微积分和线性代数习题

南京大学数学系　孙永忠

Kuang Yaming Honors School, Nanjing University

2019年7月24日 整理

1　常微分方程

1.1　求通解

1. $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$
2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

1.2　证明

1. 齐次方程的任一解都可由一组基础解系线性表出。

2. (1) 若$Y(x)$是一个基解矩阵，P是非奇异方阵，则$Z(x) = Y(x)P$也是基解矩阵。

(2) 若$Y(x), Z(x)$是两个基解矩阵，则存在非奇异阵P，使得$Z(x) = Y(x)P$。

3. 刘维尔公式：$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} tr(A(x))dt}$

4. 比较原理：设二元函数$f(x,y), g(x,y)$均满足常微分方程基本定理条件，$y = \varphi(x), y = \psi(x)$分别是$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y|_{x=0} = y_0$与$\frac{dy}{dx} = g(x,y), y|_{x=0} = y_0$的解，$x \in [0,h]$。若$f, g$满足$f(x,y) \leqslant g(x,y), \forall x, y$，则$\varphi(x) \leqslant \psi(x), x \in [0,h]$。

1.3 拉普拉斯变换$\mathscr{L}(f)(s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

1.3.1 求作下列方程的拉普拉斯变换

1. $f(t) = sin(\omega t)$
2. $f(t) = cos(\omega t)$

1.3.2 用拉普拉斯变换求解方程

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = sin(2x), y(0) = 0, y'(0) = 1$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = f(x), y(0) = y_0, y'(0) = y_1$
3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = -asin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} - x = acos(\omega t) \quad x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$

1.3.3 证明

对函数f, g，称$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$为卷积，求证：

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f)\mathscr{L}(g)$$

1.4 零点及边值问题

1. 设$y'' + q(x)y = 0$中系数$q(x)$满足$q(x) \leqslant M, x \in [a, +\infty), M > 0$为一常数，求证：$y'' + q(x)y = 0$的任一非零解的相邻零点的距离不小于$\frac{\pi}{\sqrt{M}}$。

2. 求解边值问题：$y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(1) = 0$，$\lambda$为大于0的常数。

2 傅里叶级数

2.1 计算

1. 求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n}$的解析表达式。

2. 对于$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), x \in [0, 2\pi)$作周期延拓后求其$Fourier$级数。

3. 将$f(x) = x^2, x \in [0, \pi)$延拓为以$\pi$为周期的函数，求其$Fourier$级数并讨论收敛性。

4. 求$f(x) = x^3, x \in (-\pi, \pi)$的$Fourier$级数。

5. 将$f(x)=x^2$在下列区间上展开成$Fourier$级数。

(1)[-1,1]　(2)[0,π]　(3)[0,1]　(4)[0,2π]

2.2 证明

1. 用$Riemann\text{-}Lebesgue$引理证明：$\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}=\frac{\pi}{2}$

2. 利用特征函数$\varphi(x)=\begin{cases}1,x\in[a,b]\\0,x\in[-\pi,a)\bigcup(b,\pi]\end{cases}$ 证明傅里叶级数的逐项积分。

2.3 $Fourier$变换

1. 计算$f(x)=e^{-|x|}$的$Fourier$变换。

2. 计算$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma}}$的$Fourier$变换。

3 线性代数

3.1 计算

1. 三阶实对称阵A秩为2，$\lambda=6$为A的二重特征值，且$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$为$\lambda=6$的特征向量，求$A$。

2. 分别利用正交变换法、配方法、合同变换法将二次型$f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$化为标准型。

3. 化二次型$f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i<j}x_ix_j$为标准型。

4. $f=(t+1)x_1^2-2x_1x_2+(t+2)x_2^2-2x_2x_3+(t+1)x_3^2$，求$t$范围使$f$为正定二次型。

3.2 证明

1. 若a, b, c两两正交，求证：$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |a+b+c|^2$。

2. 证明下面各条等价：

(1)$\mathscr{U}$是正交变换　(2)$\mathscr{U}$保范数　(3)$\mathscr{U}$保标准正交基　(4)$\mathscr{U}$在任一标准正交基下对应一个正交方阵

3. 设V是n维欧氏空间，$v_0 \in V, v_0 \neq \theta$，求证：$V_0 := \{v|\langle v, v_0\rangle = 0\}$是$V$的子空间且$dim(V_0) = n-1$。

4. 设$z_1, z_2 \cdots z_n$是n维欧氏空间V的一组向量，求证：$z_1, z_2 \cdots z_n$线性无关当且仅当$|A| \neq 0$，其中$A = (\langle z_i, z_j\rangle)_{n\times n}$。

5. 设$\eta \in V$是一单位向量，定义线性变换$\mathscr{U} : V \to V$，$v \to \mathscr{U}(v) = v - 2\langle \eta, v\rangle\eta$，求证：(1)$\mathscr{U}$是正交变换。(2)$\mathscr{U}$在任一组标准正交基下的矩阵$U$有$|U| = -1$。

6. 设$\boldsymbol{a}$是单位列向量，记$A = I_n - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$，求证：$A$是正交对称阵。

7. 设A, B为同阶正交阵且$|A| = -|B|$，求证：$|A+B| = 0$。

8. 设A, B为n阶对称阵且A正定，求证：存在非退化阵P，使得P^TAP和P^TBP均为对角阵。

3.3 投影问题

1. 设W是V的线性子空间，对$v \in V$，记v_W为v在W上的正交投影，求证：对$\forall w \in W, |v - v_W| \leqslant |v - w|$　(v_W是v在W上的最佳逼近)。

反之，若$v_W \in W$满足上述性质，求证：$v - v_W \perp W$。

2. 设P是n阶投影矩阵，即P满足$P^T = P$和$P^2 = P$。求证：$P \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。进一步证明：$\exists U \in \mathscr{R}^{n\times r}$，使得$P = UU^T, U^TU = I_r$。