第一章 算法

第一节 能量优化

设顶点 i 的坐标为 p_i, 则顶点 i 和顶点 j 连成的边 e_{ij} 的长度为 $\|p_i - p_j\|$。我们的目标是优化能量使得最终的网格的边长等于目标边长。对于 e_{ij}，定义能量

$$E_{ij}=\|\|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2\|^2 \tag{1}$$

$$E=\sum_{e_{ij}} E_{ij}$$

其中 l_{ij} 是 e_{ij} 的目标边长。

我们使用牛顿法优化能量 E，因此需要一阶梯度和二阶偏导。设 $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})$ 计算可得，

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial p_{ik}} = 4(\|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2)(p_{ik} - p_{jk})$$

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}^2} = 8(p_{ik} - p_{jk})^2 + 4(\|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2)$$

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}\partial p_{jk}} = -8(p_{ik} - p_{jk})^2 - 4(\|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2)$$

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}\partial p_{il}} = 8(p_{ik} - p_{jk})(p_{il} - p_{jl})$$

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}\partial p_{jl}} = 8(p_{ik} - p_{jk})(p_{jl} - p_{il})$$

其中 k=1,2,3 且 k≠l。观察可得,

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}^2} = -\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}\partial p_{jk}}$$

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}\partial p_{il}} = -\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial p_{ik}\partial p_{jl}}$$。

设 H_{ij} 是 E_{ij} 的 hessian 矩阵，则 H_{ij} 是一个 6*6 的对称矩阵。由前面的观察可得 $H_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij} & -A_{ij} \\ -A_{ij} & A_{ij} \end{pmatrix}$, 其中 A 是一个 3*3 的对称矩阵，即 $A_{ij} =$

$$4\begin{pmatrix} \|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2 + 2(p_{i1} - p_{j1})^2 & -2(p_{i1} - p_{j1})(p_{i2} - p_{j2}) & -2(p_{i1} - p_{j1})(p_{i3} - p_{j3}) \\ -2(p_{i1} - p_{j1})(p_{i2} - p_{j2}) & \|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2 + 2(p_{i2} - p_{j2})^2 & -2(p_{i3} - p_{j3})(p_{i2} - p_{j2}) \\ -2(p_{i1} - p_{j1})(p_{i3} - p_{j3}) & -2(p_{i2} - p_{j2})(p_{i3} - p_{j3}) & \|p_i - p_j\|^2 - l_{ij}^2 + 2(p_{i3} - p_{j3})^2 \end{pmatrix}$$

令 $H=\sum_{e_{ij}} H_{ij}$。由于 H_{ij} 不一定是一个正定矩阵，所以 H 也不一定是一个正定矩阵。因此我们做适当的处理使得 H 是一个正定矩阵。如果直接对 H 进行谱分解后正定化，则由于 H 维数巨大，计算量巨大，因此不太合适。考虑到 $H=\sum_{e_{ij}} H_{ij}$，我们可以直接对 H_{ij} 进行正定化，这样计算量小且能保证 H 是一个正定矩阵。注

意到 $H_{ij}=\begin{pmatrix} A_{ij} & -A_{ij} \\ -A_{ij} & A_{ij} \end{pmatrix}$，我们可以利用这一特殊分布进一步减少计算。我们先证明一个定理。

定理 1：设 $H=\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$，则 H 是半正定矩阵的充分必要条件是 A 为半正定矩阵。

证明　充分性　若 A 是半正定矩阵,则对任意向量 $x\in R^n$ 有 $x^{\mathrm{T}}Ax\geqslant 0$。对任意向量 $y\in R^n$, 设 $y=(y_1,y_2)$，其中 $y_1,y_1\in R^n$。则有 $y^{\mathrm{T}}Hy=(y_1-y_2)^{\mathrm{T}}A(y_1-y_2)\geqslant 0$。因此 H 是半正定矩阵。

必要性　若 H 是半正定矩阵，则对任意向量 $y\in R^n$, 设 $y=(y_1,y_2)$，其中 $y_1,y_1\in R^n$ 有 $y^{\mathrm{T}}Hy\geqslant 0$。又因为 $y^{\mathrm{T}}Hy=(y_1-y_2)^{\mathrm{T}}A(y_1-y_2)$, 因此 $(y_1-y_2)^{\mathrm{T}}A(y_1-y_2)\geqslant 0$。令 $y_2=0$, 则有 $y_1^{\mathrm{T}}Ay_1\geqslant 0$。又因为 y_1 是任意的，因此 A 是半正定矩阵。　□

由上述定理可知我们只需令 A_{ij} 为半正定矩阵即可使得 H_{ij} 为半正定矩阵。注意到 $H_{ij}=4(\|p_i-p_j\|^2-l_{ij}^2)I+$
$8\begin{pmatrix} (p_{i1}-p_{j1})^2 & -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i2}-p_{j2}) & -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i3}-p_{j3}) \\ -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i2}-p_{j2}) & (p_{i2}-p_{j2})^2 & -(p_{i3}-p_{j3})(p_{i2}-p_{j2}) \\ -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i3}-p_{j3}) & -(p_{i2}-p_{j2})(p_{i3}-p_{j3}) & (p_{i3}-p_{j3})^2 \end{pmatrix}$。令
$P_{ij}=\begin{pmatrix} (p_{i1}-p_{j1})^2 & -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i2}-p_{j2}) & -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i3}-p_{j3}) \\ -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i2}-p_{j2}) & (p_{i2}-p_{j2})^2 & -(p_{i3}-p_{j3})(p_{i2}-p_{j2}) \\ -(p_{i1}-p_{j1})(p_{i3}-p_{j3}) & -(p_{i2}-p_{j2})(p_{i3}-p_{j3}) & (p_{i3}-p_{j3})^2 \end{pmatrix}$,则易得 P_{ij} 的特征值分别为 0,0, 和 $(p_{i1}-p_{j1})^2+(p_{i2}-p_{j2})^2+(p_{i3}-p_{j3})^2$。因此 H_{ij} 的特征值为 $4(\|p_i-p_j\|^2-l_{ij}^2), 4(\|p_i-p_j\|^2-l_{ij}^2), 12(p_{i1}-p_{j1})^2+12(p_{i2}-p_{j2})^2+12(p_{i3}-p_{j3})^2-4l_{ij}^2$。设前面三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 其对应的单位特征向量为 x_1,x_2,x_3, 则由于 P_{ij} 是对称矩阵, 因此 $P_{ij}=\lambda_1x_1x_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2x_2x_2^{\mathrm{T}}+\lambda_3x_3x_3^{\mathrm{T}}$。由于 P_{ij} 是一个半正定矩阵等价于为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0$, 因此我们只需让 $\widetilde{\lambda_k}=max(\lambda_k,0)$,k=1,2,3，然后令 $\widetilde{P_{ij}}=\widetilde{\lambda}_1x_1x_1^{\mathrm{T}}+\widetilde{\lambda}_2x_2x_2^{\mathrm{T}}+\widetilde{\lambda}_3x_3x_3^{\mathrm{T}}$。则此时 $\widetilde{P_{ij}}$ 为半正定矩阵。由于 $x_1x_1^{\mathrm{T}}+x_2x_2^{\mathrm{T}}+x_3x_3^{\mathrm{T}}=I$ 且 $x_1=x_2$, 因此 $P_{ij}=\widetilde{\lambda}_1(I-x_3x_3^{\mathrm{T}})+\widetilde{\lambda}_3x_3x_3^{\mathrm{T}}$。而且计算可得 $x3=\frac{((p_{i1}-p_{j1}),(p_{i2}-p_{j2}),(p_{i3}-p_{j3}))}{\sqrt{(p_{i1}-p_{j1})^2+(p_{i2}-p_{j2})^2+(p_{i3}-p_{j3})^2}}$，将其代入上式即可得到 $\widetilde{P_{ij}}$。接下来我们用 $\widetilde{P_{ij}}$ 替代 P_{ij} 则有 H_{ij} 为半正定矩阵，进而有 H 为半正定矩阵。由于 H 为半正定矩阵，并不能保证是一个正定矩阵，尽管在绝大多数情况下是一个正定矩阵。因此我们可以令 $\widetilde{H}=H+\epsilon I$, 其中 ϵ 为一很小的数，比如 $\epsilon=10^{-15}$。

将 H 近似为正定矩阵后我们就得到了下降方向 $d=-H^{-1}\Delta E$。令 $E=$

$f(x+\alpha d)$, 其中 x 是当前点的坐标，α 是步长。由于 $f(x+\alpha d)$ 是一个关于 α 的四次函数，因此我们可以对 $f(x+\alpha d)$ 求导，并令 α 为满足 $f(x+\alpha d)'=0$ 的最小正实数。由于 $f(x+\alpha d)'$ 在 0 处的导数小于 0 且在 α 足够大时有 $f(x+\alpha d)'$>0，因此这样的 α 总是存在的。

第二节　插值

我们接下来要对源网格和目标网格的对应边长的平方进行线性插值以得到连续的变换。即对时间 $t \in (0,1), l_t = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, 其中 l_1, l_2 分别为源网格和目标网格的边长。为了保证得到的插值结果的连续性，我们在之前的能量 E 的基础上加一项正则项，即令

$\widetilde{E} = E + w\|P_{t_i} - P_{t_{i-1}}\|^2$,

其中 t_i 为第 i 帧对应的时间 t,P_t 为 t 时刻所有点的坐标，w 为权重。我们取 $w = 1e^{-3} l_{avg}$，其中 l_{avg} 为网格的平均边长。

由于我们需要一个用于初始化的网格，于是我们选择 Bounded Distortion Tetrahedral Metric Interpolation 中的结果作为初始化网格。

第二章　实验结果

第三章　局限性

该方法的局限性主要有两个。第一个是由于正则项包含上一帧的信息，因此必须按顺序一帧帧的计算。并且虽然正则项能让结果更加连续，但是也会使得最终的能量 E 比不加正则项更大。第二个是对于两个平均曲率为 0 的网格间，中间插值的结果无法保证平均曲率为 0 也为 0，出现不光滑的结果。虽然正则项可以很大程度上的减轻该情况的影响，但是仍不能完全消除。