

Física Computacional

Voluntario 2: Estudio del péndulo doble con un algoritmo Runge-Kutta.

Resumen

En este informe tenemos como objetivo ...

Zhuo Zhuo Liu

Grado en Física

Índice

1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	1
2.1. Ecuaciones del movimiento	1
2.2. Condiciones iniciales	1
A. Tabla de valores	2
B. Análisis de errores	3

1. Introducción

2. Planteamiento del problema

2.1. Ecuaciones del movimiento

Primero debemos de hallar las expresiones de los momentos angulares a partir del Lagrangiano del sistema.

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - 2g(1 - \cos \phi) - g(1 - \cos \psi) \quad (1)$$

Hallamos las expresiones del momento angular p_ϕ y p_ψ , en función de las velocidades angulares $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ através de las parciales de \mathcal{L} con respecto a las velocidades angulares.

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \quad (2)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\psi - \phi) \quad (3)$$

Despejando las velocidades en función del momento, permite expresar el Hamiltoniano en función de dichos momentos.

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)}, \quad \dot{\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \\ &= \frac{p_\phi^2 + p_\psi^2 - 2p_\phi p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \end{aligned} \quad (5)$$

De donde se obtiene las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Hamilton.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\phi - \psi) - 2g \sin \phi \quad (8)$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\psi - \phi) - g \sin \psi \quad (9)$$

2.2. Condiciones iniciales

A. Tabla de valores

B. Análisis de errores