物联网导论

Introduction to Internet of Things

傅里叶分析

回忆信号调制解调的基本方法，调频，调幅，QAM，相位调制，QPSK等

在真实系统要实现这些调制方法，需要哪些技术?

信号如何解码

- 解码过程中的必备要素
  - 相位
  - 幅度

问题是?

- 分解成什么样子?
- 如何分解?
- 最重要的是：有什么用啊？！

信号如何来表示

- 首先来看最简单的一种信号
- 周期信号如何来表示?

周期信号表示

- 假设周期为T信号可以表示成如下的形式：
- $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\omega_0 t+b_k sin k\omega_0 t)$ 其中$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$
- 问题：如何求解a_k和b_k？(假设$f(t)$可积)

如何确定各项系数

- 取积分
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k cos k\omega_0 t + b_k sin k\omega_0 t)\right] dt$

$= \frac{\mathrm{T}a_0}{2}$

- $a_0 = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

如何确定各项系数

- 两边取积分
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cosk\omega_0tdt$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k cosk\omega_0 t + b_k sink\omega_0 t)\right] cosk\omega_0 tdt$$

$$= ?$$

sin函数和cos函数的积分

如何确定各项系数

- 两边取积分
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cosk\omega_0tdt$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_kcosk\omega_0t+b_ksink\omega_0t)\right]cosk\omega_0tdt$$

$$=\frac{\mathrm{T}a_k}{2}$$

- $a_k=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cosk\omega_0tdt$
- $b_k=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sink\omega_0tdt$

复数形式的傅里叶级数

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

思考

- 如何推导傅里叶级数的复数表示形式?

复数形式来表示信号

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k(\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t})-jb_k(\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t})\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[(a_k-jb_k)\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}+(a_k+jb_k)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k-jb_k)\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{-1}(a_{-k}+jb_{-k})\mathrm{e}^{jk\omega_0 t}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\mathrm{e}^{jk\omega_0 t},\ c_k=\frac{1}{2}(a_k-jb_k)$$

复数形式的傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cosk\omega_0 tdt - j\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sink\omega_0 tdt)\right] \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(cosk\omega_0 t - jsink\omega_0 t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt
\end{aligned}
$$

复数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{jk\omega_0 t}$$

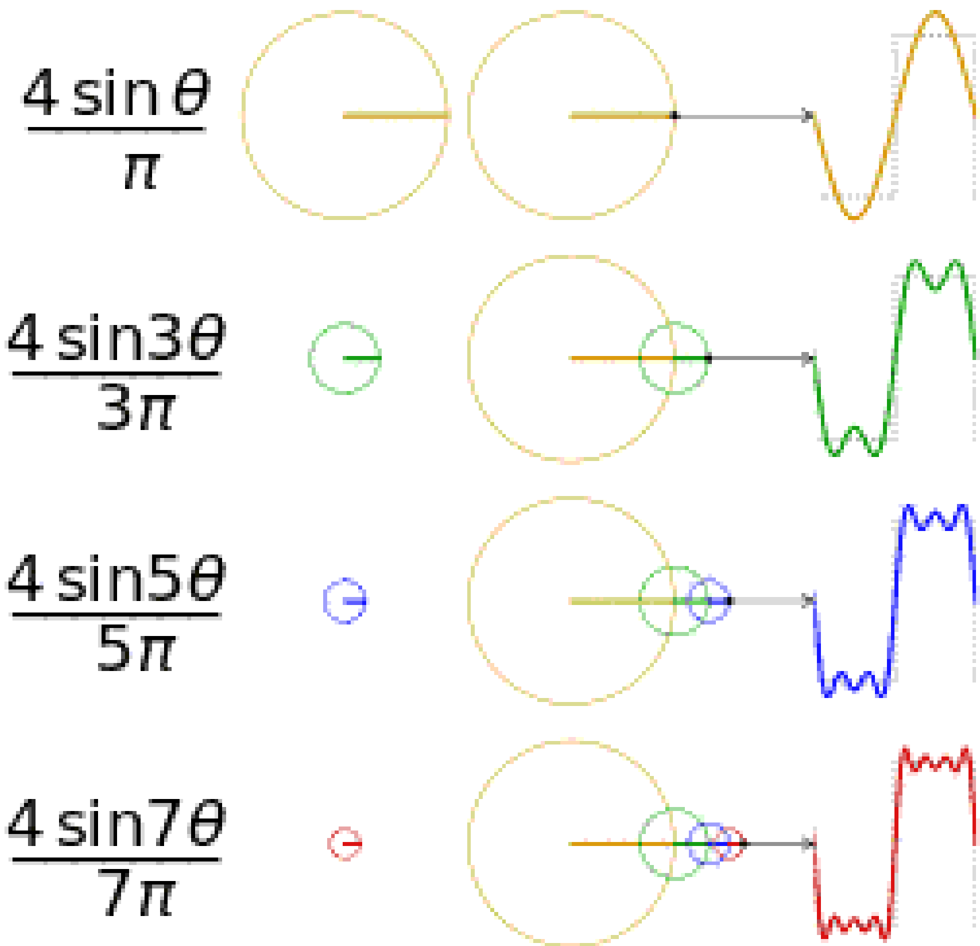
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t} dt$$

这个就是我们看到的傅里叶级数的写法了

推广

- 我们来看看常见的周期函数

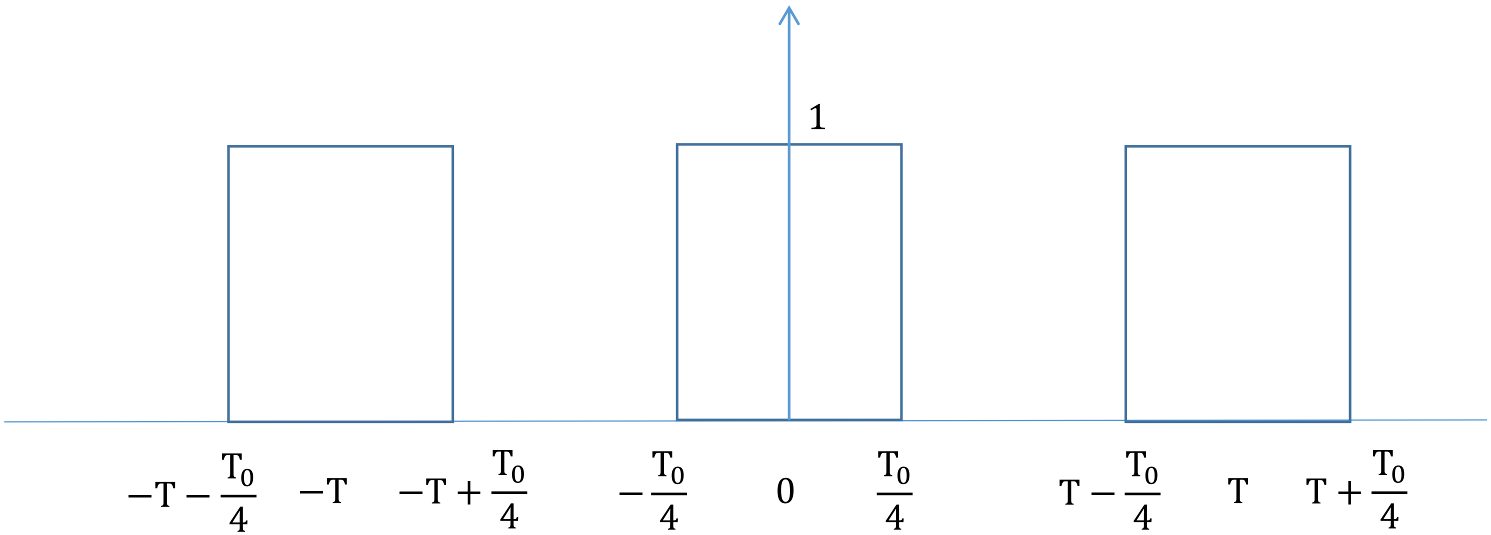
方波是如何形成的



from wikipedia

方波信号的傅里叶级数

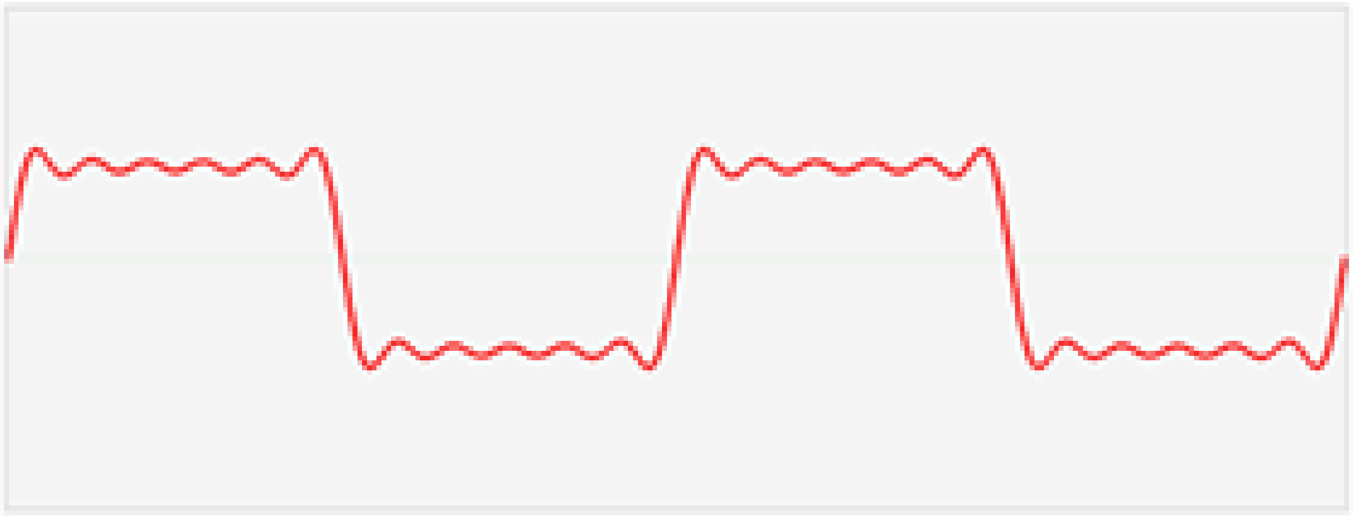
周期为T，宽度为$\frac{T_0}{2}$，高度为1的方波



$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

?

方波信号：时域和频域



思考

- 如果非周期数据怎么办?

傅里叶变换 Fourier Transform

傅里叶级数:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

傅里叶变换:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}dt$$

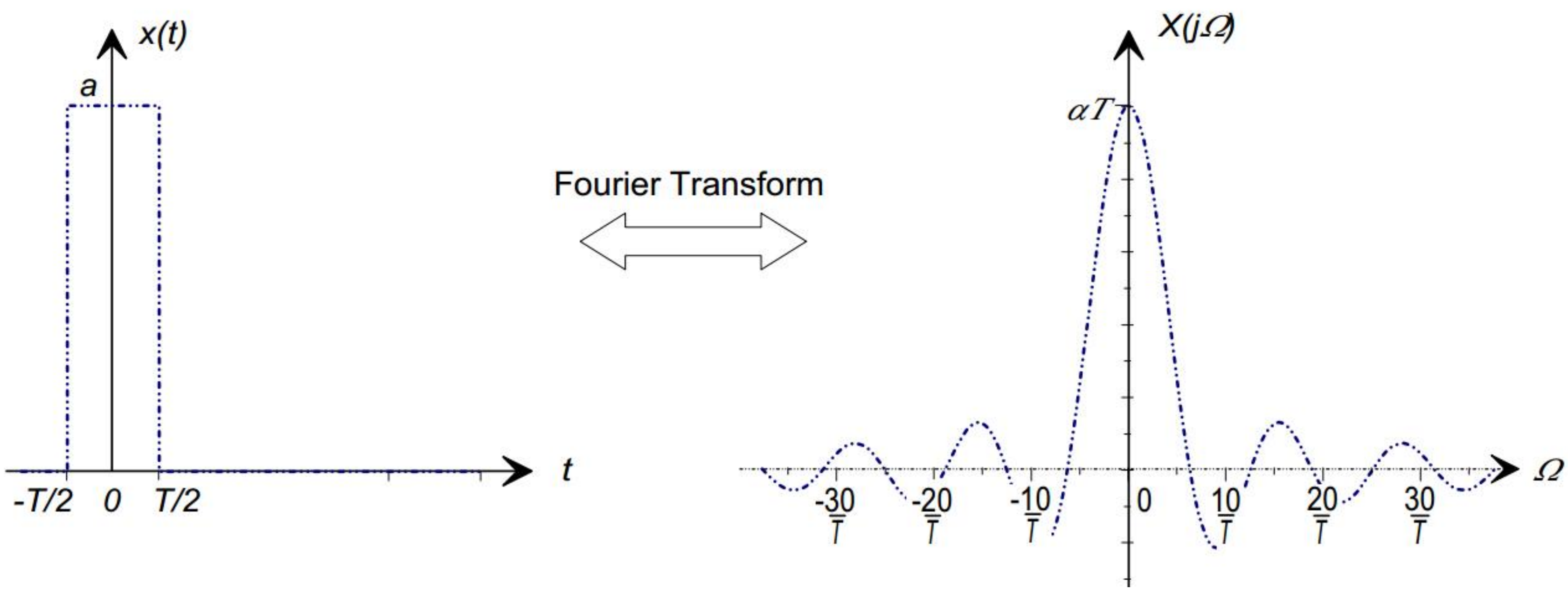
$$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

思考

- 傅里叶变换和傅里叶级数的关系
- Fourier Series v.s. Fourier Transform
- 周期信号 v.s. 非周期信号

单个方波的傅里叶变换

宽度为T，高度为a的单个方波



单个方波的傅里叶变换

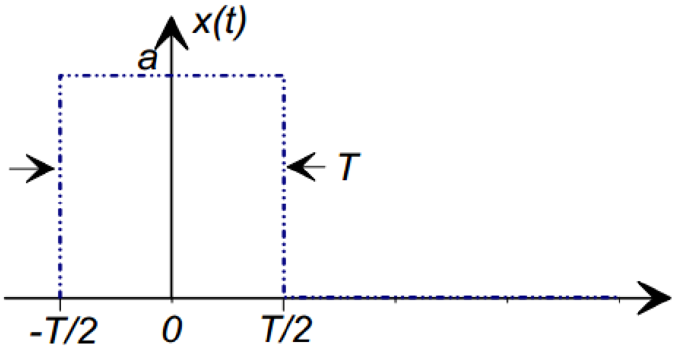
$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\Omega t}dt$$

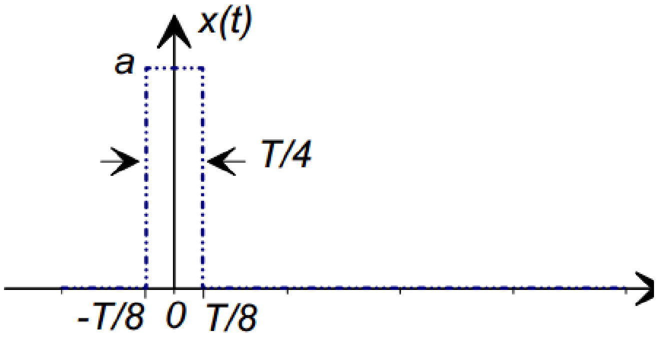
$$= a\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{-j\Omega t}dt$$

$$= \frac{a}{-j\Omega}(\mathrm{e}^{-j\Omega\frac{T}{2}} - \mathrm{e}^{j\Omega\frac{T}{2}})$$

$$= aT\frac{\sin(\frac{\Omega T}{2})}{\frac{\Omega T}{2}}$$

更多的变换





方波宽度再缩小呢?

思考

- 跟我们说的数据发送有什么关系?
- 到底这个有什么重要的?

思考

- 傅里叶级数和傅里叶变换有什么作用?
- 提供了频域和时域互相转化的关系

时域和频域关系

- 假设一个信号为：$s(t) = f(t)g(t)$
- 其中$f(t) = e^{j2\pi 5t} + e^{j2\pi 3t} + 1$

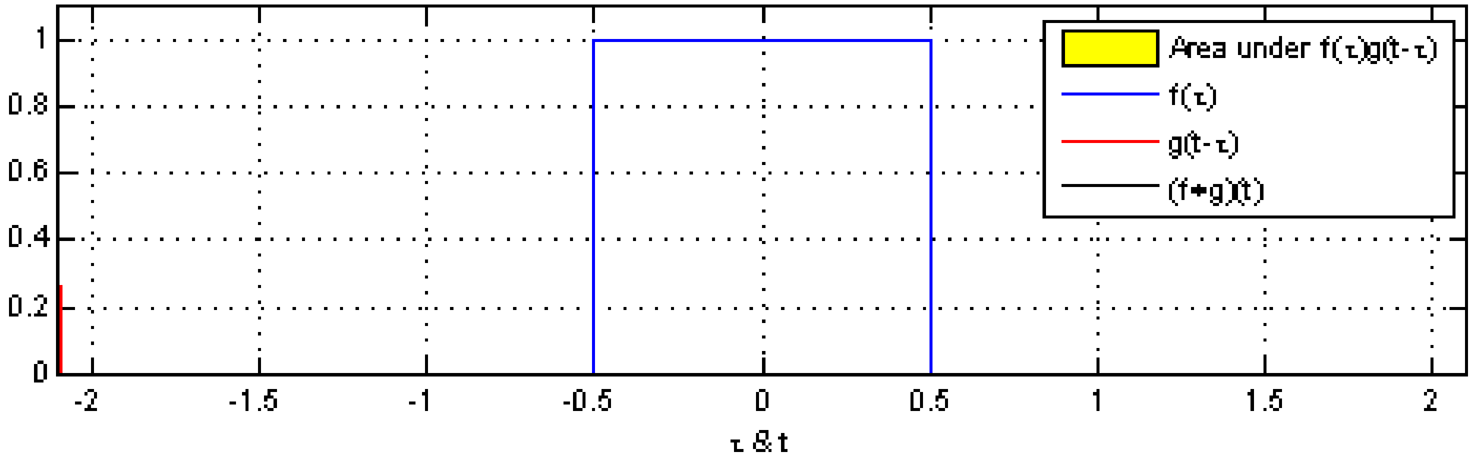
  $g(t) = e^{j2\pi 3t} + e^{j2\pi 2t} + 1$
- $F(f) = (5,3,0)$, $F(g) = (3,2,0)$
- 两个信号在时域上相乘，结果s(t)的频率是什么?

时域	频域
f(t)	F(f)
g(t)	F(g)
f(t)g(t)	F(f)*F(g)

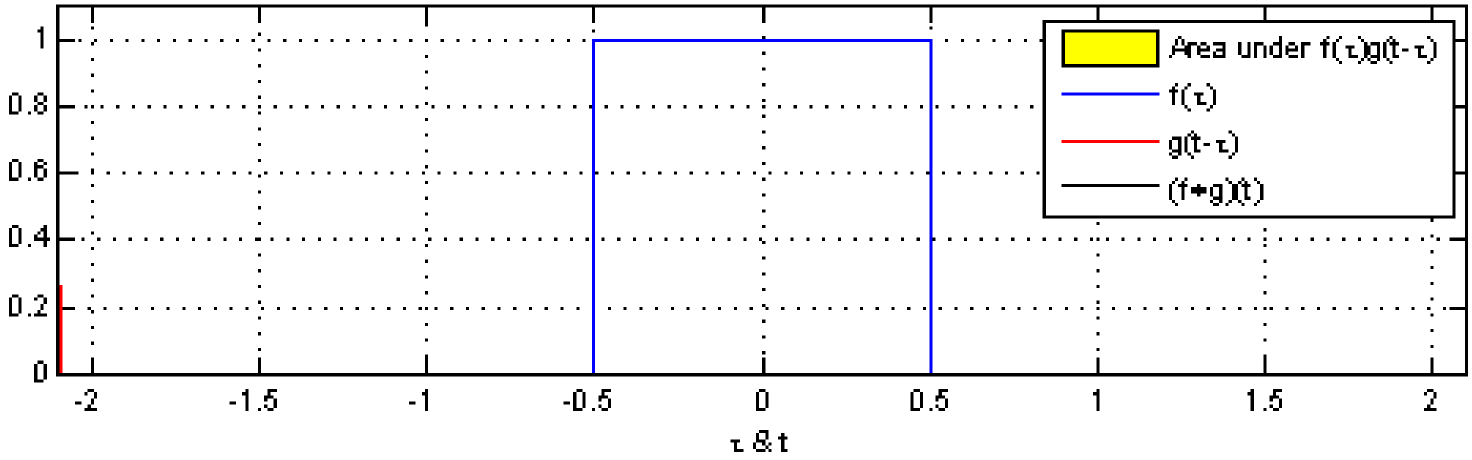
卷积

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$$

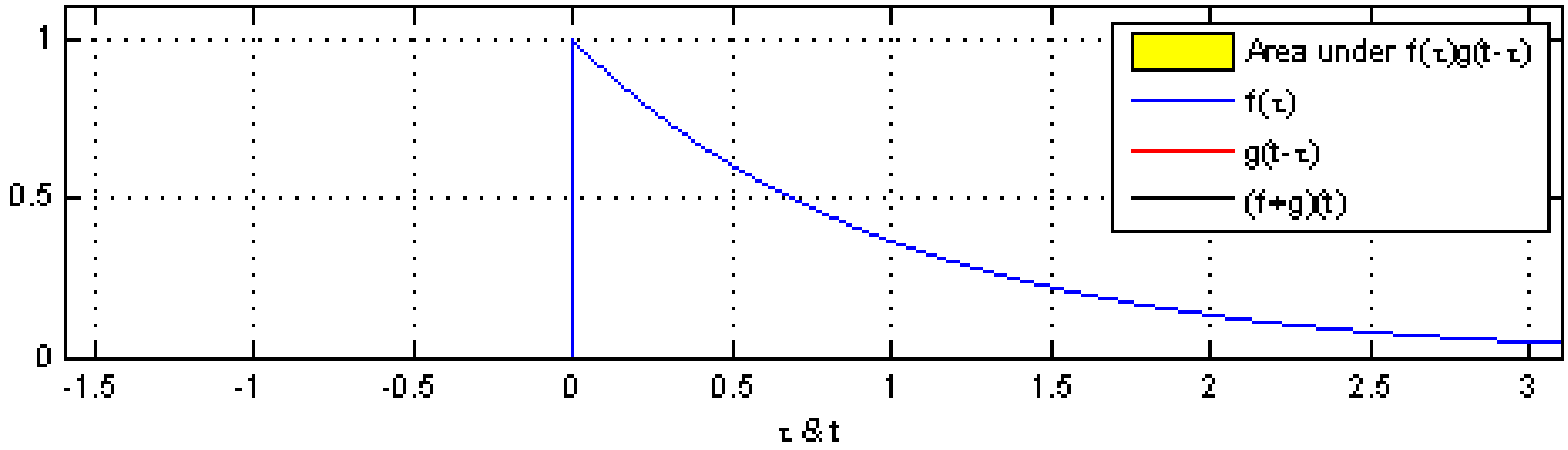
卷积



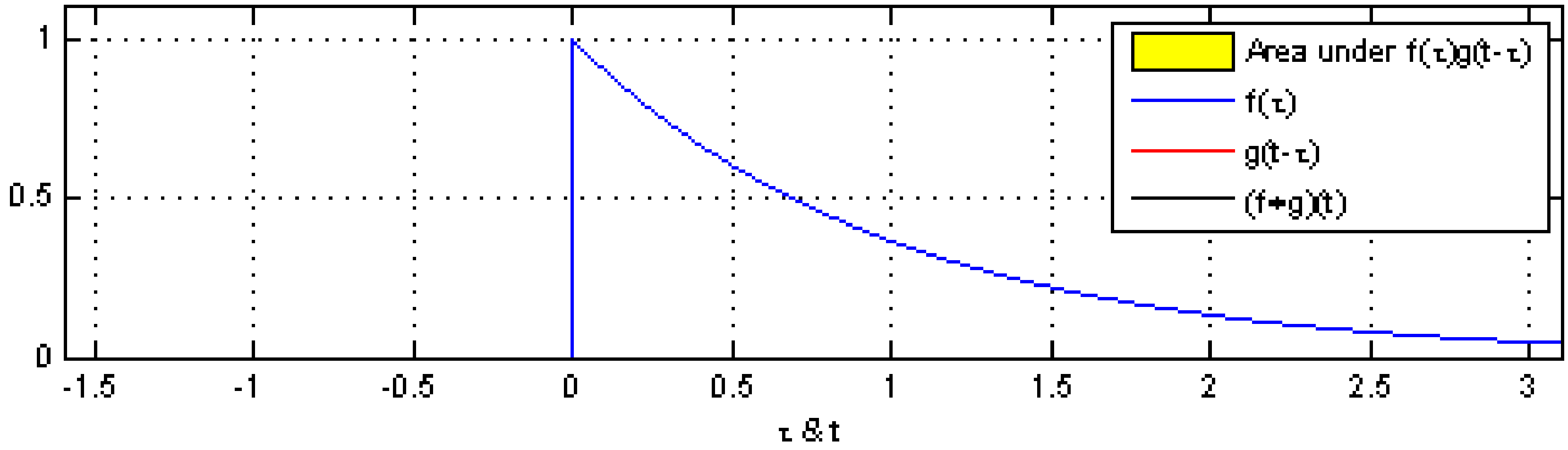
卷积



卷积



卷积



时域频域关系

- 时域卷积=频域乘积

$$F(f * g) = F(f)F(g)$$

- 时域乘积=频域卷积

$$F(fg) = F(f) * F(g)$$

请推导

$$F(f * g) = F(f)F(g)$$

傅里叶变换公式：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\mathrm{e}^{j\Omega t}dt$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\Omega t}dt$$

实际应用

- 傅里叶级数和傅里叶变换能不能用在实际系统中?
- 实际系统采样的数据都是离散的。
- 那么真实系统中如何求一个给定信号的频率?

离散傅里叶变换

- 我们从傅里叶级数开始来看

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt$$

- 如何从连续信号扩展到离散信号?

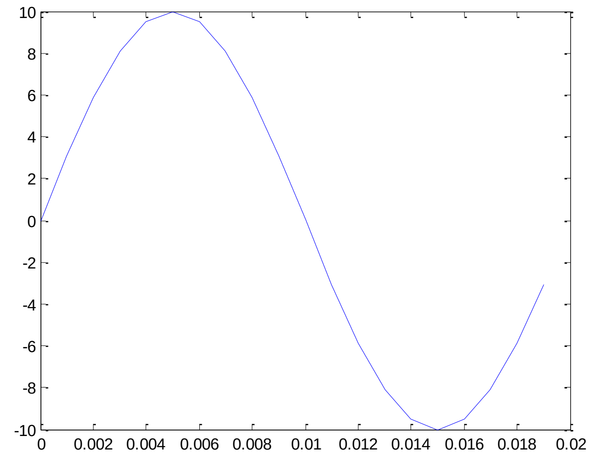
$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x[n]\mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi n}{N}}$$

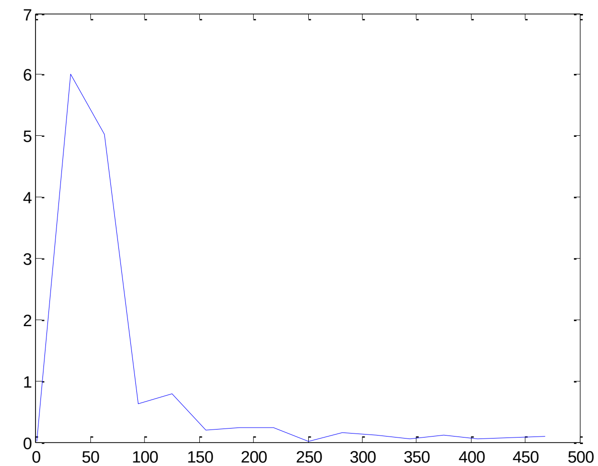
讲点轻松点的？

- Matlab

来看几个例子（动手试？）

```
%% test simple sin
close all;
Fs = 1000; % sampling frequency
T = 1/Fs;
signalF = 50;
L = Fs/signalF; % # of samples
t = (0:L-1)*T;

y = 10*sin(2*pi*signalF*t);
figure;
plot(t, y);
NFFT = 2^nextpow2(L);
ffty = fft(y, NFFT);
fx = (0:NFFT/2-1)*Fs/NFFT;
ffty = ffty/NFFT*2;
figure;
plot(fx, abs(ffty(1:NFFT/2)));
```

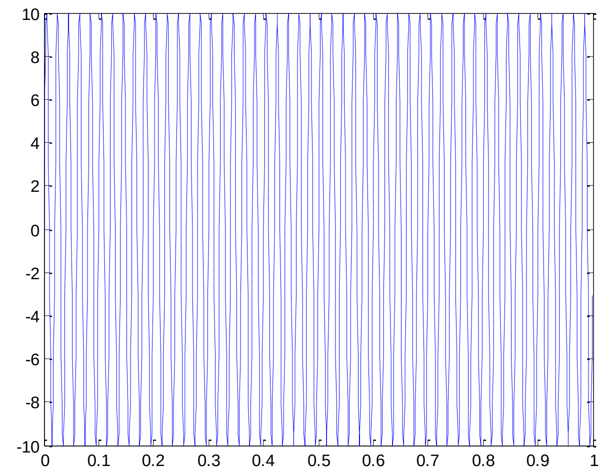


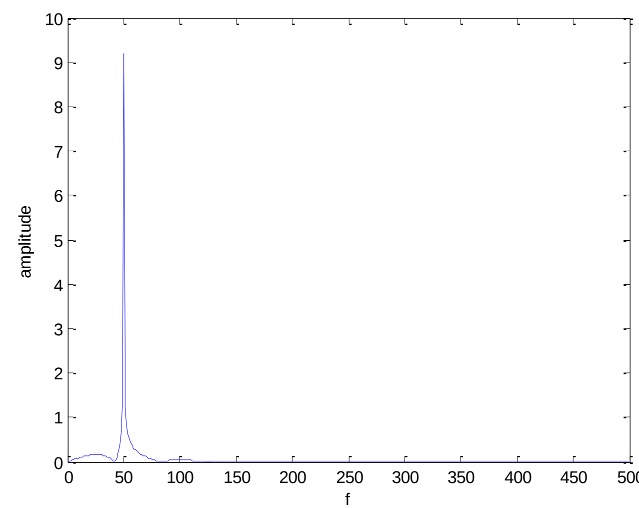


看起来似乎频域不太整齐，分辨率也不够

提高分辨率?

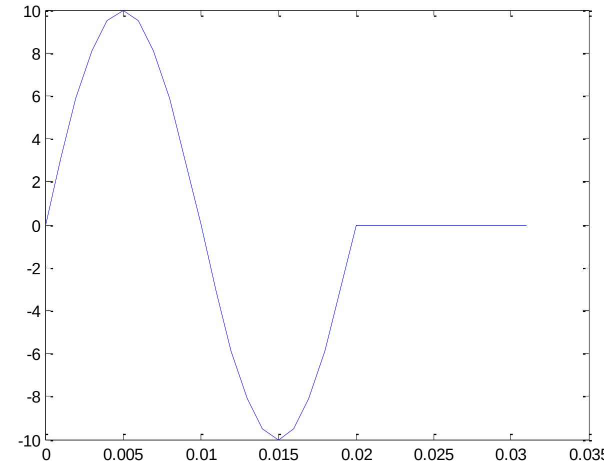
```
%% test simple sin
close all;
Fs = 1000; % sampling frequency
T = 1/Fs;
signalF = 50;
L = 1000; % # of samples
t = (0:L-1)*T;

y = 10*sin(2*pi*signalF*t);
figure;
xlabel('time');
ylabel('amplitude');
plot(t, y);
NFFT = 2^nextpow2(L);
ffty = fft(y, NFFT);
fx = (0:NFFT/2-1)*Fs/NFFT;
ffty = ffty/NFFT*2;
figure;
plot(fx, abs(ffty(1:NFFT/2)));
xlabel('f'); ylabel('amplitude');
```

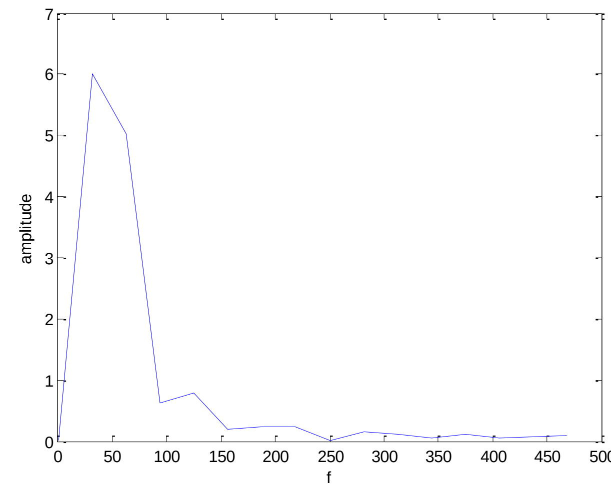




分辨率不高

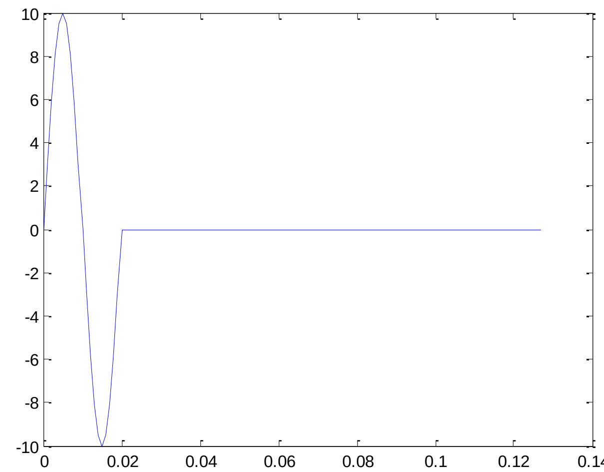
```
Fs = 1000; % sampling frequency
T = 1/Fs;
signalF = 50;
L = 20; % # of samples
t = (0:L-1)*T;
y = 10*sin(2*pi*signalF*t);
NFFT = 2^nextpow2(L);
NFFT = NFFT * 1;
y = [y zeros(1, NFFT - length(y))];
figure;
xlabel('time'); ylabel('amplitude');
t = [t (L-1)*T+(1:NFFT-length(t))*T];
plot(t, y);
ffty = fft(y, NFFT);
fx = (0:NFFT/2-1)*Fs/NFFT;
ffty = ffty/NFFT*2;
figure;
plot(fx, abs(ffty(1:NFFT/2)));
xlabel('f'); ylabel('amplitude');
```

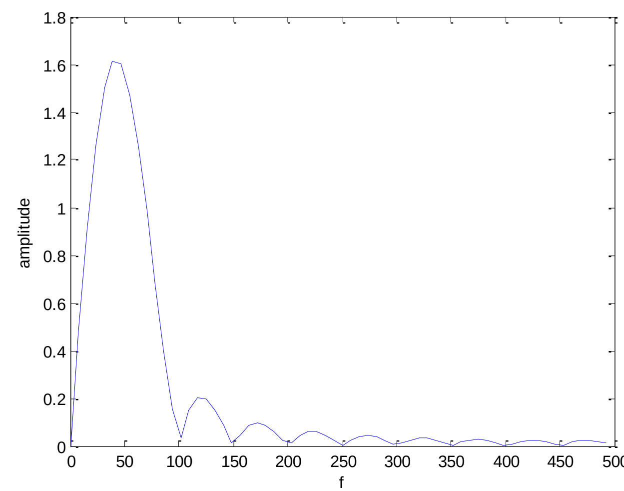




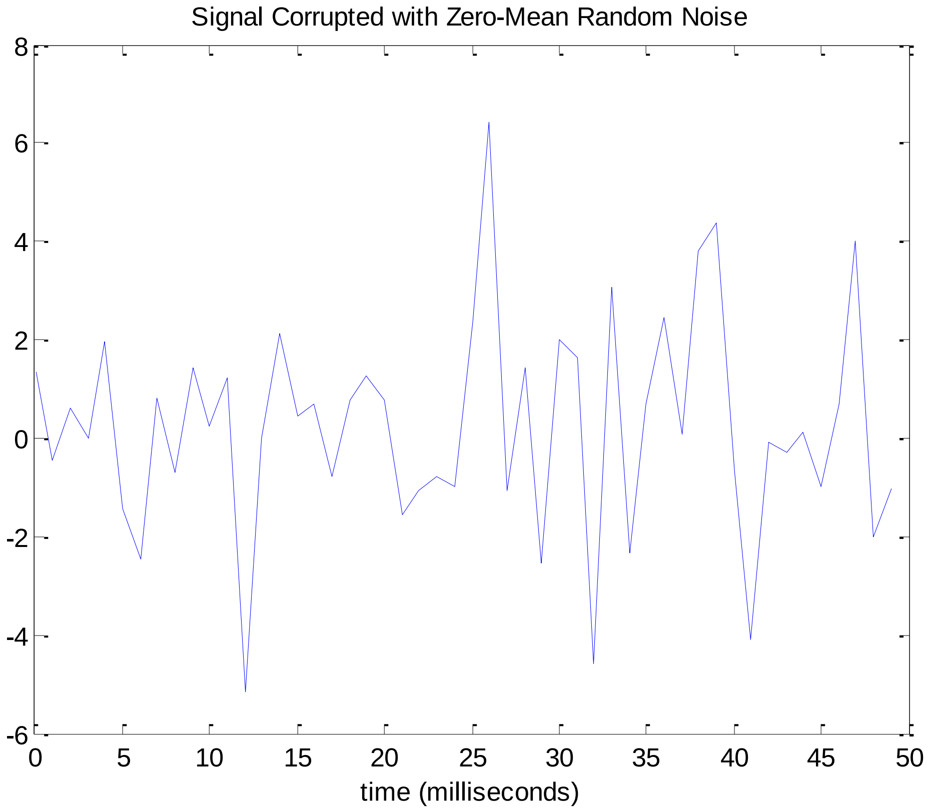
分辨度不高?

```
Fs = 1000; % sampling frequency
T = 1/Fs;
signalF = 50;
L = 20; % # of samples
t = (0:L-1)*T;
y = 10*sin(2*pi*signalF*t);
NFFT = 2^nextpow2(L);
NFFT = NFFT * 4;
y = [y zeros(1, NFFT - length(y))];
figure;
xlabel('time'); ylabel('amplitude');
t = [t (L-1)*T+(1:NFFT-length(t))*T];
plot(t, y);
ffty = fft(y, NFFT);
fx = (0:NFFT/2-1)*Fs/NFFT;
ffty = ffty/NFFT*2;
figure;
plot(fx, abs(ffty(1:NFFT/2)));
xlabel('f'); ylabel('amplitude');
```





小练习




```
x = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);
y = x + 2*randn(size(t));      % Sinusoids plus noise
```