

期末考试第一部分：编程实践项目

- 课程：跨入科学研究之门 (XDSY118019)
- 该部分试题将于第9次课结束后至第10次课开始前在Github发布，见<https://github.com/liuyxpp/XDSY118019-exam>
- 答案提交截止时间: 2025.11.27, 21:05
- 答案提交方式：以Pull Request的形式（请在标题备注学号、姓名）将所有相关材料提交到GitHub repo：<https://github.com/liuyxpp/XDSY118019-exam>

试题解答要求

1. 编写Python代码，代码运行后能给出正确结果。可以提交.py文件或者.ipynb文件。(50分)
2. Python代码应符合PEP 8规范。(10分)
3. Python代码中应包含合理注释。(20分)
4. 使用Markdown为所写代码功能编写使用文档（请提交渲染好的PDF文件），包括但不限于：
 - i. 问题描述及解答思路。(10分)
 - ii. 如何使用代码。(10分)
5. 答案提交方式是本次期末考试考察的一个部分，如果不能按时以Pull Request的形式提交考试答案，本次考试记0分。

Babylonian square root

To get the square root of y Babylonians used the algorithm

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{y}{x_n})$$

iteratively starting from some guessed value x_0 to converge to $x_n \rightarrow \sqrt{y}$ as $n \rightarrow \infty$. We define an error

$$\epsilon_n = |x_n - \sqrt{y}|$$

and stop the iteration when $\epsilon_n < \epsilon_0$.

请用Python编写代码以实现：

1. 编写函数 `babylonian(y, ε, x0=1)` 实现上述算法，返回近似解 x_n ，迭代步数 n 以及真实误差 ϵ_n 。
2. 利用matplotlib绘制以 n 为横轴， ϵ_n 为纵轴的图，据此分析 ϵ_n 和 n 之间的关系。（对于64位浮点数计算，给定误差可以选择如下值：
[1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7, 1e-8, 1e-9, 1e-10, 1e-11, 1e-12, 1e-13, 1e-14, 1e-15]）注意：需要处理误差到不了给定值的情况。

3. 尝试改变 x_0 的初始值。对每个 x_0 绘制一条误差收敛曲线，并将所有曲线绘制在一张图中。讨论 x_0 对收敛曲线的影响。
4. 编写另一个函数 `babylonian2(y, ε=1e-10, x0=1)` 实现上述算法，此时我们定义另一个误差 $ε_n = |x_{n+1} - x_n|$ ，当 $ε_n < ε$ 时，停止迭代，并返回数组 $\{x_n\}$ 及 $\{ε_n\}$ 。利用 `matplotlib` 绘制以 n 为横轴， $ε_n$ 为纵轴的图，据此分析 $ε_n$ 和 n 之间的关系。