

# Hénon 映射的分析与实现

## 问题描述

Hénon 映射是一个离散时间的动力系统，定义如下：

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}$$

给定初始点  $u_0 = (x_0, y_0)$ ，系统通过迭代生成一系列状态  $[u_0, u_1, u_2, \dots]$ 。我们需要完成以下内容：

- 实现计算 Hénon 映射轨迹的函数。
- 对参数  $a = 1.4, b = 0.3, u_0 = (0, 0)$  绘制轨迹图并分析结果。
- 生成轨道图：固定  $b = 0.3$ ，改变  $a$  的值，观察系统在不同  $a$  值下的表现。
- 在轨道图中识别周期性行为，找到相应的  $a$  值，并绘制其对应的轨迹。

## 解答思路

### 1. 计算 Hénon map 轨迹：

- 定义 `henon_map` 函数，接收参数 `a`、`b`、`u0` 和 `N`，利用迭代公式计算每次迭代的 `x` 和 `y` 值，并将这些点存储在一个列表中作为返回值。

### 2. 绘制轨迹图：

- 通过 `trajectory` 函数绘制轨迹图。利用 `henon_map` 函数计算出的点进行绘图。

### 3. 绘制轨道图：

- 通过 `orbit` 函数在固定  $b=0.3$  的情况下，对一系列  $a$  值进行迭代。对于每个  $a$  值记录迭代范围内所有点的 `x` 值，并用  $a$  值作为横坐标，`x` 值作为纵坐标绘制图像，意义为每个  $a$  值下迭代范围内 `x` 的可能取值。

### 4. 分析周期性轨道：

- 观察 `orbit` 函数的结果，发现  $a$  值在一定范围内，`x` 值的取值个数有限，说明出现了周期性循环，取  $a=1.01$  绘图，结果得到验证。

所有结果图均在 ipynb 文件中。

## 如何使用代码

### 1. 计算 Hénon map 轨迹： `henon_map(a, b, u0, N)` 例如：

```
tra = henon_map(a=1.4, b=0.3, u0=(0, 0), N=10000)
```

### 2. 绘制轨迹图：调用 `trajectory(a, b, u0, N)` 例如：

```
trajectory(a=1.4, b=0.3, u0=(0, 0), N=10000)
```

### 3. 绘制轨道图：调用 `orbit(b, a_range, u0, N)`：绘制 orbit diagram。例如：

```
orbit(b=0.3, a_range=(1.0, 1.4, 0.001), u0=(0, 0), N=1000)
```

### 4. 分析并验证周期性轨道：通过观察轨道图，提出猜想并用 `trajectory` 函数验证。