



最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

最优化概述

Liu Zheng

同济大学电信学院

April 19, 2014



概述

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

- 最优化理论和方法是近二十多年来发展十分迅速的一个数学分支
- 在数学上，最优化是一种求极值的方法
- 最优化已经广泛的渗透到工程、经济、电子技术等领域



概述

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

- 在实际生活中，人们做任何事情，不管是分析问题，还是进行决策，都要用一种标准衡量以下是否达到来最优。（比如基金人投资）
- 在各种科学问题、工程问题、生产管理、社会经济问题中，人们总是希望在有限的资源条件下，用尽可能小的代价，获得最大的收益。（比如保险）



几个概念

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

- 最优化是从所有可能方案中选择最合理的一种，以达到最优目标的学科
- 最优方案是达到最优目标的方案
- 最优化方法是搜寻最优方案的方法
- 最优化理论就是最优化方法的理论



经典极值问题

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

包括

- 无约束极值问题

$$\min_x f(x)$$

- 约束条件下的极值问题

$$\min_x f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

其中，极大值问题可以转换为极小值问题来进行求解。
如求： $\max_x f(x)$ 可以转换为： $\min_x -f(x)$



无约束极值问题

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

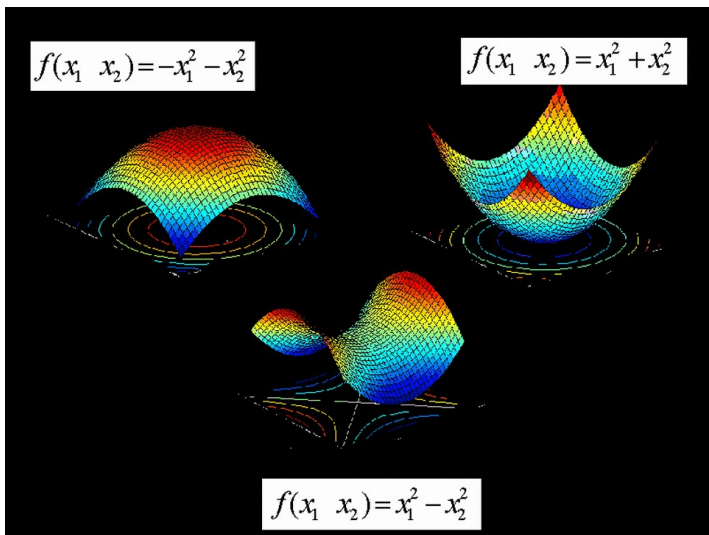
非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview





有约束最优化

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

最优化方法分类

- (1) **线性最优化**：目标函数和约束条件都是线性的则称为线性最优化。
非线性最优化：目标函数和约束条件如果含有非线性的，则称为非线性最优化。
- (2) **静态最优化**：如果可能的方案与时间无关，则是静态最优化问题。
动态最优化：如果可能的方案与时间有关，则是动态最优化问题



有约束最优化问题的数学建模

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

有约束最优化模型一般具有以下形式：

$$\begin{array}{ll} \min_x f(x) & \text{或} \quad \max_x f(x) \\ s.t. \quad \dots\dots\dots & s.t. \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

其中 $f(x)$ 为目标函数，省略号表示约束式子，可以是等式约束，也可以是不等式约束。



最优化方法主要内容

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

根据目标函数，约束条件的特点将最优化方法包含的主要内容大致如下划分：

- 线性规划
- 整数规划
- 非线性规划
- 智能优化方法
- 变分法与动态规划



线性规划与整数规划

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

在许多线性规划问题中,要求最优解必须取整数.例如 所求的解是机器的台数、人数车辆船只数等.如果所得的解 中决策变量为分数或小数则不符合实际问题的要求.

对于一个规划问题,如果要求全部决策变量都取整数,称为纯(或全)整数规划;如果仅要求部分决策变量取整数,称为混合整数规划问题.有的问题要求决策变量仅取0或1两个值,称为0-1规划问题.

整数规划简称为IP问题.这里主要讨论的是整数线性规划



一个简单的例子

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

要从甲城调出蔬菜2000吨，从乙城调出蔬菜2500吨，从丙地调出3000吨，分别供应A地2000吨，B地2300吨、C地1800吨、D地1400吨，已知每吨运费如下表：

调出单位 \ 供应单位	供应单位			
	A	B	C	D
甲	21	27	13	40
乙	45	51	37	20
丙	32	35	20	30

问：如何调拨才能使运费最省？



假设

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

- ①假设题目中所给运费已考虑各地间公里数；
- ②只考虑运量和运费，不考虑车辆调拨等其它相关因素
- ③不考虑车辆返空的费用（或：所给运费已包含车辆返空的费用）

变量说明：

x_{ij} :从第 i 城运往第 j 地的蔬菜数量 ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$)

a_{ij} :从第 i 城运往第 j 地的单位运费 ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$)

b_i :从第 i 城调出的蔬菜总量

c_j :第 j 地所需蔬菜总量



可以建立如下模型

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

$$\max z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^4 x_{ij} = b_i & (i = 1, 2, 3) \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = c_j & (j = 1, 2, 3, 4) \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \leq \min(b_i, c_j) \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$



整数规划

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

- 最优化问题中的所有变量均为整数时，这类问题称为整数规划问题。
- 如果线性规划中的所有变量均为整数时，称这类问题为线性整数规划问题。
- 整数规划可分为线性整数规划和非线性整数规划，以及混合整数规划等。
- 如果决策变量的取值要么为0，要么为1，则这样的规划问题称为0 - 1规划。



列子

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

某钢厂两个炼钢炉同时各用一种方法炼钢。第一种炼法每炉用 a 小时，第二种用 b 小时（包括清炉时间）。假定这两种炼法，每炉出钢都是 k 公斤，而炼 1 公斤钢的平均燃料费第一法为 m 元，第二法为 n 元。若要求在 c 小时内炼钢公斤数不少于 d ，试列出燃料费最省的两种方法的分配方案的数学模型。



解法

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

设用第一种炼法炼钢 x_1 炉，第二种炼钢 x_2 炉

$$\max z = k(mx + ny)$$

$$s.t. \begin{cases} ax_1 & \leq c \\ bx_2 & \leq c \\ k(x_1 + x_2) & \geq d \\ x_1, x_2 & \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$



单纯形法

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

单纯形法是优美国数学家G.B.Dantzig提出的，该方法的基本出发点就是在可行域（凸集）的定点中搜索最优点。搜索的过程是一个迭代的过程。首先找到一个基本可行解，判别它是否为最优解，如不是就找一个更好的基本可行解，再进行判别。如此迭代，直至找到最优解，或者判定该问题无界。



单纯形法

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

用单纯形法求解时，常将标准形式化为：

$$\begin{aligned} \min \quad & f = cx \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{m,n} \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \\ c &= (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$



多目标规划

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview



非线性规划问题的一般数学模型

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad \begin{aligned} g_i(x) &\leq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(x) &= 0, j = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

其中, $x \in E^n$, $f(x)$ 为目标函数, $g_i(x), h_j(x)$ 为约束函数, 这些函数中至少有一个是非线性函数。



多目标规划

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview



Overview

最优化概述

Liu Zheng

最优化方法概述

经典极值问题

无约束极值问题

有约束最优化

有约束最优化问题的
数学建模

最优化方法主要内容

线性规划与整数规划

整数规划

单纯形法

多目标规划

非线性规划

多目标规划

智能优化方法

变分法与动态规划

Overview