



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



Facultad de Ciencias

# Física Computacional

## Voluntario 2: Estudio del péndulo doble con un algoritmo Runge-Kutta.

### Resumen

En este informe tenemos como objetivo estudiar el comportamiento del doble péndulo, empleando el método de Runge-Kutta para simular el movimiento del sistema. Se estudiará la relación entre sus variables y la energía total del sistema, para distintas condiciones iniciales. Además se analizará la estabilidad del sistema y la influencia pequeñas perturbaciones.

ZhuoZhuo Liu

Grado en Física

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
2.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	1
2.2. Condiciones iniciales . . . . .	2
2.3. Unidades empleadas . . . . .	2
<b>3. Análisis de resultados</b>	<b>3</b>
3.1. Mapas de Poincaré . . . . .	3
3.2. Coeficiente de Lyapunov . . . . .	5
3.3. Estabilidad del sistema . . . . .	6
3.4. Optimización . . . . .	8
<b>A. Tabla de valores</b>	<b>10</b>
<b>B. Análisis de errores</b>	<b>11</b>

## 1. Introducción

## 2. Planteamiento del problema

### 2.1. Ecuaciones del movimiento

Primero debemos de hallar las expresiones de los momentos angulares a partir del Lagrangiano del sistema.

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - 2g(1 - \cos \phi) - g(1 - \cos \psi) \quad (1)$$

Hallamos las expresiones del momento angular  $p_\phi$  y  $p_\psi$ , en función de las velocidades angulares  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  através de las parciales de  $\mathcal{L}$  con respecto a las velocidades angulares.

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \quad (2)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\psi - \phi) \quad (3)$$

Despejando las velocidades en función del momento, permite expresar el Hamiltoniano en función de dichos momentos.

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)}, \quad \dot{\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \\ &= \frac{p_\phi^2 + p_\psi^2 - 2p_\phi p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \end{aligned} \quad (5)$$

De donde se obtiene las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Hamilton.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\phi - \psi) - 2g \sin \phi \quad (8)$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\psi - \phi) - g \sin \psi \quad (9)$$

## 2.2. Condiciones iniciales

Para este tipos de sistemas, las condiciones iniciales son de suma importancia para los resultados obtenidos. Tendremos 3 parámetros que tomar en cuenta, la energía total del sistema y la ángulo inicial de  $\phi$  y  $\psi$ , ya que se ha considerado  $\dot{\psi}(t=0) = 0$  para simplificar.

Dependiendo el objetivo del apartado, se irá variando la energía total del sistema, los ángulos iniciales, o ambos. Pero es importante tener en cuenta que la energía total del sistema no puede ser negativa, ya que la energía potencial es siempre positiva, esto produce ángulos iniciales incompatibles con la energía propuesta. De modo que para los estudios donde se varíe la energía, emplearemos ángulos iniciales relativamente pequeños, para que sea compatible con la menor energía propuesta.

## 2.3. Unidades empleadas

Aunque se podría realizar en unidades arbitrarias, en el análisis de los resultados se asumirá que todos los valores mencionados se encuentran en el sistema internacional. Se debe de tomar en cuenta que en el hamiltoniano no aparece ni la masa ni la longitud de los hilos ya que se han considerado que son iguales con valor 1, es decir 1 kg y 1 m respectivamente.

Tambien se ha considerado la gravedad terrestre, de modo que  $g = 9.81\text{m/s}^2$ . Y para el resto de variables tendrán las siguientes unidades:

- $\phi$  y  $\psi$  en radianes.
- $p_\phi$  y  $p_\psi$  en  $[\text{kg m}^2/\text{s}]$ .
- $E$  en  $[\text{kg m}^2/\text{s}^2]$ , es decir en julios [J].

### 3. Análisis de resultados

#### 3.1. Mapas de Poincaré

Para estudiar el movimiento del sistema, emplearemos los mapas de Poincaré para visualizar la relación entre las variables del sistema. Comenzando con la relación entre  $\phi$  y  $\psi$ , para distintas energías ( $E = 1, 3, 5, 10, 15$ ). Obteniendo la figura 1.

Se aprecia como los ángulos en este caso no superan a  $\pi$ , de modo con estas condiciones iniciales, el pendulo no da vueltas completas, y esto se ve reflejado en el mapa de Poincaré.

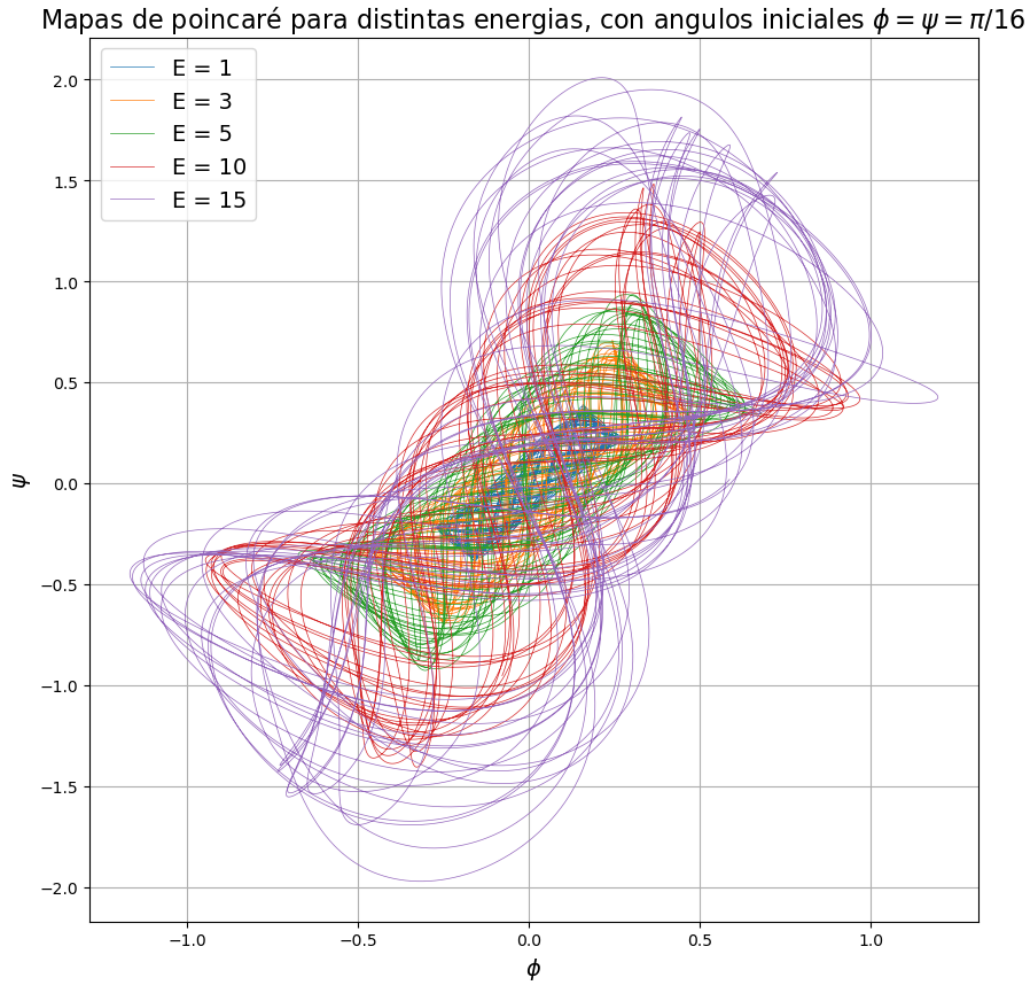


Figura 1: Mapa de Poincaré para distintas energías

Centrandonos en el caso donde la energía  $E = 1$  (figura 2) se puede observar que el sistema tiende a ciertas configuraciones, es decir que ciertas combinaciones de ángulos  $\phi$  y

$\psi$  se repiten. Estas combinaciones de estados son los atractores del sistema.

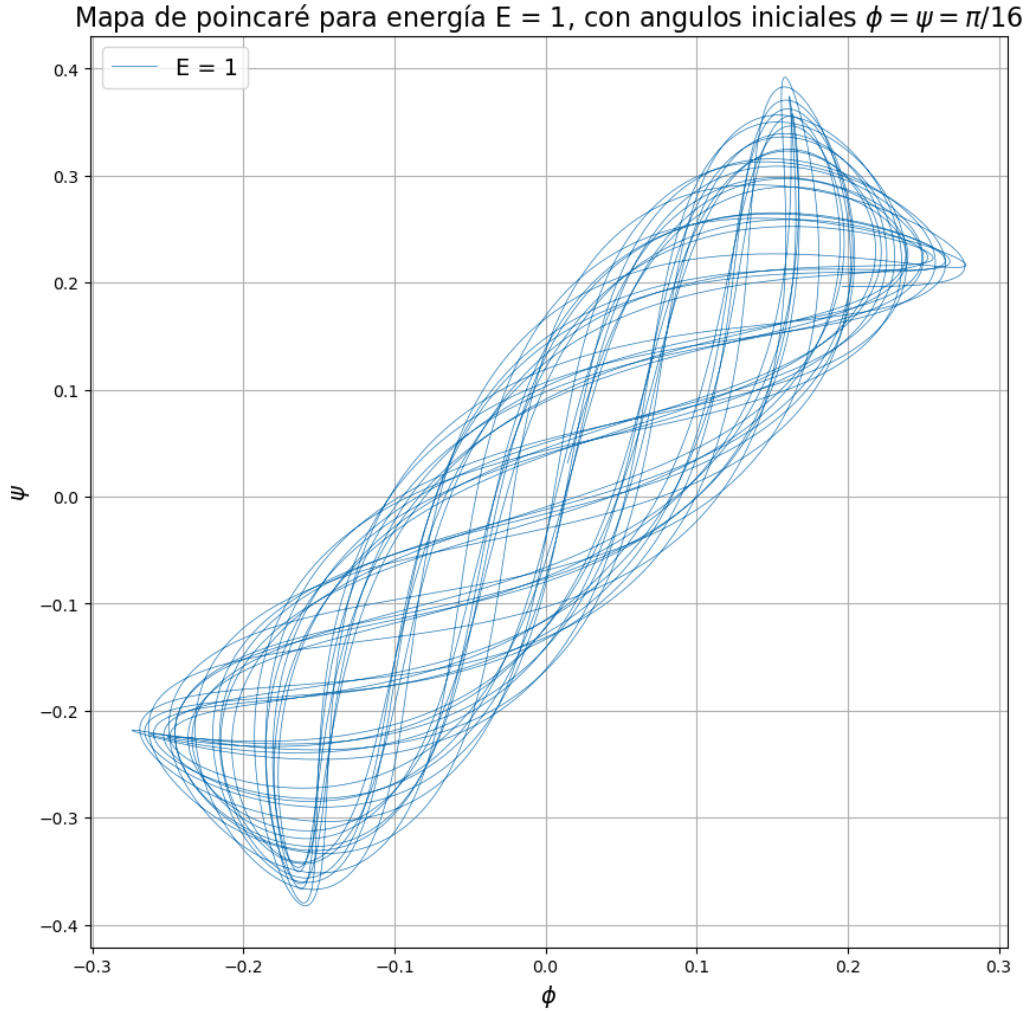


Figura 2: Mapa de Poincaré para  $E = 1$

Para energías mayores, se va deformando la forma inicial, alcanzando a ángulos superiores, pero se sigue observando la misma tendencia a ciertas combinaciones de ángulos, solapando ciertas combinaciones, para energías adyacentes.

Representado los ángulos con sus velocidades angulares, se obtienen otros mapas de Poincaré (figura 3). En este caso se observan trayectorias con forma de espiral, esto se debe a la relación entre dichas variables. También se sigue observando repeticiones en las combinaciones de ángulos, es decir los atractores del sistema.

Intuitivamente se requiere una velocidad mayor para alcanzar ángulos mayores, es decir una energía cinética mayor, para alcanzar energías potenciales mayores. No es posible

tratar los 2 ángulos por separado, ya que el sistema está acoplado, sin embargo plantar la conservación de la energía bajo estas condiciones puede ser útil para comprender el por qué de las formas circulares en el mapa de poincaré. Por otro lado el cambio en la amplitud de las espirales, se debe al intercambio de energía entre los dos grados de libertad.

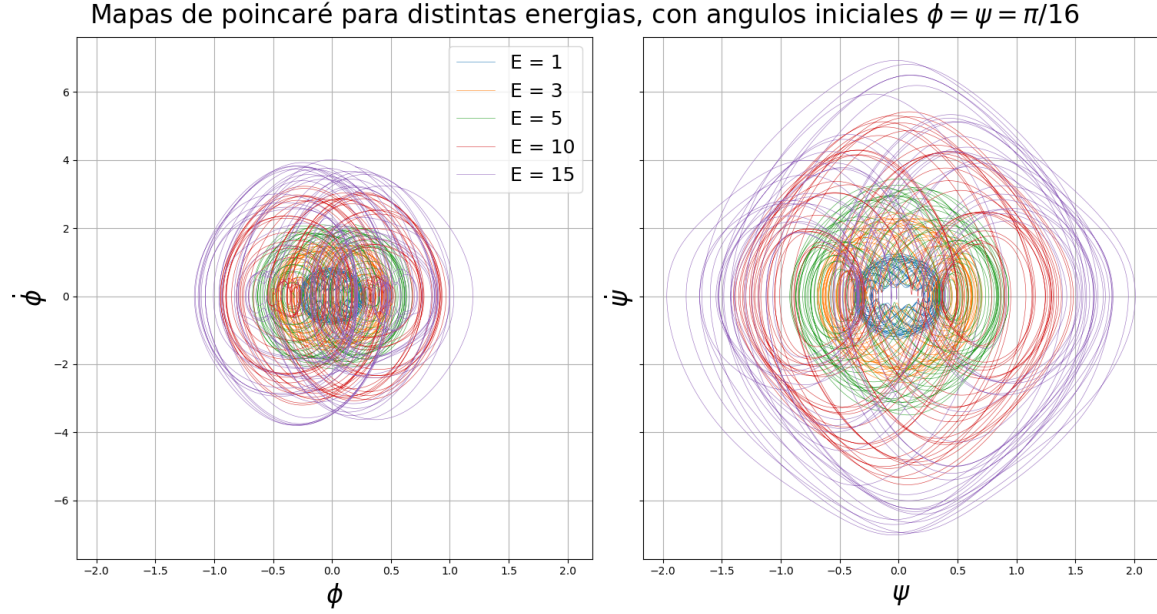


Figura 3: Mapa de poincaré mostrando la relación entre  $\phi$  y  $\dot{\phi}$ , así como  $\psi$  y  $\dot{\psi}$ , para distintas energías.

Cabe notar que la figura para  $\psi$  y  $\dot{\psi}$  tiene dimensiones aproximadamente el doble que la de  $\phi$  y  $\dot{\phi}$ , esto se debe a la facilidad que tiene el sistema aumentar el ángulo en  $\psi$ , comparado con  $\phi$ , ya que requiere el movimiento de una única masa, frente a las 2.

### 3.2. Coeficiente de Lyapunov

Para un sistema caótico, el coeficiente de Lyapunov nos permite cuantificar la tasa de divergencia de dos trayectorias infinitamente cercanas. Como no es posible tener una separación inicial infinitamente cercana en la práctica, se tomará un número muy pequeño tal que los resultados no sean truncados por la máquina

Considerando una separación inicial  $\delta\psi_0 = 10^{-15}$ , al cabo de un tiempo  $t$ , la separación entre las dos trayectorias será  $\delta\psi(t)$ , la relación entre ambas viene dado por:

$$|\delta\psi(t)| \approx |\delta\psi_0|e^{\lambda t}, \quad (10)$$

con  $\lambda$  el coeficiente de Lyapunov.

Tomando la evolución de fracción de la separación a tiempo  $t$  respecto a la inicial, se obtiene la figura, donde se realiza un ajuste exponencial para obtener el coeficiente de Lyapunov.

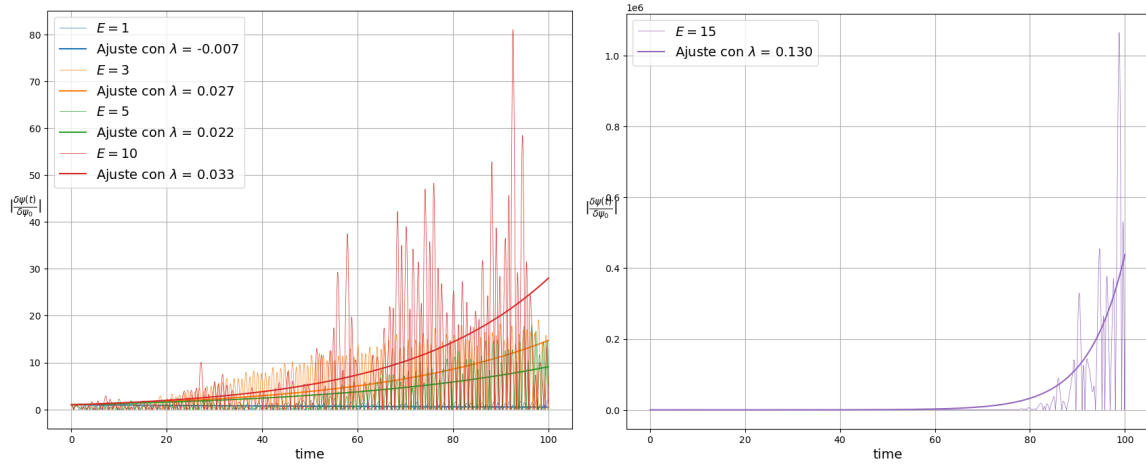


Figura 4: plots of...

En la figura 4 se observa como el coeficiente de Lyapunov aumenta con la energía del sistema, esto indica que el sistema es más caótico a medida que aumenta la energía.

### 3.3. Estabilidad del sistema

Para estudiar la estabilidad del sistema, se ha considerado pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, a diferentes valores de energía. Emplearemos nuevamente los mapas de poincaré, determinado que un sistema es estable si las variaciones iniciales no afectan en gran medida la forma que tiene los mapas de poincaré.

Comenzando con las variaciones en la energía del sistema, para ángulos iniciales bajos, para poder emplear los mismos ángulos iniciales para los distintos casos, siendo estas  $\phi_0 = \psi_0 = \pi/16$ , se irá viendo como afecta la perturbación del ángulo  $\psi_0$  a la evolución del sistema.

En las figuras 5 y 6 se observa como la perturbación en el ángulo  $\psi_0$  afecta a la evolución del sistema para distintos niveles de energía. En concreto se observa como a niveles de energías bajas, los mapas de poincaré apenas varían entre las diferentes configuraciones iniciales, sin embargo a medida que aumenta la energía, la perturbación en el ángulo  $\psi_0$  afecta en mayor medida a la evolución del sistema, separando las trayectorias en el mapa de poincaré. Esto culmina en el caso de  $E = 15$ , donde hay un cambio drástico en un ángulo entre media de otros, lo que indica que el sistema es inestable para dichas energías.



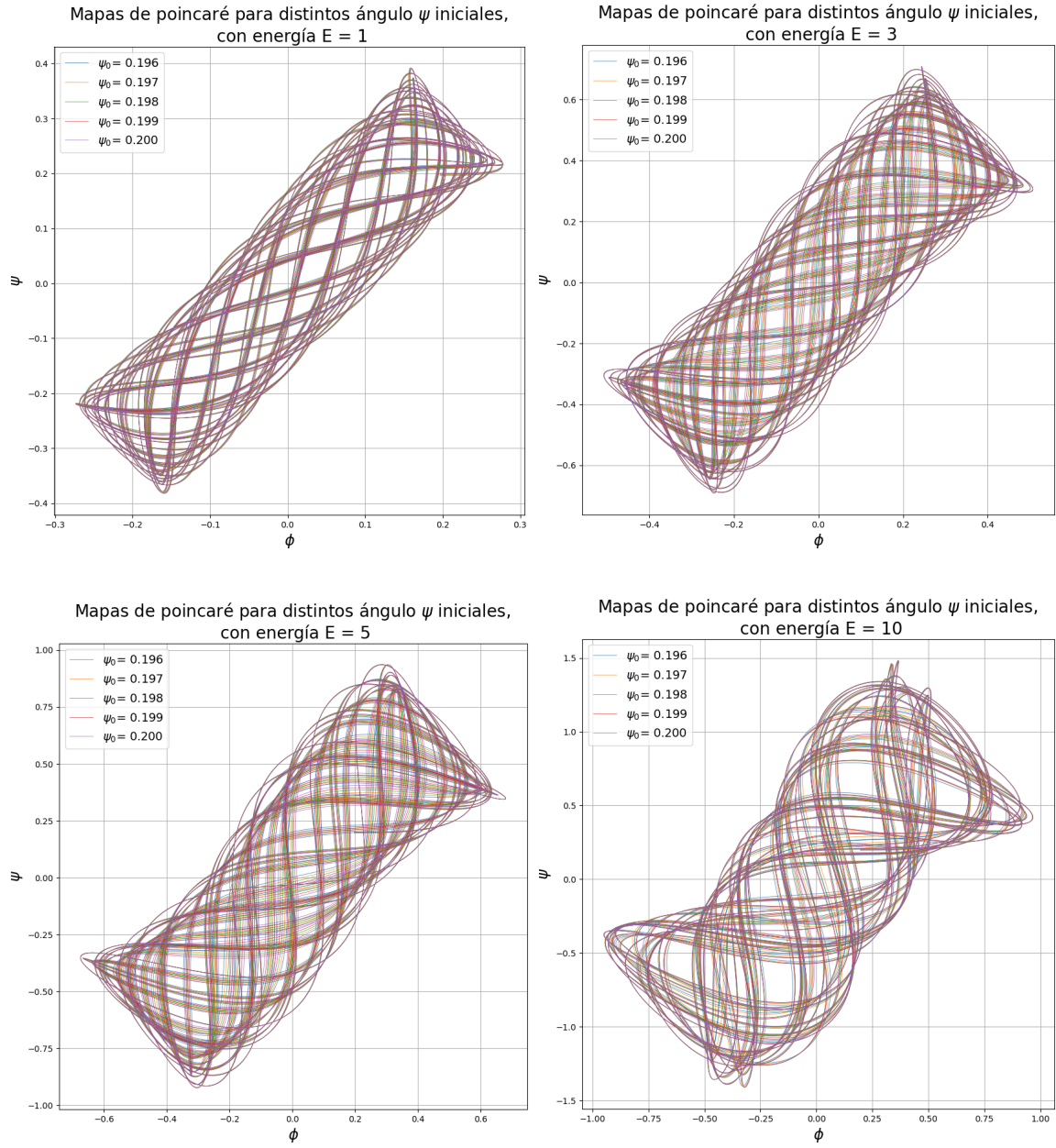


Figura 5: plots of....

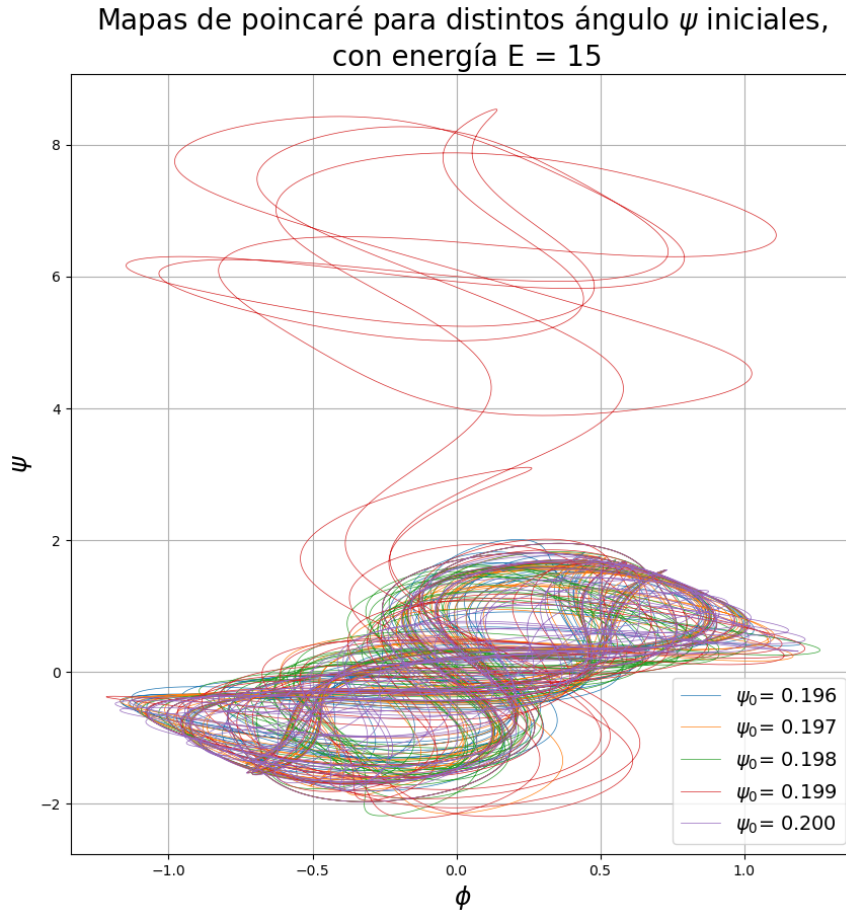


Figura 6: plots of....

### 3.4. Optimización

Se va a comparar el tiempo de ejecución de los métodos de Runge-Kutta, para distintas máquinas, distintos tamaños de paso  $h$ , y distintos tiempos totales de simulación. Estos 2 últimos parámetros pueden ser unirse en uno solo, el número de interacciones,  $N = t/h$ . Disminuyendo el tamaño de paso, o aumentando el tiempo de simulación, tiene el mismo efecto en cuanto al coste computacional, ya que este es el parámetro empleado en el programa.

Se ha considerado 3 ordenadores distintos, con las siguientes características:

- Portatil windows: Intel Core i5-12500H, 16GB RAM, enchufado.
- Portatil Macbook Pro M1 (2020), 8GB RAM, desenchufado.
- Joel.

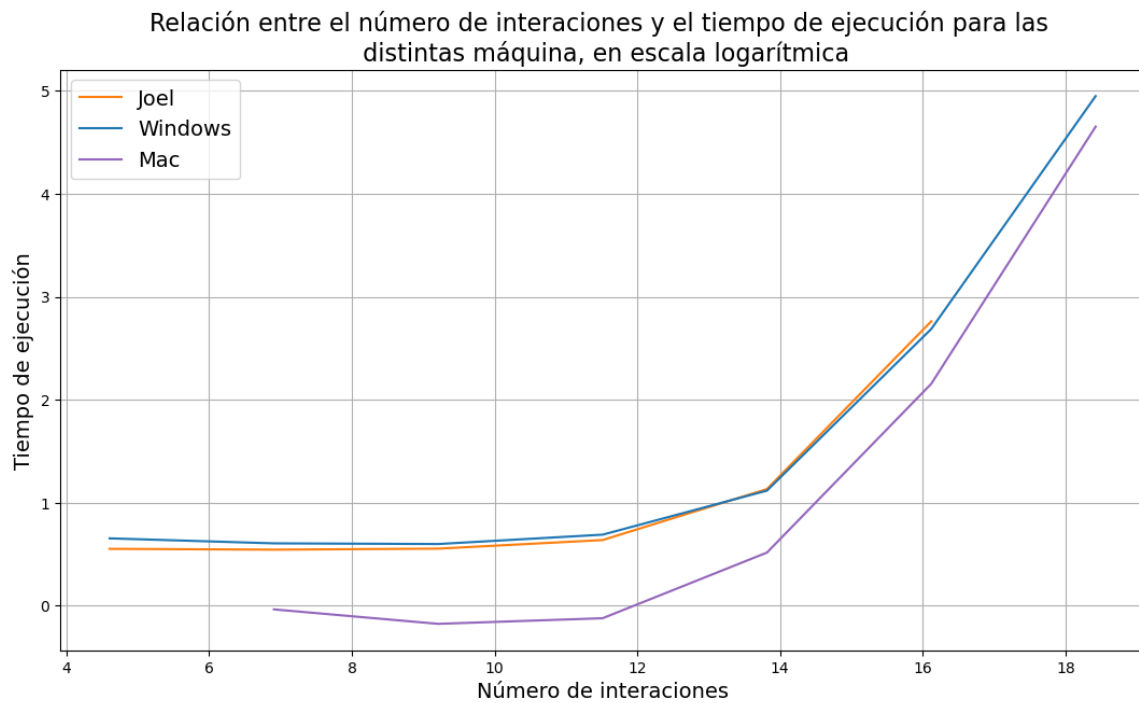


Figura 7

Se observa en la figura 7 como el tiempo de ejecución en relación con el número de interacciones tiene un comportamiento exponencial,

**A. Tabla de valores**

## B. Análisis de errores