



UNIVERSIDAD
DE GRANADA



Facultad de Ciencias

Física Computacional

Voluntario 2: Estudio del péndulo doble con un algoritmo Runge-Kutta.

Resumen

En este informe tenemos como objetivo estudiar el comportamiento del doble péndulo, empleando el método de Runge-Kutta para simular el movimiento del sistema. Se estudiará la relación entre sus variables y la energía total del sistema, para distintas condiciones iniciales. Además se analizará la estabilidad del sistema, la influencia pequeñas perturbaciones y la optimización del código.

ZhuoZhuo Liu

Grado en Física

Índice

1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	1
2.1. Ecuaciones del movimiento	1
2.2. Condiciones iniciales	2
2.3. Unidades empleadas	2
3. Análisis de resultados	3
3.1. Mapas de Poincaré	3
3.2. Coeficiente de Lyapunov	5
3.3. Estabilidad del sistema	6
3.4. Optimización	8
4. Conclusiones	10
A. Tabla de valores	11

1. Introducción

El doble pendulo forma un sistema simple, pero produce un movimiento complejo, muy sensible a las condiciones iniciales. Este sistema es un ejemplo clásico de un sistema caótico. En este informe se estudiará el movimiento del doble pendulo, empleando el método de Runge-Kutta para simular el movimiento.

2. Planteamiento del problema

Para la simulación del movimiento del doble pendulo, hay diversos aspectos a tomar en cuenta, como las ecuaciones del movimiento, las condiciones iniciales del sistema y las unidades empleadas.

2.1. Ecuaciones del movimiento

Primero debemos de hallar las expresiones de los momentos angulares a partir del Lagrangiano del sistema.

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - 2g(1 - \cos \phi) - g(1 - \cos \psi) \quad (1)$$

Hallamos las expresiones del momento angular p_ϕ y p_ψ , en función de las velocidades angulares $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ através de las parciales de \mathcal{L} con respecto a las velocidades angulares.

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \quad (2)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\psi - \phi) \quad (3)$$

Despejando las velocidades en función del momento, permite expresar el Hamiltoniano en función de dichos momentos.

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)}, \quad \dot{\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H &= \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \\ &= \frac{p_\phi^2 + p_\psi^2 - 2p_\phi p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} + 2g(1 - \cos \phi) + g(1 - \cos \psi) \end{aligned} \quad (5)$$

De donde se obtiene las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Hamilton.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (6)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{2p_\psi - p_\phi \cos(\psi - \phi)}{2 - \cos^2(\psi - \phi)} \quad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\phi - \psi) - 2g \sin \phi \quad (8)$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{p_\phi p_\psi \cos^2(\psi - \phi) - (2p_\psi^2 + p_\phi^2) \cos(\psi - \phi) + 2p_\phi p_\psi}{(2 - \cos^2(\psi - \phi))^2} 2 \sin(\psi - \phi) - g \sin \psi \quad (9)$$

2.2. Condiciones iniciales

Para este tipos de sistemas, las condiciones iniciales son de suma importancia para los resultados obtenidos. Tendremos 3 parámetros que tomar en cuenta, la energía total del sistema y la ángulo inicial de ϕ y ψ , ya que se ha considerado $\dot{\psi}(t=0) = 0$ para simplificar.

Dependiendo el objetivo del apartado, se irá variando la energía total del sistema, los ángulos iniciales, o ambos. Pero es importante tener en cuenta que la energía total del sistema no puede ser negativa, ya que la energía potencial es siempre positiva, esto produce ángulos iniciales incompatibles con la energía propuesta. De modo que para los estudios donde se varíe la energía, emplearemos ángulos iniciales relativamente pequeños, para que sea compatible con la menor energía propuesta.

2.3. Unidades empleadas

Aunque se podría realizar en unidades arbitrarias, en el análisis de los resultados se asumirá que todos los valores mencionados se encuentran en el sistema internacional. Se debe de tomar en cuenta que en el hamiltoniano no aparece ni la masa ni la longitud de los hilos ya que se han considerado que son iguales con valor 1, es decir 1 kg y 1 m respectivamente.

Tambien se ha considerado la gravedad terrestre, de modo que $g = 9.81 \text{m/s}^2$. Y para el resto de variables tendrán las siguientes unidades:

- ϕ y ψ en radianes.
- p_ϕ y p_ψ en $[\text{kg m}^2/\text{s}]$.
- E en $[\text{kg m}^2/\text{s}^2]$, es decir en julios [J].

3. Análisis de resultados

3.1. Mapas de Poincaré

Para estudiar el movimiento del sistema, emplearemos los mapas de Poincaré para visualizar la relación entre las variables del sistema. Comenzando con la relación entre ϕ y ψ , para distintas energías ($E = 1, 3, 5, 10, 15$). Obteniendo la figura 1.

Se aprecia como los ángulos en este caso no superan a π , de modo con estas condiciones iniciales, el pendulo no da vueltas completas, y esto se ve reflejado en el mapa de Poincaré.

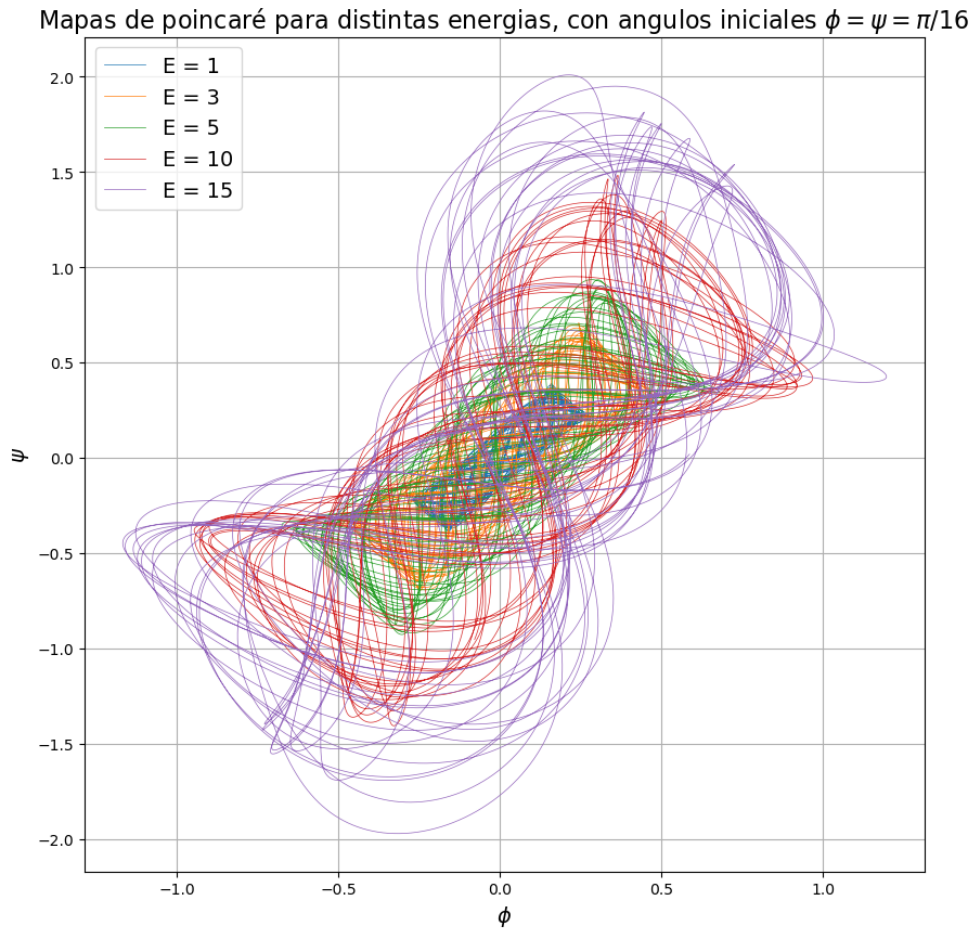


Figura 1: Mapa de Poincaré para distintas energías

Centrandonos en el caso donde la energía $E = 1$ (figura 2) se puede observar que el sistema tiende a ciertas configuraciones, es decir que ciertas combinaciones de ángulos ϕ y ψ se repiten. Estas combinaciones de estados son los atractores del sistema.

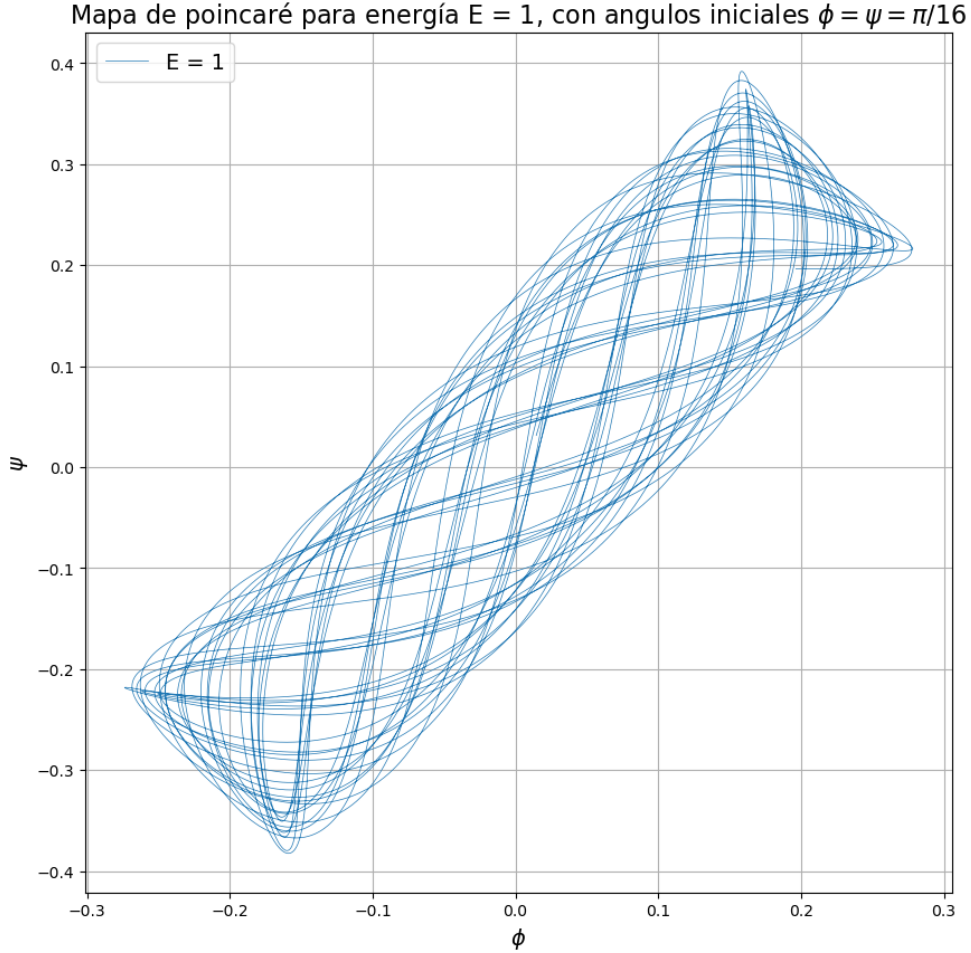


Figura 2: Mapa de Poincaré para $E = 1$

Para energías mayores, se va deformando la forma inicial, alcanzando a ángulos superiores, pero se sigue observando la misma tendencia a ciertas combinaciones de ángulos, solapando ciertas combinaciones, para energías adjascentes.

Representado los ángulos con sus velocidades angulares, se obtienen otros mapas de poincaré (figura 3). En este caso se observan trayectorias con forma de espiral, esto se debe a la relación entre dichas variables. También se sigue observando repeticiones en las combinaciones de ángulos, es decir los atractores del sistema.

Intuitivamente se requiere una velocidad mayor para alcanzar ángulos mayores, es decir una energía cinética mayor, para alcanzar energías potenciales mayores. No es posible tratar los 2 ángulos por separado, ya que el sistema está acoplado, sin embargo plantar la conservación de la energía bajo estas condiciones puede ser útil para comprender el por qué de las formas circulares en el mapa de poincaré. Por otro lado el cambio en la amplitud de

las espirales, se debe al intercambio de energía entre los dos grados de libertad.

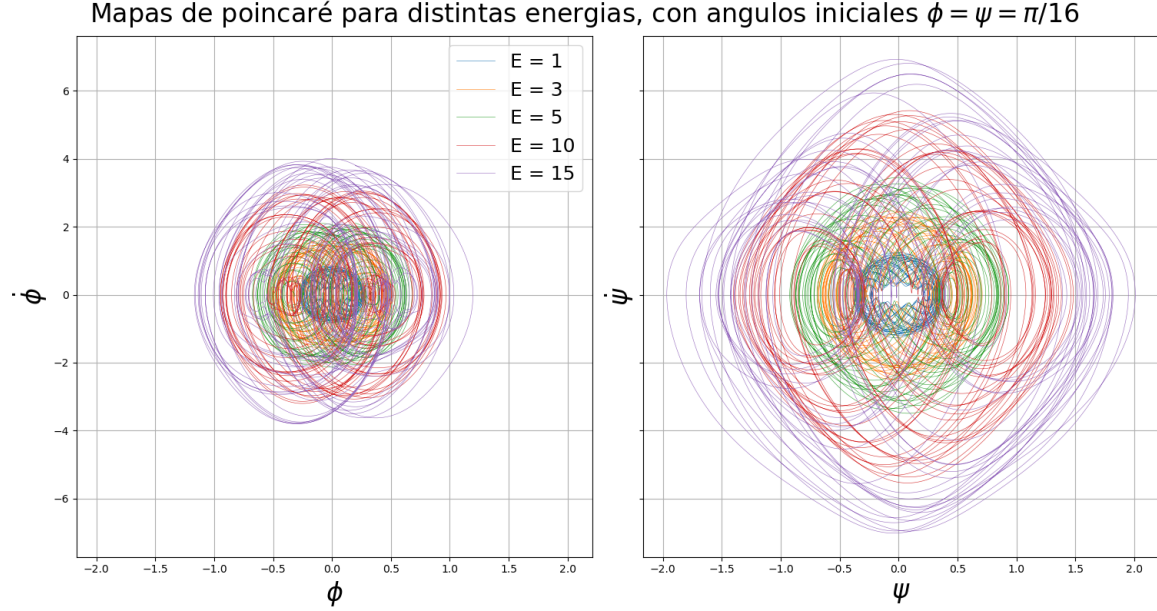


Figura 3: Mapa de poincaré mostrando la relación entre ϕ y $\dot{\phi}$, así como ψ y $\dot{\psi}$, para distintas energías.

Cabe notar que la figura para ψ y $\dot{\psi}$ tiene dimensiones aproximadamente el doble que la de ϕ y $\dot{\phi}$, esto se debe a la facilidad que tiene el sistema aumentar el ángulo en ψ , comparado con ϕ , ya que requiere el movimiento de una única masa, frente a las 2.

3.2. Coeficiente de Lyapunov

Para un sistema caótico, el coeficiente de Lyapunov nos permite cuantificar la tasa de divergencia de dos trayectorias infinitamente cercanas. Como no es posible tener una separación inicial infinitamente cercana en la práctica, se tomará un número muy pequeño tal que los resultados no sean truncados por la máquina

Considerando una separación inicial $\delta\psi_0 = 10^{-15}$, al cabo de un tiempo t , la separación entre las dos trayectorias será $\delta\psi(t)$, la relación entre ambas viene dado por:

$$|\delta\psi(t)| \approx |\delta\psi_0|e^{\lambda t}, \quad (10)$$

con λ el coeficiente de Lyapunov.

Tomando la evolución de fracción de la separación a tiempo t respecto a la inicial, se obtiene la figura, donde se realiza un ajuste exponencial para obtener el coeficiente de Lyapunov.

En la figura 4 se observa como el coeficiente de Lyapunov aumenta con la energía del sistema, esto indica que el sistema es más caótico a medida que aumenta la energía.

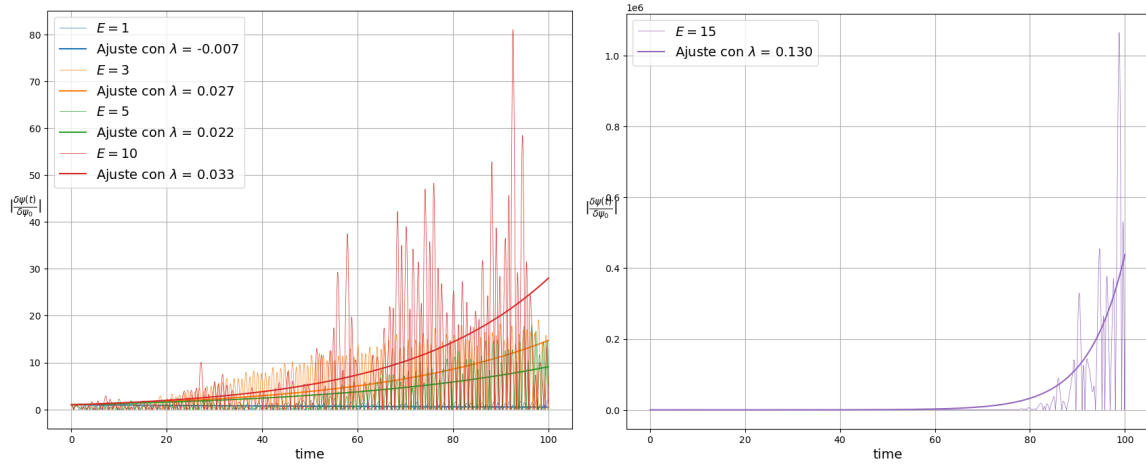


Figura 4: plots of...

3.3. Estabilidad del sistema

Para estudiar la estabilidad del sistema, se ha considerado pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, a diferentes valores de energía. Emplearemos nuevamente los mapas de poincaré, determinado que un sistema es estable si las variaciones iniciales no afectan en gran medida la forma que tiene los mapas de poincaré.

Comenzando con las variaciones en la energía del sistema, para ángulos iniciales bajos, para poder emplear los mismos ángulos iniciales para los distintos casos, siendo estas $\phi_0 = \psi_0 = \pi/16$, se irá viendo como afecta la perturbación del ángulo ψ_0 a la evolución del sistema.

En las figuras 5 y 6 se observa como la perturbación en el ángulo ψ_0 afecta a la evolución del sistema para distintos niveles de energía. En concreto se observa como a niveles de energías bajos, los mapas de poincaré apenas varían entre las diferentes configuraciones iniciales, sin embargo a medida que aumenta la energía, la perturbación en el ángulo ψ_0 afecta en mayor medida a la evolución del sistema, separando las trayectorias en el mapa de poincaré. Esto culmina en el caso de $E = 15$, donde hay un cambio drástico en un ángulo entre media de otros, lo que indica que el sistema es inestable para dichas energías.

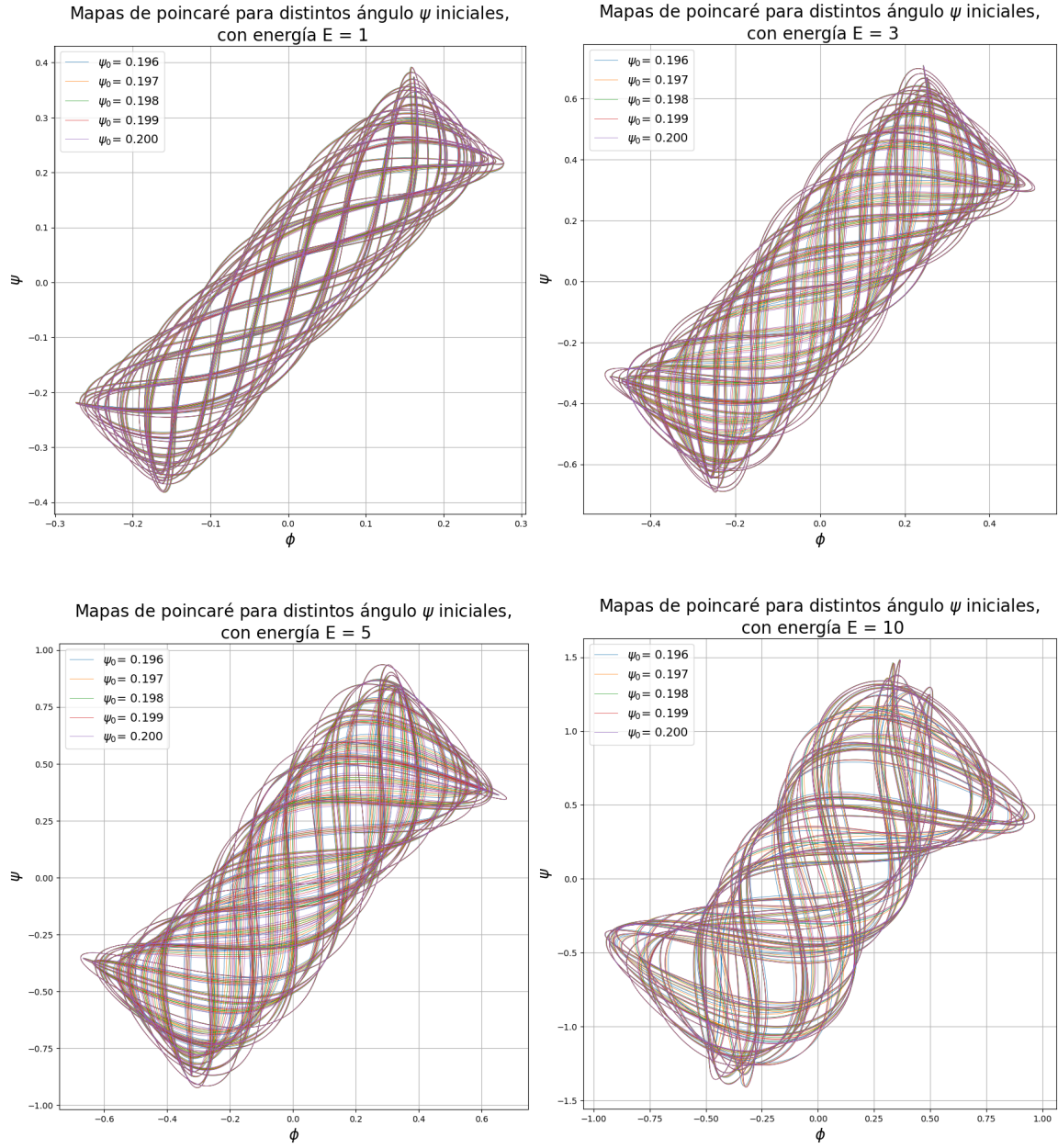


Figura 5: Representación de los mapas de poincaré para distintas energías, con ángulos iniciales $\phi_0 = \psi_0 = \pi/16$, variando el ángulo ψ_0 en un valor de 0.001

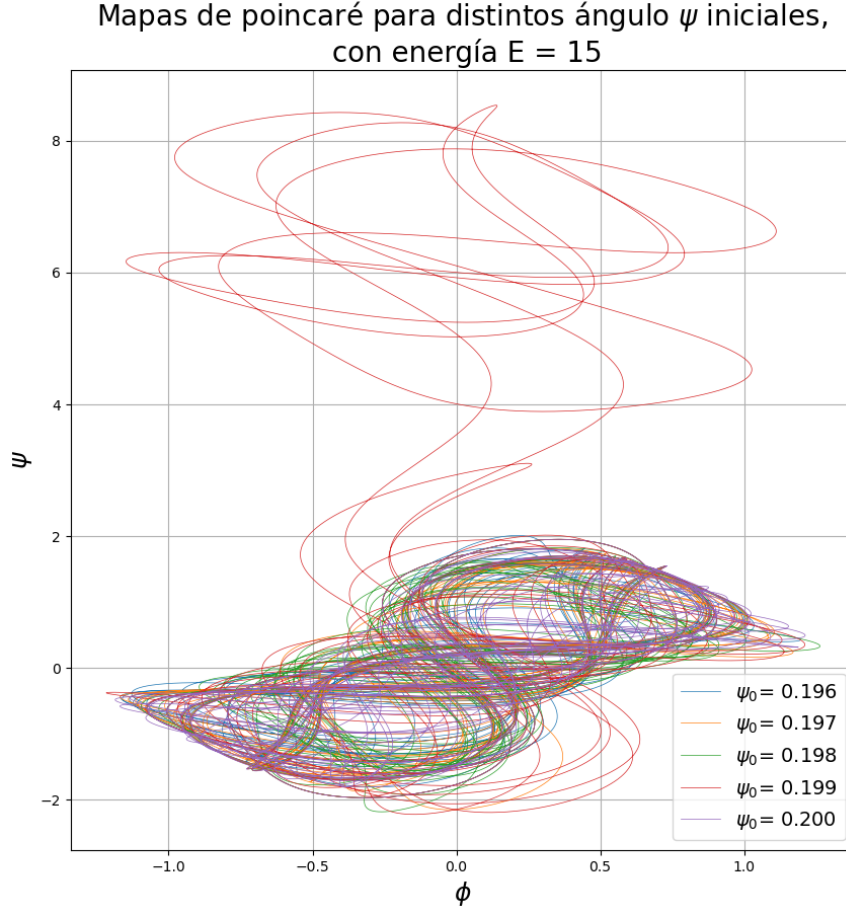


Figura 6: Representación de los mapas de poincaré para energía $E = 15$, con ángulos iniciales $\phi_0 = \psi_0 = \pi/16$, variando el ángulo ψ_0 en un valor de 0.001

3.4. Optimización

Se va a comparar el tiempo de ejecución de los métodos de Runge-Kutta, para distintas máquinas, distintos tamaños de paso h , y distintos tiempos totales de simulación. Estos 2 últimos parámetros pueden ser unirse en uno solo, el número de interacciones, $N = t/h$. Disminuyendo el tamaño de paso, o aumentando el tiempo de simulación, tiene el mismo efecto en cuanto al coste computacional, ya que este es el parámetro empleado en el programa.

A partir de los resultados obtenidos en el voluntario 1: el potencial de Lennard-Jones, se empleará la optimización de todas las funciones empleadas en el código, con `@jit(nopython=True)`. Ya que se espera resultados similares entre ambos voluntarios, ya que el procedimiento es similar.

En este caso se ha obviado también paralelizar el código, debido a los resultados obte-

nidos en el voluntario 1: el potencial de Lennard-Jones, donde se observó que el tiempo de ejecución aumentaba al paralelizar el código. Como el procedimiento de este voluntario es similar, no se empleará la paralelización.

Se ha considerado 3 ordenadores distintos, con las siguientes características:

- Portatil windows: Intel Core i5-12500H, 16GB RAM, enchufado.
- Portatil Macbook Pro M1 (2020), 8GB RAM, desenchufado.
- Joel.

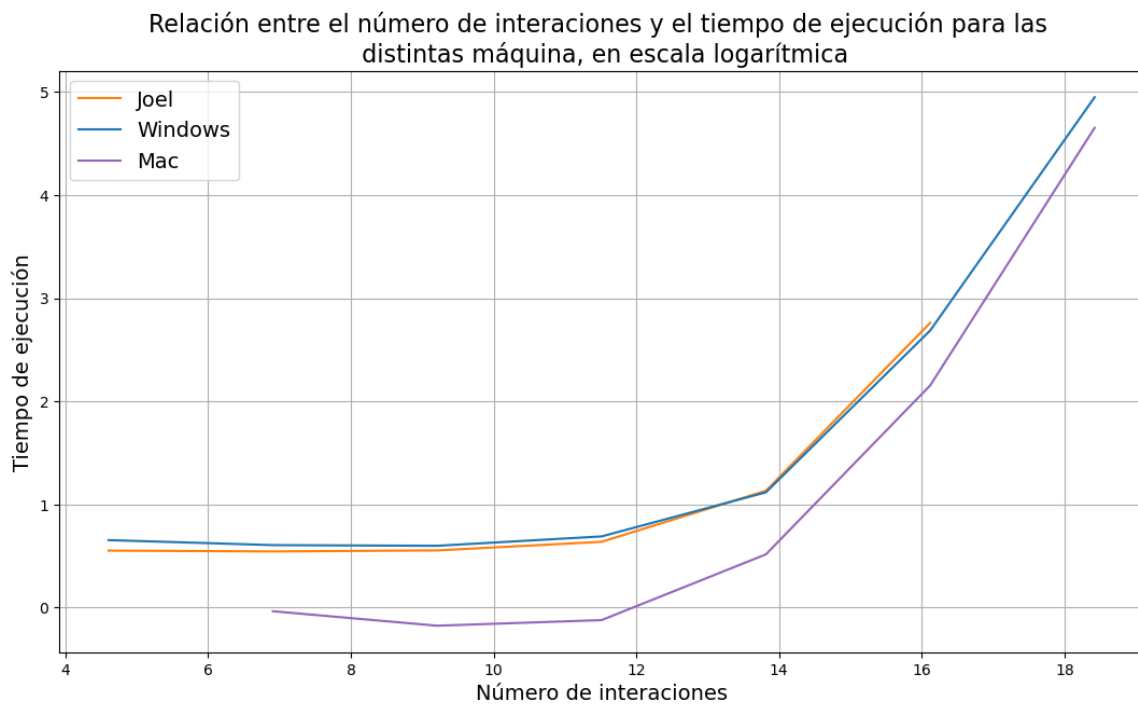


Figura 7: Representación del número de interacciones en relación con el tiempo de ejecución, para las distintas máquinas, en escala logarítmica. Optimizando todas las funciones posibles con `@jit(nopython=True)`.

Se observa en la figura 7, como para Joel, falta el dato para número de interacciones de 10^8 , ya que la máquina ha matado el proceso antes que de pudiera terminar, sin embargo por la forma que tiene la gráfica es razonable esperar un comportamiento similar al ordenador de windows.

En cuanto a la forma que tiene el tiempo de ejecución en relación con el número de interacciones esta tiene un comportamiento exponencial.

4. Conclusiones

En este informe se ha estudiado el movimiento del doble pendulo, empleando el método de Runge-Kutta para simular el movimiento del sistema. Se ha estudiado la relación entre las variables del sistema, la energía total del sistema, la estabilidad del sistema y la optimización del código.

Se ha observado como el sistema tiende a ciertas configuraciones, es decir ciertas combinaciones de ángulos, que se repiten en el mapa de poincaré, siendo estos los atractores del sistema. Se ha observado como el coeficiente de Lyapunov aumenta con la energía del sistema, indicando que el sistema es más caótico a medida que aumenta la energía.

Se ha observado como la perturbación en los ángulos afecta en mayor medida a la evolución del sistema a medida que aumenta la energía, indicando que el sistema es inestable para ciertas energías, concordando con los resultados obtenidos en el coeficiente de Lyapunov.

Por último se ha observado como el tiempo de ejecución del código aumenta exponencialmente con el número de interacciones, siendo este el parámetro más importante en el coste computacional del código. Mientras que para la relación de tiempo entre ordenadores, se observa resultados similares a los obtenidos en el voluntario 1: el potencial de Lennard-Jones.

A. Tabla de valores

Los valores obtenidos en las simulaciones se encuentran en el propio repositorio donde se puede encontrar también el código empleado para la realización de este informe y los gif generados para la visualización de los resultados.