + h_{\rho\alpha} (\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h_{\sigma\beta} + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\sigma}) \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}\bar{\nabla}_\alpha h_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}_\rho h_{\alpha\sigma} \right) (\bar{\nabla}_\nu h_{\mu\beta} + \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\beta} - \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\nu}) \right] \end{aligned}$$

可在远大于引力扰动尺度但远小于背景尺度的尺度上做平均 $\langle \dots \rangle$

高频部分在平均下为零，低频部分为平均值。可得

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + 8\pi\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \rangle$$

其中 $\langle g_{\mu\nu} \rangle = \bar{g}_{\mu\nu}$ ， $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \bar{T}_{\mu\nu}$ ， $\langle T \rangle = \bar{T} = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}^{\mu\nu}$

可以定义 $t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \rangle$

由此可得， $\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = 8\pi(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$, $t_{\mu\nu}$ 为引力波的能动张量。

在平直背景下，利用 TT 规范条件、度规扰动的运动方程

以及边界项为零 $\langle \partial_\mu(AB) \rangle = \langle A\partial_\mu B \rangle + \langle B\partial_\mu A \rangle = 0$

可得 $\langle R_{\mu\nu}^{(2)TT} \rangle = -\frac{1}{4}\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta}^{TT} \partial_\nu h_{\alpha\beta}^{TT} \rangle$ ， $\langle R^{(2)} \rangle = 0$

因此在 TT 规范下，引力波的能动张量为 $t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta}^{TT} \partial_\nu h_{\alpha\beta}^{TT} \rangle$

在非 TT 规范下，可对度规扰动做规范变换，从而证明上述表达式规范不变。

即引力波的能动张量仅与物理自由度有关，可写为 $t_{00} = \frac{1}{16\pi} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle$

2. 引力波的能流

考虑区域 V 的的引力扰动的总能量 $E_V = \int_V d^3x t^{00}$,

可得单位时间区域内能量的变化是 $\frac{dE_V}{dt} = \int_V d^3x \partial_0 t^{00}$

利用能动张量守恒 $\partial_\mu t^{\mu\nu} = \partial_0 t^{0\nu} + \partial_i t^{i\nu}$, 可得 $\frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{0i} = - \int_S dA n_i t^{0i}$

其中 S 为区域的边界, dA 为边界上面元, n_i 是边界上的法矢量。

若选区域为半径 r 的球, 则 $dA = r^2 d\Omega$, $\hat{n} = \hat{r}$, $\frac{dE_V}{dt} = - \int_S dA t^{0r}$

考虑沿径向传播的引力波 $h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{1}{r} f_{ij}(t-r)$, 由于 $t^{0r} = -\frac{1}{32\pi} \langle \partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} \partial_r h_{ij}^{\text{TT}} \rangle$

可得 $\partial_r h_{ij}^{\text{TT}} = -\partial_0 h_{ij}^{\text{TT}}$

因此引力辐射的功率为 $P = -\frac{dE}{dt} = \frac{r^2}{32\pi} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle$

结合双星的波形,

可得 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d^2E}{dt d\Omega} = \frac{r^2}{16\pi} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle = \frac{2M^2 R^4 \Omega^6}{\pi} [(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta]$

可得沿 z 方向单位立体角辐射功率为 $\frac{16M^2 R^4 \Omega^6}{\pi}$, 沿 x 方向为 $\frac{2M^2 R^4 \Omega^6}{\pi}$

积分可得总辐射功率为 $P = \frac{5}{128} M^2 R^4 \Omega^6$

3. 双星的能流

结合四极辐射公式, 可得系统的引力波辐射的功率为: $P = \frac{G}{5} \langle \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} \rangle$

$J_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I$ 为约化四极矩。

利用投影算子, 可得 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \langle \Lambda_{ij,kl} \ddot{J}_{kl} \Lambda_{ij,mn} \ddot{J}_{mn} \rangle = \frac{1}{8\pi} \Lambda_{kl,mn} \langle \ddot{J}_{kl} \ddot{J}_{mn} \rangle$

结合投影算子公式, 有 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \langle \ddot{J}_{ij} \ddot{J}_{ij} - 2 \ddot{J}_{ij} \ddot{J}_{ik} n_j n_k + \frac{1}{2} \ddot{J}_{ij} \ddot{J}_{kl} n_i n_j n_k n_l \rangle$

利用积分 $\int d\Omega = 4\pi$, $\int n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$,

$\int n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$

4. 双星的轨道演化

双星的总能量为 $E = -\frac{M^2}{4R} = -\frac{M}{4} \left(\frac{4\pi M}{T}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\frac{dE}{dT} = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\pi M}{T}\right)^{\frac{5}{3}}$

轨道周期的演化为 $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dE} \frac{dE}{dt} = -\frac{96}{5} \pi 4^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2\pi M}{T}\right)^{\frac{5}{3}}$

由此可得, $dTT^{\frac{5}{3}} \propto dt$, $T^{\frac{8}{3}} \propto t$, $T \propto t^{-\frac{3}{8}}$

5. 双星的角动量

对爱因斯坦作用量, 利用诺特定理, 可得

$\frac{dJ^i}{dt} = \frac{1}{32\pi} \int d^3x \langle -\varepsilon^{ikl} \dot{h}_{ab}^{\text{TT}} x_k \partial_l h_{ab}^{\text{TT}} + 2\varepsilon^{ikl} h_{ak}^{\text{TT}} \dot{h}_{al}^{\text{TT}} \rangle$

其中第一部份为轨道角动量, 第二部分为自旋角动量。

$\frac{dL^i}{dt} = \frac{2}{15} \varepsilon^{ikl} \langle \ddot{J}_{ka} \ddot{J}_{la} \rangle$, $\frac{dS^i}{dt} = \frac{4}{15} \varepsilon^{ikl} \langle \ddot{J}_{ka} \ddot{J}_{la} \rangle$, $\frac{dJ^i}{dt} = \frac{2}{5} \varepsilon^{ikl} \langle \ddot{J}_{ka} \ddot{J}_{la} \rangle$

考虑一般辐射方向, 利用投影算子可得

$\frac{d^2 L^i}{dtd\Omega} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ikl} \langle \ddot{J}_{cd} \ddot{J}_{fg} \rangle n_k (n_f \Lambda_{cd,lg} + n_g \Lambda_{cd,lf})$

$\frac{d^2 S^i}{dtd\Omega} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ikl} \langle \ddot{J}_{mn} \ddot{J}_{cd} \rangle \Lambda_{al,mn} \Lambda_{ak,cd}$

沿着 z 方向对辐射, 有 $\frac{d^2 L^i}{dtd\Omega} = 0$, $\frac{d^2 S^3}{dtd\Omega} = \frac{16}{\pi} M^2 R^4 \Omega^5$

沿着 x 方向对辐射, 有 $\frac{d^2 L^3}{dtd\Omega} = \frac{2}{\pi} M^2 R^4 \Omega^5$, $\frac{d^2 S^i}{dtd\Omega} = 0$

同时, 根据总角动量 $J_3 = 2MR^2\Omega = M^{\frac{3}{2}}R^{\frac{1}{2}}$, 可计算 $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dJ} \frac{dJ}{dt}$

与根据能量计算的 $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dE} \frac{dE}{dt}$ 一致, 因此圆轨道双星将会保持圆轨道

A.8 双星的波形

1. 时域波形

对于一般圆轨道双星, 可定义啁啾质量 $M_c = \mu^{\frac{3}{5}} m^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}$

同时引力波信号的频率为 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\Omega}{2\pi}$ 。因此可得, 时域波形为

$$h_+(t) = \frac{4}{r} M_c^{\frac{3}{5}} (\pi f)^{\frac{2}{3}} \frac{1+\cos^2 \theta}{2} \cos(2\pi f t_r + 2\phi)$$

$$h_\times(t) = \frac{4}{r} M_c^{\frac{3}{5}} (\pi f)^{\frac{2}{3}} \cos \theta \sin(2\pi f t_r + 2\phi)$$

同时结合辐射功率和轨道能量，可得 $\dot{f} = \frac{96}{5} \pi^{\frac{8}{3}} M_c^{\frac{5}{3}} f^{\frac{11}{3}}$

积分可得 $f(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256\tau} \right)^{\frac{3}{8}} M_c^{-\frac{5}{8}}$ ，其中 $\tau = t_c - t$ ，为距并合的时间。

$\tau \rightarrow 0$ 时，双星轨道半径趋于 0，频率发散。因此一般会在特定距离截断。

因此时域波形为

$$h_+(t) = \frac{1}{r} M_c^{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1+\cos^2 \theta}{2} \cos \Phi(\tau)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{r} M_c^{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \theta \sin \Phi(\tau)$$

$$\Phi(\tau) = -(5M_c)^{-\frac{5}{8}} \tau^{\frac{5}{8}} + \phi_0，\text{ 其中 } \phi_0 \text{ 为常数}$$

2. 频域波形

直接对时域波形做傅立叶变换难以解析计算，因此需采用稳相近似。

$$\begin{aligned} \tilde{h}_+(f) &= \int dt \frac{1}{r} M_c^{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{\tau} \right)^{\frac{1}{4}} \cos \Phi e^{i2\pi f t} \\ &= \frac{1}{2r} e^{i2\pi f t_c} \int dt \frac{1}{r} M_c^{\frac{5}{4}} \left(\frac{5}{\tau} \right)^{\frac{1}{4}} (e^{i\Phi(\tau)} + e^{-i\Phi(\tau)}) e^{i2\pi f \tau} \end{aligned}$$

由于振幅演化为 $\tau^{-\frac{1}{4}}$ ，远小于相位演化的 $\tau^{\frac{5}{8}}$ ，因此可视为常数，移动到积分外

由于 $h_+(t)$ 为实数，因此仅需考虑 $f > 0$ 的部分

由于 $e^{i\Phi(\tau)+i2\pi f \tau}$ 为震荡项， $e^{-i\Phi(\tau)+i2\pi f \tau}$ 在 $\Phi(\tau) = 2\pi f \tau$ 时有稳定点

因此积分主要贡献来自 $f = f_{\text{GW}}$ 处，也就是 $2\pi f = \dot{\Phi}(\tau^*)$

$$\text{可展开为 } \Phi(\tau) = \Phi(\tau^*) + \dot{\Phi}(\tau^*)(\tau - \tau^*) + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}(\tau^*)(\tau - \tau^*)^2$$

代入可得积分 $\int e^{-\frac{i}{2}\ddot{\Phi}(\tau^*)(\tau-\tau^*)^2} d\tau$ ，利用菲涅尔积分 $\int dx e^{-ix^2} = \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4}$

$$\text{可得频域波形 } \tilde{h}_+(f) = \pi^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{5}{24} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_c^{\frac{5}{6}} f^{-\frac{7}{6}}}{r} \frac{1+\cos^2 \theta}{2} e^{i\Psi_+}$$

$$\Psi_+ = 2\pi f(t_c + r) - \Phi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}(8\pi M_c f)^{-\frac{5}{3}}$$

A.9 椭圆轨道双星的引力波

1. 椭圆轨道的辐射

考虑约化质量为 μ ，总质量为 m 的双星系统，绕公共质心做椭圆轨道运动。

轨道偏心率为 e ，半长轴为 a ， ψ 为真近点角， p 为半通径， r 为到双星距离。

$$\text{守恒量 } L = \mu r^2 \dot{\psi}， E = \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 \right) - \frac{\mu m}{r} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\mu m}{r}$$

椭圆轨道可写为 $r = \frac{p}{1+e \cos \psi}$ ，坐标为 $(r \cos \psi, r \sin \psi, 0)$ 。

$$\text{且 } p = \frac{L^2}{m\mu^2}， a = -\frac{m\mu}{2E} = \frac{p}{1-e^2}。$$

$$\text{可得，} \dot{\psi} = \frac{\sqrt{mp}}{r^2} = \sqrt{\frac{m}{a^3}} (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} (1+e \cos \psi)^2$$

$$\text{四极矩为 } I_{11} = \mu r^2 \cos^2 \psi = \mu a^2 (1-e^2)^2 \frac{\cos^2 \psi}{(1+e \cos \psi)^2}$$

$$I_{22} = \mu r^2 \sin^2 \psi = \mu a^2 (1-e^2)^2 \frac{\sin^2 \psi}{(1+e \cos \psi)^2}$$

$$I_{12} = I_{21} = \mu r^2 \sin \psi \cos \psi = \mu a^2 (1-e^2)^2 \frac{\sin \psi \cos \psi}{(1+e \cos \psi)^2}$$

$$\text{所以有 } \ddot{I}_{11} = \frac{4\mu^2 m^3}{a^5 (1-e^2)^5} (1+e \cos \psi)^2 (2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi)$$

$$\ddot{I}_{22} = \frac{4\mu^2 m^3}{a^5 (1-e^2)^5} (1+e \cos \psi)^2 [-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1+3 \cos^2 \psi)]$$

$$\ddot{I}_{12} = \frac{4\mu^2 m^3}{a^5 (1-e^2)^5} (1+e \cos \psi)^2 [-2 \cos 2\psi + e \cos \psi (1-3 \cos^2 \psi)]$$

$$\text{因此，辐射功率为 } P(\psi) = \frac{1}{5} [\ddot{I}_{11}^2 + \ddot{I}_{22}^2 + 2\ddot{I}_{12}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{I}_{11} + \ddot{I}_{22})^2] = \frac{8}{15} \frac{\mu^2 m^3}{a^5 (1-e^2)^5} (1+e \cos \psi)^4 [12(1+e \cos \psi)^2 + e]$$

$$\text{根据双星的周期 } T = \frac{2\pi}{\omega_0}，\text{ 其中 } \omega_0 = \sqrt{\frac{m}{a^3}}，$$

可在一个周期上积分得到平均辐射功率

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T P(\psi) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{P(\psi)}{\dot{P}(\psi)} d\psi \\
 &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{a^3}{m}} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \psi)^{-2} P(\psi) d\psi \\
 &= \frac{4\mu^2 m^3}{15\pi a^5} (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} \int_0^{2\pi} [12(1 + e \cos \psi)^4 + e^2 \sin^2 \psi (1 + e \cos \psi)^2] d\psi \\
 &= \frac{32\mu^2 m^3}{5a^5} f(e) = \frac{32}{5} \mu^2 a^4 \omega_0^6 f(e)
 \end{aligned}$$

其中 $f(e) = (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} (1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4)$

根据 $T \propto E^{-\frac{3}{2}}$, 可得 $\dot{T} \propto -\frac{3}{2}E^{-\frac{5}{2}}\dot{E}$, 因此 $\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{E}}{E} = \frac{3}{2}\frac{P}{E} = -\frac{96}{5}\frac{\mu m^2}{a^4}f(e)$

2. 椭圆轨道的频谱

椭圆轨道辐射非单频, 存在谐频。选择各个角度的范围是 $[-\pi, \pi]$

引入偏近点角 u , $\cos \psi = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$, 以及真近点角 β , $\beta = u - e \sin u = \omega_0 t$

因此可得 $r = a(1 - e \cos u)$, $x = r \cos \psi = a(\cos u - e)$, $y = r \sin \psi = b \sin u$

对坐标进行傅里叶展开, 可得 $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_n e^{-in\beta}$, $y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_n e^{-in\beta}$

由于 x, y 为实数, 因此 $\tilde{x}_n = \tilde{x}_{-n}^*$, $\tilde{y}_n = \tilde{y}_{-n}^*$

设 $t = 0$ 时, $\beta = 0$, $x = a(1 - e)$, $y = 0$ 。因此可得 $x(-\beta) = x(\beta)$, $y(-\beta) = y(\beta)$

因此有 $x(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\beta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \omega_n t$, $y(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n t$

其中 $a_0 = \tilde{x}_0$, 且对于 $n \geq 1$, $a_n = 2\tilde{x}_n$, $b_n = -2i\tilde{y}_n$ 。并且 $\beta = \omega_0 t$, $\omega_n = n\omega_0$ 。

因此有 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\beta x(\beta) \cos n\beta = \frac{2a}{\pi} \int_0^\pi d\beta (\cos u - e) \cos n\beta$

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\beta y(\beta) \sin n\beta = \frac{2b}{\pi} \int_0^\pi d\beta \sin u \sin n\beta$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x d\beta = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi (\cos u - e) d\beta = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi (\cos u - e)(1 - e \cos u) du = -\frac{3}{2}ae$

利用了 $\beta = 0$ 时, $u = 0$; $\beta = \pi$ 时, $u = \pi$ 。

对于高阶项, 可利用贝塞尔函数积分表达式 $J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - z \sin u) du$, 并分部积分。

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2a}{\pi} \int_0^\pi (\cos u - e) \cos n\beta d\beta = \frac{2a}{n\pi} \int_0^\pi (\cos u - e) d\sin n\beta \\
 &= \frac{2a}{n\pi} \sin n\beta (\cos u - e) \Big|_0^\pi - \frac{2a}{n\pi} \int_0^\pi \sin n\beta d(\cos u - e) \\
 &= \frac{2a}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nu - ne \sin u) \sin u du \\
 &= \frac{a}{n\pi} \int_0^\pi \{\cos[(n-1)u - ne \sin u] - \cos[(n+1)u - ne \sin u]\} du \\
 &= \frac{a}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] = \frac{2a}{n} J'_n(ne)
 \end{aligned}$$

同理可得, $b_n = \frac{b}{n} [J_{n-1}(ne) + J_{n+1}(ne)] = \frac{2b}{ne} J_n(ne)$

其中利用了递推关系 $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z)$, $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J'_n(z)$

同理可得, $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \omega_n t$, $y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \omega_n t$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \omega_n t$

积分可得 $A_0 = \frac{1+4e^2}{2}$, $B_0 = \frac{1}{2}$, 同时对于 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a^2}{n} [J_{n-2}(ne) - J_{n+2}(ne) - 2e(J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne))] \\ B_n &= \frac{b^2}{n} [J_{n+2}(ne) - J_{n-2}(ne)] \\ C_n &= \frac{ab}{n} [J_{n+2}(ne) + J_{n-2}(ne) - e(J_{n+1}(ne) + J_{n-1}(ne))] \end{aligned}$$

由此可得四极矩及其分解为

$$I_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{ij}^{(n)} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_n \cos \omega_n t & C_n \sin \omega_n t & 0 \\ C_n \sin \omega_n t & B_n \cos \omega_n t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在 P 的计算中, 由于当 $n \neq m$ 时, $\langle \sin \omega_n t \sin \omega_m t \rangle = 0$,

因此 $P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n = \frac{2}{15} \langle \ddot{I}_{11}^{(n)2} + \ddot{I}_{22}^{(n)2} + 3\ddot{I}_{12}^{(n)2} - \ddot{I}_{11}^{(n)}\ddot{I}_{22}^{(n)} \rangle$

由此可得 $P_n = \frac{G\mu^2\omega_0^6 n^6}{15c^5} (A_n^2 + B_n^2 + 3C_n^2 - A_n B_n) = \frac{32G^4\mu^2 m^3}{5c^5 a^5} g(n, e)$

其中 $g(n, e) = \frac{n^6}{96a^5} [A_n^2(e) + B_n^2(e) + 3C_n^2(e) - A_n(e)B_n(e)]$

当 $e > 0$ 时, 若 e 较小, 则 P_2 最大; 但当 e 较大时, 最大的 P_n 的 n 会增大。

3. 椭圆轨道的演化

角动量演化为 $\frac{dL^3}{dt} = -\frac{2}{5}\varepsilon^{3kl} \langle \ddot{I}_{ka} \ddot{I}_{la} \rangle = -\frac{2}{5} \langle \ddot{I}_{1a} \ddot{I}_{2a} - \ddot{I}_{2a} \ddot{I}_{1a} \rangle$

利用 $\langle \ddot{I}_{22} \ddot{I}_{12} \rangle = -\langle \ddot{I}_{12} \ddot{I}_{22} \rangle$, 可得 $\frac{dL}{dt} = \frac{4}{5} \langle \ddot{I}_{12} (\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22}) \rangle$

利用 $\ddot{I}_{12} = \frac{\mu m}{a(1-e^2)} \sin \psi [-4(1+e \cos \psi)^2 \cos \psi + 2e(3 \cos^2 \psi - 1 + 2e \cos^3 \psi)]$

$\frac{dL}{dt} = \frac{4\mu^2 m^{\frac{5}{2}}}{\pi^2 a^{\frac{7}{2}} (1-e^2)^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi [e + 8 \cos \psi + 6e \cos^2 \psi]$

$\times [-4(1+e \cos \psi)^2 \cos \psi + 2e(3 \cos^2 \psi - 1 + 2e \cos^3 \psi)] d\psi$

积分可得, $\frac{dL}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^{\frac{7}{2}} \mu^2 m^{\frac{5}{2}}}{c^5 a^{\frac{7}{2}}} \frac{1}{(1-e^2)^2} (1 + \frac{7}{8}e^2)$

利用 $e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^2 \mu^3}$, $a = -\frac{Gm\mu}{2E}$, 以及 $L = \mu\sqrt{Gmp} = \mu\sqrt{Gma(1-e^2)}$

可得 $\frac{da}{dt} = \frac{Gm\mu^2}{2E^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}} (1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4)$

$2e \frac{de}{dt} = \frac{2L^2}{G^2 m^2 \mu^3} \frac{dE}{dt} + \frac{4EL}{G^2 m^2 \mu^3} \frac{dL}{dt} = \frac{2G\mu^2 ma(1-e^2)}{G^2 m^2 \mu^3} \frac{dE}{dt} + \frac{2Gm\mu^2 \sqrt{Gma(1-e^2)}}{G^2 am^2 \mu^3} \frac{dL}{dt}$

因此 $\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} (1 + \frac{121}{304}e^2)$

由此可得轨道会逐渐圆化。

B 习题与解答

这里的习题来自 2025 年春季的引力波物理课程张建东老师讲的部分，解答也基本全部由他撰写，版权全部归他所有，在附录 A 已经谈过了，此处不再赘述。

第二周（3月4日）作业

考虑一个运动的粒子，在 S 系中三速度为 $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ，三加速度为 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 。 S' 系相对 S 系以速度 v 沿 x 轴正方向运动。请利用四速度、四加速度的定义和变换关系，计算粒子在 S' 系中的三加速度 \vec{a}' 。

(提示：沿世界线 $x^\mu(\tau)$ 运动的粒子，四速度为 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ ，四加速度为 $a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ 。其三速度为： $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ ，三加速度为： $a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2}$)

解：坐标的洛伦兹变换为 $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ ，因此 $u'^\mu = \Lambda_\nu^\mu u^\nu$ ， $a'^\mu = \Lambda_\nu^\mu a^\nu$

$$\text{其中洛伦兹变换矩阵 } \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

因此三加速度变换为 $a'^i = \frac{d^2x'^i}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \frac{dx'^i}{dt'} = \frac{d\tau}{dt'} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx'^i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt'} \right)$

$$= \frac{1}{\Lambda_0^\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda_\rho^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau}}{\Lambda_0^\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}} \right) = \frac{1}{\Lambda_0^\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Lambda_\rho^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau}}{\Lambda_0^\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}} \right)$$

而 $\Lambda_0^\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma - \gamma v u_x$ ； $\Lambda_0^\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} = -\gamma v + \gamma u_x$ ； $i \neq 1$ 时， $\Lambda_\rho^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} = u^i$

由此可得， $i = 1$ 时，

$$u'_x = \frac{1}{\gamma(1-u_x v)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma(u_x - v)}{\gamma(1-u_x v)} \right) = \frac{a_x}{\gamma(1-u_x v)^2} + \frac{(u_x - v)v a_x}{\gamma^3(1-u_x v)^3}$$

$i \neq 1$ 时，

$$u'_{y,z} = \frac{1}{\gamma(1-u_x v)} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{y,z}}{\gamma(1-u_x v)} \right) = \frac{a_{y,z}}{\gamma^2(1-u_x v)^2} + \frac{v a_x u_{y,z}}{\gamma^2(1-u_x v)^3}$$

第三周（3月11日）作业

1. 已知 $B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ， $U_\mu = (1, 9, 1, 5)$ ，利用闵氏度规升降指标，计算 B_ν^μ ， $B^{\mu\nu} U_\mu$ ， $B^{\mu\nu} U_\nu$ 。

2. 平直时空中，若一个以频率 ω 发射光子的光源以速度 v_1 沿 x 轴正方向运动，一个接收器以速度 v_2 沿 x 轴正方向运动。分别计算当接收器在光源的前方和后方时，所接收到的光子的频率。

1. (推荐直接编程计算就行。)

$$\text{解：} B_\nu^\mu = B^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

设 $X^\nu = B^{\mu\nu} U_\mu$ ， $Y^\mu = B^{\mu\nu} U_\nu$ ，

则有 $X^\mu = (6, 46, 14, 59)$ ， $Y^\mu = (29, 33, -52, 91)$

2. 相对论双向多普勒频移

(1) 首先我们做以下约定:

i. 阁氏度规 (符号 $(- +++)$):

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

ii. 光子四波矢:

$$k^\mu = \left(\frac{\omega_L}{c}, \pm \frac{\omega_L}{c}, 0, 0 \right), \quad k_\mu k^\mu = 0$$

ω_L 为光子在“实验室系” S 中的角频率; 上号为沿 $+x$, 下号为沿 $-x$ 。

iii. 源、受体四速度:

$$U_s^\mu = \gamma_1(c, v_1, 0, 0), \quad U_r^\mu = \gamma_2(c, v_2, 0, 0)$$

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}, \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}$$

iv. 频率的协变定义 (在任何惯性系中):

$$\boxed{\omega = -k_\mu U^\mu}$$

若取正频率需加绝对值; 下文直接写正值。

(2) 对于光源自身:

$$\omega_0 = -k_\mu U_s^\mu = \gamma_1(\omega_L - v_1 k_x) = \gamma_1 \omega_L (1 - \beta_1 \cos \epsilon)$$

其中 $\cos \epsilon = \pm 1$ 表示光子传播方向 ($+1$: 沿 $+x$, -1 : 沿 $-x$)。

同理, 接收器测得:

$$\omega_{\text{obs}} = -k_\mu U_r^\mu = \gamma_2(\omega_L - v_2 k_x) = \gamma_2 \omega_L (1 - \beta_2 \cos \epsilon)$$

将 ω_L 用上式中第一式消去, 得到一般双向多普勒公式:

$$\boxed{\omega_{\text{obs}} = \omega_0 \cdot \frac{\gamma_2(1 - \beta_2 \cos \epsilon)}{\gamma_1(1 - \beta_1 \cos \epsilon)}}$$

(3) 两种几何情形

接收器在前方: 光子追着接收器跑, 沿 $+x$:

$$\boxed{\omega_{\text{obs}}^{(+)} = \omega_0 \cdot \frac{\gamma_2(1 - \beta_2)}{\gamma_1(1 - \beta_1)} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_2}} \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}}}$$

接收器在后方: 光子迎面而来, 沿 $-x$:

$$\boxed{\omega_{\text{obs}}^{(-)} = \omega_0 \cdot \frac{\gamma_2(1 + \beta_2)}{\gamma_1(1 + \beta_1)} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2}} \sqrt{\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}}}$$

(4) 物理图像

接收器在前方: $\omega = -k \cdot U$ 是洛伦兹标量, 使得整个推导与参考系无关, 形式简洁且结果可靠。

两个平方根因子的写法展示了协变形式下的组合蓝移 / 红移: 前向观测频率由源的蓝移因子放大, 再乘以接收器的红移因子; 反向则相反。

第四周（3月18日）作业

- 逆变矢量的协变导数为 $\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A^\sigma$, 请据此给出协变矢量的协变导数为: $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma$ 。
- 考虑一个二维的单位球面, 线元为: $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi$, 请根据课上公式给出相应的 Christoffel 联络的所有分量。

1. 解: 对标量 $A^2 = A^\nu A_\nu$ 的协变导数应等于偏导数, 因此有

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(A^\nu A_\nu) &= \partial_\mu(A^\nu A_\nu) \\ (\nabla_\mu A^\nu)A_\nu + A^\nu \nabla_\mu A_\nu &= (\partial_\mu A^\nu)A_\nu + A^\nu \partial_\mu A_\nu \\ (\partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A^\sigma)A_\nu + A^\nu \nabla_\mu A_\nu &= (\partial_\mu A^\nu)A_\nu + A^\nu \partial_\mu A_\nu\end{aligned}$$

所以 $A^\nu \nabla_\mu A_\nu = A^\nu \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A^\sigma A_\nu = A^\nu \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A^\nu A_\rho$

因此 $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho$

2. (推荐用作用量变分得到测地线方程然后得到克氏符, 这样更快。)

解: 球面的度规分量为: $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta$, $g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = 0$

逆度规的分量为: $g^{\theta\theta} = 1$, $g^{\phi\phi} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$, $g^{\theta\phi} = g^{\phi\theta} = 0$

Christoffel 联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$

而度规分量的偏导数中, 仅 $\partial_\theta g_{\phi\phi} = 2 \sin \theta \cos \theta$ 非零。

因此, $\Gamma_{\mu\nu}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\mu g_{\theta\nu} + \partial_\nu g_{\theta\mu} - \partial_\theta g_{\mu\nu})$

仅当 $\mu = \nu = \phi$ 时, $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$ 非零。

$\Gamma_{\mu\nu}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\mu g_{\phi\nu} + \partial_\nu g_{\phi\mu} - \partial_\phi g_{\mu\nu})$

仅有 $\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta$ 非零。

第五周（3月25日）作业

证明线性化的黎曼张量在规范变换下不变。

证明: 线性化的黎曼张量为: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma})$

在规范变换下 $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$, 带入可得

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\rho \partial_\nu \partial_\mu \xi_\sigma - \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma \xi_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\rho \xi_\nu \\ &\quad - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} + \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\mu \xi_\rho + \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\rho \xi_\mu - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \xi_\sigma + \partial_\rho \partial_\mu \partial_\sigma \xi_\nu) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma})\end{aligned}$$

形式不变。

第六周（4月1日）作业

证明投影算子满足: $\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}$ 。

证明：由于 $\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$ ，利用 $P_{ij}P_{jk} = P_{ik}$ ， $P_{ij} = P_{ji}$ ， $P_{ii} = 2$
可得 $\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = (P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl})(P_{km}P_{ln} - \frac{1}{2}P_{kl}P_{mn})$
 $= P_{im}P_{jn} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{mn} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{mn} + \frac{2}{4}P_{ij}P_{mn} = \Lambda_{ij,mn}$

第七周（4月8日）作业

考虑一个弹簧，原长为 l_0 ，劲度系数为 k ，两端均连接质量为 m 的质点。将弹簧压缩至长度为 l 并释放。请计算这个系统的四极矩和引力辐射。

解：设质心为原点，两个质点初始坐标分别为 $\vec{r}_1 (\frac{l}{2}, 0, 0)$ 和 $\vec{r}_2 = (-\frac{l}{2}, 0, 0)$ 。
求解弹簧振子方程，根据初始条件，可得 $x_1 = -x_2 = \frac{1}{2}l_0 + \frac{1}{2}(l - l_0) \cos \sqrt{\frac{2k}{m}}t$
可得 $I_{11} = mx_1^2 + mx_2^2 = \frac{m}{2} \left[l_0 + (l - l_0) \cos \sqrt{\frac{2k}{m}}t \right]^2$ ，其余分量为 0。
 $\bar{h}_{11} = \frac{2G}{r} \ddot{I}_{11} = \frac{4Gk(l_0-l)}{r} \left(l_0 \cos \sqrt{\frac{2k}{m}}t + (l - l_0) \cos 2\sqrt{\frac{2k}{m}}t \right)$

第八周（4月15日）作业

考虑一对可视为质点的致密球体，质量均为 1 吨，质心距离为 10 厘米，它们在引力作用下以圆轨道绕公共质心转动。请计算这个系统辐射引力波的功率。

解：只受引力作用的等质量双星的引力波辐射功率为 $P = \frac{2G^4 M^5}{5c^5 R^5}$

其中 $M = 10^3 \text{ kg}$ ， $R = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。

取 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ， $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

带入公式，可得 $P = 1.04 \times 10^{-62} \text{ W}$

由于与广义相对论课程的杂记进行了合并，下面这部分题目来自广义相对论课程（2024 张鹏鸣讲授，题目不全相关）。

20 级期末考题与 21 级期末考题

给简单的对角度规，求测地线方程（两个大题）。

利用 Bianchi II 恒等式证明 Einstein 张量散度为 0。

Killing 矢量的性质（张量运算）（22 级也考）。

问相对论时空和非相对论时空的理解，以及带宇宙常数的场方程推导。

引力波相关问题（22 级也考）。

施瓦西解的推导和性质讨论。

宇宙学原理与 FLRW 度规（22 级也考）的相关计算。

普通导数的分量不满足张量的分量变换规律

计算逆变矢量 w^ν 的普通导数 $B_\mu^\nu = \partial_\mu w^\nu$ 在坐标变换下的变换关系，并说明 B_μ^ν 是什么量。

首先，我们来看逆变矢量 w^ν 在坐标变换下的变换规则。设 x^μ 是原来的坐标， $x'^{\mu'}$ 是新坐标，逆变矢

量在坐标变换下的变换关系为：

$$w^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} w^\nu$$

现在，我们来计算其普通导数 $B_\mu^\nu = \partial_\mu w^\nu$ 在坐标变换下的变换关系。对 w^ν 求导，我们得到：

$$B_\mu^\nu = \partial_\mu w^\nu = \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\mu}$$

在新的坐标系中，相应的导数是：

$$B_{\mu'}^{\nu'} = \frac{\partial w^{\nu'}}{\partial x'^{\mu'}}$$

利用链式法则，普通导数可以用原坐标系中的量表示为：

$$B_{\mu'}^{\nu'} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} w^\nu \right)$$

对该表达式展开，我们得到：

$$B_{\mu'}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\rho} + w^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\nu \partial x'^{\mu'}}$$

可以看到，普通导数 B_μ^ν 的变换关系涉及到第二个项，即坐标变换的二阶导数。这表明 B_μ^ν 在坐标变换下并不按照张量的变换法则来变换，因此它本身并不是一个张量。

总结来说， $B_\mu^\nu = \partial_\mu w^\nu$ 不是一个张量，因为它在坐标变换下包含了非张量形式的项（第二个项）。普通导数并不考虑连接项，因此并不能保证其张量性。相反，如果使用协变导数来代替普通导数，则可以得到一个在坐标变换下保持张量形式的量。

球坐标系基矢长度证明

证明在三维欧氏空间的球坐标系中，基矢 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}$ 的长度依次为 1, r , $r \sin \theta$ 。

在三维欧氏空间中，选择球坐标系 (r, θ, ϕ) ，其与笛卡尔坐标系 (x^1, x^2, x^3) （其中 $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ）的关系为：

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

为方便使用抽象指标记号，我们将笛卡尔坐标记为 x^a （其中 $a = 1, 2, 3$ ），球坐标记为 x^i （其中 $i = 1, 2, 3$ 对应于 r, θ, ϕ ）。

欧氏空间中的度量张量在笛卡尔坐标系下为 δ_{ab} 。利用坐标变换公式，球坐标系下的度量张量为：

$$g_{ij} = \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^b}{\partial x^j}.$$

计算各偏导数：

1. 对于 x 分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi, \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi. \end{aligned}$$

2. 对于 y 分量:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \phi, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \phi, \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} &= r \sin \theta \cos \phi.\end{aligned}$$

3. 对于 z 分量:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} &= 0.\end{aligned}$$

计算度量张量的各分量:

1. g_{rr} 分量:

$$\begin{aligned}g_{rr} &= \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial r} \frac{\partial x^b}{\partial r} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \\ &= (\sin \theta \cos \phi)^2 + (\sin \theta \sin \phi)^2 + (\cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta (1) + \cos^2 \theta \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. $g_{r\theta}$ 分量:

$$\begin{aligned}g_{r\theta} &= \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial r} \frac{\partial x^b}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ &= (\sin \theta \cos \phi)(r \cos \theta \cos \phi) + (\sin \theta \sin \phi)(r \cos \theta \sin \phi) + (\cos \theta)(-r \sin \theta) \\ &= r \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - r \cos \theta \sin \theta \\ &= r \sin \theta \cos \theta (1) - r \cos \theta \sin \theta \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此, $g_{r\theta} = 0$ 。

类似地, 可得 $g_{r\phi} = 0$ 和 $g_{\theta\phi} = 0$ 。

3. $g_{\theta\theta}$ 分量:

$$\begin{aligned}
 g_{\theta\theta} &= \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \theta} \frac{\partial x^b}{\partial \theta} \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \\
 &= (r \cos \theta \cos \phi)^2 + (r \cos \theta \sin \phi)^2 + (-r \sin \theta)^2 \\
 &= r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta \\
 &= r^2 (\cos^2 \theta (1) + \sin^2 \theta) \\
 &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= r^2.
 \end{aligned}$$

4. $g_{\phi\phi}$ 分量:

$$\begin{aligned}
 g_{\phi\phi} &= \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \phi} \frac{\partial x^b}{\partial \phi} \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \\
 &= (-r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta \cos \phi)^2 + 0 \\
 &= r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
 &= r^2 \sin^2 \theta (1) \\
 &= r^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

基矢的长度平方由度量张量给出:

$$|\partial_i|^2 = g_{jk}(\partial_i)^j(\partial_i)^k = g_{jk}\delta_i^j\delta_i^k = g_{ii}.$$

因此, 基矢的长度为:

$$|\partial_i| = \sqrt{g_{ii}}.$$

计算各基矢的长度:

1. 对于 ∂_r :

$$|\partial_r| = \sqrt{g_{rr}} = \sqrt{1} = 1.$$

2. 对于 ∂_θ :

$$|\partial_\theta| = \sqrt{g_{\theta\theta}} = \sqrt{r^2} = r.$$

3. 对于 ∂_ϕ :

$$|\partial_\phi| = \sqrt{g_{\phi\phi}} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta.$$

C 公式表速查

以下公式表来自<http://zhiqihuang.top/gr/lectures/appendix.pdf>, 版权归黄志琦老师所有。

 Christoffel 联络:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

 协变微商公式:

$$\begin{aligned} (T_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots})_{;\lambda} &= (T_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots})_{,\lambda} \\ &+ \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\rho \mu_2 \dots} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_2} T_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \rho \dots} + \dots \\ &- \Gamma_{\nu_1 \lambda}^{\rho} T_{\rho \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots} - \Gamma_{\nu_2 \lambda}^{\rho} T_{\nu_1 \rho \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots} - \dots \end{aligned}$$

 黎曼张量定义:

$$R_{\mu\alpha\beta}^{\lambda} = \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} - \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} \Gamma_{\rho\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda}$$

Ricci 张量定义为 $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$

 测地线方程:

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

 爱因斯坦场方程:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

其中 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$

 理想流体的能量动量张量:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} - p g_{\mu\nu}$$

 史瓦西度规:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

 引力波的四极矩辐射公式:

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{G\omega^6}{4\pi} Q_{ij}^* Q_{kl} P^{ijkl}(n)$$

 FRW 度规:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

 Friedmann 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \end{aligned}$$

ΛCDM 宇宙学定义：

$$\Omega_X = \frac{8\pi G \rho_{X0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$$
$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_r(1+z)^4}$$

其中 Λ, m, r 分别对应宇宙学常数、冷物质和辐射成分。

D 抽象指标

阅读[3]的笔记，不全，仅供参考。

标记约定如下：

1. (k, l) 型张量用带有 k 个上标和 l 个下标的字母表示，上下指标为小写拉丁字母，只表示张量类型。

例如：

矢量 v^a ；

对偶矢量 ω_a ；

$(2, 1)$ 型张量 T^{ab}_c .

2. 重复指标表缩并 (contraction) .

例如： $T^{ab}_a = T(e^{\mu*}, \bullet; e_\mu)$.

3. 张量积记号省略.

例如： $T \in \mathcal{T}_V(2, 1)$, $S \in \mathcal{T}_V(1, 1)$, 则 $T \otimes S$ 记为 $T^{ab}_c S^d_e$.

作用即是“积并”，例如 $\omega \otimes \mu(u, v) = \omega_a \mu_b u^a v^b = \omega(u) \mu(v)$.

张量积顺序不可交换，例如 $\omega_a \mu_b = \mu_b \omega_a$ 但 $\omega_a \mu_b \neq \mu_a \omega_b$.

4. 具体指标.

涉及张量分量时，相应指标用小写希腊字母，称为具体指标，可以谈具体等于多少.

例如： $T^{ab}_c = T^{\mu\nu}_\sigma (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\sigma)_c$. 其中， $(e^\sigma)_c$ 的抽象下标 c 已经表明它是对偶矢量，不用再加上星号. 而分量（用“作用 = 积并”观点写出） $T^{\mu\nu}_\sigma = T^{ab}_c (e^\mu)_a (e^\nu)_b (e_\sigma)^c$.

5. 张量面面观

6. 度规 (metric)

因为 $g \in \mathcal{T}_V(0, 2)$, 所以记为 g_{ab} . 度规引入了 V 和 V^* 的自然同构，因此我们事实上认为矢量与对偶矢量代表同一事物，用同一字母来表示，类型取决于指标的上下，而度规引入了升降指标的操作，接下来我们细致地讨论抽象指标下关于度规的一系列内容。

7. 张量的对称性

E 一个坐标变换示例

E.1 偏导数的倒数关系

在多元微积分中，部分导数的倒数关系并不像一元情况下那样简单。在一元函数中，如果 $\frac{dx}{dt} = f(t)$ ，并且 $f(t) \neq 0$ ，那么通常有 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t)}$ 。但是在多元情况下，情况就复杂得多。

具体来说， $\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi$ 是在保持 θ 和 ϕ 不变的情况下，对 x 关于 r 的偏导数。而 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 则是保持其他变量（如 y 和 z ）不变时，对 r 关于 x 的偏导数。

由于这两个偏导数是在不同的变量条件下求取的，因此它们之间不存在简单的倒数关系。换句话说，偏导数的倒数并不等于反向的偏导数，除非其他变量的依赖关系被正确考虑。

在球坐标系中，变量之间的关系是：

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

因此，直接取 $\frac{\partial x}{\partial r}$ 的倒数来得到 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 是不正确的。正确的方式是通过求解 r 关于 x 、 y 、 z 的函数，然后计算偏导数。同时，还需要考虑到 r 与 x 之间的函数关系以及其他变量的影响。

总结：由于在求偏导数时所保持的变量不同，直接取偏导数的倒数并不能得到另一个变量的偏导数。

因此，不能通过取 $\frac{\partial x}{\partial r}$ 的倒数来得到 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 。这是因为在多元微积分中，偏导数的倒数并不等于反向的偏导数，除非考虑了所有相关变量的影响和条件。

E.2 从笛卡尔坐标系 (x, y, z) 到球坐标系 (r, θ, ϕ) 的坐标变换下的偏导数关系推导

由笛卡尔坐标和球坐标之间的转换关系：

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

我们的目标是推导偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial}{\partial z}$ 与 $\frac{\partial}{\partial r}$ 、 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 、 $\frac{\partial}{\partial \phi}$ 之间的关系。

首先，计算 r 、 θ 、 ϕ 关于 x 、 y 、 z 的偏导数。

1. r 的偏导数

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

因此：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

2. θ 的偏导数

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right),$$

因此：

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r} \right) \right).$$

计算 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r} \right) = -\frac{xz}{r^3},$$

因此:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{xz}{r^2 \sqrt{r^2 - z^2}}.$$

由于 $\sqrt{r^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, 所以:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{xz}{r^2 \rho}.$$

类似地, 有:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{yz}{r^2 \rho}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\rho}{r^2}.$$

3. ϕ 的偏导数

$$\phi = \arctan 2(y, x),$$

因此:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{\rho^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{\rho^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

对于任意可微函数 $f(x, y, z)$, 根据链式法则:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

由于我们想表达偏导算子 $\frac{\partial}{\partial x}$, 所以有:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

代入已知的偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{xz}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{yz}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

利用以下关系:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, & y &= r \sin \theta \sin \phi, & z &= r \cos \theta, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta. \end{aligned}$$

因此:

$$\frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{z}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\rho}{r} = \sin \theta.$$

将这些关系代入偏导数表达式中:

1. 化简 $\frac{xz}{r^2 \rho}$ 和 $\frac{yz}{r^2 \rho}$

$$\frac{xz}{r^2 \rho} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r \sin \theta},$$

$$\frac{yz}{r^2 \rho} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r \sin \theta}.$$

2. 化简 $\frac{x}{\rho^2}$ 和 $\frac{y}{\rho^2}$

$$\frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta},$$

$$\frac{y}{\rho^2} = \frac{\sin \phi}{r \sin \theta}.$$

综上所述，在从笛卡尔坐标系 (x, y, z) 到球坐标系 (r, θ, ϕ) 的坐标变换下，偏导数之间的关系为：

$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$
$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$
$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$

F 采样、傅里叶变换与能谱泄露

本附录旨在对引力波数据分析中所涉及的基础但至关重要的信号处理概念进行阐述，主要包括信号的离散化采样、傅里叶变换（Fourier Transform, FT）的实际应用，以及因数据截断而引发的能谱泄露（spectral leakage）问题与相应的加窗（windowing）抑制技术。

引力波探测器所输出的应变（strain）信号本质上是一个连续的时间函数，我们将其表示为 $x(t)$ 。然而，在现代化的数据处理流程中，计算机只能处理离散的数字信号。因此，首要步骤便是对连续信号进行采样（sampling），即以固定的时间间隔 Δt 对 $x(t)$ 进行周期性测量，从而得到一个离散的时间序列 $x[n\Delta t]$ ，其中 n 为整数。这个过程在数学上可以表示为：

$$t = n\Delta t, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

采样过程从根本上改变了信号的频域特性。一个连续信号的频谱是唯一的，但对其进行离散采样后，其频谱会以采样率 $f_s = 1/\Delta t$ 为周期进行无限延拓。这意味着在频域中，原始信号的频谱会以 f_s 为间隔重复出现，从而产生无数个“镜像”或“混叠”（aliasing）分量。这就引出了一个核心问题：为了从采样后的离散信号中无损地恢复原始连续信号的信息，采样率 f_s 应该如何选择？

答案由著名的奈奎斯特-香农采样定理（Nyquist-Shannon sampling theorem）给出。该定理指出，若要无失真地从离散样本中重构原始信号，必须满足两个基本条件：首先，原始信号 $x(t)$ 的频谱必须是有限的（band-limited），即其能量集中在某个最高频率 f_{max} 之内；其次，采样率 f_s 必须至少是该最高频率的两倍，即 $f_s \geq 2f_{max}$ 。这个最低采样率 $f_s = 2f_{max}$ 被称为奈奎斯特率（Nyquist rate），而其一半， $f_s/2$ ，则被称为奈奎斯特频率（Nyquist frequency）。这个频率定义了能够被无歧义地表征的频率区间，即 $[-f_s/2, f_s/2]$ 。若采样率不满足此条件，高于奈奎斯特频率的信号分量将会被错误地“折叠”进低频区域，造成信息混淆，这种现象称为混叠。因此，在实践中，为保证信号的保真度，通常会在采样前对连续信号施加一个低通滤波器，以滤除高于奈奎斯特频率的成分。

在离散信号处理中，傅里叶变换（FT）及其逆变换（IFT）是最核心的分析工具，它们分别由离散傅里叶变换（DFT）和逆离散傅里叶变换（IDFT）实现。对于一个包含 N 个采样点的有限长序列 $x[n]$ ，其 DFT 和 IDFT 定义如下：

$$\begin{aligned}\tilde{x}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \\ x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] e^{\frac{2\pi i}{N} kn}\end{aligned}$$

其中， $k, n = 0, 1, \dots, N - 1$ 。值得注意的是，在实际的科学计算软件中，DFT 的计算实现与上述数学定义在尺度因子上有所区别，以保证其通用性。软件实现通常返回一个未标准化的结果，用户需要根据信号的总时长 T 或采样间隔 Δt 自行进行缩放，以获得具有物理意义的频谱。

对有限长时间序列直接进行傅里叶变换会引入一个普遍存在的问题——能谱泄露。其根源在于，数学上的傅里叶变换要求对时间从负无穷到正无穷进行积分，而我们处理的总是有限长度的数据段。在计算 DFT 时，算法隐含地将这段有限的数据进行了周期性延拓。如果数据段的起始点和结束点的值不相等，这种延拓就会在连接处产生一个不连续的突变。这个突变在频域上表现为能量从其真实的频率“泄露”到邻近的频率仓（frequency bin）中，从而扭曲了真实的频谱结构。

为了抑制能谱泄露，最常用的方法是加窗（windowing）。其核心思想是在进行傅里叶变换之前，将原始数据序列 $x(t)$ 与一个窗函数 $w(t)$ 在时域上相乘，得到一个加窗后的序列 $x_w(t) = w(t)x(t)$ 。窗函数的特点是其两端平滑地趋近于零，从而强制加窗后序列的起始点和结束点也被压缩至零，消除了周期性延拓带来的不连续性。根据卷积定理，时域的乘积等价于频域的卷积。由于任何有限时长的窗函数（在时域上

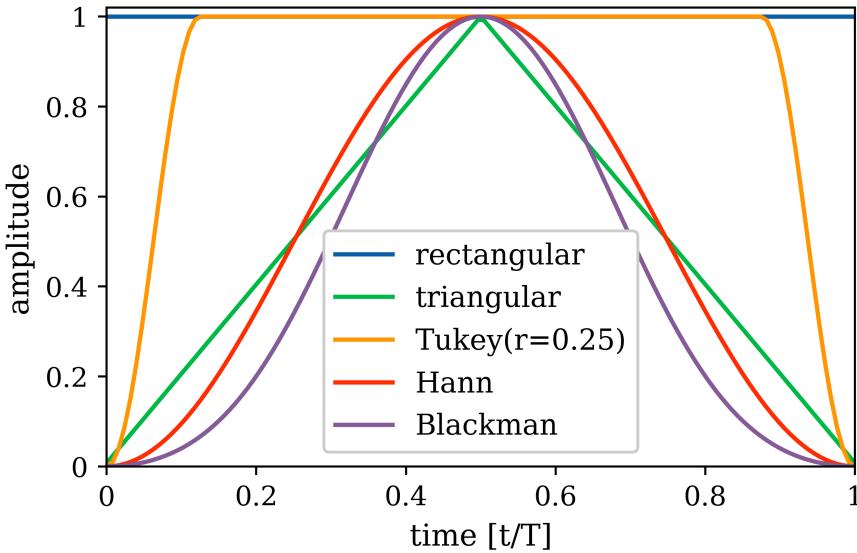


图 18: 不同窗函数的时域图像

是紧支撑的) 在频域上都具有无限的支撑, 其频谱必然会与原始信号的频谱发生卷积, 这便是能谱泄露在数学上的体现, 但一个设计良好的窗函数可以极大地减小这种泄露的程度。

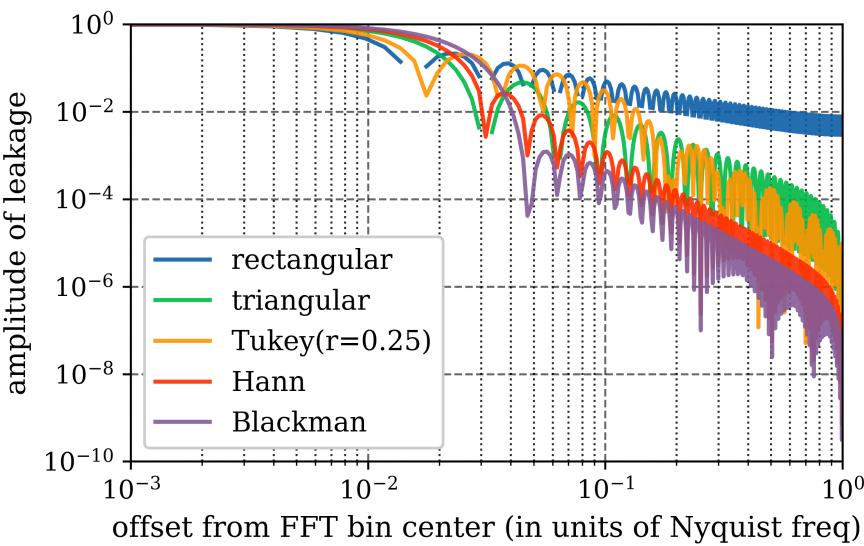


图 19: 以 Nyquist frequency 为单位频域, 不同窗函数能谱泄露的幅度

存在多种窗函数可供选择, 它们在抑制能谱泄露 (主瓣宽度和旁瓣衰减) 与保持信号时域信息之间做出了不同的权衡。常见的窗函数包括:

RECTANGULAR WINDOW

$$w(t) = 1, \quad \text{for } 0 \leq t \leq T.$$

这相当于不加窗, 其能谱泄露最为严重。

TRIANGULAR WINDOW

$$w(t) = 1 - \left| \frac{2t}{T} - 1 \right|.$$

 **汉宁窗 (Hann window):**

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right).$$

 **布莱克曼窗 (Blackman window):**

$$w(t) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0.08 \cos \frac{4\pi t}{T}.$$

 **图基窗 (Tukey window):** 这是一个参数化的窗函数，通过调节参数 r 可以平滑地从矩形窗 ($r = 0$) 过渡到汉宁窗 ($r = 1$)，为在时域分辨率和频域泄露之间取得平衡提供了灵活性。

参考[7]，这些窗函数在时域的形态及其在频域的能谱泄露特性可以通过图像（图 18 和 图 19）直观对比。通常，旁瓣衰减越快的窗函数（如布莱克曼窗），其抑制远端频率泄露的能力越强，但代价是其主瓣会更宽，从而降低了频率分辨率。在引力波数据分析的实践中，选择合适的窗函数至关重要。例如，对于随机引力波背景噪声的分析，一种被证明行之有效的策略是使用重叠 50% 的汉宁窗，这种方法能够在有效抑制能谱泄露的同时，较好地保留信号信息。