



Optics Assignment

pifuyuini

GitHub@pifuyuini

Sunset and solitary wild geese fly in unison; autumn waters blend seamlessly with the vast expanse of the sky.

July 19, 2025

Contents

1 Assignment II	4
1.1 Extra Problem	4
1.2 Problem 4.8	5
1.3 Problem 4.68	5
1.4 Problem 4.88	6
1.5 Problem 4.100	6
1.6 Problem 4.91	7
2 Assignment III	8
2.1 Problem 7.6	8
2.2 Problem 7.12	8
2.3 Problem 7.21	8
2.4 Problem 7.23	9
2.5 Problem 7.39	9
2.6 Problem 7.56	9
2.7 Problem 7.59	10
2.8 Problem 7.61	10
3 Assignment IV	11
3.1 Problem 8.13	11
3.2 Problem 8.39	11
3.3 Problem 8.53	12
3.4 Problem 8.56	12
3.5 Problem 8.57	13
3.6 Problem 8.64	13
3.7 Problem 8.92	13
3.8 Problem 8.94	16
4 Assignment V	16
4.1 Problem 9.5	16
4.2 Problem 9.11	17
4.3 Problem 9.17	17
4.4 Problem 9.19	18
4.5 Problem 9.51	18
4.6 Problem 9.52	19

Optics Assignment

4.7 Problem 9.57	20
4.8 Problem 9.61	20
5 Assignment VI	21
5.1 Problem 10.7	21
5.2 Problem 10.34	21
5.3 Problem 10.40	21
5.4 Problem 10.46	21
5.5 Problem 10.50	22
5.6 Problem 10.58	22
5.7 Problem 10.83	22
5.8 Problem 10.91	23
References	24
Appendix	25
A 基本知识回顾	25
A.1 Maxwell 方程组 (Maxwell's Equations)	25
A.2 光学常识 (General Optical Concepts)	26
A.3 电磁波能量的描述 (Energy of EM Waves)	26
A.4 色散模型 (Dispersion Models)	27
A.5 菲涅尔定律 (Fresnel's Laws)	27
A.6 斯托克斯方法 (Stokes' Relations)	28
A.7 相干性 (Coherence)	29
B 偏振 (Polarization)	29
B.1 偏振的描述 (Description of Polarization)	29
B.2 偏振器 (Polarizers)	30
B.3 双折射 (Birefringence)	31
B.4 旋光性 (Optical Activity)	32
B.5 光学调制 (Optical Modulation)	32
B.6 偏振的矩阵表达 (Matrix Representation of Polarization)	32
C 干涉 (Interference)	33
C.1 干涉的条件 (Conditions for Interference)	33
C.2 波阵面分割干涉 (Wavefront Division Interference)	34
C.3 振幅分割干涉 (Amplitude Division Interference)	34
C.4 迈克尔逊干涉仪 (Michelson Interferometer)	35
C.5 其它知名干涉仪介绍 (Other Famous Interferometers)	36
C.6 多光束干涉 (Multiple-Beam Interference)	36

C.7	光学镀膜 (Optical Coatings)	36
D	衍射 (Diffraction)	37
D.1	标量衍射理论 (Scalar Diffraction Theory)	37
D.2	夫琅禾费衍射 (Fraunhofer Diffraction)	38
D.3	菲涅尔衍射 (Fresnel Diffraction)	39
E	进阶内容 (Advanced Topics)	40
E.1	光学像差 (Optical Aberrations)	40
E.2	傅里叶光学 (Fourier Optics)	41
E.3	散射光成像 (Scattered Light Imaging)	42
E.4	激光 (LASER)	42
E.5	再论相干性 (Coherence Revisited)	43

1 Assignment II

1.1 Extra Problem

(Q1) Solution:

Use the results obtained from Snell's law to replace the Fresnel formula including the transmission angle term, and obtain the function about the incident angle, which is plotted as follows:

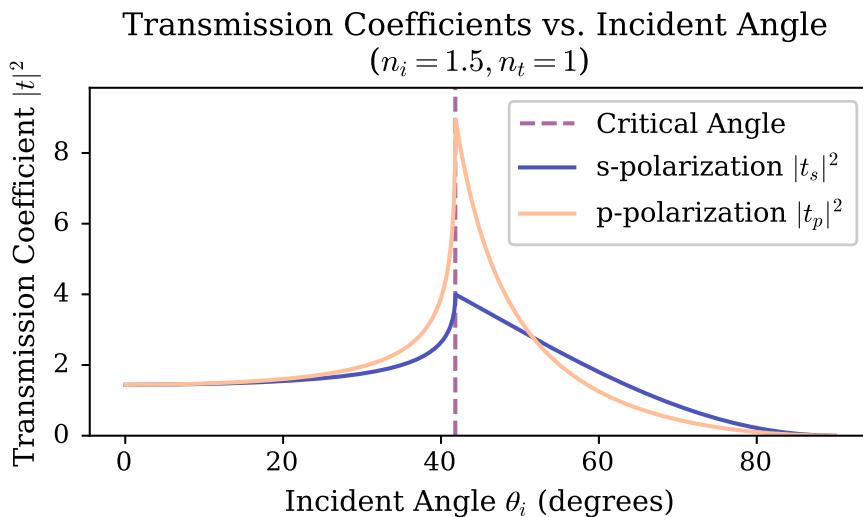


Figure 1: Transmission coefficients $|t_s|^2$ and $|t_p|^2$ as functions of incident angle θ_i , for light traveling from a medium with refractive index $n_i = 1.5$ to a medium with $n_t = 1$. The vertical dashed line indicates the critical angle, beyond which total internal reflection occurs. Although the magnitude squared of the transmission coefficients $|t|^2$ can exceed 1, this does not violate energy conservation, as the actual transmitted power must include the correction factor $(n_t \cos \theta_t)/(n_i \cos \theta_i)$.

We can always find that $|t| > 1$, therefore $tt^* > 1$, t represents amplitude transmittance, which means that the electric field amplitude of transmitted light is greater than that of incident light. However, this does not violate the principle of energy conservation, because the energy flow density of light is not only related to the amplitude of the electric field, but also related to the refractive index of the medium.

(Q2) Proof:

For s-polarization, we can find that:

$$\begin{aligned}
 R_s + T_s &= r_s r_s^* + t_s t_s^* \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \\
 &= \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 + \left| \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 \left| \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

For p-polarization, the results are the same.

Q.E.D.

1.2 Problem 4.8

Solution: As shown in **Figure 2**.

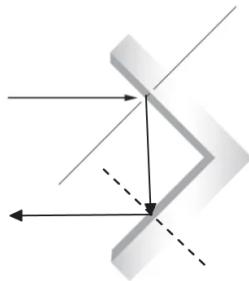


Figure 2: Problem 4.8 Schematic diagram.

1.3 Problem 4.68

Proof: Considering the Brewster angle of external reflection, we find:

$$\theta_p^{(e)} + \theta_p''^{(e)} = \frac{\pi}{2}$$

Next, from Snell's law and Fresnel's formula, the polarization of the P wave is 0.

At this time, it is obtained from Snell's law, that:

$$n_2 \sin(\theta_p''^{(e)}) = n_2 \cos(\theta_p^{(e)}) = n_1 \sin(\theta_p^{(e)})$$

that is:

$$\tan(\theta_p^{(e)}) = \frac{n_2}{n_1}$$

Similarly, for internal reflection, we find:

$$\tan(\theta_p^{(i)}) = \frac{n_1}{n_2}$$

So that:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_p^{(e)}) &= \frac{1}{\tan(\theta_p^{(i)})} \Rightarrow \sin(\theta_p^{(e)}) \sin(\theta_p^{(i)}) - \cos(\theta_p^{(e)}) \cos(\theta_p^{(i)}) = 0 \\ &\Rightarrow \cos(\theta_p^{(e)} + \theta_p^{(i)}) = 0 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\theta_p^{(e)} + \theta_p^{(i)} = \frac{\pi}{2}$$

Q.E.D.

1.4 Problem 4.88

Solution: Considering the penetration depth $\delta = \frac{1}{\beta}$, and β is:

$$\beta = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta) - 1}$$

Replace the corresponding symbols with numerical values to get:

$$\beta = \frac{2\pi \times 1}{500 \text{ nm}} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1} = 1.04 \times 10^6$$

Next, we find:

$$\begin{aligned} 36.8\% &= \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) = \exp(-\beta y) \\ \Rightarrow y &= 9.612 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

1.5 Problem 4.100

Solution: According to Stokes' technique, we find:

$$E_{0i} = E_{0i} r'_{//} r'_{//} + E_{0i} t_{//} t'_{//}$$

Noticed that when $\theta_i = \theta_p'$, $r'_{//} = 0$, therefore:

$$E_{0i} = E_{0i} t_{//} t'_{//} \Rightarrow 1 = t(\theta_p)_{//} t(\theta_p')_{//}$$

Next, we also find:

$$0 = E_{0i}r'_{//}t'_{//} + E_{0i}r_{//}t'_{//}$$

With $r'_{//} = 0$ and $t'_{//} \neq 0$, it must be that $r(\theta_p)_{//} = 0$. For this reason, $\theta_p = 0$ (found in Problem 4.68).

Think about it from another perspective, since $T = t'_{//}t_{//} = 1$ and $T + R = 1$, we find $R = 0$ as we expected.

1.6 Problem 4.91

Solution: As you can see in the image in Problem Q1, the light beam is scattered from the wet paper, and the transmitted light accounts for a larger proportion, so most of the light is projected out, and the range of the circle with the incident point as the center and R as the radius is darker ; until a critical angle is reached, at which point the light is reflected back to the light source, thus forming a ring of light.

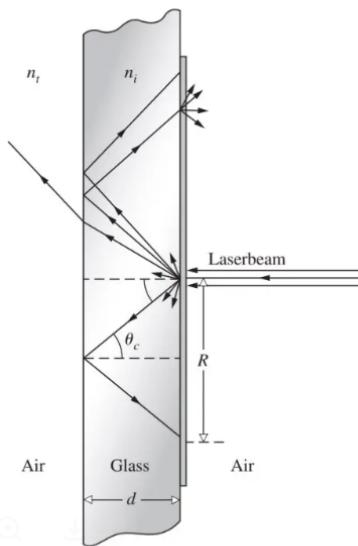


Figure 3: Problem 4.91 Schematic diagram.

From this, we get the light path diagram provided by the problem. We can find that:

$$\tan(\theta_c) = \frac{R}{2d}$$

$$\sin(\theta_c) = \frac{1}{n_i}$$

$$\Rightarrow n_i = \frac{1}{\sin(\arctan(\theta_c))}$$

just what we want.

2 Assignment III

2.1 Problem 7.6

Solution: According to the definition of optical path difference, we can directly calculate by the following formula:

$$OPD = n_{water}l + 2n_{glass}d - l - 2d = 0.0382m$$

while $l = 10cm, d = 0.5cm$.

As for the phase difference at the finishing line, we can find that:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} OPD = 1.25 \times 10^5 \pi$$

2.2 Problem 7.12

Solution: Using phasors, we can get the result shown in the **Figure 4**:

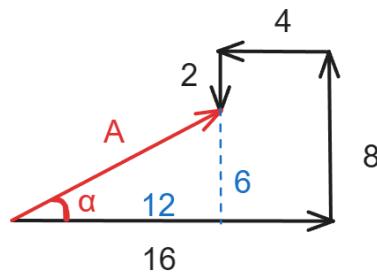


Figure 4: Problem 7.12

Then we find that:

$$A = \sqrt{12^2 + 6^2} = 13.4$$

$$\alpha = \arctan \frac{6}{12} = 0.464rad$$

2.3 Problem 7.21

Solution: Using product-to-sum formula, we can find that:

$$\begin{aligned} E &= E_0(1 + a \cos \omega_m t) \cos \omega_c t \\ &= E_0 \cos \omega_c t + E_0 a \cos \omega_m t \cos \omega_c t \\ &= E_0 \cos \omega_c t + \frac{E_0 a}{2} \cos(\omega_m - \omega_c)t + \frac{E_0 a}{2} \cos(\omega_m + \omega_c)t \end{aligned}$$

thus we get that E is equivalent to the superposition of three waves of frequencies ω_c , $\omega_m + \omega_c$, and $\omega_m - \omega_c$.

According to the relevant references, we can determine that $f_{max} = 2 \times 10^4 Hz$, therefore the $\Delta f = 2f_{max} = 4 \times 10^4 Hz$ is just what we want.

2.4 Problem 7.23

Proof: From the problem,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d2\pi\nu}{d\frac{2\pi}{\lambda}} = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda}$$

Q.E.D.

2.5 Problem 7.39

Solution: By the dispersion equation $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$, we can find that:

$$v_p = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\bar{\omega}})^2}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{\omega=\bar{\omega}} = c\sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\bar{\omega}})^2}$$

In fact, it can be obtained by differentiating the dispersion equation directly that:

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega}$$

thus we find that when we take $\omega = \bar{\omega}$ and $k = \bar{k}$ from both sides, $v_p v_g = c^2$, Q.E.D.

2.6 Problem 7.56

Solution: When $\bar{\lambda}_0 = 446nm$ and $\Delta\lambda_0 = 21nm$, we can find that $\bar{f} = \frac{c}{\bar{\lambda}_0} = 6.73 \times 10^{12} Hz$; and because $\frac{\Delta\lambda}{\bar{\lambda}_0} = \frac{\Delta f}{\bar{f}}$, so there is $\Delta f = 3.17 \times 10^{13} Hz$.

So that:

$$\Delta l_c = c\Delta t_c = \frac{c}{\Delta f} = 9.47 \times 10^{-6} m$$

2.7 Problem 7.59

Solution: From the Problem, using that $\frac{\Delta f}{\bar{f}} = 2 \times 10^{-10}$ and $\bar{f} = \frac{c}{\bar{\lambda}_0}$, we can find that $\Delta f = 9.48 \times 10^4 Hz$, then:

$$\Delta l_c = c\Delta t_c = \frac{c}{\Delta f} = 3.16 \times 10^3 m$$

2.8 Problem 7.61

Solution: When $\bar{\lambda}_0 = 600nm$ and $\Delta\lambda_0 = 10^{-10}m$, we can find that:

$$\Delta l_c = c\Delta t_c = \frac{c}{\Delta f} = \frac{\bar{\lambda}_0^2}{\Delta\lambda_0} = 3.6 \times 10^{-3} m$$

3 Assignment IV

3.1 Problem 8.13

Proof: It is noted that formula 8.25 is $T_l = T_0 \cos^2 \theta + T_{90} \sin^2 \theta$.

It is also known from the problem that $T_l = (T_0 - T_{90}) \cos^2 \theta + T_{90} = T_0 \cos^2 \theta + T_{90}(1 - \cos^2 \theta) = T_0 \cos^2 \theta + T_{90} \sin^2 \theta$.

Q.E.D.

3.2 Problem 8.39

Solution: Note that unlike calcite, quartz has less $n_o = 1.5443$ than $n_e = 1.5534$, which means that the optical path diagram will look like the one shown above ([Figure 5](#)).

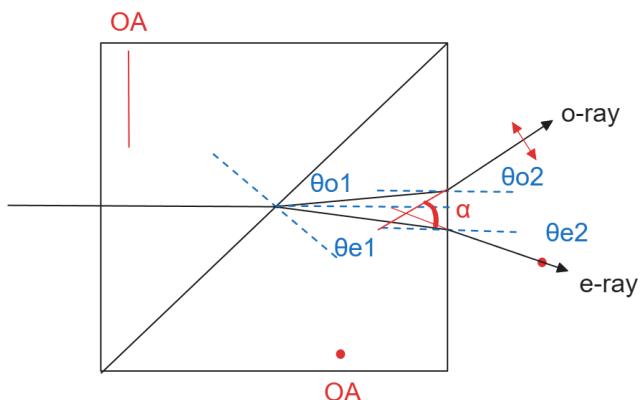


Figure 5: Problem 8.39

Refraction of o-ray across interface between two quartz prisms:

$$n_{o1} \sin \theta_{i1} = n_{o2} \sin \theta_{o1}$$

$$1.5534 \sin 45^\circ = 1.5443 \sin \theta_{o1}$$

$$\Rightarrow \theta_{o1} = 45.34^\circ$$

Refraction of e-ray across interface between two quartz prisms:

$$n_{e1} \sin \theta_{i1} = n_{e2} \sin \theta_{e1}$$

$$1.5443 \sin 45^\circ = 1.5534 \sin \theta_{e1}$$

$$\Rightarrow \theta_{e1} = 44.66^\circ$$

We can see from the **Figure 5**, $\theta_{i2} = \theta_{o1} - 45^\circ = 45^\circ - \theta_{e1} = 0.34^\circ$. Therefore, we can find that:

The second refraction of o-ray:

$$\begin{aligned} n_{o2} \sin \theta_{i2} &= n_{air} \sin \theta_{o2} \\ 1.5443 \sin 0.34^\circ &= (1) \sin \theta_{o2} \\ \Rightarrow \theta_{o2} &= 0.525^\circ \end{aligned}$$

The second refraction of e-ray:

$$\begin{aligned} n_{e2} \sin \theta_{i2} &= n_{air} \sin \theta_{e2} \\ 1.5534 \sin 0.34^\circ &= (1) \sin \theta_{e2} \\ \Rightarrow \theta_{e2} &= 0.528^\circ \end{aligned}$$

The angle separating the two is: $\alpha = \theta_{o2} + \theta_{e2} = 1.053^\circ$.

3.3 Problem 8.53

Solution: From $\lambda_n = \lambda_0/n$, we can find that:

E-ray:

$$\lambda_n^{(e)} = \frac{\lambda_0}{n^{(e)}} = \frac{589.3\text{nm}}{1.5534} = 379.4\text{nm}$$

O-ray:

$$\lambda_n^{(o)} = \frac{\lambda_0}{n^{(o)}} = \frac{589.3\text{nm}}{1.5443} = 381.6\text{nm}$$

The two kinds of light have the same frequency: $f = \frac{c}{\lambda_0} = 5.091 \times 10^{14}\text{Hz}$.

3.4 Problem 8.56

Solution: Briefly, for natural light, the wave plate does not affect its light intensity (irradiance), whereas the polarizer affects its light intensity. Therefore, it can be determined by observing the change of light intensity separately.

3.5 Problem 8.57

Solution: For a 135-degree linearly polarized light, we have $\mathcal{P} = E_0 \hat{i} \cos \theta - E_0 \hat{j} \cos \theta$. When it passes through a $\frac{\pi}{2}$ -phase retarder with a fast axis in the vertical direction, it means that the phase of the y-direction polarization will lag behind $\frac{\pi}{2}$.

$$E_0 \hat{i} \cos \theta - E_0 \hat{j} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = E_0 \hat{i} \cos \theta - E_0 \hat{j} \sin \theta = \mathcal{L}$$

This means that it becomes left-handed circular polarization.

If the incoming ray is polarized parallel to the slow axis, it will not rotate.

3.6 Problem 8.64

Solution: Considering the Jones vector and the matrix,

Incident light:

$$\mathcal{P}_i = (1, 0)$$

Wave plate (fast axis with x clip $\frac{\pi}{8}$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) & (1-i) \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \\ (1-i) \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) & \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \end{bmatrix}$$

Then we can get emergent light:

$$\mathcal{P}_e = \mathbf{J} \mathcal{P}_i = \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right), (1-i) \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \right)$$

From this we can obtain phasors in both polarization directions very easily (in polar coordinates):

3.7 Problem 8.92

Solution:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

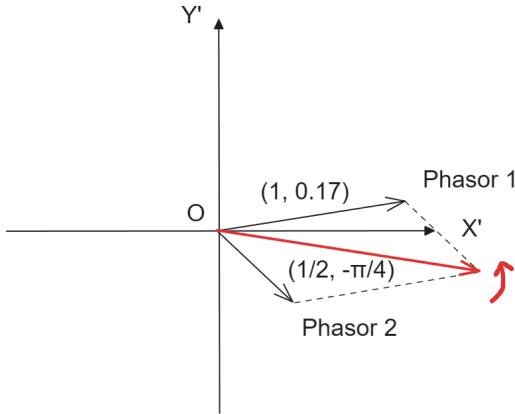


Figure 6: Problem 8.64

1. According to the problem,

$$\mathcal{P}_{1i} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

The emergent light:

$$\mathcal{P}_{1e} = \mathbf{J} \mathcal{P}_{1i} = (\cos(\theta - \alpha), \sin(\theta - \alpha))$$

It means the change from one linear polarization to another.

2. Similarly, it can be obtained that:

$$\mathcal{P}_{2i} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$$

$$\mathcal{P}_{2e} = \mathbf{J} \mathcal{P}_{2i} = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}(1, i)$$

The emergent light is a left-handed circular polarization with a change in phase.

3. Tautologically, we can find that:

$$\mathcal{P}_{3i} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$$

$$\mathcal{P}_{3e} = \mathbf{J} \mathcal{P}_{3i} = \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{2}}(1, -i)$$

The emergent light is a right-handed circular polarization with a change in phase.

4. In summary, this optical element changes linear polarization into linear polarization with a change in direction, left-handed circular polarization into left-handed circular polarization with a change in phase, and right-handed circular polarization into right-handed circular polarization with a change in phase, and left-handed circular polarization and

right-handed circular polarization change in phase. Therefore, it is a polarimetric element, and it can be produced by using some optically-active substances or Faraday effects, such as the Faraday polarimetric device that we are more familiar with.

The following describes the specific operation of making Faraday polarifier:

- To build a Faraday rotator, you will need the following materials and steps:

A transparent medium that has a high Verdet constant, which is a measure of how much the medium can rotate the polarization of light. Some examples of such materials are flint glass, terbium gallium garnet (TGG), or yttrium iron garnet (YIG).

A solenoid, which is a coil of wire that can generate a magnetic field when an electric current passes through it. You can make your own solenoid by winding a wire around a cardboard tube.

A pair of polarizers, which are optical filters that can transmit only one direction of polarization. You can use polarized sunglasses, 3D glasses, or polarizing sheets as polarizers.

A light source that emits linearly polarized light, such as a laser pointer or an LED with a polarizer in front of it.

- The steps to build a Faraday rotator are:

Place the transparent medium inside the solenoid, and align it with the axis of the coil. The length of the medium should be shorter than the length of the coil, and the diameter of the medium should be smaller than the diameter of the coil.

Connect the solenoid to a power supply, such as a battery or a variable voltage source. Adjust the current to produce a strong magnetic field along the axis of the coil.

Place one polarizer before the solenoid, and another polarizer after the solenoid. Make sure the polarizers are parallel to each other, and perpendicular to the axis of the coil.

Shine the light source through the first polarizer, the solenoid, and the second polarizer. Observe the intensity of the light that comes out of the second polarizer.

3.8 Problem 8.94

Solution: We consider a wave plate that delays the phase δ and whose fast axis is at an Angle θ from the X-axis. Its Jones Matrix will be:

$$\mathbf{J}_{(\delta, \theta)}^{(wp)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + e^{i\delta} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (1 - e^{i\delta}) \\ \sin \theta \cos \theta (1 - e^{i\delta}) & \sin^2 \theta + e^{i\delta} \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

So, for a quarter wave plate, $\delta = \frac{\pi}{2}$.

When $\theta = \frac{\pi}{4}$,

$$\mathbf{J}_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})}^{(wp)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{A}_2$$

When $\theta = -\frac{\pi}{4}$,

$$\mathbf{J}_{(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})}^{(wp)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{A}_1$$

Therefore, the two filters are half wave plates with an Angle between the fast axis and the X-axis of negative forty-five degrees and positive forty-five degrees, respectively.

4 Assignment V

4.1 Problem 9.5

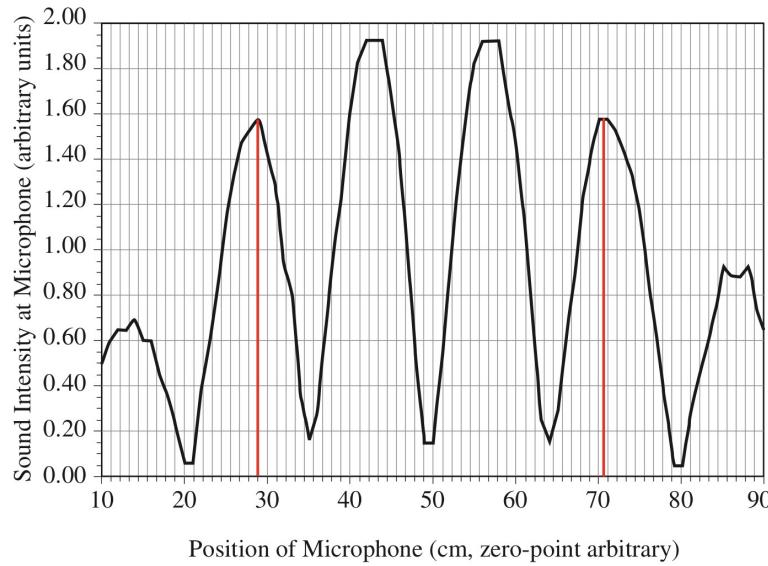
Solution: Using the two-slit interference model, the two peaks shown in the figure are selected to estimate the fringe spacing $\Delta x = 41.5\text{cm}$. From the given conditions, we can get the equivalent slit width is $d = 15\text{cm}$ and the equivalent gap between the slit and the screen is $a = 1.5\text{m}$. Then we can find that:

$$\Delta x = 3 \frac{a\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = 0.0138\text{m}$$

$$\Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = 2.4795 \times 10^4 \text{Hz}$$

This is the approximate driving frequency of the speaker.

Explain why the center is minimal: (according to the two-slit interference model described earlier) This is apparently because the phase difference between the two wave sources is just π (**that is, they are out of phase**).

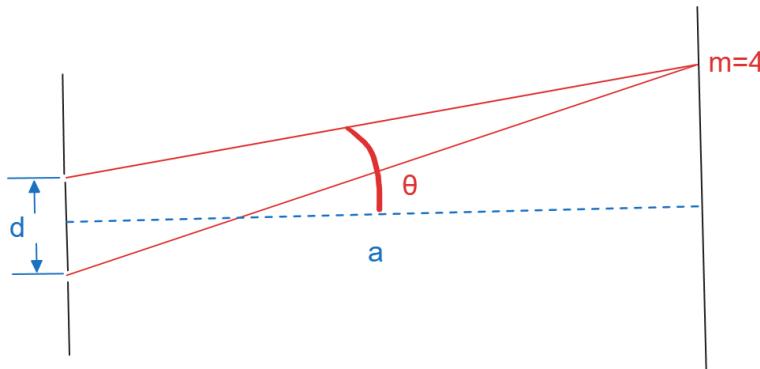
Figure P.9.5 (Data from CENCO.)

Figure 7: Problem 9.5

4.2 Problem 9.11

Solution: This problem also uses the two-slit interference model, and the fourth-order bright fringe satisfies $x = 4\frac{a\lambda_0}{d}$. And since they gave us a very small angle $\theta=1$ degree we can roughly say that $\theta \approx \frac{x}{a}$. As shown in the figure, we can find that:

$$\theta \approx \frac{x}{a} = 4\frac{\lambda_0}{d} \Rightarrow d = 4\frac{\lambda_0}{\theta} = 1.45 \times 10^{-4} m$$

This is the gap width they want us to find.


Figure 8: Problem 9.11

4.3 Problem 9.17

Solution: Borrowing the diagram from problem 9.11, we can think of $d = 2.70 mm$, $a = 4.60 m$, and $x = 5.00 mm$ (for $m = 5$). Even though it's a dark stripe. Therefore, we can find

that:

$$x = 5 \frac{a\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{xd}{5a} = \frac{(5 \times 10^{-3}m)(2.7 \times 10^{-4}m)}{5(4.60m)} = 587nm$$

This is the wavelength of light.

4.4 Problem 9.19

Solution: As shown in the figure, notice that the light emitted by the two slits at this time has a phase difference, so we can get:

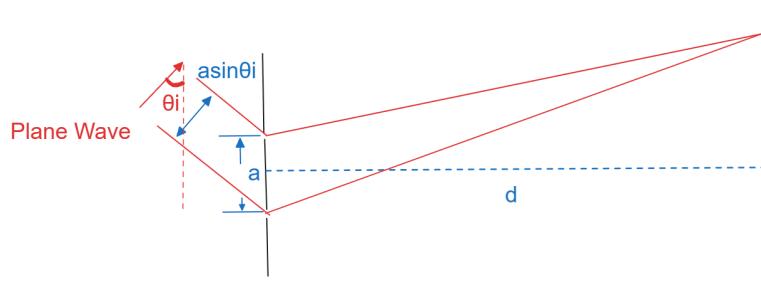


Figure 9: Problem 9.19

$$\begin{aligned} OPD &= a \sin \theta_i + \frac{xa}{d} \\ \frac{2\pi}{\lambda} OPD &= m(2\pi) \\ \Rightarrow \theta \approx \frac{x}{d} &= \frac{m\lambda}{a} - \sin \theta_i \end{aligned}$$

4.5 Problem 9.51

Solution:

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{\lambda} \\ \Delta \lambda_0 &= \frac{c}{f^2} \Delta f = \frac{\lambda_0^2}{c} \Delta f \\ \Delta f &= \frac{1}{\Delta t_c} \\ \Delta l_c &= c \Delta t_c \\ \Delta \lambda_0 &= \frac{\lambda_0^2}{\Delta l_c} \end{aligned}$$

Next, we can further calculate D:

$$\begin{aligned} \Delta l_c &= 2D \\ D &= \frac{\lambda_0^2}{2\Delta \lambda_0} = 0.1594m \end{aligned}$$

4.6 Problem 9.52

Solution:

The Jamin interferometer is an optical instrument designed for studying the interference patterns of light waves to measure wavelength, the uniformity of materials, and physical conditions such as temperature and pressure variations in a medium. The device operates on the principle of interference, which occurs when two waves superimpose to form a resultant wave of greater, lower, or the same amplitude.

In the Jamin interferometer, a light source emits a beam that is split by a beam splitter into two paths. The beam splitter is typically a partially reflective mirror. One beam reflects off the mirror at an angle, travels a certain path, and reflects back towards a merging mirror. The second beam passes straight through the beam splitter, travels a different path, often through a sample or the medium being studied, reflects off another mirror, and also heads back towards the merging mirror. The two beams are then recombined, and because they have traveled different paths, they acquire a phase difference.

The recombined beams interfere constructively or destructively, creating an interference pattern that can be observed or recorded. By analyzing this pattern, it is possible to determine the characteristics of the medium through which one of the beams has passed. For example, changes in the refractive index due to temperature, pressure, or composition can be measured since they affect the phase difference between the two beams.

Jamin interferometers are used in a variety of scientific and industrial applications. They can be employed in:

1. Refractometry: Measuring the refractive index of gases, liquids, and solids.
2. Metrology: Precise measurements of optical path lengths, which are essential in the calibration of other optical devices.
3. Fluid dynamics: Studying changes in the refractive index due to variations in temperature and pressure, which can be related to fluid flow characteristics.
4. Material science: Investigating the homogeneity and stress distribution within transparent materials.

The accuracy and sensitivity of the Jamin interferometer make it particularly useful in research environments where precise measurements are required.

4.7 Problem 9.57

Solution: If not coating, we have:

$$r_0 = \frac{n_s - n_0}{n_s + n_0}$$

After coating, $n_s > n_1 > n_0$, we have:

$$r = \frac{n_0 n_s - n_1^2}{n_0 n_s + n_1^2} < \frac{n_1 n_s - n_1^2}{n_1 n_s + n_1^2} = \frac{(n_s - n_1)^2}{(n_s + n_1)^2} < \frac{n_s - n_0}{n_s + n_0} = r_0$$

That is, the reflection coefficient is reduced.

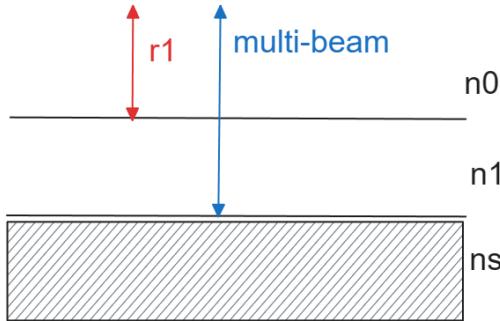


Figure 10: Problem 9.57

The following proves that this is equivalent to the waves reflected back from the two interfaces cancelling each other out.

Interface 1:

$$r_1$$

Interface 2 (Multi-beam):

$$tr_2t' + tr_2r'_1r_2t' + \dots = tr_2t'(1 + r_2r'_1 + \dots) = \frac{tr_2t'}{1 - r_2r'_1}$$

Cancel out, using that $r_1 = \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} = -r'_1$, $t = \frac{2n_0}{n_0 + n_1}$, $t' = \frac{2n_1}{n_0 + n_1}$, $r_2 = \frac{n_s - n_1}{n_s + n_1}$

$$\Rightarrow r_1 - \frac{tr_2t'}{1 - r_2r'_1} = \frac{n_1^2 - n_0 n_s}{n_1^2 + n_0 n_s}$$

4.8 Problem 9.61

Solution: Considering the case of forward incidence and minimum thickness, when $d \cos \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}$, we can find that:

$$d = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{500nm}{4 \times 1.30} = 96nm$$

5 Assignment VI

5.1 Problem 10.7

Solution: Using the far-field criterion $|r'| >> \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{\lambda}$, for single-slit diffraction, the value is taken as $1.5m >> \frac{(0.10mm)^2}{461.9nm} = 0.022m$ (Slit width $b=0.10mm$). Therefore, the diffraction pattern it produces is a far-field diffraction pattern.

Center maximum angle width:

$$\beta_{max} = \pm\pi = \frac{kb \sin \theta}{2} \Rightarrow \theta = 2 \arcsin \frac{\lambda}{b} = 0.009238 = 0.529 \text{ degree}$$

θ is the maximum angular width of the center.

5.2 Problem 10.34

Solution: Find the radius of the Airy Disk and then the magnitude of the Airy Disk:

$$q_1 = 1.22 \frac{\lambda f}{D} = \frac{1.22 \times 540nm \times 140cm}{15cm} = 6.1488 \times 10^{-6}m$$

$$\Rightarrow A = \pi q_1^2 = 1.18777 \times 10^{-10}m^2$$

If $D' = 2D$, it will be $q'_1 = 3.0744 \times 10^{-6}m$. That is, it gets smaller.

5.3 Problem 10.40

Solution: Similarly, we can calculate:

$$q_1 = 1.22 \frac{\lambda R}{D} = \frac{1.22 \times 632.84nm \times 376 \times 10^3 km}{2mm} = 145148m$$

$$\Rightarrow A = \pi q_1^2 = 6.61869 \times 10^{10}m^2$$

5.4 Problem 10.46

Solution: Once again, very similarly, we calculated a series of results.

Angular resolution limit:

$$\Theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.32087 \times 10^{-7} = 7.55 \times 10^{-6} \text{ degree} = 2.72 \times 10^{-2} \text{ arcsec}$$

The Mount Palomar telescope:

$$s = R\Theta = 50.7m$$

The human's eye:

$$2q_1 = 1.22 \frac{\lambda R}{D'} \Rightarrow s' = D' = 1.22 \frac{\lambda R}{2q_1} = 64483.1m$$

5.5 Problem 10.50

Solution: Without any distinction, we calculate that:

$$L = 1.22 \frac{\lambda R}{D} = 0.168m$$

5.6 Problem 10.58

Solution: Notice that $a = \frac{1}{5.9 \times 10^5 \text{ groove}/m} = 1.695 \times 10^{-6} \text{ m/groove}$, then we can find that:

When $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ and $m = 1$,

$$\sin \theta_1 = \frac{m\lambda_1}{a} = 13.65 \text{ degree}$$

When $\lambda_2 = 720 \text{ nm}$ and also $m = 1$,

$$\sin \theta_2 = \frac{m\lambda_2}{a} = 25.14 \text{ degree}$$

Therefore, the angular width of the first-order spectrum is:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 11.49 \text{ degree}$$

5.7 Problem 10.83

Solution: First we verify that it does not conform to the far-field criterion $|r'| >> \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{\lambda}$:

$$d = 250 \text{ cm} < \frac{a^2}{\lambda} = 36 \text{ m}$$

Therefore, we need to consider Fresnel diffraction. We use the following substitution: $u = y\sqrt{\frac{2}{\lambda d}} = y\sqrt{\frac{2}{694.3 \text{ nm} \times 250 \text{ cm}}}$, $v = z\sqrt{\frac{2}{694.3 \text{ nm} \times 250 \text{ cm}}}$. When y and z go from -0.0025m to -0.0025m, u and v go from -2.68356 to 2.68356.

$$I(0) = \frac{I_u}{4}((2C(2.68356))^2 + (2S(2.68356))^2)^2$$

Note that $I_u = 10W/m^2$ and numerically calculate the integral of C and S, we can find:

$$I(0) = \frac{10W/m^2}{4}(0.772621^2 + 0.936271^2) = 5.42835W/m^2$$

5.8 Problem 10.91

Solution: For single-slit Fresnel diffraction, we use the following substitution: $u = y\sqrt{\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda\rho_0 r_0}} = 2538.59y/m$. When y goes from -0.0005m to 0.0005m, u goes from 0.1269 to -0.1269. Then we can find that:

$$\frac{I_0}{I_u} = \frac{1}{2}((2C(0.1269))^2 + (2S(0.1269))^2) = 0.0322054$$

References

- [1] Eugene Hecht Optics[B]. *Pearson*, 2016, V5.
- [2] David J. Griffiths Introduction to Electrodynamics[B]. *Cambridge University Press*, 2017, V4.
- [3] Joseph W. Goodman Introduction to Fourier Optics[B]. *W. H. Freeman*, 2017, V4.
- [4] Bahaa E. A. Saleh and Malvin Carl Teich Fundamentals of Photonics[B]. *Wiley*, 2019, V3.
- [5] Max Born and Emil Wolf Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light[B]. *Cambridge University Press*, 1999, V7.

Appendix

A 基本知识回顾

A.1 Maxwell 方程组 (Maxwell's Equations)

麦克斯韦方程组是经典电磁学的基本定律，也是波动光学理论的基石。它描述了电场、磁场与电荷、电流之间的关系。

在介质中，麦克斯韦方程组的微分形式为：

- 高斯定律 (Gauss's law for electricity):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

它表明电位移矢量 \vec{D} 的散度等于自由电荷密度 ρ_f 。

- 高斯磁定律 (Gauss's law for magnetism):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

它表明磁感应强度 \vec{B} 是无源场，不存在磁单极。

- 法拉第电磁感应定律 (Faraday's law of induction):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

它表明变化的磁场会产生旋度电场 \vec{E} 。

- 安培-麦克斯韦定律 (Ampère-Maxwell's law):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

它表明传导电流密度 \vec{J}_f 和位移电流（变化的电场）都会产生磁场 \vec{H} 。

上述方程组还需要辅助的本构关系来描述介质的电磁性质：

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$$

其中 ϵ 是介电常数， μ 是磁导率， \vec{P} 是电极化强度， \vec{M} 是磁化强度。对于线性、各向同性、均匀的介质， ϵ 和 μ 是常数。

在无源 ($\rho_f = 0, \vec{J}_f = 0$) 的真空中 ($\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$)，对方程组进行解耦，可以得到电场和磁场的波动方程：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

这表明电磁场在真空中以波的形式传播，其波速为 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。这是光的电磁理论的出发点。

A.2 光学常识 (General Optical Concepts)

- **电磁波谱 (Electromagnetic Spectrum):** 光是电磁波的一部分。可见光部分的波长范围大约是 400 nm (紫色) 到 700 nm (红色)。
- **折射率 (Refractive Index):** 定义为光在真空中的速度 c 与在介质中的相速度 v 之比： $n = c/v$ 。对于非磁性介质 ($\mu_r \approx 1$)，有 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ，其中 ϵ_r 是相对介电常数。
- **波前与光线 (Wavefront and Ray):** 波前是波在某一时刻相位相同的点构成的曲面。光线是表示光能传播方向的线，在各向同性介质中，光线垂直于波前。
- **惠更斯原理 (Huygens' Principle):** 波前的每一点都可以看作是产生次级球面子波的新波源，下一时刻的波前是这些子波的包络面。
- **费马原理 (Fermat's Principle):** 光在两点之间传播的路径是光程为极值（通常是最小值）的路径。光程定义为 $\int_A^B n ds$ 。这是几何光学的基本原理。

A.3 电磁波能量的描述 (Energy of EM Waves)

电磁场的能量密度 u 是单位体积内储存的能量，包括电场能量密度 u_e 和磁场能量密度 u_m 。

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

对于线性介质，上式可写为 $u = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$ 。

坡印廷矢量 \vec{S} 描述了电磁波的能流密度（单位时间通过单位面积的能量）及其方向。

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

坡印廷定理是电磁场中的能量守恒定律，其微分形式为：

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

其物理意义是：从一个闭合曲面流出的能量 ($\nabla \cdot \vec{S}$)，加上该区域内场能量的变化率 ($\frac{\partial u}{\partial t}$)，等于电场对电流做功的功率的负值 ($-\vec{J} \cdot \vec{E}$)。

光探测器接收到的是坡印廷矢量在很长时间内的平均值，称为光强度或辐照度 I 。

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle_t$$

对于简谐平面波 $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, 在非磁性介质中的光强为:

$$I = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2$$

A.4 色散模型 (Dispersion Models)

色散是指介质的折射率 n 随光的频率 ω 变化的现象, 即 $n = n(\omega)$ 。

洛伦兹模型 (Lorentz Model) 将介质中的电子视为受电磁波驱动的阻尼谐振子。电子的运动方程为:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = q\vec{E}(t)$$

其中 m 是电子质量, q 是电荷, γ 是阻尼系数, ω_0 是束缚电子的固有谐振频率。求解该方程, 并利用电极化强度 \vec{P} 与折射率 n 的关系, 可以得到复折射率 $\tilde{n} = n + i\kappa$ 的色散关系式:

$$\tilde{n}^2(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

其中 N 是单位体积内的振子数。

- **正常色散 (Normal Dispersion):** 在远离共振频率的区域 ($\omega \ll \omega_0$ 或 $\omega \gg \omega_0$), 折射率 n 随频率 ω 的增加而增加 ($dn/d\omega > 0$)。
- **反常色散 (Anomalous Dispersion):** 在共振频率 $\omega \approx \omega_0$ 附近, 折射率 n 随频率 ω 的增加而减小 ($dn/d\omega < 0$)。这个区域通常伴随着强烈的吸收 (吸收系数 κ 达到峰值)。

A.5 菲涅尔定律 (Fresnel's Laws)

菲涅尔定律定量地描述了光在两种不同折射率介质的分界面上反射和折射时的振幅关系。设入射角为 θ_i , 折射角为 θ_t , 介质折射率分别为 n_1, n_2 。斯涅尔定律 ($n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$) 始终成立。

我们将电场分解为垂直于入射面 (s-偏振, TE) 和平行于入射面 (p-偏振, TM) 的两个分量。

- **s-偏振 (s-polarization):**

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

- p-偏振 (p-polarization):

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

其中 r 为振幅反射系数, t 为振幅透射系数。

反射率 R 和透射率 T 是能量的比值, 与振幅系数的平方有关。

$$R_s = |r_s|^2, \quad R_p = |r_p|^2$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t_s|^2, \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t_p|^2$$

能量守恒要求 $R + T = 1$ 。

- 布儒斯特角 (Brewster's Angle) θ_B : 当 p-偏振光的反射率为零 ($R_p = 0$) 时的入射角。此时反射光为纯 s-偏振光。条件是 $r_p = 0$, 导致 $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$ 。

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

- 全内反射 (Total Internal Reflection, TIR): 当光从光密介质射向光疏介质 ($n_1 > n_2$) 时, 若入射角大于临界角 θ_c , 光将完全被反射。临界角由 $\sin \theta_t = 1$ 决定。

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

在全反射条件下, 反射光会有附加的相移。

A.6 斯托克斯方法 (Stokes' Relations)

斯托克斯方法基于光路可逆原理, 给出了不同反射和透射系数之间的关系, 而无需使用电磁边界条件。设光从介质 1 入射到介质 2, 振幅反射系数和透射系数分别为 r 和 t 。设光从介质 2 入射到介质 1, 振幅反射系数和透射系数分别为 r' 和 t' 。斯托克斯关系为:

$$r = -r'$$

$$tt' = 1 - r^2 = 1 - r'^2$$

这些关系表明, 内反射和外反射的振幅系数符号相反 (相位相差 π), 且透射系数之间存在确定关系。

A.7 相干性 (Coherence)

相干性是波的一个重要属性，它描述了波在空间不同点或时间不同时刻相位之间的关联程度。只有相干波才能产生稳定的干涉图样。

时间相干性 (Temporal Coherence) 描述波列上某一点在不同时刻的相位确定关系。它与光的单色性有关。

- **相干时间 τ_c** : 波列能够保持其相位稳定的平均时间。它与光源的谱线宽度 $\Delta\nu$ 成反比。

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Delta\nu}$$

- **相干长度 L_c** : 在相干时间内光传播的距离。它是光波可以产生干涉的最大光程差。

$$L_c = c \cdot \tau_c \approx \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

其中 λ_0 是中心波长, $\Delta\lambda$ 是波长宽度。

例如, 激光具有很好的时间相干性 (相干长度可达数米甚至更长), 而白炽灯的时间相干性很差 (相干长度在微米量级)。

空间相干性 (Spatial Coherence) 描述波场中不同空间点的相位确定关系。它与光源的尺寸大小有关。

- 一个理想的点光源发出的球面波具有完美的空间相干性。
- 一个扩展光源 (有一定尺寸的光源), 其空间相干性是有限的。离光源越远, 或光源尺寸越小, 观察到的空间相干性越好。
- **横向相干长度 L_h** : 在垂直于传播方向的平面上, 相位具有确定关系的横向距离。
- **范西特-泽尼克定理 (Van Cittert-Zernike Theorem)**: 该定理指出, 一个非相干扩展光源在远场所产生的场的空间相干性函数 (复相干度), 由光源的强度分布的傅里叶变换给出。这是连接非相干光源和部分相干场的桥梁。

B 偏振 (Polarization)

偏振是横波特有的性质, 它描述了波的振动矢量在垂直于传播方向的平面内的取向和变化规律。光作为一种电磁横波, 其偏振由电场矢量 \vec{E} 的行为来定义。

B.1 偏振的描述 (Description of Polarization)

假设一单色平面波沿 z 轴正方向传播, 其电场矢量可以分解为两个相互正交的分量:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x + \vec{E}_y = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{x} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{y}$$

其中 E_{0x} 和 E_{0y} 分别是 x 和 y 方向的振幅, k 是波数, ω 是角频率, δ 是 E_y 相对于 E_x 的相位差。电场矢量末端的轨迹由 E_{0x}, E_{0y} 和 δ 共同决定。

线偏振 (Linear Polarization) 指的是当相位差 $\delta = 0$ 或 $\delta = \pi$ 时, 电场矢量始终在一个固定的方向上振动。

- 如果 $\delta = 0$, 则 $E_y = (E_{0y}/E_{0x})E_x$ 。电场矢量沿着斜率为 E_{0y}/E_{0x} 的直线振动。
- 如果 $\delta = \pi$, 则 $E_y = -(E_{0y}/E_{0x})E_x$ 。电场矢量沿着斜率为 $-E_{0y}/E_{0x}$ 的直线振动。

圆偏振 (Circular Polarization) 指的是当两个分量的振幅相等 ($E_{0x} = E_{0y} = E_0$) 且相位差 $\delta = \pm\pi/2$ 时, 电场矢量末端的轨迹是一个圆。

- 左旋圆偏振 (Left Circularly Polarized, LCP):** $\delta = +\pi/2$ 。从光的传播方向看去, 电场矢量逆时针旋转。

$$\vec{E}(z, t) = E_0[\cos(kz - \omega t)\hat{x} - \sin(kz - \omega t)\hat{y}]$$

- 右旋圆偏振 (Right Circularly Polarized, RCP):** $\delta = -\pi/2$ 。从光的传播方向看去, 电场矢量顺时针旋转。

$$\vec{E}(z, t) = E_0[\cos(kz - \omega t)\hat{x} + \sin(kz - \omega t)\hat{y}]$$

注意: 物理学界和工程学界对左右旋的定义可能相反, 这里采用的是物理学中常用的定义 (A. Zangwill, "Modern Electrodynamics")。

除上述特殊情况外, 任意振幅和相位差的组合都会产生椭圆偏振光, 这是最普遍的偏振状态。电场矢量末端的轨迹是一个椭圆。

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

这个方程描述了一个倾斜的椭圆。

B.2 偏振器 (Polarizers)

偏振器是一种只允许特定偏振方向的光通过的光学元件。

二向色性 (Dichroism) 是指某些晶体 (如电气石) 或材料 (如人造的“宝丽来”偏振片) 具有选择性吸收的特性。它们对沿着某一特定晶轴 (吸收轴) 偏振的光有强烈的吸收, 而对垂直于该方向 (透振轴) 偏振的光则吸收很弱。

马吕斯定律 (Malus's Law) 指的是当一束强度为 I_0 的线偏振光入射到一个理想偏振器上时, 透射光的强度 I 为:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

其中 θ 是入射光的偏振方向与偏振器透振轴之间的夹角。

- 当 $\theta = 0$ 时, $I = I_0$ (完全透过)。
- 当 $\theta = \pi/2$ 时, $I = 0$ (完全阻断)。
- 当自然光(非偏振光)入射时, 其振动在所有方向均匀分布, 平均效果为 $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$, 因此透射强度为 $I = I_0/2$ 。

B.3 双折射 (Birefringence)

双折射是指光射入各向异性晶体(如方解石、石英)后, 分解为两束偏振方向正交、传播速度和折射率不同的光束的现象。

- **光轴 (Optic Axis):** 晶体内的一个特殊方向, 沿此方向传播的光不发生双折射, 两束光的传播速度相同。
- **寻常光 (ordinary ray, o-ray):** 其行为遵守斯涅尔定律, 其电场分量垂直于由光轴和主光轴构成的平面(主平面)。它在晶体中传播的折射率 n_o 是一个常数。
- **非常光 (extraordinary ray, e-ray):** 其行为不完全遵守斯涅尔定律, 其电场分量平行于主平面。它在晶体中传播的折射率 $n_e(\theta)$ 随传播方向与光轴的夹角 θ 而变。
- **单轴晶体 (Uniaxial Crystal):** 只有一个光轴。
 - **正单轴晶体:** $n_e > n_o$ (例如: 石英)。
 - **负单轴晶体:** $n_e < n_o$ (例如: 方解石)。

利用双折射效应可以制造多种偏振光学元件。

利用双折射将 o 光和 e 光在空间上分离开, 从而得到线偏振光。

- **格兰-汤普逊棱镜 (Glan-Thompson Prism):** 由两块方解石棱镜胶合而成, o 光在胶合层发生全反射被侧壁吸收, 只有 e 光透射, 得到高质量的线偏振光。
- **渥拉斯顿棱镜 (Wollaston Prism):** 由两块光轴正交的方解石(或石英)棱镜胶合而成, 能将入射光分成两束偏振方向正交且出射方向对称分开的光束。

通过使 o 光和 e 光产生特定的相位差, 来改变光的偏振状态。相位延迟量为 $\Delta\phi = (2\pi/\lambda_0)|n_o - n_e|d$ 。

- **波片 (Wave Plate):** 是将双折射晶体切割成特定厚度 d 的平行平板, 光轴平行于表面。
- **四分之一波片 ($\lambda/4$ Plate):** 产生 $\pi/2$ 的相位延迟。可以将线偏振光变为圆偏振光(当入射线偏振光方向与波片快慢轴成 45° 角时), 或将圆偏振光变为线

偏振光。

- **半波片 ($\lambda/2$ Plate):** 产生 π 的相位延迟。可以将线偏振光的偏振方向旋转一个角度 2θ , 其中 θ 是入射光偏振方向与波片快轴的夹角。
- **菲涅尔斜方体 (Fresnel Rhomb):** 利用两次全内反射产生的相位差来充当一个消色差（即对很宽的波段都有效）的四分之一波片。
- **巴俾涅补偿器 (Babinet Compensator):** 由两块光轴正交的石英楔形棱镜组成。通过相对滑动一个棱镜，可以连续改变光的通过厚度，从而获得连续可调的相位延迟。

B.4 旋光性 (Optical Activity)

某些物质（如石英、糖溶液）能使其内部传播的线偏振光的偏振面发生旋转，这种现象称为旋光性。旋转角度 β 与光程 d 成正比： $\beta = \alpha d$, α 是旋光率。

- **物理机理 (菲涅尔解释) :** 线偏振光可以看作是等幅度的左旋和右旋圆偏振光的叠加。在旋光介质中，左旋和右旋圆偏振光的折射率不同 ($n_L \neq n_R$)。这导致两者在传播中产生相位差，其合成的线偏振光的偏振面也随之旋转。
- **旋转角度:** $\beta = \frac{\pi d}{\lambda_0} (n_L - n_R)$, 其中 λ_0 是真空波长。

B.5 光学调制 (Optical Modulation)

利用外加电场或磁场来控制光的偏振状态，是光通信和光计算的基础。

- **电光效应 (Electro-Optic Effect):**
 - **泡克耳斯效应 (Pockels Effect):** 介质的折射率变化与外加电场成线性关系， $\Delta n \propto E$ 。只发生在无中心对称性的晶体中。响应速度快，用于制造泡克耳斯盒。
 - **克尔效应 (Kerr Effect):** 介质的折射率变化与外加电场成平方关系， $\Delta n \propto E^2$ 。所有物质都有克尔效应。响应速度更快但通常效应较弱，用于制造克尔盒。
- **磁光效应 (Magneto-Optic Effect) - 法拉第效应:** 当光沿磁场方向通过介质时，其偏振面会发生旋转。旋转角度 $\beta = \mathcal{V} Bd$, 其中 B 是磁感应强度, d 是光程, \mathcal{V} 是费尔德常数。法拉第旋转是非互易的，这是光学隔离器的物理基础。

B.6 偏振的矩阵表达 (Matrix Representation of Polarization)

琼斯矩阵 (Jones Calculus) 用于描述完全偏振光及其与光学元件的相互作用。

- **琼斯矢量:** 一个 2×1 的复数矩阵, 表示光的偏振状态。

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

例如: 水平线偏振 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 垂直线偏振 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 左旋圆偏振 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 。

- **琼斯矩阵:** 一个 2×2 的复数矩阵, 代表光学元件对偏振态的作用。透射光 \vec{E}' 与入射光 \vec{E} 的关系为 $\vec{E}' = \mathbf{J}\vec{E}$ 。例如: 水平透振的偏振片 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 快轴在水平方向的 $\lambda/4$ 波片 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ 。

琼斯矩阵无法处理非偏振光和部分偏振光, 穆勒矩阵 (Mueller Calculus) 则可以。

- **斯托克斯矢量:** 一个 4×1 的实数矢量, 可以描述任何偏振状态的光。

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{total} \\ I_H - I_V \\ I_{+45} - I_{-45} \\ I_R - I_L \end{pmatrix}$$

S_0 是总光强, S_1 描述水平/垂直线偏振倾向, S_2 描述 $\pm 45^\circ$ 线偏振倾向, S_3 描述右旋/左旋圆偏振倾向。对于完全偏振光, $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 。对于非偏振光, $\vec{S} = (I_0, 0, 0, 0)^T$ 。

- **穆勒矩阵:** 一个 4×4 的实数矩阵 \mathbf{M} , 代表光学元件的作用。 $\vec{S}' = \mathbf{M}\vec{S}$ 。例如, 水平透振的偏振片其穆勒矩阵为:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C 干涉 (Interference)

干涉是两列或多列波在空间中相遇时发生叠加, 导致在某些区域的合成振动始终加强, 而在另一些区域始终减弱的现象。这是波动最显著的特征之一。

C.1 干涉的条件 (Conditions for Interference)

要观察到稳定的、清晰的干涉图样, 相干叠加的波需要满足以下三个基本条件:

1. 频率相同: 参与干涉的几束光必须具有完全相同的频率。
2. 相位差恒定: 参与干涉的几束光在空间任一点的相位差必须保持恒定。这是相干性的核心要求。来自独立光源（如两只灯泡）的光相位关系随机变化，是非相干的。因此，干涉实验的光源通常源于同一光源。
3. 偏振方向相同: 参与干涉的几束光的振动方向（偏振方向）必须相同或不相互垂直。如果两束光的偏振方向正交，它们将不会产生干涉性的强度叠加。

C.2 波阵面分割干涉 (Wavefront Division Interference)

这类干涉通过将同一波源发出的波阵面在空间上分割成两部分或多部分，让它们经过不同路径后重新相遇而产生干涉。

杨氏双缝干涉 (Young's Double-Slit Experiment) 这是最经典的波阵面分割干涉实验。

- 光程差 (Optical Path Difference, OPD): 设双缝间距为 d , 缝到屏的距离为 D ($D \gg d$)，屏上某点 P 到两缝的距离之差（即光程差）为：

$$\Delta L \approx d \sin \theta \approx d \frac{y}{D}$$

其中 y 是 P 点到中心轴线的距离, θ 是衍射角。

- 干涉条件:

- 相长干涉 (亮条纹): 光程差为波长的整数倍。

$$\Delta L = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

- 相消干涉 (暗条纹): 光程差为半波长的奇数倍。

$$\Delta L = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

- 强度分布: 若两缝的光强均为 I_0 , 则屏上强度分布为:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi dy}{\lambda D} \right)$$

其中相位差 $\delta = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L$ 。

其它例子包括 菲涅尔双棱镜 (Fresnel's Biprism) 和 劳埃德镜 (Lloyd's Mirror)。

C.3 振幅分割干涉 (Amplitude Division Interference)

这类干涉通过将同一光束的振幅用部分反射和部分透射的方法分割成两束或多束，让它们经过不同路径后再相遇产生干涉。

薄膜干涉 (Thin-Film Interference) 是振幅分割干涉最常见的形式，例如肥皂泡的彩色花纹。

- **光程差:** 对于折射率为 n 、厚度为 d 的薄膜，近正入射时，从上、下表面反射的两条光线的光程差主要由光在膜内的往返路程决定，即 $OPD \approx 2nd$ 。
- **半波损失 (Half-Wave Loss):** 当光从光疏介质射向光密介质的界面反射时，会产生一个 π 的相位突变，相当于 $\lambda/2$ 的附加光程差。
- **干涉条件 (以空气-薄膜-空气为例):**
 - **相长干涉 (反射增强):** $2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda$
 - **相消干涉 (反射减弱):** $2nd = m\lambda$

根据观测条件的不同，薄膜干涉分为：

- **等倾干涉 (Fringes of Equal Inclination):** 由平行平面薄膜在扩展光源照射下形成。同一条纹对应相同的入射角 θ 。光程差为 $\Delta L = 2nd \cos \theta_t$ (θ_t 为折射角)。条纹定域在无穷远，例如 **海丁格干涉 (Haidinger fringes)**。
- **等厚干涉 (Fringes of Equal Thickness):** 由厚度不均匀的薄膜（如楔形膜）在准直光照射下形成。同一条纹对应相同的厚度 d 。条纹定域在薄膜表面附近，例如 **斐索干涉 (Fizeau fringes)** 和 **牛顿环 (Newton's Rings)**。

C.4 迈克尔逊干涉仪 (Michelson Interferometer)

这是一种著名且用途广泛的振幅分割干涉仪。

- **结构:** 由一个分束器 (BS)、一个固定反射镜 (M1)、一个可移动反射镜 (M2) 和一个补偿板 (C, 可选) 组成。
- **原理:** 光源发出的光在分束器上分为两束，分别射向 M1 和 M2，返回后再次在分束器上汇合，发生干涉。通过移动 M2，可以精确地改变两臂的光程差 $\Delta L = 2(L_2 - L_1)$ ，其中 L_1, L_2 是两臂的长度。
- **条纹形式:**
 - **等倾条纹:** 当 M1 和 M2 的像 M2' 严格平行时，形成圆形等倾条纹。移动 M2 时，条纹会从中心“涌出”或向中心“陷入”，每变化一条条纹，光程差改变一个波长 λ ，即 M2 移动了 $\lambda/2$ 。
 - **等厚条纹:** 当 M1 和 M2' 之间有微小夹角时，形成类似楔形膜的等厚条纹（直条纹）。
- **应用:** 精密长度测量、波长测量、折射率测量、迈克尔逊-莫雷实验等。

C.5 其它知名干涉仪介绍 (Other Famous Interferometers)

- **马赫-曾德干涉仪 (Mach-Zehnder Interferometer):** 使用两个分束器和两个反射镜，将光路完全分开。优点是可以在其中一个光路中方便地置入样品而不影响另一光路，非常适合用于测量样品（如气体、等离子体）引入的相移。
- **萨格纳克干涉仪 (Sagnac Interferometer):** 两束光在同一个闭合光路中沿相反方向传播，最后汇合发生干涉。其核心特点是对旋转敏感（萨格纳克效应），两束光的光程差正比于光路环路的面积和旋转角速度。它是环形激光陀螺仪的基础。

C.6 多光束干涉 (Multiple-Beam Interference)

当多于两束的光波发生相干叠加时，即为多光束干涉。典型代表是法布里-珀罗腔 (Fabry-Perot Cavity)。

考虑一个由两块高反射率 (R) 的平行平面板构成的标准具 (Etalon)。透射光的强度分布由 **艾里函数 (Airy function)** 描述：

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

其中 I_i 是入射光强， $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ 称为 **反衬系数**， $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (2nd \cos \theta)$ 是相邻透射光束间的相位差。当反射率 $R \rightarrow 1$ 时， F 很大，透射光的干涉条纹会变得非常尖锐。

- **精细度 (Finesse, \mathcal{F}):** 是衡量干涉条纹锐利程度的物理量，定义为相邻两亮条纹的间距（自由光谱范围 FSR）与亮条纹半峰全宽（FWHM）之比。

$$\mathcal{F} = \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} \approx \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R} \quad (\text{当 } R > 0.5)$$

法布里-珀罗标准具形成了一个光学谐振腔。只有满足谐振条件的光才能在腔内形成稳定驻波并高效地透射出去。

- **谐振条件:** 腔内往返一周的相位变化为 2π 的整数倍，即 $\delta = 2m\pi$ 。对于正入射，即 $m\lambda = 2nd$ 。
- **应用:** 因其极高的光谱分辨率，被广泛用作高分辨率光谱仪、光学滤波器和激光器的谐振腔。

C.7 光学镀膜 (Optical Coatings)

光学镀膜是多光束干涉在薄膜技术中的重要应用，通过在光学元件表面镀上一层或多层介质膜来改变其反射和透射特性。

对于分析多层膜系统，矩阵方法非常有效。对于第 j 层膜，其将界面 $j - 1$ 的电磁场 (E_{j-1}, B_{j-1}) 与界面 j 的电磁场 (E_j, B_j) 联系起来：

$$\begin{pmatrix} E_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_j \begin{pmatrix} E_j \\ B_j \end{pmatrix}$$

其中，特征矩阵 \mathbf{M}_j 为：

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos(k_j d_j) & \frac{i}{\eta_j} \sin(k_j d_j) \\ i\eta_j \sin(k_j d_j) & \cos(k_j d_j) \end{pmatrix}$$

$k_j = 2\pi n_j / \lambda$ 是波数， d_j 是厚度， η_j 是介质的光学导纳（与折射率有关）。对于 N 层膜，总的特征矩阵是各层矩阵的乘积 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_N$ 。由此可以计算整个膜系的反射率和透射率。

抗反射膜 (Anti-Reflection, AR Coating) 的目的是减少光学元件表面的反射损失。

- **单层增透膜：** 最简单的情况。为了使从膜上、下表面反射的两束光相消干涉，需要满足两个条件：
 - **振幅条件：** 两束反射光的振幅相等。这要求膜层的折射率 n_f 是两边介质折射率的几何平均值： $n_f = \sqrt{n_0 n_s}$ 。
 - **相位条件：** 两束反射光相位相差 π 。考虑到空气-膜界面反射有 π 的相移，而膜-基底界面没有（假设 $n_0 < n_f < n_s$ ），这要求膜引起的光程差为半波长，即 $2n_f d = \lambda/2$ 。

因此，膜的光学厚度必须是中心波长的四分之一： $n_f d = \lambda/4$ 。

D 衍射 (Diffraction)

衍射是指波在传播过程中遇到障碍物时，能够偏离直线传播路径而绕到障碍物阴影区域的现象。它是波动的固有属性，是证明光具有波动性的有力证据。

D.1 标量衍射理论 (Scalar Diffraction Theory)

该理论在不考虑光波电场和磁场的矢量性的前提下，研究衍射现象。

- **惠更斯-菲涅尔原理 (Huygens-Fresnel Principle)：** 这是标量衍射理论的基础。它指出，波阵面上的每一点都可以看作是发射次级球面子波的新波源，空间中某一点的光振动是所有这些子波在该点相干叠加的结果。
- **基尔霍夫衍射积分 (Kirchhoff's Diffraction Integral)：** 惠更斯-菲涅尔原理的数学

表述。它给出了在衍射屏后的任意一点 P 的复振幅 $U(P)$:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[U(\mathbf{A}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U(\mathbf{A})}{\partial n} \right] dS$$

其中 Σ 是衍射孔径的面积, \mathbf{A} 是孔径上的一点, r 是 \mathbf{A} 到 P 的距离, $U(\mathbf{A})$ 是 \mathbf{A} 点的复振幅, $\partial/\partial n$ 表示沿波前法线方向的导数。

- **瑞利-索末菲衍射积分 (Rayleigh-Sommerfeld Diffraction Integral):** 它是对基尔霍夫理论的修正, 解决了其边界条件不自洽的问题, 更为严格。常用的第一瑞利-索末菲积分为:

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x', y') \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta dx' dy'$$

其中 R 是衍射屏上的点 (x', y') 到观察屏上的点 (x, y) 的距离, $\cos \theta$ 是倾斜因子。这个公式是夫琅禾费衍射和菲涅尔衍射的出发点。

D.2 夫琅禾费衍射 (Fraunhofer Diffraction)

夫琅禾费衍射是衍射的 **远场近似**, 此时光源和观察屏距离衍射屏足够远, 使得射向衍射屏和从衍射屏射向观察屏的波都可以被看作是平面波。

- **远场判据 (Far-field Criterion):** 设衍射孔径的最大尺寸为 a , 观察距离为 z , 则需满足:

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

- **傅里叶变换关系:** 这是夫琅禾费衍射的核心。衍射场 (观察屏上的复振幅分布) 是衍射屏孔径函数 (Aperture Function) 的二维傅里叶变换。

$$U(f_x, f_y) \propto \mathcal{F}\{t(x', y')\} = \iint_{-\infty}^{\infty} t(x', y') e^{-i2\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy'$$

其中 $t(x', y')$ 是孔径函数 (透光处为 1, 不透光处为 0), 空间频率 $f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}$ 。

下面介绍一些典型示例:

- **矩形孔 (Rectangular Aperture):** 对于边长为 $a \times b$ 的矩形孔, 其衍射图样的光强分布为:

$$I(x, y) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{by}{\lambda z}\right)$$

其中 $\text{sinc}(u) = \sin(\pi u)/(\pi u)$ 。图样是一个中心亮斑最强、四周分布着十字形排列的次级亮斑的网格。

- **圆孔 (Circular Aperture):** 对于半径为 R 的圆孔, 衍射图样是著名的 **艾里斑 (Airy Pattern)**。光强分布为:

$$I(\theta) \propto \left[\frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \right]^2$$

其中 J_1 是一阶贝塞尔函数。图样是一个明亮的中心圆斑（艾里斑），周围环绕着一系列较暗的同心圆环。第一个暗环的角位置在 $\sin \theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ($D = 2R$ 是直径)。

- **单缝/双缝 (Single/Double Slit):** 视为矩形孔的特例。

● **单缝 (缝宽 a):** $I(\theta) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{a \sin \theta}{\lambda}\right)$ 。

● **双缝 (缝宽 a, 缝间距 d):** 其衍射图样是双缝干涉和单缝衍射的乘积。

$$I(\theta) \propto \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)}_{\text{干涉因子}} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{a \sin \theta}{\lambda}\right)}_{\text{衍射包络}}$$

干涉条纹的强度受到单缝衍射的包络调制，可能会出现“缺级”现象。

- **衍射光栅 (Diffraction Grating):** N 个等间距平行狭缝的阵列。其强度分布为：

$$I(\theta) \propto \underbrace{\left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2}_{\text{多光束干涉因子}} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{a \sin \theta}{\lambda}\right)}_{\text{单缝衍射包络}}$$

其中 $\delta = kd \sin \theta$ 。会形成非常尖锐的主极大(光谱线)，其位置由 **光栅方程** $d \sin \theta = m\lambda$ 决定。这是光谱仪的核心元件。

- **衍射极限 (Diffraction Limit):** 衍射现象限制了光学仪器的分辨本领。

● **瑞利判据 (Rayleigh Criterion):** 两个等光强的点光源被认为是刚刚可以分辨的，如果一个点源的艾里斑中心正好落在另一个点源的衍射图样的第一个暗环上。

● 对于圆形光瞳（例如望远镜物镜），其最小分辨角为：

$$\theta_{\min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

其中 D 是光瞳的直径。

D.3 菲涅尔衍射 (Fresnel Diffraction)

菲涅尔衍射是衍射的 **近场近似**，即观察屏距离衍射屏较近，不满足远场条件。

- **特点:** 此时从衍射孔到观察点的波前不能再看作平面波，必须考虑其曲率。在衍射积分的相位项中，必须保留到二次项（平方项）。这使得计算通常比夫琅禾费衍射复杂得多。

- **柯纽螺线 (Cornu Spiral):** 一种用于图解计算一维菲涅尔衍射（如直边、狭缝）的有效方法。

下面同样介绍一些典型示例：

- **方孔/单缝 (Square Aperture/Single Slit):** 其近场衍射图样随着距离的变化而演变，呈现出复杂的条纹结构，随着距离增加，逐渐过渡到夫琅禾费衍射图样。
- **半无限大屏 (Straight Edge):** 衍射图样在几何阴影区边缘附近出现一系列非等间距的明暗条纹。光强在亮区不是均匀的，在几何边界处的光强是无障碍时强度的 $1/4$ ，最亮的条纹在亮区边缘。
- **菲涅尔波带片 (Fresnel Zone Plate):** 根据菲涅尔半波带法设计的一种特殊衍射元件，由一系列透明和不透明的同心圆环构成，能像透镜一样聚焦光线。

巴俾涅原理 (Babinet's Principle) 揭示了互补衍射屏之间的深刻联系。

- **内容:** 设有两个衍射屏 Σ_1 和 Σ_2 ，它们是互补的（即 Σ_1 的透光区域是 Σ_2 的不透光区域，反之亦然）。用同一单色光源照射，在屏后同一点 P 产生的复振幅分别为 U_1 和 U_2 。若无衍射屏时 P 点的复振幅为 U_0 ，则有：

$$U_1 + U_2 = U_0$$

- **推论:** 在观察空间中，除了沿原传播方向 ($U_0 \neq 0$) 的区域外，在其他所有区域 ($U_0 = 0$)，都有 $U_1 = -U_2$ 。这意味着两者的光强相等：

$$I_1 = I_2$$

- **意义:** 一个不透明物体（如细丝、圆盘）产生的衍射图样，和与它尺寸形状相同的孔（狭缝、圆孔）产生的衍射图样，在除中心点外的区域是完全相同的。

E 进阶内容 (Advanced Topics)

这部分内容在波动光学的基础上，探讨了更接近实际系统和现代应用的课题，并对一些核心概念进行深化。

E.1 光学像差 (Optical Aberrations)

几何光学理论通常基于近轴近似，即只考虑靠近光轴、角度很小的光线。当实际光线（尤其是大角度、宽光束的光线）通过光学系统时，成像会偏离理想情况，这种偏离就是像差。

- **色差 (Chromatic Aberration):** 由介质的色散特性（折射率 n 随波长 λ 变化）引起。
 - **轴向色差:** 复色光的平行光入射时，不同颜色的光会聚在光轴上的不同点。

- **垂轴色差**: 由于不同色光的放大率不同，导致在像平面上形成带有彩色边缘的像。
- **单色像差 (Monochromatic Aberrations)**: 即使用单一波长的光也会出现的像差，主要有五种初级（三阶）像差，称为 **赛德尔像差 (Seidel Aberrations)**。
 - **球差 (Spherical Aberration)**: 从透镜不同环带通过的光线会聚在光轴上的不同点，导致点光源的像成为一个弥散斑。
 - **彗差 (Coma)**: 轴外物点的光束通过透镜后，在像平面上形成不对称的、类似彗星形状的弥散斑。
 - **像散 (Astigmatism)**: 轴外物点发出的光，在相互垂直的两个平面（子午面和弧矢面）内的光线会聚在不同的焦点上，形成两条相互垂直的焦线。
 - **场曲 (Field Curvature)**: 垂直于光轴的平面物体，其清晰的像却落在一个曲面上（匹兹伐曲面 Petzval surface），而不是一个平面上。
 - **畸变 (Distortion)**: 像的横向放大率随视场而变，导致像的形状失真。分为 **枕形畸变** 和 **桶形畸变**。

E.2 傅里叶光学 (Fourier Optics)

傅里叶光学是将傅里叶分析（傅里叶变换、卷积等）和线性系统理论应用于光学领域的分析方法。它提供了一个描述衍射、成像和信息处理的统一而强大的数学框架。

- **核心思想**: 将光的传播过程看作一个线性系统，光场（复振幅）是系统的输入，通过一个“脉冲响应函数”（通常与衍射积分有关）的卷积，得到输出光场。
- **透镜的傅里叶变换性质**: 这是傅里叶光学的基石。一个理想薄透镜可以在其后焦平面上，产生其前焦平面上光场分布的精确傅里叶变换。

$$U_f(x_f, y_f) \propto \mathcal{F}\{U_o(x_o, y_o)\} \Big|_{f_x = \frac{x_f}{\lambda f}, f_y = \frac{y_f}{\lambda f}}$$

- **阿贝成像理论 (Abbe's Theory of Imaging)**: 将成像过程分为两步：
 - 分频**: 物镜对物平面的光场进行第一次傅里叶变换，在其后焦平面（频谱面）上形成物的空间频谱。
 - 合频**: 频谱面上的频谱作为新的“光源”，通过第二次傅里叶变换，最终在像平面上合成像。
- **空间滤波 (Spatial Filtering)**: 根据阿贝理论，我们可以在系统的频谱面上放置各种“滤波器”（即有特定透过率的掩模版），来改变物的频谱结构，从而实现对最

终图像的处理。例如，放置小孔实现低通滤波（图像平滑），放置挡板实现高通滤波（边缘增强）。**相衬法** 和 **暗场法** 显微镜就是空间滤波的杰出应用。

E.3 散射光成像 (Scattered Light Imaging)

当光通过浓雾、生物组织等强散射介质时，波前会被完全打乱，形成随机的散斑，无法直接成像。散射光成像是近年来光学领域的前沿热点。

- **挑战：**多重散射使光子的相位和方向变得随机，彻底破坏了携带图像信息的空间关系。
- **主要技术简介：**
 - **波前整形 (Wavefront Shaping)：** 使用空间光调制器 (SLM) 主动地对入射光的波前进行“预补偿”，通过优化算法，使得光在通过散射介质后能在期望位置相干叠加，形成焦点。
 - **光学相位共轭 (Optical Phase Conjugation)：** 一种“时间反演”技术。一束光穿过散射介质后形成散射场，用一个相位共轭镜记录此散射场并产生一个其相位共轭的波。此共轭波会“循迹”原路返回，在穿过散射介质时自动消除散射效应，重构出原始图像。
 - **散斑相关技术 (Speckle Correlation)：** 利用散射光散斑的“记忆效应”（即入射光束小角度偏转时，远场散斑图案会相应平移而形态基本不变）等统计特性，通过复杂的算法从一张或多张散斑照片中恢复出物体的图像。

E.4 激光 (LASER)

LASER 是“通过受激辐射实现光放大” (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) 的缩写。

- **基本组成：**
 1. **增益介质 (Gain Medium)：** 能够实现粒子数反转的物质，可以是固体、液体或气体。
 2. **泵浦源 (Pumping Source)：** 为增益介质提供能量，使其激发到高能级，从而实现粒子数反转的外部能源。
 3. **光学谐振腔 (Optical Resonator)：** 通常由两面反射镜构成（法布里-珀罗腔），用于提供光学正反馈，使光子在增益介质中多次往返以获得足够放大，并选择出特定的振荡模式。
- **核心原理：**

- **粒子数反转 (Population Inversion):** 在高能级上的粒子数多于在低能级上的粒子数，这是光放大的前提条件。
- **受激辐射 (Stimulated Emission):** 处于高能级的粒子，在受到一个外来光子（频率等于能级跃迁频率）的诱导下，会跃迁到低能级，并辐射出一个与外来光子完全相同（频率、相位、偏振、方向均一致）的光子。这是“放大”的来源。
- **激光特性:** 高单色性、高方向性、高亮度和高相干性。

E.5 再论相干性 (Coherence Revisited)

- **时间相干性与空间相干性:** 时间相干性与光源的谱线宽度（单色性）相关，空间相干性与光源的尺寸大小相关。
- **复相干度 (Complex Degree of Coherence):** 用 $V = |\gamma_{12}(\tau)|$ 来定量描述相干性，其中 V 是干涉条纹的可见度。 $V = 1$ 为完全相干， $V = 0$ 为完全不相干， $0 < V < 1$ 为部分相干。
- **范西特-泽尼克定理 (Van Cittert-Zernike Theorem):** 该定理是相干性理论的基石。它深刻地指出：一个非相干的、准单色扩展光源，在其远场产生的波场的 **空间相干函数**（复相干度），等于该光源强度分布的归一化 **傅里叶变换**。
- **应用实例:** 迈克尔逊干涉仪就是利用该定理，通过测量不同基线长度（望远镜间距）下干涉条纹的可见度，来反演出恒星的角直径。