引力波物理·笔记

线性引力论

Einstein方程是非线性的，考虑弱引力场近似： $g_{ab}=\eta_{ab}+\gamma_{ab}$

了方便和避免混淆，我们约定张量的指标升降一律用 η^{ab} 和 η_{ab} (而不是 g^{ab} 和 g_{ab}) 进行，只有一个例外，那就是 g^{ab}，它仍代表 g_{ab} 的逆而不是 $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$. 在线性近

$$g^{ab}=\eta^{ab}-\gamma^{ab}$$

$$\Gamma^{(1)c}{}_{ab}=\frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a\gamma_{bd}+\partial_b\gamma_{ad}-\partial_d\gamma_{ab})$$

$$R^{(1)}_{acbd}=\partial_d\partial_{[a}\gamma_{c]b}-\partial_b\partial_{[a}\gamma_{c]d}$$

$$R^{(1)}_{ab}=\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\tfrac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\tfrac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma$$

$$G^{(1)}_{ab}=R^{(1)}_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}R^{(1)}=\partial^c\partial_{(b}\gamma_{a)c}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma-\frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd}-\partial^c\partial_c\gamma)$$

$$\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma-\frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd}-\partial^c\partial_c\gamma)=8\pi T_{ab}$$

线性Einstein方程

接下来考虑规范条件与“bar”操作：

$\tilde{\gamma}_{ab}=\gamma_{ab}+\partial_a\xi_b+\partial_b\xi_a$ 规范变换

$\partial^b\bar{\gamma}_{ab}=0$ (称为线性引力论的**洛伦兹规范条件**).

谐和坐标：

取标量 $f=x^\mu$ （那就是说，即使你换到另外一种不太河蟹的坐标系，每个物理点的 f 还是原先谐和坐标系里的 x^μ），都要有

$$\Box f=0$$

根据

$$\Box f=g^{\mu\nu}f_{,\mu,\nu}-\Gamma^\lambda f_{,\lambda}$$

在谐和坐标系里， $f=x^\mu$ 的任意二阶普通偏导都是零，所以谐和坐标条件可以等价地写为

$$\Gamma^\lambda=0$$

当然，也可以写成

$$\Gamma_\lambda\equiv g^{\alpha\beta}\Gamma_{\lambda\alpha\beta}=0$$

bar操作

对任何一个线性化的，用 $\eta_{\mu\nu}$ 进行指标升降的小量 $f_{\mu\nu}$，我们都可以定义

$$\bar{f}_{\mu\nu}\equiv f_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}f^\alpha_\alpha$$

那么线性化的爱因斯坦方程就可以写成

$$\bar{R}_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$$

更有意思的是，两次加bar操作相当于没有操作，也就是爱因斯坦方程两边加bar可以得到

$$R_{\mu\nu}=8\pi G\bar{T}_{\mu\nu}$$

$$\bar{\gamma}_{ab}\equiv\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$$ 迹反转度规微扰

在谐和坐标系里，$R_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$。爱因斯坦方程成为 $\Box h_{\mu\nu}=-16\pi G\bar{T}_{\mu\nu}$ 或者等价的 $\Box\bar{h}_{\mu\nu}=-16\pi GT_{\mu\nu}$。

引力波的物理性质

研究引力波物理性质时，我们通常考虑平面波解：

在这样的形式下，公式2.8中，等式左边的后三项均变为零。我们也就得到了线性化引力在 Lorenz 规范下的 Einstein 场方程

$$-\Box\bar{h}_{\alpha\beta}=\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \tag{2.17}$$

引力波只有两个自由度，规范条件10-4=6，以下给出横向无迹6-4=2：

为了简化讨论，我们来考虑一个沿 z 轴传播的平面波解。

- h_{33} 描述的是沿传播方向的度量（即物理长度和z坐标之间的关系）的振动，这家伙可以通过操作 z 坐标的定义来消除。
- 虽然这有些不太好想象，但是数学上的对称性容易让你相信操作时间坐标可以干掉 h_{00}。
- 虽然引力波并不在 x 和 y 方向上移动，但是操作 x 坐标和 y 坐标还是可以干掉 h_{13} 和 h_{23}（这类似于动态地调节过z轴上各点的 x, y 方向和 z轴的夹角来消除度规交叉项）。

$$h^{TT}_{0\alpha}=0,\qquad \eta^{ij}h^{TT}_{ij}=0,\qquad \partial^j h^{TT}_{ij}=0,$$ 横向无迹规范（TT规范）

我们这里定义 $h_+=A_{11}\exp[i\omega(t+z/c)]$，以及 $h_\times=A_{12}\exp[i\omega(t+z/c)]$，将其称为在横向无迹规范下引力波的加模（+ 模，plus mode）和乘模（× 模，cross mode）。[1] 这

$$h^{TT}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&h_+&h_\times&0\\0&h_\times&-h_+&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此给出TT规范下的平面波解析

接下来考虑引力波对检验质量（群）的作用：

这是一个测试质量在不受外力的情况下在弯曲的背景下的经典运动方程。用四速度的话，测地线方程变成如下的形式

$$\frac{du^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}u^\nu u^\rho=0\,. \tag{9}$$

现在考虑隔得很近的两个测地线，一个是 $x^\mu(\tau)$，另一个是 $x^\mu(\tau)+\xi^\mu(\tau)$. $x^\mu(\tau)$ 满足式 8，$x^\mu(\tau)+\xi^\mu(\tau)$ 满足

$$\frac{d^2(x^\mu+\xi^\mu)}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x+\xi)\frac{d(x^\nu+\xi^\nu)}{d\tau}\frac{dx^\rho+\xi^\rho}{d\tau}=0\,. \tag{10}$$

式 10 - 式 8 并且展开到 ξ 的一阶，我们有

$$\boxed{\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+2\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\rho}{d\tau}+\xi^\sigma\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}=0\,.} \tag{11}$$

引入协变导数

$$\frac{DV^\mu}{d\tau}\equiv\frac{dV^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}V^\nu\frac{dx^\rho}{d\tau}\,. \tag{12}$$

于是式 11 可以被写作

$$\boxed{\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}=-R^\mu_{\nu\rho\sigma}\xi^\rho\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\,,} \tag{13}$$

用四速度表示出来，我们有

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}=-R^\mu_{\nu\rho\sigma}\xi^\rho u^\nu u^\sigma\,. \tag{14}$$

这个方程告诉我们两个相邻的类时测地线会受到潮汐引力。潮汐引力是由黎曼张量决定的。

参考：[1] http://zhiqihuang.top/gr/lectures.php ; [2] https://wuli.wiki/online/index.html ; [3] https://yiminghu-sysu.github.io/

引力波物理·笔记

上述推导给出了所谓的测地偏离（也就是所谓的两个相邻类时测地线受潮汐力）：

$$\frac{\mathrm{D}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\xi^\gamma\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}\tau}$$

进一步，在低速、局域惯性系忽略二阶小量和小间隔（度规空间偏导为零）：

$$F_j = ma_j = \frac{m}{2}\frac{\partial h^{\mathrm{TT}}_{jk}}{\partial t^2}\xi^k$$

Newtonian力学意义下的检验质量动力学方程

在度规微扰很小的前提下可以直接积分

不妨设一个事件处于原点 $(0,0,0,0)$，另一个事件则为 $x^\alpha = (0, \xi\sin\theta\cos\phi, \xi\sin\theta\sin\phi, \xi\cos\theta)$，代入公式2.33，可以得到：

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_+\,\xi\sin\theta\cos\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_\times\,\xi\sin\theta\sin\phi \\ a_2 &= \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_+\,\xi\sin\theta\sin\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_\times\,\xi\sin\theta\cos\phi \\ a_3 &= \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}t^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

注意到，两个事件的距离在 z 轴上的分量保持不变，这是因为引力波是横波，而我们选用的横向无迹规范中，引力波的传播方向为 z 轴方向。因此，在引力波传播方向上（z 轴），引力波不会产生作用。

按上述方程做数值模拟，可得引力波的两种偏振图像：

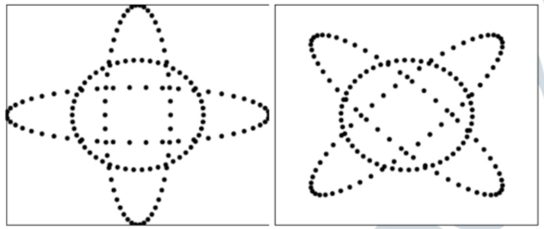


图 2–1 广义相对论下引力波的两种偏振

Figure 2–1 Two polarisation modes under general relativity. Credit: [84]

另一个值得考虑的物理效应是引力波携带的“能量”，这是因为：

在有引力波传播情况下，可以定义等效能量动量张量 $\tau^{\alpha\beta}$ 不仅包括了源场的能量动量张量 $T^{\alpha\beta}$，也包含了 $O(h^2)$ 的引力波项。

$$\Box\bar{h}^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

利用作用量近似（近似作用量 -> 拉格朗日量 -> 哈密顿量）：

对应的“哈密顿量密度（能量密度）”

$$\mathcal{H} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}p^{\mu\nu} - \mathcal{L} = \frac{1}{64\pi G}\left(\frac{\partial\bar{h}^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla\bar{h}^{\mu\nu}\cdot\nabla h_{\mu\nu}\right)$$

如前所述，这个“能量密度”并不是通常意义上的局域能量动量张量的00分量，对其物理意义进行解释时须谨慎！

对于横向无迹单色平面波：

$$\rho_{\mathrm{gw}} = \frac{1}{32\pi G}\left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 + |\nabla h_+|^2 + |\nabla h_\times|^2\right)$$

引力辐射

先做较简单的考虑：

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \simeq \frac{4G}{c^4 D}\int \tau^{\alpha\beta}(t - D/c, \mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}'$$

推迟势+远场近似+TT规范+略去高阶小量

$$h^{ij}_{\mathrm{TT}}(t,\mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 D}\ddot{I}^{ij}_{\mathrm{TT}}(t)$$

四极辐射引力波

$$I^{ij}(t) = \int x^i x^j \frac{\tau^{00}(t - D/c, \mathbf{x})}{c^2}\mathrm{d}\mathbf{x},$$

质量四极矩

接下来做更复杂的考虑：

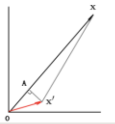
考虑以频率ω变化，分布在有限区域内的引力波源

$$T_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = M_{\mu\nu}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + c.c.$$

远场近似：

在离波源很远的 $\mathbf{x} = r\mathbf{n}$（$\mathbf{n}$ 是代表方向的单位矢，r 代表距离）处观测，由之前推出的辐射公式有

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = -4G\int\frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}M_{\mu\nu}(\mathbf{x}')e^{-i\omega(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} + c.c.$$



$$\begin{aligned} |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| &= XX' \\ &\approx XA \\ &= OX - OA \\ &= r - \mathbf{x}'\cdot\mathbf{n} \end{aligned}$$

把振幅取零阶近似，相位需要更精确些，取一阶近似：

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) &= -4G\int\frac{d^3\mathbf{x}'}{r}M_{\mu\nu}(\mathbf{x}')e^{-i\omega(t-r+\mathbf{x}'\cdot\mathbf{n})} + c.c. \\ &\equiv -\frac{4Ge^{-i\omega(t-r)}}{r}\mathcal{M}_{\mu\nu}(\omega\mathbf{n}) + c.c. \end{aligned}$$

这里的

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \int d^3\mathbf{x}M_{\mu\nu}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

是 $M_{\mu\nu}(\mathbf{x})$（$T_{\mu\nu}$ 的振幅）的三维傅立叶变换。

单位立体角功率：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \rho_{\mathrm{gw}}(t, r\mathbf{n})r^2$$

$$\begin{aligned} \left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle &= \frac{r^2}{64\pi G}\left\langle\frac{\partial\bar{h}^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla\bar{h}^{\mu\nu}\cdot\nabla h_{\mu\nu}\right\rangle \\ &= \frac{r^2\omega^2}{32\pi G}\langle\bar{h}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\rangle \end{aligned}$$

对单频率源，在方向 $\mathbf{n}$，单位立体角内的引力辐射功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi}\left(\mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega\mathbf{n})\mathcal{M}^*_{\mu\nu}(\omega\mathbf{n}) - \frac{1}{2}|\mathcal{M}^\alpha_\alpha(\omega\mathbf{n})|^2\right)$$

这里的 $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ 是 $T_{\mu\nu}$ 的振幅的三维傅立叶变换。

参考：[1] http://zhiqihuang.top/gr/lectures.php ; [2] https://wuli.wiki/online/index.html ; [3] https://yiminghu-sysu.github.io/

引力波物理·笔记

对于连续谱，我们考虑的是一段时间的总能量（而非功率）：

$$h_{\mu\nu}(t, r\mathbf{n}) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2Ge^{-i\omega(t-r)}}{\pi r} \tilde{T}_{\mu\nu}(k)$$

对连续谱源，在方向 $\mathbf{n}$，单位立体角内，单位频率间隔的引力辐射总能量为

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2}\left(\mathcal{T}^*_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2}|\mathcal{T}^{\alpha}_{\alpha}(k)|^2\right)$$

这里的 $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ 是 $T_{\mu\nu}$ 的四维傅立叶变换，四维波矢 $k^\mu = (\omega, \omega\mathbf{n})$。

进一步，我们仍要考虑四极辐射：

用空空分量表示的引力波辐射公式

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2}\mathcal{T}^*_{ij}(k)\mathcal{T}_{kl}(k)\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

这里的

$$\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n}) \equiv \left(n^in^k - \delta^{ik}\right)\left(n^jn^l - \delta^{jl}\right) - \frac{1}{2}\left(n^in^j - \delta^{ij}\right)\left(n^kn^l - \delta^{kl}\right)$$

叫做 横向无迹投影算符。

单频的情况也类似，就不重复推导了：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi}\mathcal{M}^*_{ij}(\omega\mathbf{n})\mathcal{M}_{kl}(\omega\mathbf{n})\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

于是

$$\frac{\partial^2 Q^{ij}}{\partial t^2} = 2\int T^{ij}d^3\mathbf{x}$$

这叫做（张量的）virial定理。

Virial定理

在Minkowski 时空，对局域、守恒的能量动量张量 $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$，定义能量密度的四极矩：

$$\boxed{Q^{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv \int x^ix^jT^{00}(\mathbf{x}, t)d^3\mathbf{x}}$$

能量密度四极矩（含时表述，与T有关）

利用守恒条件，可以将时间分量用空间分量全部表示出来

四极矩近似的物理场景

如果引力波源的运动是非相对论的，那么波源的尺度很可能比引力波的波长小得多（因两者频率相同，而引力波以光速传播）。

这时就又有了操作的空间——

以单频引力波辐射为例

如果波源的尺度远小于 $\frac{1}{\omega}$。那么对波源的振幅 $M^{ij}(\mathbf{x})$ 做傅立叶变换时，$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 可以近似当成 1。

$$\mathcal{M}^{ij}(\omega\mathbf{n}) \approx \int M^{ij}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

对张量 $M^{\mu\nu}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ 使用virial定理

$$\int M^{ij}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\omega^2\int x^ix^jM^{00}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

单频四极矩辐射公式

记能量密度的四极矩(quadrupole)

$$\boxed{Q^{ij} \equiv \int x^ix^jM^{00}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}}$$

不含时表述，与M有关

则 $\mathcal{M}^{ij}(\omega\mathbf{n}) \approx \frac{\omega^2}{2}Q^{ij}$。代入到引力波辐射公式里

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{G\omega^6}{4\pi}Q^*_{ij}Q_{kl}\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

连续谱的四极矩辐射公式

对连续谱，推导完全类似。可以定义

$$Q^{ij}(\omega) \equiv \int e^{i\omega t}dt\int x^ix^jT^{00}(t, \mathbf{x})d^3\mathbf{x}$$

有

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) \approx \frac{G\omega^6}{16\pi^2}Q^*_{ij}(\omega)Q_{kl}(\omega)\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

简单的双星系统示例

例1：求解振幅

$$\begin{aligned}
I_{11} &= m_1(r_1\cos\varphi)^2 + m_2[r_2\cos(\varphi+\pi)]^2 \\
&= \mu r^2\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\mu r^2(1+\cos 2\varphi) \\
I_{22} &= m_1(r_1\sin\varphi)^2 + m_2[r_2\sin(\varphi+\pi)]^2 \\
&= \mu r^2\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\mu r^2(1-\cos 2\varphi) \\
I_{12} &= I_{21} = m_1(r_1\cos\varphi)(r_1\sin\varphi) + m_2[r_2\cos(\varphi+\pi)][r_2\sin(\varphi+\pi)] \\
&= \mu r^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\mu r^2\sin 2\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_{11} &= -2\mu r^2\omega^2\cos 2\varphi \\
\ddot{I}_{22} &= 2\mu r^2\omega^2\cos 2\varphi \\
\ddot{I}_{12} &= \ddot{I}_{21} = -2\mu r^2\omega^2\sin 2\varphi
\end{aligned}$$

$$h^{TT}_{ij} = -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{c^4D}\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h_+ &= -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{c^4D}\cos 2\varphi \\
h_\times &= -\frac{4G\mu r^2\omega^2}{c^4D}\sin 2\varphi
\end{aligned}$$

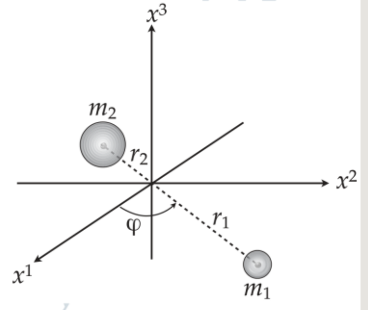


图 3–1 双星系统示意图

Figure 3–1 Illustration of a binary system. Credit: [37]

例2：求解功率

因为只是做个示范，我们考虑最简单的例子：两个质量为 M 的中子星以角频率 ω 在圆轨道上互相绕转。设它们之间距离为 $2R$，则有

$$\omega^2 = \frac{GM}{4R^3}$$

取旋转中心为原点，旋转轴为 z 轴，则近似有

$$T_{00}(t,x,y,z) = M[\delta(x - R\cos\omega t)\delta(y - R\sin\omega t) + \delta(x + R\cos\omega t)\delta(y + R\sin\omega t)]\delta(z)$$

显然

$$Q_{13} = Q_{23} = Q_{33} = 0$$

由于

$$\int T_{00}(t,x,y,z)x^2d^3\mathbf{x} = MR^2[1 + \cos(2\omega t)]$$

$$\int T_{00}(t,x,y,z)y^2d^3\mathbf{x} = MR^2[1 - \cos(2\omega t)]$$

$$\int T_{00}(t,x,y,z)xyd^3\mathbf{x} = MR^2[\sin(2\omega t)]$$

所以这是角频率为 2ω 的单频源，且

$$Q_{11} = \frac{MR^2}{2}, Q_{22} = -\frac{MR^2}{2}, Q_{12} = -i\frac{MR^2}{2}$$

代入四极矩辐射公式，得到角频率为 2ω 的引力波辐射强度为

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{2GM^2R^4\omega^6}{\pi}(\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 8)$$

这里的 θ 是 $\mathbf{n}$ 和 z 轴的夹角。

如果对所有方向积分，则得到辐射功率

$$P = \frac{128GM^2R^4\omega^6}{5}$$

补充：关于TT投影算符

把三维欧氏空间的对称二阶张量 $\mathcal{T}_{ij}$ (6个自由度） 分解为2个标量(2个自由度)，一个无源的矢量（2个自由度），和一个横向无迹的二阶张量（2个自由度）：

$$\mathcal{T}_{ij} = \Phi\delta_{ij} + \left(n_in_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Psi + (n_iA_j + n_jA_i) + \mathcal{T}^{\mathrm{TT}}_{ij}$$

这里的 Φ, Φ 是标量； A_i 是无源的三维矢量，满足 $n^iA_i = 0$ (现在我在讨论三维欧氏空间，指标在上面和下面都一样)。
首先两边求迹，可以确定 $\Phi = \frac{\mathcal{T}}{3}$，这里 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}^i_i$ 的简写。
然后两边乘以 n^in^j，可以得到：

$$n^in^j\mathcal{T}_{ij} = \frac{\mathcal{T}}{3} + \frac{2}{3}\Psi$$

即

$$\Psi = \frac{3}{2}\left(n^in^j\mathcal{T}_{ij} - \frac{\mathcal{T}}{3}\right)$$

然后在

$$\mathcal{T}_{ij} = \Phi\delta_{ij} + \left(n_in_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Psi + (n_iA_j + n_jA_i) + \mathcal{T}^{\mathrm{TT}}_{ij}$$

两边乘以 n^i 并代入 Φ, Ψ 的解，得到

$$n^i\mathcal{T}_{ij} = \frac{\mathcal{T}}{3}n_j + n_j\left(n^kn^l\mathcal{T}_{kl} - \frac{\mathcal{T}}{3}\right) + A_j$$

即

$$A_j = n^i\mathcal{T}_{ij} - \left(n^kn^l\mathcal{T}_{kl}\right)n_j$$

最后，把 Φ, Ψ, A_j 都代入，得出 $(\mathcal{T}^{\mathrm{TT}})^{ij} = P^{ijkl}\mathcal{T}_{kl}$.

参考：[1] http://zhiqihuang.top/gr/lectures.php ; [2] https://wuli.wiki/online/index.html ; [3] https://yiminghu-sysu.github.io/