Projected entangled-pair states

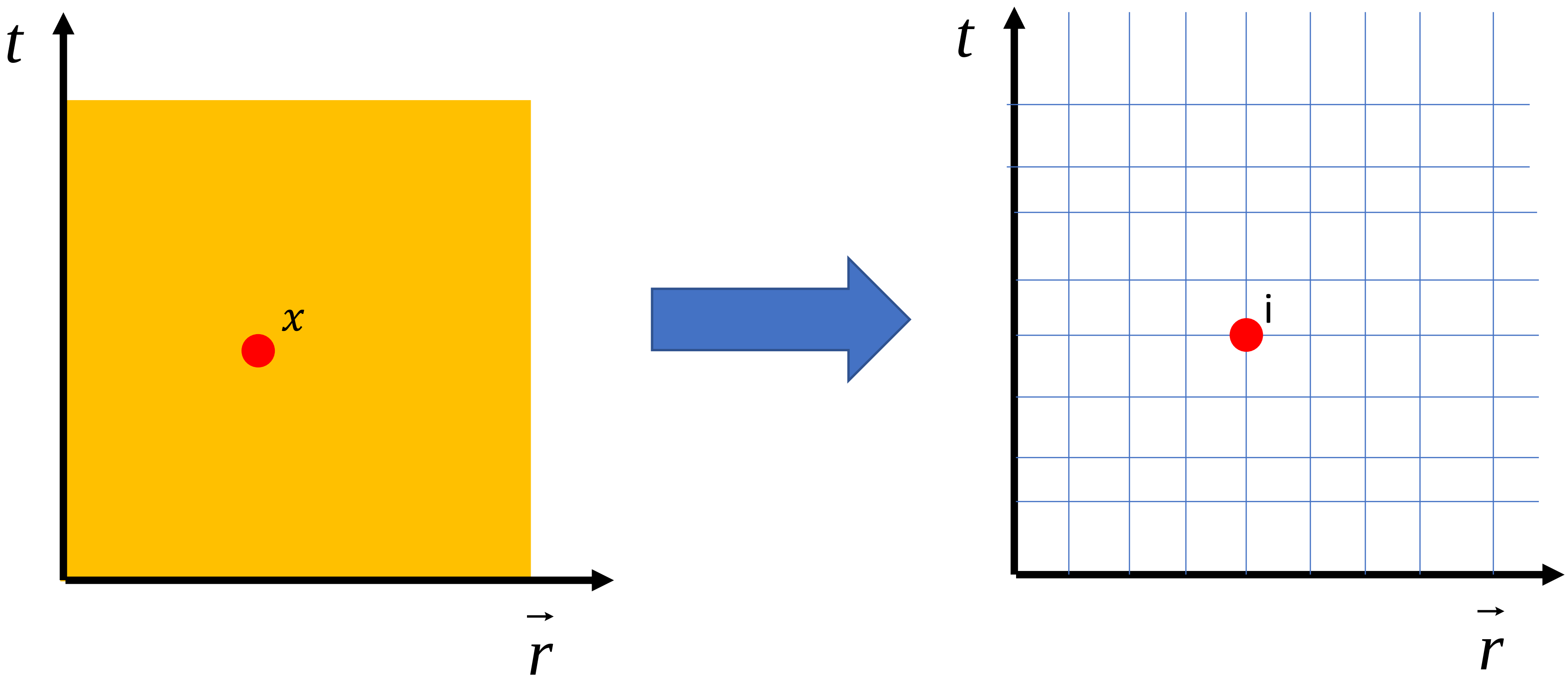
In addition to MPS, there is a second type of tensor network representation for quantum many-body states. the so-called projected entangled-pair states.

This kind of state represent the natural generalization of the MPS ansatz to higher spatial dimensions. Like their 1D counterparts, they satisfy the area law, rendering them ideal tools for the simulation of low-energy states in two-dimensional many-body systems on arbitrary lattice geometries.

Lattice quantum field theory

As we try to show, the functional method is not well-defined. Now we try to discrete the theory.

Suppose the 4-d time-space is flat, i.e. the manifold is just Euclidean.



$$\varphi(\mathrm{x}) \to \varphi_i$$

Now we consider nonlinear sigma model:

$$Z=\int D[g(\mathrm{x})]\exp\{-\int\int d\vec{r}d\tau\frac{1}{2\lambda}[\mathrm{g}^{-1}\partial\mathrm{g}]^2\}\rightarrow Z=\sum_{\{\mathrm{g}_i\}}\exp\{-\sum\frac{1}{2\lambda}[\mathrm{g}_i^{-1}\mathrm{g}_{i-1}]^2\}$$

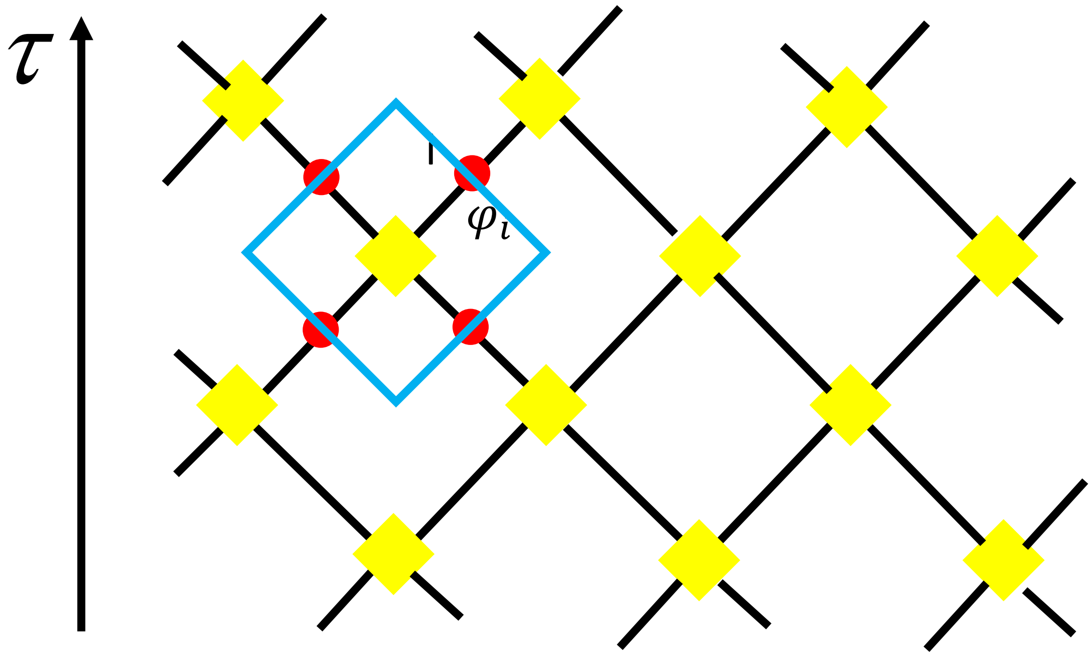
Always remember that场的定义就是在某一个点有一个复数的值。

Reporting of Xiaogang Wen:
https://www.bilibili.com/video/av40361315?from=search&seid=12452779486001661940

From functional quantum field theory to tensor network

$$\int D[\varphi(x)]\exp[-\int d\vec{r}d\tau L(\varphi)] = \sum_{\{\alpha_i\}}\prod T_{\alpha_i\alpha_j\alpha_l\alpha_l} \equiv tTr\otimes T, \mathrm{T} \sim \exp[-\int dxL(\varphi)]$$

Always remember that $\int D[\varphi(x)] = \int\int\ldots\int d\varphi_1 d\varphi_2\ldots$



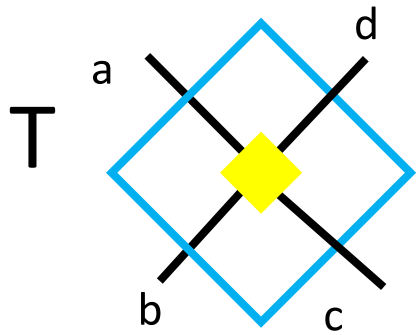
第一步：把时空离散化，红点代表时空点；

第二步：场是活在时空点上的，也就是说每个时空点场有一个数值；

第三步：考虑拉氏量在一个小方块上的积分 $\exp[-\int dxL(\varphi)]$ ，因为时空已经被离散化了，所以这个积分只和四个时空点场的数□值有关，即一个方块是一个四阶张量：

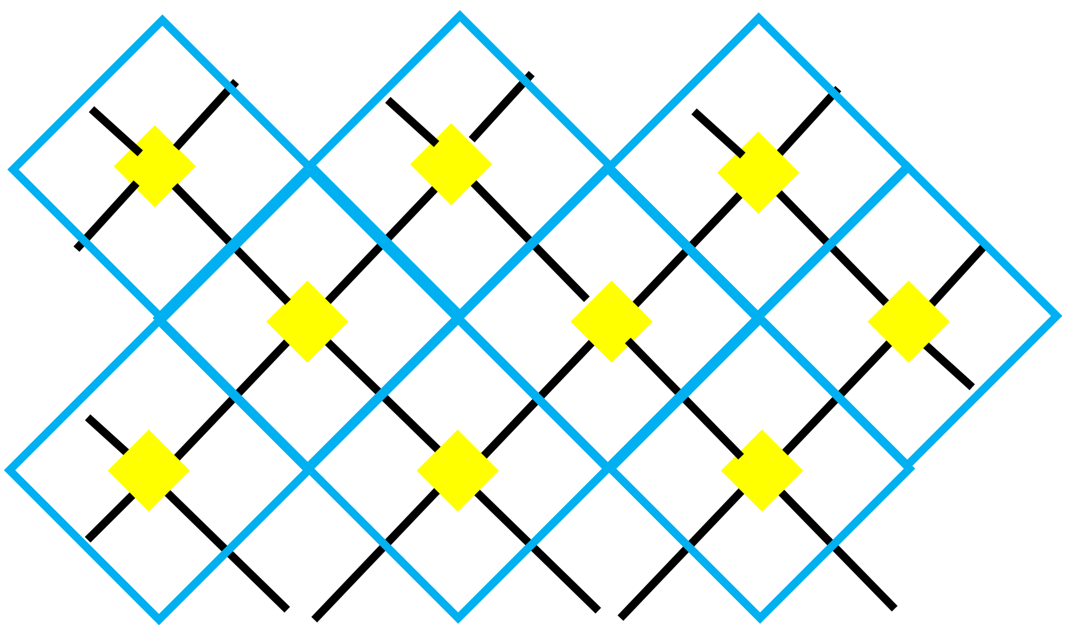
$$\exp[-\int_{\square} dxL(\varphi)] = \mathrm{T}_{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}$$

第四步：把场的值也离散化，也就是说开始场的值可能是一个连续值，但是这里我们进一步假设场的值也是离散的，所以我们能够用分立标记a, b, c, d

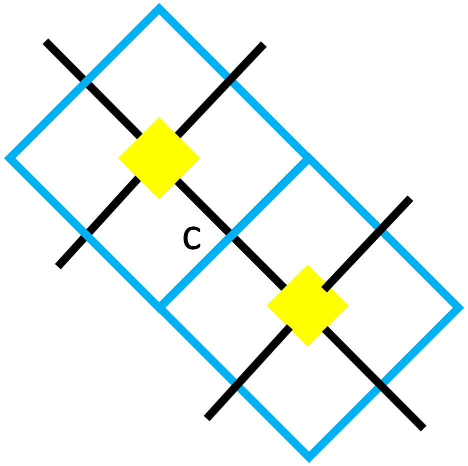


此时这个张量是这样：T_{abcd}

第五步：把一个一个的张量连接起来，形成张量网络$\prod T_{\alpha_i \alpha_j \alpha_l \alpha_l}$，同时我们要对所有的场构型进行求和，所以我们有$\sum_{\{\alpha_i\}} \prod T_{\alpha_i \alpha_j \alpha_l \alpha_l}$



第六步：因为相邻的张量公用一个腿，并且需要对该腿的值进行求和，当对所有的腿进行求和之后，我们会得到一个Tr，我们有



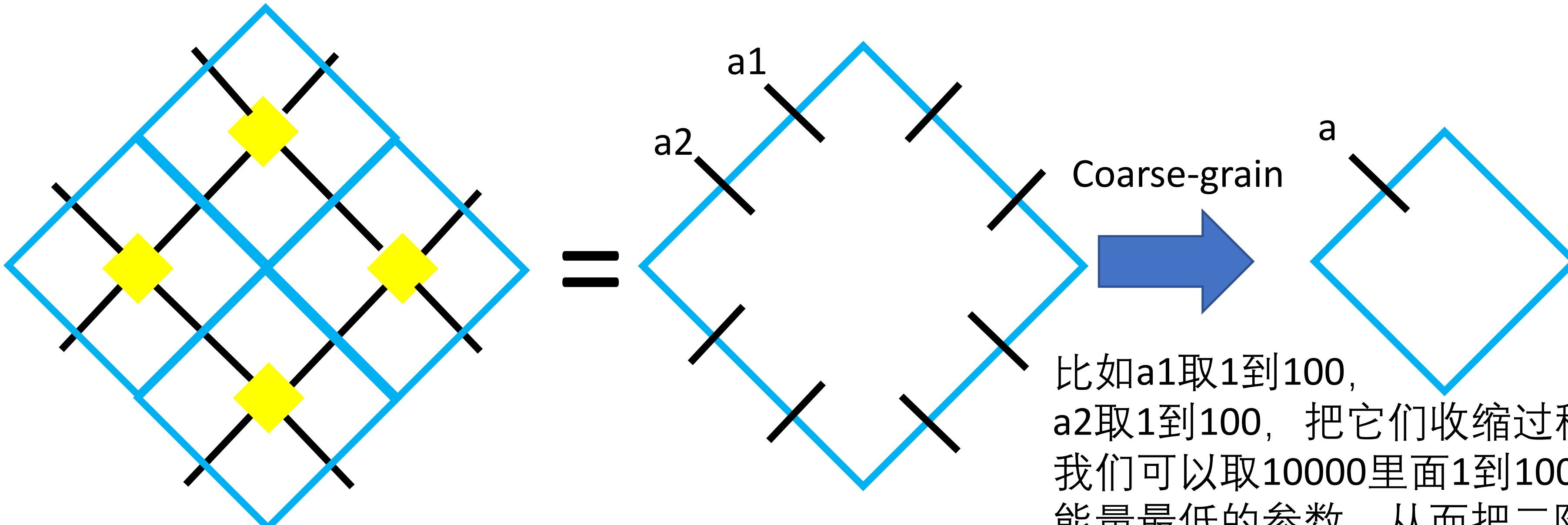
$$tTr \otimes T, \mathrm{T} \sim \exp[-\int dxL(\varphi)]$$

这里小结：张量网络只是将functional method重新写了一下，本质上是将无穷积分化成有限的积分，从而使问题可解。

张量网络的取法，也就是时空点的划分，是一个系统问题，需要使用经验对其进行优化，其主要依据计算能力而定的。假设场的数值阶段到100，即可以取1到100里面的任意一个值，那么一个方块所代表的张量的维度是一亿，现代的计算机内存可能还不够存下这么大的张量。所以一个稍好一点的张量是三阶的，对应的维度是一百万。

Tensor network and renormalization group

张量网络因为可以不断粗粒化(coarse-grain)，所以天然具有重整化的结构。
当然这个结构也可以直接通过收缩张量的维度看出来，也就是说，我们总是可以重新组合张量网络。如果收缩过程中，我们能够通过扔掉高阶项使张量网络越来越简单，那么这就是一个重整化的过程。



比如a1取1到100,
a2取1到100，把它们收缩过程中
我们可以取10000里面1到100个
能量最低的参数，从而把二阶
缩成一阶。

如果二阶张量代表两个Hilbert
空间，那么这样的收缩
代表了两个真实粒子的自由
度映射到一个赝粒子的自由度上。

Where is the running coupling constant?

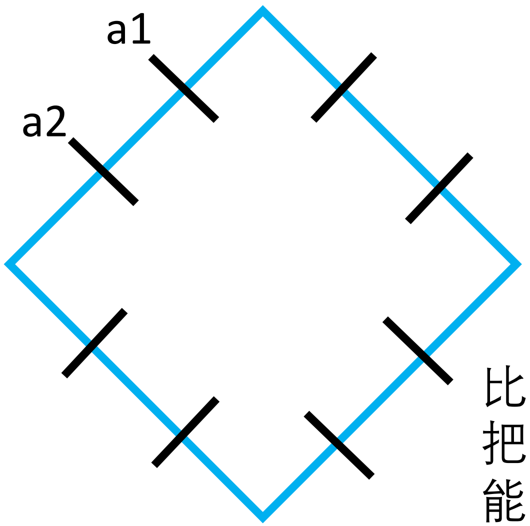
在张量网络当中，张量的每一个参数都是耦合系数。如果一个张量有四条腿，每条腿可以取1到100，那么这个张量里面的耦合系数就有一亿个。这么庞大的耦合系数几乎遍历了所有可能！

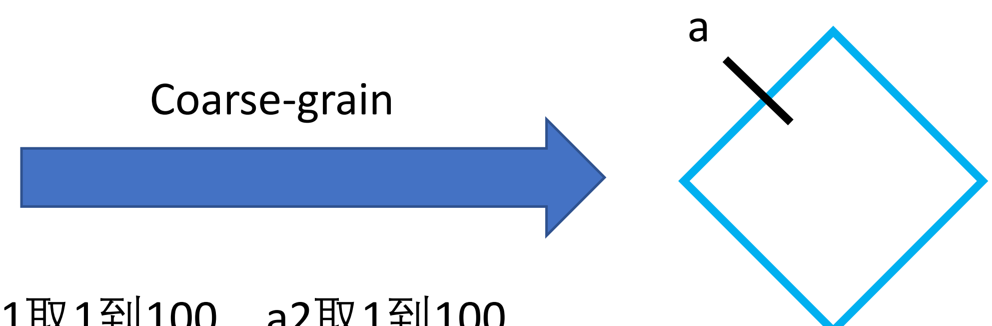
Review of AKLT model

Within the tensor network framework, the phase is determined by fixed point according to renormalization group.

In the matrix product state part, we have already analyze the AKLT model, now we review it from perspective of tensor network

这个过程的核心如下：





比如a1取1到100，a2取1到100，
把它们收缩过程中我们可以取10000里面1到100个
能量最低的参数，从而把二阶缩成一阶。

如果二阶张量代表两个Hilbert空间，那么这样的收缩
代表了两个真实粒子的自由度映射到一个赝粒子的自由度
上。