2021年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学　（工本）

课程代码　00023

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题3分，共30分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{0,-1,1\}$，则向量 $2\boldsymbol{\alpha}$ 的模为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

2. 设函数 $z=\ln(x^2+y^2)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$

A. $2x$　　B. $\frac{2x}{x^2+y^2}$　　C. $\frac{2y}{x^2+y^2}$　　D. $\frac{2x+2y}{x^2+y^2}$

3. 下列微分方程中，不是一阶微分方程的是

A. $x^2y''-xy'+y=0$　　B. $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$

C. $x(y')^2-2xy'+x=0$　　D. $y'+y=\sin^2 x$

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处发散，则该幂级数在 $x=-3$ 处

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 敛散性不确定

5. 设积分区域 $D:(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，则二重积分 $\iint\limits_D(3-y)dxdy=$

A. 0　　B. π　　C. 2π　　D. 3π

6. 在直线 $L:\begin{cases}x+2y-z-7=0\\2x-y-z-7=0\end{cases}$ 上的点是

A. $(2,1,-4)$　　B. $(1,-2,-3)$　　C. $(0,0,-7)$　　D. $(0,0,7)$

7. 函数 $z=3-x^2-y^2$ 在点$(0,0)$处

A. 取得极大值　　B. 取得极小值

C. 没有取得极值　　D. 不能确定是否取得极值

8. 设积分区域 Ω: $-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 2$,则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(4+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的和为

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

10. 设 C 是任意常数,则微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解 $y=$

A. $x+C$　　B. $\dfrac{C}{x}$　　C. Ce^{x}　　D. Ce^{x^2}

第二部分　非选择题

二、计算题:本大题共 10 小题,每小题 6 分,共 60 分。

11. 求过点 $M(-1,-2,3)$ 且与平面 $x-2y-z+5=0$ 平行的平面方程.

12. 求过两点 $M_1(3,1,-2)$ 和 $M_2(1,0,2)$ 的直线方程.

13. 求空间曲线 $\Gamma: x=t, y=t, z=t^2-3t$ 在点 $A(1,1,-2)$ 处的切线方程.

14. 求函数 $u=xyz$ 在点 $A(2,1,1)$ 处的梯度.

15. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+2xy-3yz=0$ 所确定,求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

16. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 D 是由 $x+y=2, y=x$ 及 x 轴所围的闭区域.

17. 计算对弧长的曲线积分 $I=\int_L(x+y)\mathrm{d}s$,其中 L 是由点 $A(2,-1)$ 沿直线 $x-2y-4=0$ 到点 $B(4,0)$ 的直线段.

18. 计算对坐标的曲线积分

$$I=\oint_L (1-2x\sin y+3x^2y^2)\mathrm{d}x+(2xy-x^2\cos y+x)\mathrm{d}y$$

其中 L 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 的逆时针方向.

19. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{5^n}$ 的敛散性.

20. 求微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

三、综合题:本大题共 2 小题,每小题 5 分,共 10 分。

21. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}$ 是否收敛?若收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

22. 计算对坐标的曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 被三个坐标面所截得在第一卦限部分曲面的上侧.

2021年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码 00023)

一、单项选择题:本大题共10小题,每小题3分,共30分。

1. D 2. B 3. A 4. C 5. D 6. C 7. A 8. B 9. C 10. D

二、计算题:本大题共10小题,每小题6分,共60分。

11. 解:由平面与平面平行,则所求平面的法向量可取为

$\boldsymbol{n}=\{1,-2,-1\}$, (3分)

又平面过点 $M(-1,-2,3)$,则所求方程为

$x-2y-z=0$ (3分)

12. 解:直线过两点 $M_1(3,1,-2)$ 和 $M_2(1,0,2)$,

则方向向量可取为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-2,-1,4\}$, (3分)

又直线过点 $M_1(3,1,-2)$,

则所求方程为 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{4}$ (3分)

13. 解:曲线 Γ 上任一点处的切向量为 $S=\{1,1,2t-3\}$, (2分)

又点 $A(1,1,-2)$ 对应 $t=1$,则该点处 $S=\{1,1,-1\}$, (2分)

从而所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$$ (2分)

14. 解:由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz,\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz,\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy$, (3分)

可得:$\mathbf{grad}\,u(2,1,1)=\{1,2,2\}$. (3分)

15. 解:令 $F=e^z+2xy-3yz$,则

$F_y=2x-3z, F_z=e^z-3y$, (3分)

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{3z-2x}{e^z-3y}$. (3分)

16. 解：$\iint\limits_D(2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(2x+y)\mathrm{d}x$ （3 分）

$=\int_0^1(x^2+xy)\Big|_y^{2-y}\mathrm{d}y=\int_0^1(4-2y-2y^2)\mathrm{d}y$

$=(4y-y^2-\frac{2}{3}y^3)\Big|_0^1=\frac{7}{3}$ （3 分）

17. 解：$L:x=4+2y,(-1\leqslant y\leqslant 0),\mathrm{d}s=\sqrt{1+(x')^2}\mathrm{d}y=\sqrt{5}\mathrm{d}y$, （2 分）

则 $I=\int_L(x+y)\mathrm{d}s=\int_{-1}^0(4+3y)\sqrt{5}\mathrm{d}y$ （2 分）

$=\sqrt{5}(4y+\frac{3}{2}y^2)\Big|_{-1}^0=\frac{5}{2}\sqrt{5}$ （2 分）

18. 解：设 $P(x,y)=1-2x\sin y+3x^2y^2$,

$Q(x,y)=2xy-x^2\cos y+x$, $D:x^2+y^2\leqslant a^2$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y-2x\cos y+1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\cos y+6x^2y$ （2 分）

由格林公式，得：

$I=\oint_L(1-2x\sin y+3x^2y^2)\mathrm{d}x+(2xy-x^2\cos y+x)\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(2y+1-6x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （2 分）

$=\iint\limits_D(2-6x^2)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=0+\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2$ （2 分）

19. 解：$u_n=\frac{n-1}{5^n},\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\frac{n}{n-1}$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}<1$ （4 分）

$\therefore$ 由比值审敛法知，该级数收敛. （2 分）

20. 解：特征方程为 $r^2+4r+4=0$, （2 分）

特征根 $r_1=r_2=-2$. （2 分）

方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$. （2 分）

三、综合题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分。

21. 解：令 $u_n=\frac{n}{3^{n-1}}$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}\frac{n+1}{n}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}<1$ （2 分）

所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}\right|$ 是收敛的，

从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}$ 收敛，且为绝对收敛. （3 分）

22. 解：$\Sigma:z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，

Σ 在 oxy 平面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$，

Σ 的法向量与 z 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$， （2 分）

得 $I=\iint\limits_{\Sigma}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\iint\limits_{D_{xy}}(1-(1-x^2-y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$

$=\frac{\pi}{8}$ （3 分）