



期末作业代码使用文档

霍怡然 复旦大学物理学系

问题描述

Hénon map

In mathematics, the [Hénon map](#) is a discrete-time dynamical system. It is one of the most studied examples of dynamical systems that exhibit chaotic behavior. the Hénon map is given by

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

This map produces an orbit iteratively, i.e. starting from $u_0 = (x_0, y_0)$ one applies the above rule to get $u_1 = (x_1, y_1)$, and then applies the rule again on u_1 to get u_2 , and so on. The orbit consists of the sequence of states $[u_0, u_1, u_2, \dots]$.

现用Python编写代码以实现：

1. 计算Hénon map的函数：输入任意函数系数 a, b 、初始值 u_0 以及轨迹长度 N ，输出Hénon map的轨迹 $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_N]$ 。
2. 利用编写的函数计算经典Hénon map的轨迹，参数取值为 $a = 1.4, b = 0.3, u_0 = (0, 0)$ ，探索 N 的取值，求解得到的轨迹，并用绘制轨迹图（ x 为横坐标， y 为纵坐标）。
3. 利用编写的函数计算Hénon map的orbit digram，即固定 $b=0.3$ ，改变 a 后获得一系列Hénon map的轨迹，然后以 a 为横轴， x 为纵轴绘制orbit digram图。
4. 分析上述画出的orbit digram，找到Hénon map可以收敛到一条周期性轨道的 a 值，计算该 a 值对应的Hénon map的轨迹并绘图。

解答思路

1. 首先确定解决该问题需要用到Python中的 `numpy` 和 `matplotlib.pyplot`，所以导入上述模块。接着定义Hénon map的函数：`def henon_map(a, b, u0, N)`，在函数体的定义

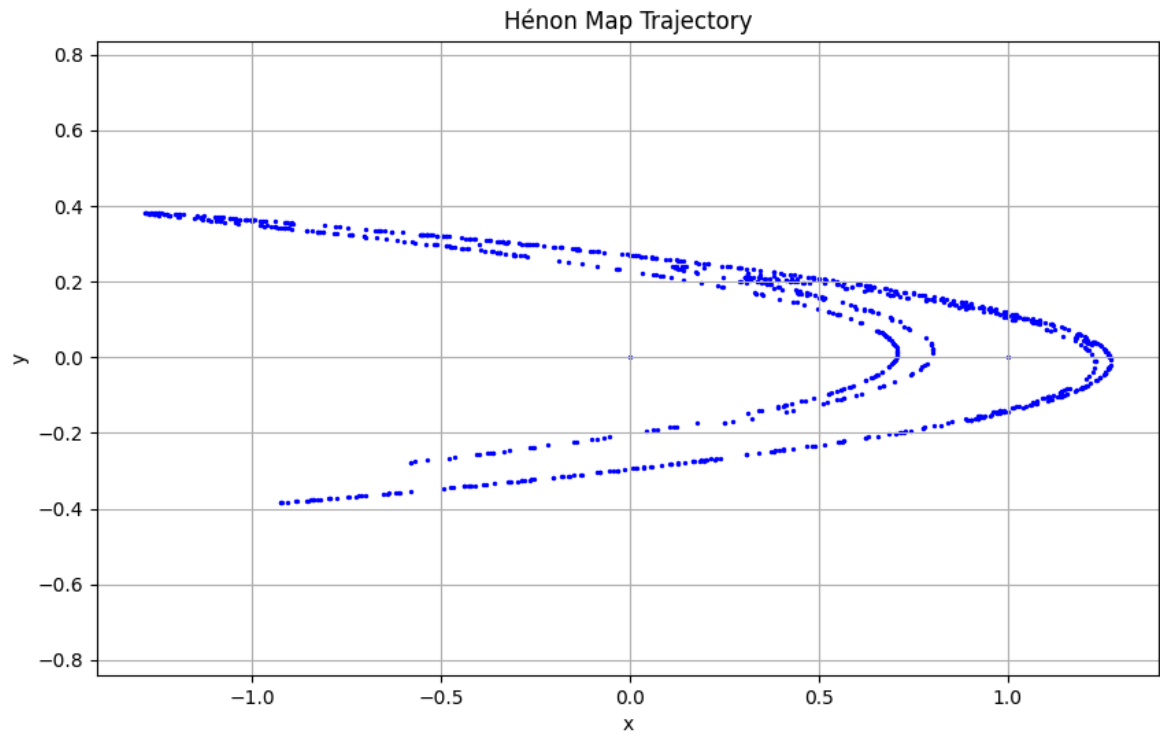
里定义Hénon map的参数和迭代关系式。

2. 赋值 $a = 1.4, b = 0.3, u_0 = (0, 0)$, 任意定义N的取值, 利用 `matplotlib.pyplot` 模块绘制轨迹散点图, 多次改变N值, 观察分析结果寻找规律。
3. 接着定义orbit digram函数: `def orbit_diagram(b, a_values, u0, N)`, 设置参数a的范围为 $[0.5, 1.42]$, 在其中均匀取100个点, 并定义函数返回绘制出的orbit digram图。在函数中用循环嵌套结构计算不同N值下不同a值对应的x, 并绘制x-a轨迹散点图。
4. 观察第3问的输出结果, 可以发现当a取不同值时, 系统可表现为混沌现象、阵发性现象, 或收敛至周期点, 甚至在求解第3问过程中发现某些a值对应的x会发散到无穷。观察x-a轨迹图, 发现 $a=1.0$ 处对应的x值很少, 判断该a值对应一个周期性系统, 即该a值下Hénon map可以收敛到一条周期性轨道。将 $a=1.0$ 带入第1问定义的Hénon map函数中, 采用与第2问相同的求解方法, 绘制出 $a = 1.0, b = 0.3, u_0 = (0, 0)$ 对应的Hénon map周期性轨迹图。

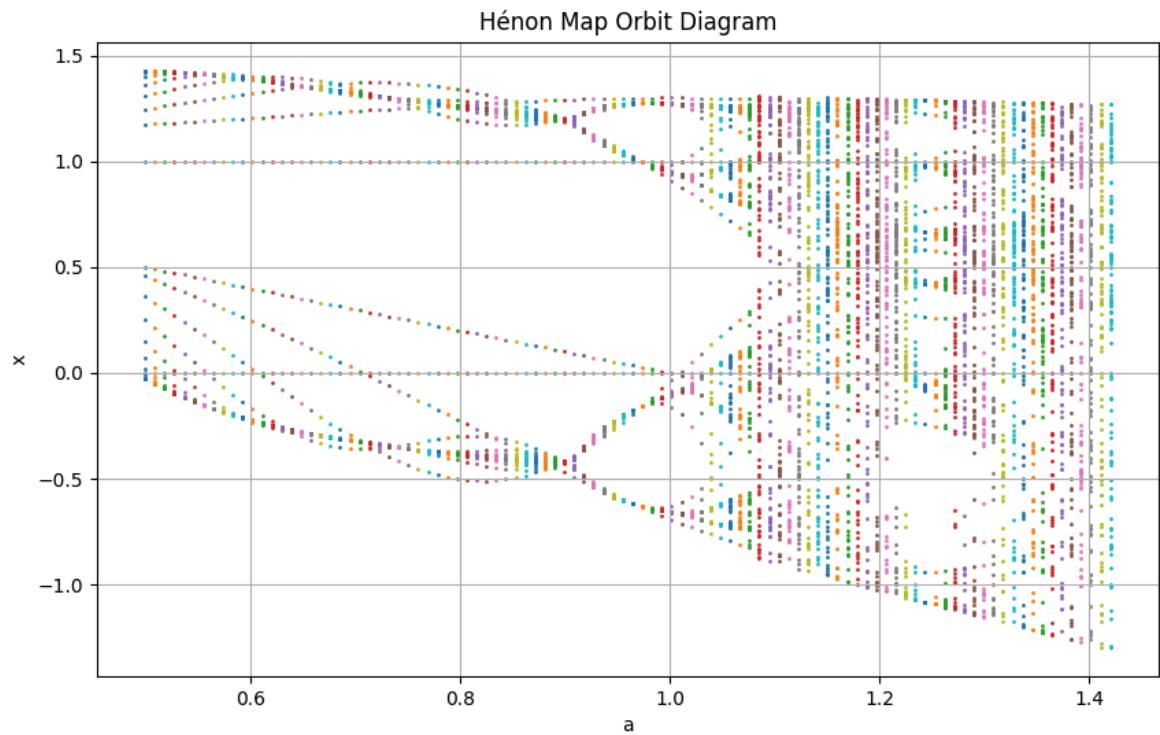
代码使用及运行结果示例

本作业使用Jupyter Notebook完成, 在使用代码时, 需要按顺序依次执行4个单元格中的代码, 否则将导致先运行后面的单元格时由于模块未导入或参数未设置而导致的运行失败。

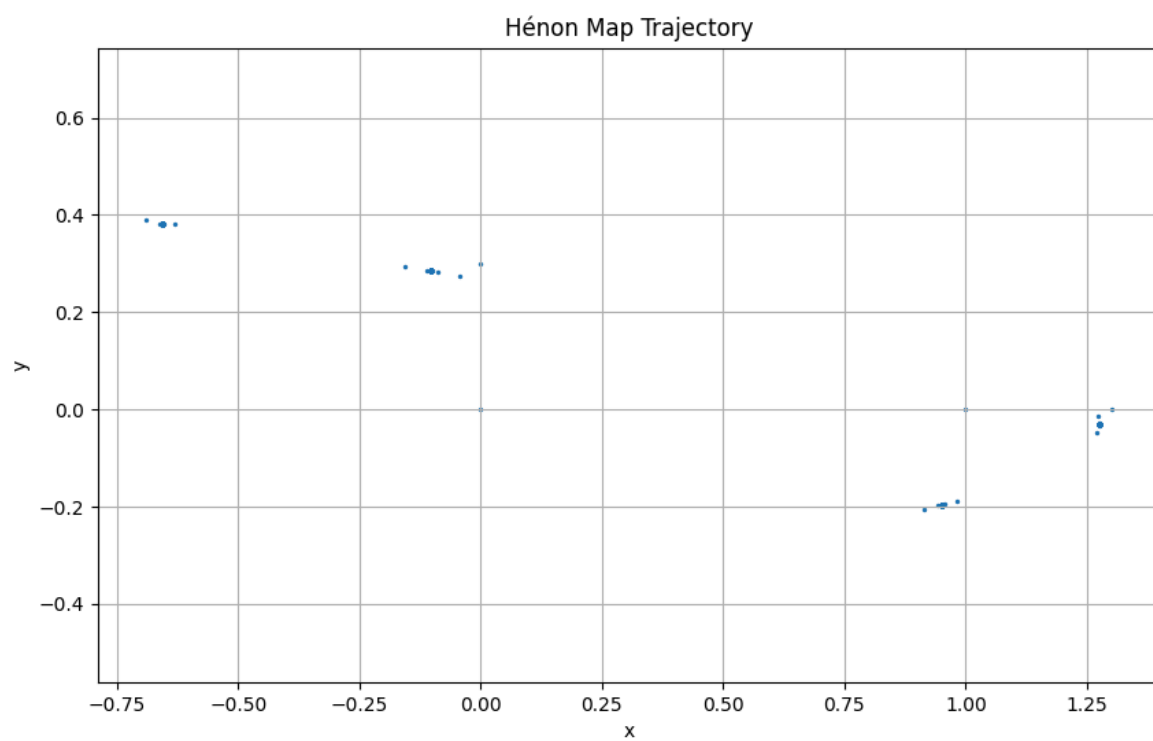
1. 第一个单元格运行结束后完成Hénon map函数的定义。
2. 第二个单元格中给参数赋值 $a = 1.4, b = 0.3, u_0 = (0, 0)$, 选取 $N=1000$ 后绘出的轨迹如图:



3. 第三个单元格运行结束后完成 x - a 轨迹图的定义，并绘制了自变量 a 从0.5到1.42均匀取值100个点， $N=100$ （如果数太大了会跑出来用时很长）的 x - a 轨迹散点图，如下：



4. 第四个单元格运行结束后将给出参数 $a = 1.0, b = 0.3, u_0 = (0, 0)$ 时Hénon map周期性轨迹散点图，取 $N=1000$ 绘出的轨迹图如下：



至此，完成了对整个问题的求解。