



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



Facultad de Ciencias

# Física Computacional

## Voluntario 2: Estudio del péndulo doble con un algoritmo Runge-Kutta.

### Resumen

En este informe tenemos como objetivo estudiar el comportamiento del doble péndulo, empleando el método de Runge-Kutta para simular el movimiento del sistema. Se estudiará la relación entre sus variables y la energía total del sistema, para distintas condiciones iniciales. Además se analizará la estabilidad del sistema y la influencia pequeñas perturbaciones.

ZhuoZhuo Liu

Grado en Física

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
2.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	1
2.2. Condiciones iniciales . . . . .	2
2.3. Unidades empleadas . . . . .	2
<b>3. Análisis de resultados</b>	<b>2</b>
3.1. Mapas de Poincaré . . . . .	2
3.2. Coeficiente de Lyapunov . . . . .	2
3.3. Estabilidad del sistema . . . . .	3
3.4. Optimización . . . . .	3
<b>A. Tabla de valores</b>	<b>6</b>
<b>B. Análisis de errores</b>	<b>7</b>

## 1. Introducción

## 2. Planteamiento del problema

### 2.1. Ecuaciones del movimiento

Primero debemos de hallar las expresiones de los momentos angulares a partir del Lagrangiano del sistema.

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - 2g(1 - \cos \phi) - g(1 - \cos \psi) \quad (1)$$

Hallamos las expresiones del momento angular  $p_\phi$  y  $p_\psi$ , en función de las velocidades angulares  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  através de las parciales de  $\mathcal{L}$  con respecto a las velocidades angulares.

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \quad (2)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\psi - \phi) \quad (3)$$

Despejando las velocidades en función del momento, permite expresar el Hamiltoniano en función de dichos momentos.

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)}, \quad \dot{\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \\ &= \frac{p_\phi^2 + p_\psi^2 - 2p_\phi p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \end{aligned} \quad (5)$$

De donde se obtiene las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Hamilton.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\phi - \psi) - 2g \sin \phi \quad (8)$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\psi - \phi) - g \sin \psi \quad (9)$$

## 2.2. Condiciones iniciales

Para este tipos de sistemas, las condiciones iniciales son de suma importancia para los resultados obtenidos. Tendremos 3 parámetros que tomar en cuenta, la energía total del sistema y la ángulo inicial de  $\phi$  y  $\psi$ , ya que se ha considerado  $\dot{\psi}(t = 0) = 0$  para simplificar.

Dependiendo el objetivo del apartado, se irá variando la energía total del sistema, los ángulos iniciales, o ambos. Pero es importante tener en cuenta que la energía total del sistema no puede ser negativa, ya que la energía potencial es siempre positiva, esto produce ángulos iniciales incompatibles con la energía propuesta. De modo que para los estudios donde se varíe la energía, emplearemos ángulos iniciales relativamente pequeños, para que sea compatible con la menor energía propuesta.

## 2.3. Unidades empleadas

Aunque se podría realizar en unidades arbitrarias, en el análisis de los resultados se asumirá que todos los valores mencionados se encuentran en el sistema internacional. Se debe de tomar en cuenta que en el hamiltoniano no aparece ni la masa ni la longitud de los hilos ya que se han considerado que son iguales con valor 1, es decir 1 kg y 1 m respectivamente.

Tambien se ha considerado la gravedad terrestre, de modo que  $g = 9.81\text{m/s}^2$ . Y para el resto de variables tendrán las siguientes unidades:

- $\phi$  y  $\psi$  en radianes.
- $p_\phi$  y  $p_\psi$  en  $[\text{kg m}^2/\text{s}]$ .
- $E$  en  $[\text{kg m}^2/\text{s}^2]$ , es decir en julios  $[\text{J}]$ .

## 3. Análisis de resultados

### 3.1. Mapas de Poincaré

Para estudiar el movimiento del sistema, emplearemos los mapas de Poincaré para visualizar la relación entre las variables del sistema. Comenzando con la relación entre  $\phi$  y  $\psi$ , para distintas energías ( $E = 1, 3, 5, 10, 15$ ). Obteniendo la figura 1.

Centrandonos en la energía  $E = 1$  (figura 2) se puede observar que el sistema tiende a ciertas configuraciones,

Para energías mayores, se va deformando la forma inicial  
A grandes rasgos, se puede observar  
Representado los ángulos con sus velocidades angulares

### 3.2. Coeficiente de Lyapunov

Para un sistema caótico, el coeficiente de Lyapunov nos permite cuantificar la tasa de divergencia de dos trayectorias infinitamente cercanas.

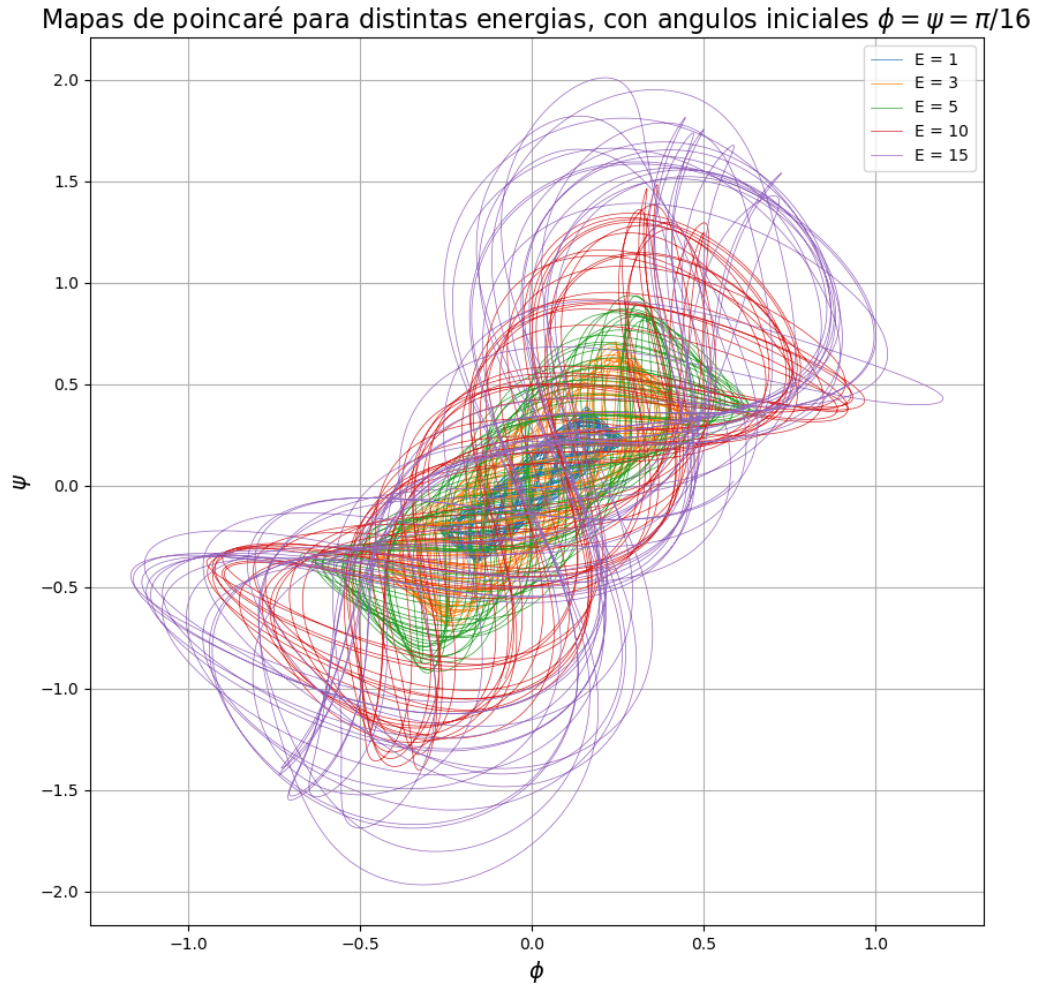


Figura 1: Mapa de Poincaré para distintas energías

### 3.3. Estabilidad del sistema

### 3.4. Optimización

Se va a comparar el tiempo de ejecución de los métodos de Runge-Kutta, para distintas maquinas, distintos tamaños de paso  $h$ , y distintos tiempo total de simulación.

Se ha considerado 3 ordenadores distintos, con las siguientes características:

- Portatil windows: Intel Core i5-12500H, 16GB RAM.

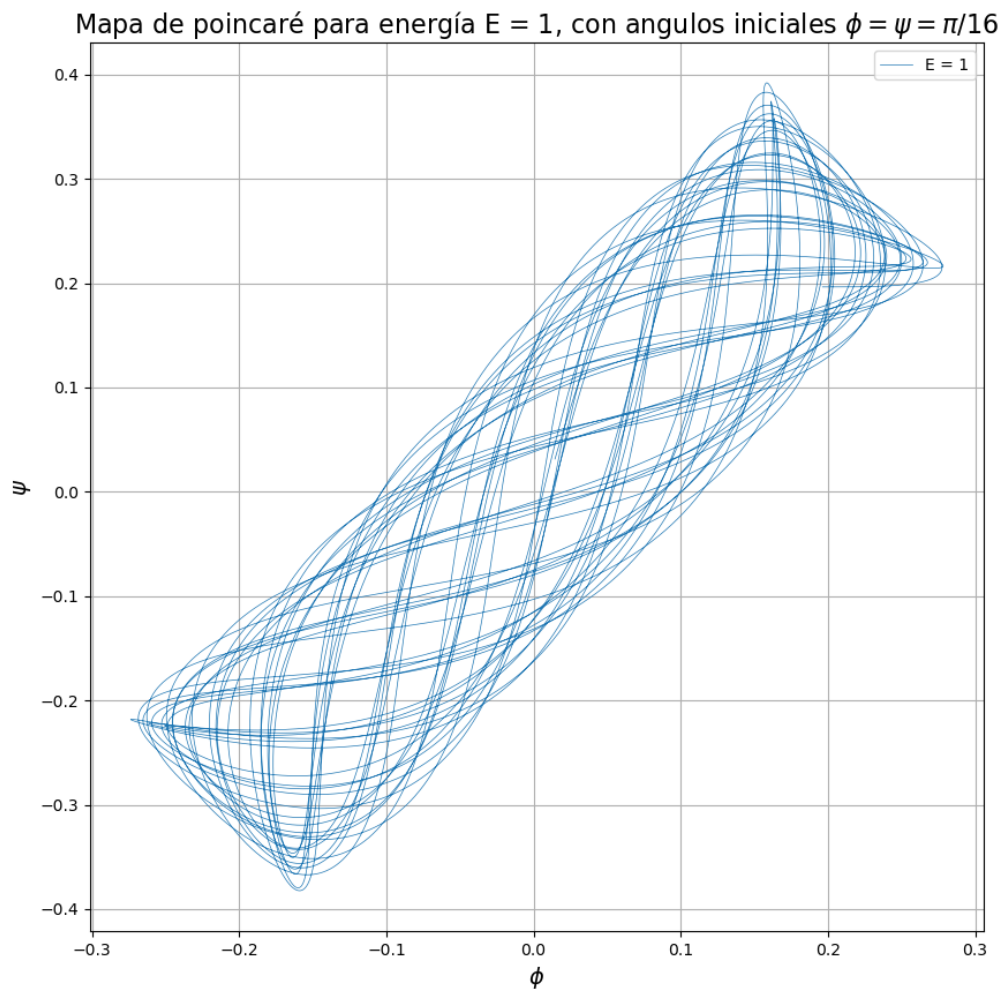


Figura 2: Mapa de Poincaré para  $E = 1$

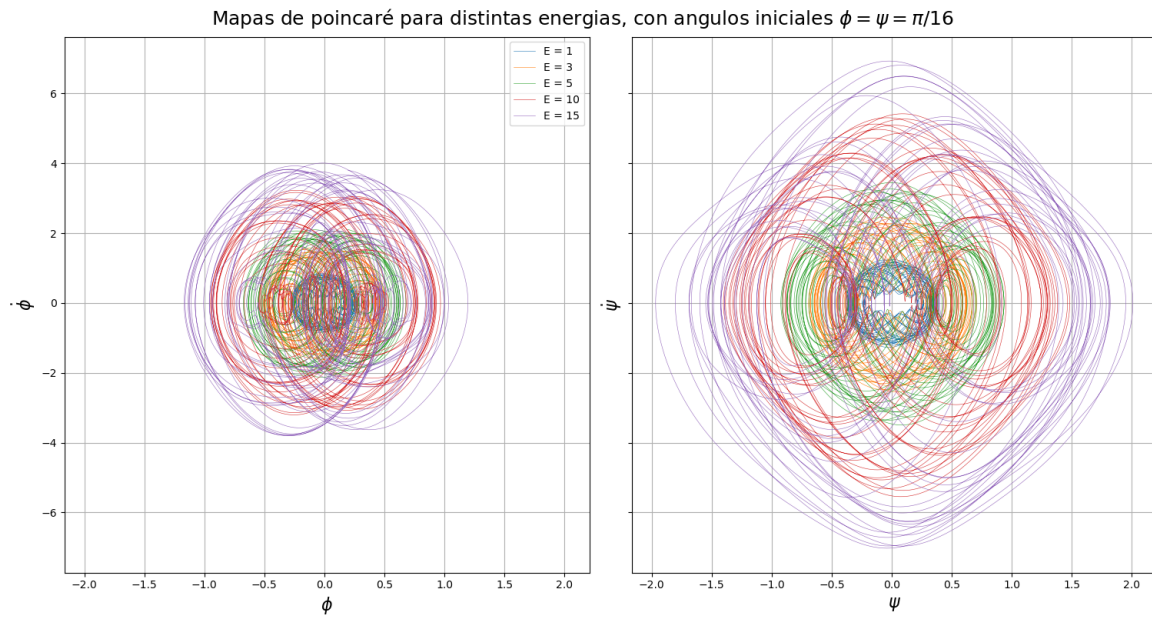


Figura 3: Relación entre  $\phi$  y  $\dot{\phi}$

- Portatil Macbook Pro M1 (2020), 8GB RAM.
- Joel.

**A. Tabla de valores**



## B. Análisis de errores