《离散数学》

【大题汇总】+【公式汇总】-丁大乔

◆ 前言

通过分析《离散数学》过去十年的考试真题，我发现这门课程的考试题型比较集中，以下十八道大题基本包含了常考的题型，同学们搞定这十八道大题，通过考试很轻松~~大家加油！

其中，每一章涉及到的公式很多是用在选择填空题中的，大家一定要找时间做一些选择填空题来加深印象哦~~

大题标记【★】的表示考频较高。

◆ 第一章　命题与命题公式

第一章公式：

（1）命题公式的真值：

若 P 为 1， $\neg$P 为 0；若 P 为 0， $\neg$P 为 1

当 P、Q 同时为 1 时， $P\wedge Q$ 为 1；其余情况 $P\wedge Q$ 均为 0

当 P、Q 同时为 0 时， $P\vee Q$ 为 0；其余情况 $P\vee Q$ 均为 1

当 P 为 1，Q 为 0 时， $P\rightarrow Q$ 为 0；其余情况 $P\rightarrow Q$ 均为 1

（2）命题的等值演算：

$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$　　$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

$P \wedge T \Leftrightarrow P$　　$P \vee T \Leftrightarrow T$

$P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$

德摩根律：$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$　　$\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

结合律：$(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$　　　　$(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

吸收律：$A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$　　　　$A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$

分配律：$A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$　　　　$A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

（3）命题符号化：

①虽然 A，但是 B　$\Leftrightarrow$　$A\wedge B$

②只要 A，就 B　$\Leftrightarrow$　$A\rightarrow B$

③因为 A，所以 B　$\Leftrightarrow$　$A\rightarrow B$

④只有 A，才 B　$\Leftrightarrow$　$B\rightarrow A$

⑤除非 A，否则 B　$\Leftrightarrow$　$\neg A\rightarrow B$ 或者 $\neg B\rightarrow A$

第一题、【★】用列真值表的方法说明下列等价式成立： $(P\vee Q)\rightarrow R \Leftrightarrow (P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$

P	Q	R	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\rightarrow R$	$P\rightarrow R$	$Q\rightarrow R$	$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

由真值表可知，对于 PQR 的任意指派，$(P\vee Q)\rightarrow R$ 和$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$真值都相同，所以

$(P\vee Q)\rightarrow R \Leftrightarrow (P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)$

第二题、小赵、小钱、小孙、小李参加数学建模竞赛，根据下列情况，确定 4 人中获奖的是哪些人，未获奖的是哪些人。需写出推导过程。（1）只要小赵或小钱中一人未获奖，小孙和小李就都得奖；（2）小孙没获奖或小李没获奖是不可能的；（3）小钱获奖了。

解：设 P：小赵获奖；Q：小钱获奖；R：小孙获奖；S：小李获奖

（1）$(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(R\wedge S)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(R\wedge S)$

（2） $\neg(\neg R\vee\neg S)\Leftrightarrow R\wedge S$

（3）Q

由于（1)（2)（3）同时满足，即：

$((P\wedge Q)\vee(R\wedge S))\wedge(R\wedge S)\wedge Q$

$\Leftrightarrow(R\wedge S)\wedge Q$ （吸收律）

$\Leftrightarrow R\wedge S\wedge Q$

即小钱、小孙、小李获奖

◆ 第二章 命题逻辑的推理理论

第二章常用推理公式：

$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$

A；$A\rightarrow B\Rightarrow B$

$A\rightarrow B$；$B\rightarrow C\Rightarrow A\rightarrow C$

第三题、【★】求 $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)$ 的主合取范式、主析取范式。

方法一：真值表法

P	Q	R	P→Q	Q→R	(P→Q)∧(Q→R)
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

真值为 F 的大项：M010：$P\vee\neg Q\vee R$；M100：$\neg P\vee Q\vee R$；M101：$\neg P\vee Q\vee\neg R$；M110：$\neg P\vee\neg Q\vee R$

$P\to Q$ 的主合取范式：$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

真值为 T 的小项：m000：$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$；m001：$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$；m011：$\neg P\wedge Q\wedge R$；m111：$P\wedge Q\wedge R$

$P\to Q$ 的主析取范式：$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

方法二：等值演算法：

（1）如果有→；用 $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$ 消去→

（2）如果有¬出现在括号前面；用德摩根律：$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ 或 $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$，

（3）如果不是析取、合取形式；用分配律：$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$或 $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

（4）第（3）步结束后，可得到简单析取式，若简单析取式 A 中缺少变元 P，通过如下变换增加变元 P：$A\Leftrightarrow(A\wedge P)\vee(A\wedge\neg P)\Leftrightarrow(A\vee P)\wedge(A\vee\neg P)$，再使用分配律，去掉重复的小项即可得到主析取范式。

解：主析取范式：

$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow[(\neg P\vee Q)\wedge\neg Q]\vee[(\neg P\vee Q)\wedge R]$

$\Leftrightarrow[(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q)]\vee[(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)]$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R\wedge Q)\vee(Q\wedge R\wedge P)\vee(Q\wedge R\wedge\neg P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R\wedge Q)\vee(Q\wedge R\wedge P)$

主合取范式：

$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg Q\vee R\vee P)\wedge(\neg Q\vee R\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

第四题、【★】构造下列推理的证明：如果他训练刻苦，他必赢得比赛；如果他赢得比赛，他必得到总理的接见；总理没有接见他；所以他训练不刻苦。

解：P：他训练刻苦；Q：他赢得比赛；R：他得到总理的接见

前提：$P \to Q$；$Q \to R$； $\neg R$

结论： $\neg P$

证明：

（1）$P \to Q$ P 规则

（2）$Q \to R$ P 规则

（3）$P \to R$ T（1）(2）

（4）$\neg R \to \neg P$ T（3）

（5）$\neg R$ P 规则

（6）$\neg P$ T（4）(5）

◆ 第三章 谓词逻辑

第三章公式：

（1）论域为{2,3}

$\forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow P(2,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)$

$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow P(2,2) \vee P(2,3) \vee P(3,2) \vee P(3,3)$

$\exists x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(2,y) \vee \forall y P(3,y) \Leftrightarrow (P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee (P(3,2) \wedge P(3,3))$

（2）常用的谓词等值公式：

$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$

$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ （此公式在选择题中遇到则不正确）

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ （此公式在选择题中遇到则不正确）

第五题、【★】设解释 I 如下 :D={2,3} ,已知 F(2,2)=F(3,3)=0 ,F(2,3)=F(3,2)=1 ,f(2,2)=f(2,3)=2 ,f(3,2)=f(3,3)=3。求谓词公式$\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x,y),x))$在 I 下的真值。

解：$\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x,y),x))$

$\Leftrightarrow(F(2,2)\rightarrow F(f(2,2),2))\wedge(F(2,3)\rightarrow F(f(2,3),2))\wedge(F(3,2)\rightarrow F(f(3,2),3))\wedge(F(3,3)\rightarrow F(f(3,3),3))$

$\Leftrightarrow(0\rightarrow F(2,2))\wedge(1\rightarrow F(2,2))\wedge(1\rightarrow F(3,3))\wedge(0\rightarrow F(3,3))$

$\Leftrightarrow(0\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow 0)\wedge(0\rightarrow 0)$

$\Leftrightarrow 1\wedge 0\wedge 0\wedge 1$

$\Leftrightarrow 0$

第六题、证明下列谓词公式为永真式 $\forall y(\forall xA(x)\rightarrow A(y))$

证明：$\forall y(\forall xA(x)\rightarrow A(y))$

$\Leftrightarrow\forall y(\neg\forall xA(x) \vee A(y))$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x) \vee\forall y\, A(y)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x) \vee\forall x\, A(x)$

$\Leftrightarrow T$

第七题、符号化下列命题，并构造推理证明。任何人如果他是素食者，他就不喜欢吃肉；每一个人或者喜欢吃肉或者喜欢吃蔬菜；有的人不爱吃蔬菜。因而不是所有的人都是素食者。

解：P(x)：x 是素食者；Q(x)：x 喜欢吃肉；R(x)：x 喜欢吃蔬菜

前提：$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$； $\forall x(Q(x)\vee R(x))$； $\exists x\neg R(x)$

结论： $\neg\forall xP(x)$

证明：

（1）$\exists x\neg R(x)$	P 规则
（2）$\neg R(c)$	$\exists$-（1）
（3）$\forall x$（ $P(x) \to \neg Q(x)$）	P 规则
（4）$P(c) \to \neg Q(c)$	$\forall$-（3）
（5）$\forall x$（ $Q(x) \vee R(x)$）	P 规则
（6）$Q(c) \vee R(c)$	$\forall$-（5）
（7）$\neg Q(c) \to R(c)$	T（6）
（8）$P(c) \to R(c)$	T（4）（7）
（9）$\neg R(c) \to \neg P(c)$	T（8）
（10）$\neg P(c)$	T（2）（9）
（11）$\exists x\neg P(x)$	$\exists$+（10）
（12）$\neg\forall xP(x)$	T（11）

◆ 第四章　集合

第四章公式：

集合运算等式：

$A-B=A\cap\sim B$　　　　$A-B=A-(A\cap B)$

结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

分配率：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

德摩根律：$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$　　$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

第八题、 A，B，C 是集合，证明：$(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(A-B)-C

=(A∩~B) ∩~C

=A∩(~B∩~C)

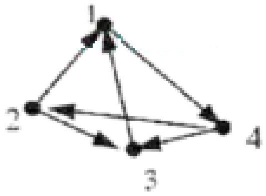
=A∩~(B∪C)

=A-(B∪C)

◆ 第五章　关系与函数

第九题、**【★】**设 R={<1,4>，<2,1>，<2,3>，<3,1>，<4,2>，<4,3>}是 A={1,2,3,4}上的关系。（1）写出 R 的关系矩阵。（2）画出 R 的关系图。（3）说明 R 是否具有自反、反自反、对称、反对称性质。（4）S={{1,2}，{3}，{4,5}}是集合{1,2,3,4,5}上的一个划分，写出由 S 导出的等价关系 P。

解：（1）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



（3）<1,1>,<2,2,>,<3,3>,<4,4>都∉R，所以 R 是反自反的，不是自反的

任何一个<a,b>∈R，必有<b,a>∉R，所以 R 是反对称的，不是对称的

（4）P={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<4,5>,<5,4>,<5,5>}

第十一题、【★】设 A={<a ,b>| a ,b 为正整数} ,在 A 上定义二元关系~如下 :<a ,b>~<c ,d>当且仅当 a+b=c+d。证明：~是一个等价关系。

证明：（1）自反性：a+b=a+b，即<a,b>~<a,b>

（2）对称性：若 a+b=c+d，则必有 c+d=a+b，即若<a,b>~<c,d>，则必有<c,d>~<a,b>

（3）传递性：若 a+b=c+d，且 c+d=e+f，则必有 a+b=e+f，即若<a,b>~<c,d>，且<c,d>~<e,f>，则必有

<a,b>~<e,f>

综上所述，~是一个等价关系。

第十二题、【★】设 A={1，6，9，12，18，36}，≤为整除关系。

（1）画出<A，≤>的哈斯图。

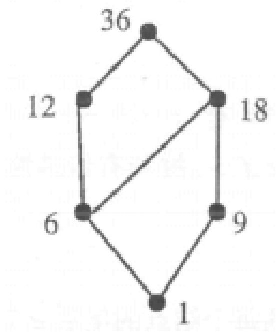
（2）求子集 B={6，12，18}的极大元、极小元、最大元、最小元。

解：6 能整除所有元素，故 6 是最小元

18 不能被 12 整除，故不存在最大元

能整除 6 的只有 6，故 6 是极小元

能被 12 整除的只有 12，能被 18 整除的只有 18，故 12、18 是极大元



◆ 第六章　代数系统的一般概念

第六章定理：

在代数系统<A，∗>中，∀a,b,c ∈ A，

（1）若 a ∗ b ∈ A，则称运算 ∗ 是封闭的

（2）若 a ∗(b ∗ c)=(a ∗ b) ∗ c，则称运算 ∗ 是可结合的、满足结合律

（3）若 e∗a=a∗e=a，则 e 是幺元（单位元）

（4）若a^{-1} ∗ a= a ∗ a^{-1}=e，则a^{-1}是 a 的逆元

第十三题、【★】在整数集 Z 上定义一个二元运算∗如下：a∗b=a+b+1，证明：<Z, ∗>是群。

证明：(1）封闭性：

∀a,b∈ Z，必有 a∗b=a+b+1 ∈ Z，所以运算是封闭的

（2）可结合：

$\forall a,b,c\in Z$，$a*(b*c)=a*(b+c+1)=a+b+c+2$，$(a*b)*c=(a+b+1)*c=a+b+c+2$

所以 $a*(b*c)= (a*b)*c$，即运算是可结合的

（3）存在幺元：

假设存在幺元 e，则 $a*e=a+e+1=a$，可得 $e=-1$

$\forall a\in Z$，必有 $(-1)*a=a*(-1)=a$，所以-1 是 $<Z, *>$ 的幺元

（4）Z 的任何元素存在逆元：

假设 a 的逆元a^{-1}存在，则 $a*a^{-1}=a+a^{-1}+1=-1$，可得$a^{-1}=-a-2$

$\forall a\in Z$，必有 $(-a-2)*a=a*(-a-2)=-1$，所以-a-2 是 a 的逆元

综上所述，$<Z, *>$ 是一个群

◆ 第八章 图

第八章定理、公式：

（1）简单无向图所有顶点的度数总和等于边数的 2 倍

（2）简单无向图奇顶点必有偶数个

（3）n 阶完全图中每个顶点度数都为 n-1，图中共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边

（4）设 G 是一个 n 阶简单连通图，则 G 的边数最少为 n-1，最多为$\frac{n(n-1)}{2}$

第十四题、设无向图 G 有 7 个顶点，每个顶点的度数不是 4 就是 5。证明：G 中至少有 5 个度数为 4 的顶点或至少有 4 个度数为 5 的顶点。

证明：无向图 G 有 7 个顶点，每个顶点的度数不是 4 就是 5，则有以下四种情况：

（1）图 G 中有 7 个度数为 4 的顶点

（2）图 G 中有 5 个度数为 4 的顶点，2 个度数为 5 的顶点

（3）图 G 中有 3 个度数为 4 的顶点，4 个度数为 5 的顶点

（4）图 G 中有 1 个度数为 4 的顶点，6 个度数为 5 的顶点

综上所述， G 中至少有 5 个度数为 4 的顶点或至少有 4 个度数为 5 的顶点。

第十五题、【★】设图 G 有 n 个结点，n+1 条边。证明：图 G 中至少有一个结点度数≥3。

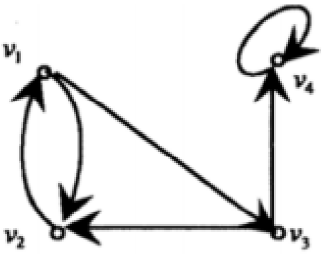
证明：反证法：

假设图 G 中所有结点度数都小于 3

则图 G 中每个结点度数最大为 2，图 G 所有结点度数总和最大为 2n，所以图 G 的边数最大为 n，这与已知条件矛盾

故假设不成立，即图 G 中至少有一个结点度数≥3

第十六题、【★】设图 G 如下图所示：（1）写出图 G 的邻接矩阵 M。



（2）G 中长为 4 的路有几条？其中有几条回路？

解：

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad M^2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad M^4=(M^2)\times(M^2)=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&1&1&1\\1&1&0&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由邻接矩阵可知 G 中长为 4 路有 1+2+1+2+1+1+1+1+1+1+2+1=15 条

回路有 1+1+1=3 条

◆ 第九章　图的应用

第九章公式：

（1）设图 G 为连通平面图，n 个顶点，m 条边，r 个面之间的关系为：欧拉公式：n-m+r=2

（2）n 个顶点的树有 n-1 条边

第十七题、【★】今有 a，b，c，d，e，f，g 7 人，已知下列事实：a 会讲德语；b 会讲法语和德语；c 会讲俄语和

英语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和汉语；f 会讲法语、日语和俄语；g 会讲英语和汉语。

试问：这 7 人应如何排座位（按圆桌排），才能使每个人和他身边的人交谈？

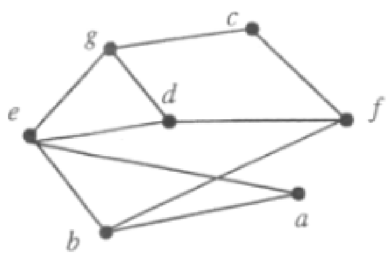
解：若两人有共同语言，在两人之间画一条边，则可得到如下连通图 G

将这 7 人圆桌排座位，使得每个人都能和他身边的人交谈，就是在图 G 中找哈密顿回路

经观察，图 G 中有两条哈密顿回路：

abfcgdea

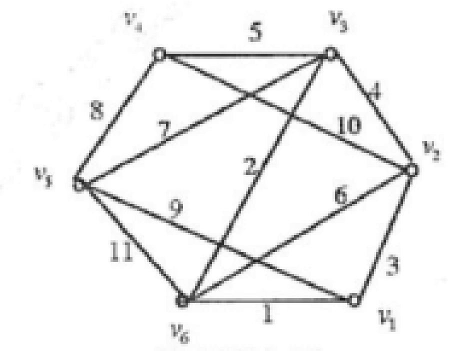
aedgcfba



第十八题、**【★】**某城市拟在六个城区之间架设有线电视网，其网点间的距离如下列的无向有权图矩阵给出，试给出架设线路的最优方案，请画出图，并计算出最优方案下线路的长度。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 8 & 0 & 11 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

解：首先画出邻接矩阵对应的无向有权图：



用 Kruskal 算法求最小生成树：

（1）添加所有顶点

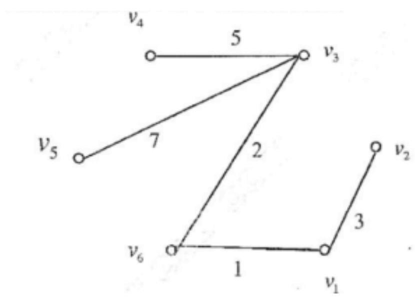
（2）添加权值为 1 的边(v1,v6)

（3）添加权值为 2 的边(v3,v6)

（4）添加权值为 3 的边(v1,v2)

（5）添加权值为 5 的边(v3,v4)

（6）添加权值为 7 的边(v3,v5)



最优线路如最小生成树所示，最优线路长度为 1+2+3+5+7=18