

笛卡尔沉浮子“不可逆点”相关参数讨论

刘奕鑫

华南理工大学

摘要

在本文中，我们对沉浮子的不可逆现象进行了深入的理论分析和初步的实验探究。理论部分，我们主要进行了两部分的分析：1. **从动力学的角度解释了不可逆点存在的机理以及推导得出了该点坐标。**利用波义尔定律、帕斯卡定律、受力分析，我们很清楚地阐述了不可逆点的存在机制，并通过严谨的公式推导，得到了不可逆点坐标 x_{nr} 的解析公式⁸。2. **建模得到系统动力方程并利用 Leapfrog 数值积分方法求解。**这部分，我们基于牛顿第二定律列出了加速度的方程，并利用 Leapfrog 方法离散化，得以在计算机上模拟沉浮子的运动。在实验部分，我们进行了三个验证性的实验：验证沉浮子不可逆点的存在性、探究影响不可逆点位置的相关参数、利用计算机模拟绘制沉浮子运动过程的坐标-时间曲线。这些实验所得出的结果，都充分地证明了我们理论建模的正确性。

1. 引言

沉浮子有着非常悠久的历史，著名数学家笛卡尔曾用之来阐述阿基米德定律。一个简易的沉浮子装置通常由两部分组成：一个基本装满水的大塑料瓶子、一个吸了部分水且存在空气气泡的胶头滴管（放置于瓶子中）。

在常见的演示装置上，沉浮子在一般情况下会悬浮在瓶子中，而在瓶子受到外力作用后，它表现出不同的行为：在瓶子受到挤压后，它会下沉；在挤压的外力离开后，它一般会上浮。然而，当实验装置中的瓶子足够长的时候，会出现一个比较有趣的现

象：当沉浮子下降了一定的深度后，在撤去压力后，它将完全沉底且无法重新上浮。

基于 [1, 2] 的工作，本文从动力学的角度对这一现象进行全面的分析和实验，以探讨这一现象所涉及的相关参数。在理论分析部分，我们将这个系统抽象地建模为：沉浮子是一个含有空气的试管，在密封装满水的容器中漂浮或者完全淹没。外部的压力由注射器控制，而在测量上则由一个水银压力计完成。系统装置示意图见图图1。

在第二节，我们主要从动力学的角度出发对不可逆点的存在性和性质进行理论分析。在第一部分，我们基于阿基米德定律、帕斯卡定律、波义尔定律来着重分析了不可逆点 x_{nr} 存在的机理并且推导得到了该点的公式。在第二部分，我们基于牛顿第二定律推导得到系统的动力方程，并利用 Leapfrog 数值积分方法得到了离散化的递推方程，方便后续开展计算机模拟验证沉浮子的运动特性。

在第三节，我们进行了实验装置的设计，并且针对性地开展了三个验证性的实验：验证沉浮子不可逆点的存在性、探究影响不可逆点位置的相关参数、利用计算机模拟绘制沉浮子运动过程的坐标-时间曲线。在实验的最后，我们对结果进行了讨论和分析。

2. 理论分析

2.1. 不可逆点的机制及相关参数

本节中，我们从受力分析的角度，对沉浮子不可逆点存在背后的机制及其相关的控制参数进行讨论。

首先，我们对涉及到的主要物理量的符号进行简单的说明。倒置试管中存在的空气气体在大气压 $P = P_0$

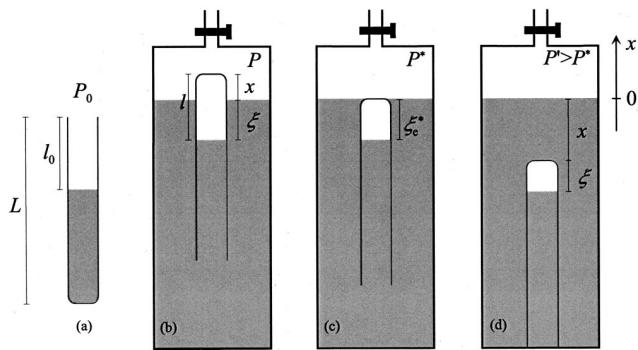


图 1. 沉浮子系统装置示意图 (a)

下原本的长度为 l_0 ，当试管被放置到满水的容器中时，气泡长度变为 l ，由于压强的增大，我们很容易知道 $l < l_0$ 。我们记试管上部到液面的距离为 x ，空气气泡在液面以下的长度为 ξ ，由几何关系可知：当试管漂浮在水面上时，即 $x > 0$ 时， $\xi = l - x$ ；当试管淹没时，即 $x \leq 0$ 时， $\xi = l$ ；我们定义当试管处于静态平衡的状态时， $x = x_e, \xi = \xi_e$ 。

系统初始阶段，沉浮子几乎淹没在水面之下，并处于静态平衡状态，即 $x = x_e, \xi = \xi_e$ ，由阿基米德定律和静态平衡受力分析，我们有：

$$mg = V\rho_{glass}g = A\xi_e\rho g + V(1 - \frac{x_e}{L})\rho g \quad (1)$$

其中， $g = 9.8ms^{-2}$ 为重力加速度， $V = (\pi/4)L(d_{ext}^2 - d_{int}^2)$ 为试管玻璃的体积， d_{int}, d_{ext} 分别为玻璃试管的内直径和外直径， $A = (\pi/4)d_{int}^2$ 为试管内截面面积。玻璃的密度为 $\rho = m/V$ ， m 为试管的质量， $\rho = 1gcm^{-3}$ 为水的密度。

记初始阶段密闭容器中的压强为 $P = P_s$ ，沉浮子内气体压强为 $P = P_g s$ ，长度为 $l = l_s$ 。由于沉浮子中的空气气泡可以近似地看作为理想气体，由波义尔定律和帕斯卡定律我们可以导出：

$$P_0 l_0 A = P_g s l_s A \quad (2)$$

$$P_s + \rho g \xi = P_g s \quad (3)$$

联立上面两式，整理的可以得到初始静态平衡时气泡的长度 l_s 的表达式：

$$l_s = \frac{P_0 l_0}{P_s + \rho g \xi_e} = x_e + \xi_e \quad (4)$$

结合阿基米德定律，我们知道，沉浮子的重力即为面积为 A ，长度为 ξ_e 的圆水柱的重力，这可以帮助我们理解和计算不可逆点的位置。

当容器上方的气体压强 P 增大时（对应到非椭圆形的塑料瓶装置被按压的情景），由于液体无法压缩，由帕斯卡定理，压强会传递给沉浮子之中的气泡，气泡的压强增大，在温度近似不变的情况下（符合实际情况），波义尔定律决定了此时气泡的体积会减小，一部分液体会上升进入试管，试管的排水量会减小。

当试管的头部还露出水面，即 $x > 0$ 时，试管会自发地调节 x 使得排水量保持不变，也就是我们会看到试管仍然悬浮在水面上。在 $x \leq 0$ 之后，试管内气体体积的降低将会导致其排水量的减小，浮力在此时将会小于重力，导致其下沉，随着下沉的进行，根据液体压强的性质我们知道气泡受到的压强将会继续的增大，体积及其影响的排水量、浮力会继续的减小，导致进一步加速的下沉，系统进入正反馈的状态直到试管沉底。

若我们在沉浮子下沉过程的某一时刻，撤去施加的外力，也就是将封闭容器的压强置为初始值 $P = P_s$ ，设此时沉浮子距离初始位置下降了 δh ，记气泡的压强为 P_{gn} ，根据帕斯卡定律和波义尔定律，我们有：

$$P_s + \rho g(\xi_e + \delta h) = P_{gn} \quad (5)$$

$$P_0 l_0 = P_{gn} l_n \quad (6)$$

可以导出，此时气体的长度 l_n 为

$$l_n = \frac{P_0 l_0}{P_s + \rho g(\xi_e + \delta h)} \quad (7)$$

也就是说，在撤去外力的这一时刻，沉浮子的排水量恢复为了 $V = Al_n$ ，浮力恢复为了 $F = \rho g Al_n$ 。当撤去外力的时刻距离初始状态较近时，由于沉浮子内部新的液面位置还不够深，不足以将气泡压缩到 ξ_e 的长度，也就是撤去外力之后浮力仍然大于重力，沉浮子会上升回到液面，在经过一段时间的震荡消耗完机械能后重新回到静态平衡状态。

当沉浮子下沉的深度足够时，我们可以找到一个点，使得气泡刚好被压缩为 ξ_e 的长度，也就是沉浮子在这个位置的排水量恰好的初始静态平衡时保

持一致, 将 $l_n = \xi_e$ 代入公式7, 我们可以找到这个点 δh_{nr} 。结合几何关系, 不可逆点 x_{nr} 为:

$$x_{nr} = \delta h_{nr} = \left(\frac{P_0 l_0}{\xi_e} - P_s \right) \frac{1}{\rho g} - \xi_e \quad (8)$$

联系方程1和方程4, 消去 x_e 变量, 我们可以得到关于 ξ_e 的二次方程:

$$a' \xi_e^2 + b' \xi_e + c' = 0 \quad (9)$$

其中, $a' = (\frac{\rho g}{L} + A \rho^2 g)$, $b' = \rho^2 V g + \frac{P_s}{L} + A \rho P_s - \rho g m$, $c' = P_s \rho V - \frac{P_0 l_0}{L} - P_s m$ 。

利用求根公式可以算得 ξ_e 的一个唯一解 (另一个解没有物理意义):

$$\xi_e = \frac{-b' + \sqrt{c'^2 - 4a'c'}}{2A} \quad (10)$$

在包括容器初始压强 P_s 在内的一系列参数确定后, 将求解得到 ξ_e 的代入方程8即可求出 x_{nr} 。

本文中我们称此位置 x_{nr} 为沉浮子的不可逆点, 该点具有是系统的一个突变点, 具有比较有趣的性质。在该点, 外力撤去后恢复的浮力恰好等于重力。但是分析前后, 我们会发现: 此点再向下, 由于液体压强的增大, 将会导致气泡体积无法恢复到 ξ_e 的长度, 也就是浮力会永远小于重力; 此点向上, 恢复的浮力会恒大于重力, 上浮。即使沉浮子恰好在此处静止, 微小的随机干扰也会使其偏离该位置。综上, 它是系统的一个不稳定静态静态平衡点。

2.2. 系统动态分析及模拟求解算法

本节从动力学角度对系统进行分析, 并在最后给出能够通过计算机模拟求解的模型。

由牛顿第二定律, 考虑到沉浮子在运动过程中会受到重力、浮力、液体的摩擦力, 我们有:

$$F = \begin{cases} A \xi \rho g + V(1 - x/L) \rho g - V \rho_{glass} g - b v, & x > 0 \\ A \xi \rho g + V(\rho - \rho_{glass}) g - b v, & x \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中, b 为摩擦系数, 由于速度一般比较小, 我们可以将摩擦力近似为速度的线性项。

在密闭容器上方压强为 P 时, 由波义尔方程, 我们有:

$$p_0 l_0 = \begin{cases} (P + \xi \rho g)(\xi + x), & x > 0 \\ (P + (\xi + |x|) \rho g) \xi, & x \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

以 ξ 作为因变量, x 作为自变量, 对上式进行整理, 我们可以得到 ξ 是关于 x 的二次方程, 利用求根公式我们得到:

$$\xi(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (13)$$

其中, $a = \rho g$, $b = \rho + |x| \rho g$, $c = \begin{cases} P x - P_0 l_0, & x > 0 \\ -P_0 l_0, & x \leq 0 \end{cases}$

另外一个负数根没有物理意义, 舍去。

将式13代入式11, 我们能够得到系统的运动方程:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, v; \Theta) \quad (14)$$

其中, $\Theta = \{A, \rho, \rho_{glass}, P, P_0, l_0, V, L, b\}$ 为系统的参数变量集, f 为合力方程的简记符号。

由于上式为关于 x, v 的连续函数, 无法在计算机中直接求解。借助数值积分的经典 Leapfrog 方法, 我们得到离散形式的运动物理量递推方程。此后, 我们可以在计算机上进行模拟求解, 相关的结果在后文实验部分给出:

$$\begin{cases} v_{n+1/2} = v_n + a_n \frac{\Delta t}{2} \\ x_{n+1/2} = x_n + v_{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \\ x_{n+1} = x_{n+1/2} + v_{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \\ v_{n+1} = v_{n+1/2} + a_{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (15)$$

3. 实验

实验装置. 我们主要采用了两套实验装置, 一套为做定性探究和验证的简易实验装置, 另一套较为精密的定量探究实验仪器。

简易装置 (实体图见2和3) 由以下几部分构成: 一个装满水的透明 33cm 塑料瓶作为容器, 沉浮子则是由塑料胶头滴管剪下的头部和一个塞入其中的螺丝组合构成, 螺丝的作用在于降低沉浮子的重心, 使得其能够竖立浮在水面上。其下方与液体联通, 保证

了滴管内的气体能够受到液体的作用，在容器内部压强变化时，发生体积和压强的变化。相关的参数说明：滴管中气体长度在 $P_0 \simeq 1.103 \times 10^5$ 大气压下的约为 $l_0 = 3.25\text{cm}$ ，内部横截面 $A \simeq 1.13\text{cm}^2$ ，滴管塑料的密度 $\rho_{\text{plastic}} \simeq 1.12\text{g/cm}^3$ 。

精密装置示意图见4。在此部分我们采用底部平滑的均 \square 玻璃管作为沉浮子：质量 $m = 4.58\text{g}$ ，外半径 $r_{\text{out}} = 0.5\text{cm}$ ，内半径 $r_{\text{in}} = 0.4\text{cm}$ ，壁厚为 1mm ，总长 $L = 7\text{cm}$ 。具体涉及到的实验仪器有：烧瓶、烧杯、量筒、天平、橡皮管、三叉管、油标尺、蒸馏器、温度计。压力的测量上，我们采用自制的开管压力计：120cm 的玻璃管两支，用塑胶管链接下置透明尺及平面镜，固定在铅直竖立的木板上而成。管内放入水，测量时眼睛正视水面、尺的刻度、水面的镜中像成一直线，可以准确量出水面的高度。



图 2. 自制简易沉浮子装置

沉浮子不可逆点存在性的定性验证。 我们希望简单地验证下不可逆点的存在性，这一实验在我们设计



图 3. 简易的沉浮子

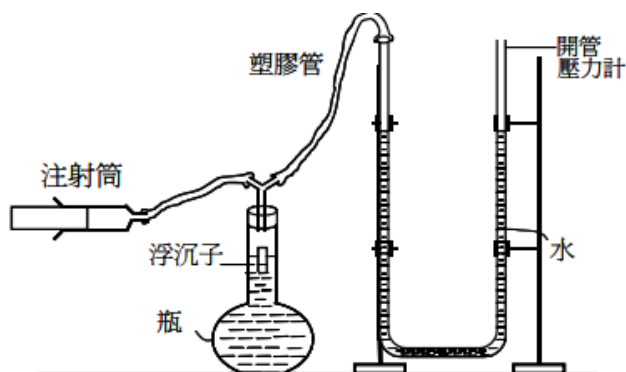


图 4. 精密的沉浮子装置

的简易装置上已经足以得到证明。基于式10，我们可以得知不可逆点距离液面的位置 x_{nr} 受到初始容器内部压强 P_s 的影响。那么，我们通过控制变量 P_s ，就可以达到非线性地控制 x_{nr} 的大小，使得不可逆点出现或者不出现在容器中。

实验中我们观察到，在其他的参量已经确定下的情况下，若 $P_s = P_0$ ，不可逆点在容器中很接近液面的

位置，只要稍微施加外力，沉浮子便直接沉底且不再返回液面。那么，我们接下来的任务就是通过降低 P_s 来使得不可逆点下移，使得我们能够观察到沉浮子返回液面的过程。我们的方法是利用塑料瓶的弹性形变特性来完成这件事：施加外力使得容器体积减小，容器内气体体积也减小，然后盖紧瓶盖，释放外力容器体积会发生一定的恢复，也就是气体的体积会增大，由波义尔定律，其压强 P_s 会降低。实验中，我们通过上述的方法观察到了沉浮子在不可逆点处上方和下方的两种不同的运动行为完全符合我们前文的理论分析，这部分的相关实验材料可见附件。

探究影响不可逆点位置的相关参数。 基于精密实验装置⁴，在其他参数保持不变下，改变玻璃管的总长度 L 、容器上方气体压强 P_s 、初始气体 l_0 这三个参数在合理的范围内，以保证不可逆点出现在容器中。然后，通过控制恢复初始气压的时刻，并观察记录沉浮子不可逆点的位置 x_{nr} 。我们进行了三组实验，并对理论情况下的 x_{nr} 进行计算，结果¹证明了我们理论部分的正确性。

$L(cm)$	$P_s(mmHg)$	$l_0(cm)$	$x_{nr}(cm)$	$x_{nr}(expt)$
9.8	900.1	7.0	-6.214	-6.208
11.0	759.8	5.0	-9.924	-9.926
7.0	750.1	6.0	-3.351	-3.340

表 1. 在不同参数设置下的实验数据

利用计算机模拟绘制沉浮子运动过程的 x - t 图。 本部分是对理论部分抽象出的沉浮子系统的运动方程进行计算机模拟，结合理论部分得到的离散递推公式¹⁵，使用 Python 语言进行程序化，我们得以对沉浮子在不同环境参数下的运动行为曲线。在参数设定上，我们参考了文献^[1]的实验参数，具体可见附录。

利用控制变量法，我们绘制出了三种初速度下沉浮子运动的 x - t 曲线⁵，他们都在可逆点的上方，于是都呈现出了先下降后上浮的特性。

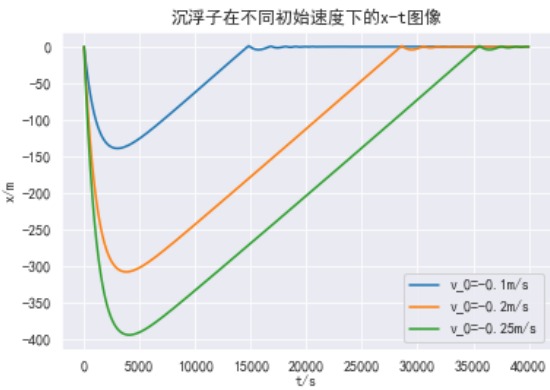


图 5. 在初始容器内部压强设置为大气压 $P_s = P_0$ ，且初始试管顶部坐标为 $x = 3mm$ 下。我们设置了三组初始速度 v_0 ：(1)0.1m/s (2)0.2m/s (3)0.25m/s。我们绘制出了沉浮子的在 $4 \times 10^4 s$ 内的运动图曲线。

4. 总结

在本文中，我们对沉浮子的不可逆现象进行了深入的理论分析和初步的实验探究。理论部分，我们主要进行了两部分的分析：1. **从动力学的角度解释了不可逆点存在的机理以及推导得出了该点坐标。**利用波义尔定律、帕斯卡定律、受力分析，我们很清楚地阐述了不可逆点的存在机制，并通过严谨的公式推导，得到了不可逆点坐标 x_{nr} 的解析公式⁸。2. **建模得到系统动力方程并利用 Leapfrog 数值积分方法求解。**这部分，我们基于牛顿第二定律列出了加速度的方程，并利用 Leapfrog 方法离散化，得以在计算机上模拟沉浮子的运动。在实验部分，我们设计了两套实验仪器并进行了三个验证性的实验：验证沉浮子不可逆点的存在性、探究影响不可逆点位置的相关参数、利用计算机模拟绘制沉浮子运动过程的坐标-时间曲线。这些实验所得出的结果，都充分地证明了我们理论建模的正确性。

参考文献

[1] J. Güémez, C. Fiolhais, and M. Fiolhais. The cartesian diver and the fold catastrophe. *American Journal of Physics*, 70(7):710–714, 2002. 409, 413

[2] 刘炳国. 探究浮沉子撤压后浮与沉的规律. *物理教学*, (2):26–27, 2011. 409

A 附录

A.1 代码

```
1 # 导入包
2 import math
3 import pandas as pd
4 import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import seaborn as sns
7 # Definitions
8 pd.set_option('display.float_format', lambda x: '%.3f' % x)
9 %matplotlib inline
10
11 # ===== 实验二 =====
12 # 参数设置
13 m = 11.9
14 A = 1.49e-4
15 rho = 1
16 V = 1e-8
17 L = 0.098
18 rho_glass = 2.35
19 b = 0.01
20 g = 9.8
21 P_0 = 1.013e5
22 l_0 = 0.07
23 def xi_x(x): # xi方程
24     a = rho*g
25     b = P + abs(x) * rho *g
26     c = -P_0*l_0 if x<=0 else P*x-P_0*l_0
27     xi = (-b+math.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
28     # assert xi >= 0
29     # if xi < 0:
30     #     return 0
```

```

31     return xi
32 def xv2a(x,v): # 加速度方程
33     res = A*xi_x(x)*rho*g +V*rho*g-V*rho_glass*g-b*v
34     if x>0:
35         res -= V*(x/L)*rho*g
36     res /= m
37     return res
38 def intermediate(v_0,x_0,ps,max_iter=400000,delta_t = 0.1):#leapfrog 求解
39     def change_P(p):
40         global P
41         P = p
42
43     change_P(ps)
44
45     v = []
46     x = []
47     a = []
48     t = []
49
50     v_st = v_0
51     v_mi = 0
52     v_en = 0
53     x_st = x_0
54     x_mi = 0
55     x_en = 0
56     a_st = xv2a(x_0,v_0)
57     a_mi = 0
58     a_en = 0
59
60     for i in range(max_iter):
61         v_mi = v_st + 1/2*delta_t*a_st
62         x_mi = x_st + v_mi*delta_t
63         x_en = x_mi + v_mi * delta_t/2

```

```

64     a_mi = xv2a(x_mi, v_mi)
65     v_en = a_mi*delta_t/2+v_mi
66     a_en = xv2a(x_en, v_en)
67
68     v.append(v_st)
69     # v.append(v_mi)
70     a.append(a_st)
71     # a.append(a_mi)
72     x.append(x_st)
73     # x.append(x_mi)
74     t.append(i*delta_t)
75
76     v_st = v_en
77     a_st = a_en
78     x_st = x_en
79
80     # if i == 50:
81     #     global P
82     #     P = ps
83     # print('改变')
84     # plt.plot(t, x)
85     return x, v, a, t
86 exp = [(-0.10, 0.003, P_0), (-0.20, 0.003, P_0), (-0.25, 0.003, P_0)]
87 for i, ex in enumerate(exp):
88     x, v, a, t = intermediate(ex[0], ex[1], ex[2])
89     plt.plot(t, x, label = 'v_0={}/m/s'.format(ex[0]))
90 plt.legend(loc = 0)
91 plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
92 import matplotlib
93 matplotlib.rcParams['axes.unicode_minus']=False # 正常显示负号
94 plt.title('沉浮子在不同初始速度下的x-t图像')
95 plt.xlabel("t/s")
96 plt.ylabel("x/m")

```



```

97 plt.savefig('x-t.png')
98 def xnr(P_init):
99     global V
100     a = rho*g/L + A*rho**2*g
101     b = rho**2*V*g + P_init/L + A*rho*P_init-rho*g*m
102     c = P_init*rho*V - P_0*l_0/L - P_init*m
103     xi_e = (-b+math.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
104     assert xi_e>0
105     x_nr = (P_0*l_0/xi_e - P_init)/(rho*g)-xi_e
106     return x_nr
107 # ===== 实验三 =====
108 # 参数设置
109 m = 11.9
110 A = 1.49e-4
111 rho = 1
112 V = 1e-8
113 L = 0.098
114 rho_glass = 2.35
115 b = 0.01
116 g = 9.8
117 P_0 = 1.013e5
118 l_0 = 0.07
119 def xnr(P_init):
120     global V
121     a = rho*g/L + A*rho**2*g
122     b = rho**2*V*g + P_init/L + A*rho*P_init-rho*g*m
123     c = P_init*rho*V - P_0*l_0/L - P_init*m
124     xi_e = (-b+math.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)
125     assert xi_e>0
126     x_nr = (P_0*l_0/xi_e - P_init)/(rho*g)-xi_e
127     return x_nr
128 L = 0.098
129 l_0 = 0.07

```

```
130 xnr(1.20e5)
131 L = 0.11
132 l_0 = 0.05
133 xnr(1.013e5)
134 L = 0.07
135 l_0 = 0.06
136 xnr(1e5)
```