离散数学

第五章 图论

- 主要内容
- 5.1图的基本概念
- 5.2路与回路 图的连通性
- 5.3图的矩阵表示
- 5.4欧拉图与汉密尔顿图
- 5.5平面图
- 5.6树及其应用

5.1 图的基本概念

- 定义5.1.1 一个图是二元组<V,E>,其中V是非空结点集，E是连接结点的边集。
- 在图中每条边都用无序偶表达，这个图的每条边都是无向边，如果图中边元素，用有序偶表达，那么这样的边元素，就是有向边。每一条边都是无向边的图称无向图。每一条边都是有向边的图称有向图。
- 在一个图中，不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点。
- 在一个图中，若两个结点由一条有向边或无向边关联，则这两个结点称为邻接点。
- 关联于同一结点的两条边称为邻接边。
- 在图G=<V,E>中，若V≠ ，但E= ，称这个图为零图，当|V|=n，E= 时，称为n阶零图。

5.1 图的基本概念

- 连接于同一结点间的多条边称为平行边。如果有向边要求方向相同，含有平行边的任何一个图称为多重图。不含多重边和环的图称为简单图。
- 定义5.1.2 设G=<V,E>是一个图，结点v（v ∈ V）关联的边数称作该结点的度数，记为d(v)(或deg(v))。若v有自环，则使d（v）增加2.
- deg(v)=1的结点称为悬挂点，度数为奇（偶）数的结点称为奇（偶）结点。
- 定理5.1.1 每个图中，结点度数总和等于边数的两倍。$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E|$

设简单图 G 所有结点的度数之和为 18，则 G 的边数为

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

设简单图 G 所有结点的度数之和为 8，则 G 的边数为

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

设简单图 G 所有结点的度数之和为 24，则 G 的边数为

A. 6　　B. 8　　C. 12　　D. 24

设简单图 G 所有结点的度数之和为 36，则 G 的边数为

A. 12　　B. 18　　C. 36　　D. 72

设简单图 G 所有结点的度数之和为 36，则 G 的边数为

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 18

设图 G 有 n 个结点，$n+1$ 条边，证明：G 中至少有一个结点度数 $\geqslant 3$。

设图 G 有 n 个结点，$2n$ 条边，且存在度数为 3 的结点。
证明：G 中至少有一个结点度数 ≥ 5。

设图 G 有 n 个结点，n 条边，且存在度数为 1 的结点。
证明：G 中至少有一个结点度数 ≥ 3。

设 G 是有 n 个结点、$n+1$ 条边的图，且每个结点的度数都不超过 3，
证明：G 中至少有 2 个度数等于 3 的结点。

5.1 图的基本概念

- 定理5.1.2 在任何图中，奇结点为偶数个。
- 定义5.1.3 设G=<V,E>是一个有向图，以结点v为起点的弧数称为v的出度，记为$\deg^{+}(v)$；以结点v为终点的弧数称为v的入度，记为$\deg^{-}(v)$。结点的出度与入度之和就是该结点的度数。$\deg(v)=\deg^{+}(v)+\deg^{-}(v)$
- 定理5.1.3 在有向图中，所以结点的入度之和等于所有结点出度之和。
- 定义5.1.5 对于无向图G=<V,E>，记
  $$\Delta(G)=\Delta=\max\{\deg(v) \mid v\in V\},\delta(G)=\delta=\min\{\deg(v) \mid v\in V\}$$
- 它们分别称为图G的最大度和最小度。

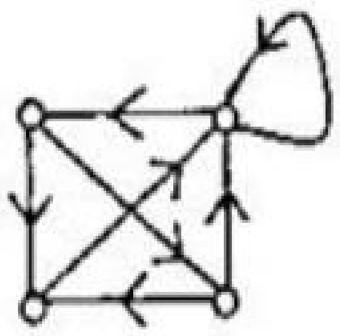
右图的最大入度是

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3



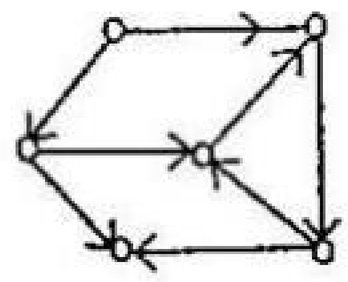
右图的最大出度是

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3



5.1 图的基本概念

- 定义5.1.6 在无向图G=<V,E>中，如果每个结点的度是K，则图G称为K度正则图。
- 定义5.1.4 在简单无向图G=<V,E>中，如果V中的每个结点都与其余的所有结点邻接，则该图称为完全图，记为Kn，n是|V|。
- n个结点的完全图有n个端点及n(n－1) / 2条边。它是(n－1)正则图。

K_n 是 n 个结点的完全图，则K_{20} 有__________条边，每个结点的度数为__________。

K_n 是 n 个结点的完全图，则K_6 有__________条边，每个结点的度数为__________。

K_n 是 n 个结点的完全图，则K_{10} 边数为__________，每个结点的度数为__________。

5.1 图的基本概念

- 定义5.1.7 设图G=<V,E>，如有图G'=<V',E'>,且E' $\subseteq$ E，V' $\subseteq$ V，则称G'是G的子图。如果G的子图包含G的所有结点，即E' $\subseteq$ E，V' =V，则G'是G的生成子图。

5.2 路与回路 图的连通性

- 定义5.2.1 给定图G=<V,E>设v0,v1,...,vn∈V，e1,e2,...,en∈ E,其中ei是关联于结点vi-1,vi的边。交替序列v0e1v1e2...env称为联结v0到vn的路。
- v0和vn分别称作路的起点和终点，边的数目n称作路的长度。当v0=vn时，这条路称为回路。
- 若一条路中，所有边e1,e2,...,en均不相同，称作迹。若一条路中所有结点v0,v1,...,vn均不相同（当然边也不相同），则称此路为初级路。若回路中除v0=vn外其余结点各不相同，所以边也各不相同，则称此回路为初级回路或圈。有边重复出现的路称为复杂路。有边重复出现的回路称为复杂回路。
- 定理5.2.1 若图G中每个结点度数至少为2，则G包含一条初级回路。

5.2 路与回路 图的连通性

∈ ⊆ ∈

- 定义5.2.2 在无向图G中，结点u和v之间若存在一条路，则称结点u和v是连通的。若图G中任何两个不同结点之间存在一条路，则称G为连通图，否则G为不连通图。
- 定理5.2.2 设有G=<V,E>，V的结点数|V|=n，称该图为n阶图，若从结点vi到vj存在路，则从vi到vj必存在长度小于等于n-1的一条路。
- 在有向图中，从结点u到v有一条路，则称从u到v是可达的。
- 定义5.2.3 在简单有向图G中，

任何一对结点间，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称这个图是单侧连通的。

如果对于图G中任何一对结点，两者之间是相互可达，则称这个图是强连通。

如果在图G中，略去边的方向，将它看成无向图之后，图是连通的，则该图称为弱连通。

5.2 路与回路 图的连通性

设 $V=\{a,b,c,d\}$，则下列与 V 构成强连通图的边集的是

A. $E_1=\{<a,d>,<b,a>,<b,d>,<c,b>,<d,c>\}$

B. $E_2=\{<a,d>,<b,a>,<b,c>,<b,d>,<d,c>\}$

C. $E_3=\{<a,c>,<b,a>,<b,c>,<d,a>,<d,c>\}$

D. $E_4=\{<a,b>,<a,c>,<a,d>,<b,d>,<c,d>\}$

设 G 是有 n 个结点、$n+1$ 条边的简单连通图，且 G 中存在度数为 5 的结点.
证明：G 中至少有一个度数为 1 的结点.

设 G 是有 n 个结点、n 条边的简单连通图，且 G 中存在度数为 3 的结点。
证明：G 中至少有一个度数为 1 的结点。

5.2 路与回路 图的连通性

$\in$

- 定义5.2.4 设无向图G=<V,E>为连通图，若有点集v1 $\subset$ V,使图G删除了v1的所有结点后得到的子图是不连通的，而删除了v1的任何真子集后所得到的子图仍是连通图，则称v1是G的一个**点割集**。若某一个结点构成一个点割集，则称该结点为**割点**。

- 定义5.2.5 设无向图G=<V,E>为连通图，若有边集e1 $\subset$ E,使图G删除了e1的所有边后得到的子图是不连通的，而删除了e1的任何真子集后所得到的子图仍是连通图，则称e1是G的一个**边割集**。若某一个边构成一个边割集，则称该结点为**割边**或桥。

5.3 图的矩阵表示

∈ ⊆ ∈

- 定义5.3.1 设G是n个结点，无多重边的图，设结点依次标记v1,v2,...,vn 则有矩阵M=(mij),其中mij= $\begin{cases} 1,\text{若vi与vj邻接，} \\ 0,\text{若vi与vj不邻接,} \end{cases}$

称M(G)为图G的**邻接矩阵**。

- 例1

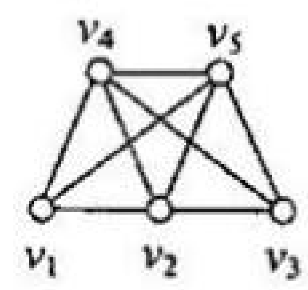
. 设有向图 $D = \langle V,E \rangle$ 的邻接矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,那么 $|E|$ = __________,

$|V|$ = __________。

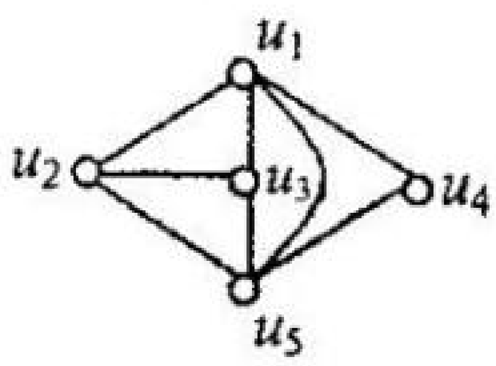
5.3 图的矩阵表示

- 定理5.3.1 设M是n个结点的简单图G的邻接矩阵，$M^k=(m_{ij}^{(k)})$是M的k次幂，则在M^k中$m_{ij}^{(k)}$等于结点vi和vj之间长度k的路径的数目。

用矩阵的方法求右图中结点 v_1, v_3 之间长度为 2 的路径的数目。



用矩阵的方法求 图中结点 u_1, u_5 之间长度为 2 的路径的数目。



5.3 图的矩阵表示

- 定义5.3.2 设G是n个结点，无多重边的图，n×n矩阵称为路径矩阵（可达性矩阵），记为$P(G)=(P_{ij})$,其中

$$P_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}v_i\text{与}v_j\text{之间至少存在一条路径，}\\0,\text{若}v_i\text{与}v_j\text{之间不存在路径}\end{cases}$$

可由图G的邻接矩阵A得到路径矩阵P，即设$B_n=A+A^2+\ldots A^n$,再从B_n中将不为零的元素改换为1.为零的元素不变，这个改换的矩阵，即为路径矩阵。

- 例2

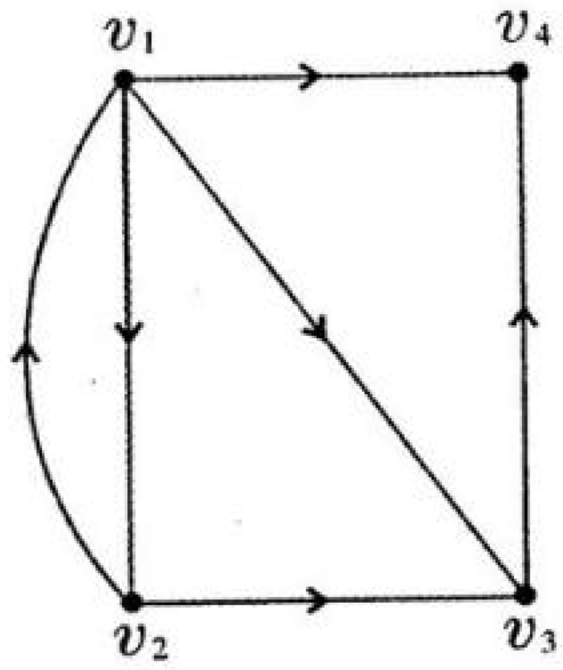
5.3 图的矩阵表示

有向图 $D=<V,E>$ 如[illegible]图，请完成下列问题：

(1) 给出 D 的邻接矩阵及 4 次以下的幂；

(2) 判定 D 中长度为 2 的路径有几条？从 v_1 到 v_4 长度为 3 的路径有几条？

(3) 求 D 的可达性矩阵 P。



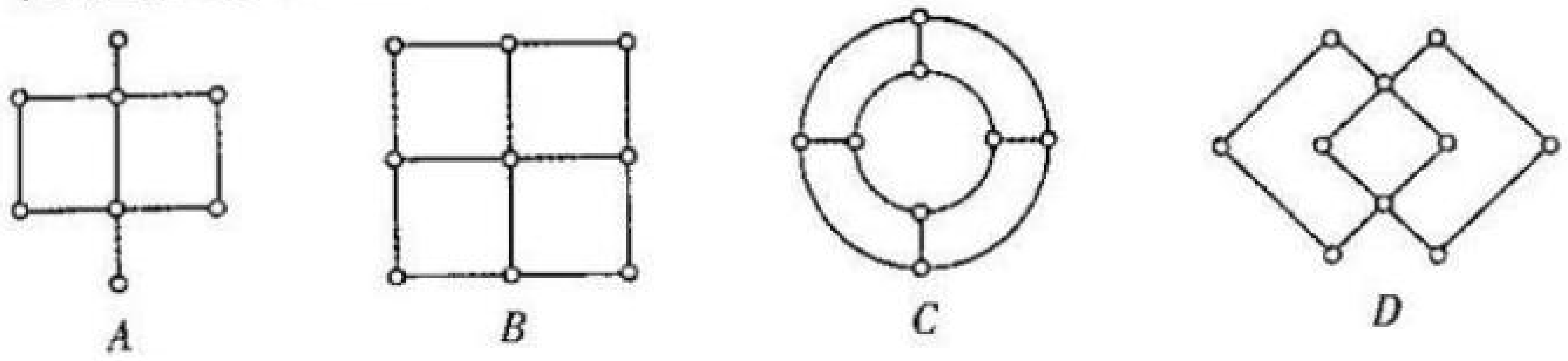
5.4 欧拉图与汉密尔顿图

∈ ⊆ ∈

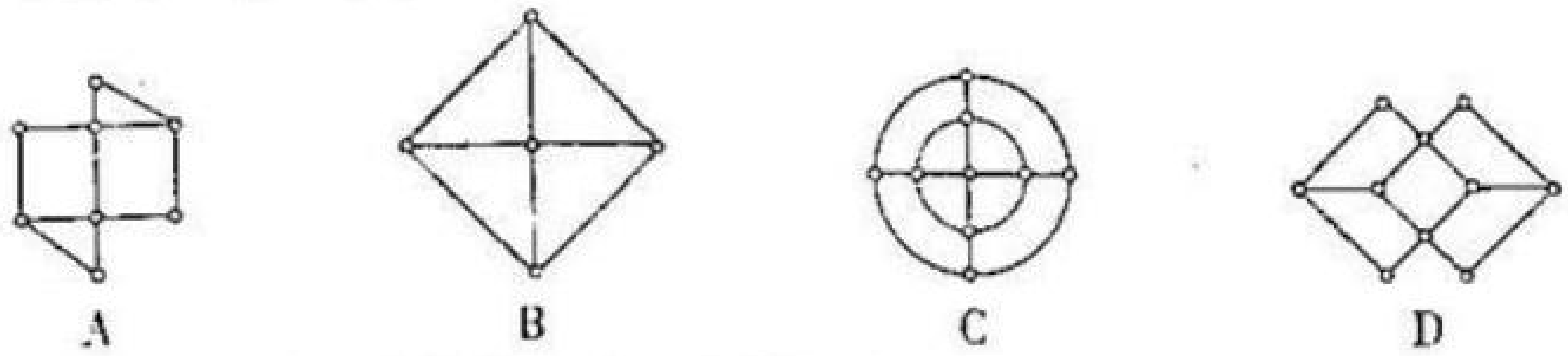
- 哥尼斯堡七桥问题
- 定义5.4.1 给定无孤立结点图G，若存在一条路，经过图中每边一次且仅一次，该条路称为欧拉路；若存在一条回路，经过图中每边一次且仅一次，该回路称为欧拉回路。存在欧拉回路的图，称为欧拉图。
- 定理5.4.1 无向图G有一条欧拉路，当且仅当G是连通的，且有零个或两个奇数度结点。
- 推论：无向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，且所有结点度数都是偶数。
- 七桥问题解答
- 例1 一笔画

5.4 欧拉图与汉密尔顿图

下列图是欧拉图的是



下列可一笔画成的图形是



5.4 欧拉图与汉密尔顿图

以下必为欧拉图的是

A. 结点度数都是偶数的连通图

B. 奇数度结点最多 2 个的连通图

C. 存在欧拉路的图

D. 无回路的连通图

下列必为欧拉图的是

A. 无奇数度结点的连通图

B. 奇数度结点不超过 2 个的连通图

C. 可以一笔画的图

D. 有回路的连通图

下列必为欧拉图的是

A. 奇数度结点最多 2 个的连通图

B. 可以一笔画的图

C. 存在欧拉路的图

D. 存在欧拉回路的图

下列必为欧拉图的是

A. 不可以一笔画的图

B. 结点度数都是偶数的图

C. 存在欧拉回路的图

D. 奇数度结点有 3 个的连通图

下列必为欧拉图的是

A. 有回路的连通图

B. 不可以一笔画的图

C. 有 1 个奇数度结点的连通图

D. 无奇数度结点的连通图

一个连通的无向图 G,如果它的所有结点的度数都是偶数,那么它有一条

A. 汉密尔顿回路 **B. 欧拉回路** **C. 汉密尔顿通路** **D. 初级回路**

5.4 欧拉图与汉密尔顿图

∈ ⊆ ∈

- 定义5.4.2 给定有向图G，通过图中每一边且仅一次的一条单向路（回路）称作单向欧拉路（回路）。

- 定理5.4.2 有向图G具有一条单向欧拉回路，当且仅当是可达的，且每个结点入度等于出度。一个有向图G具有单向欧拉路，当且仅当是可达的，且除两个结点外，每个结点入度等于出度，而这两个结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的入度比出度小1.

- 定义5.4.3 给定图G，若存在一条路，经过图中每个结点恰好一次，这条路称为汉密尔顿路，若存在一条回路，经过图中每个结点恰好一次，这条路称为汉密尔顿回路。具有汉密尔顿回路的图称作汉密尔顿图。

5.4 欧拉图与汉密尔顿图

∈ ⊆ ∈

- 例2.今有a,b,c,d,e,f,g7人，已知下列事实：
- a会讲英语；
- b会讲英语和汉语；
- c会讲英语、意大利语和俄语；
- d会讲日语和汉语；
- e会讲德语和意大利语；
- f会讲法语、日语和俄语；
- g会讲法语和德语。
- 试问这7个人应如何排座位，才能使每个人和他身边的人交谈？

5.4 欧拉图与汉密尔顿图

$\in$ $\subseteq$ $\in$

今有a,b,c,d,e,f,g7 人，已知下列事实：a 会讲德语和汉语；b 会讲英语和汉语；c 会讲俄语和英语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语；f 会讲法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。试问这 7 个人应如何排座位（围圆桌排），才能使每个人和他身边的人交谈？

今有a,b,c,d,e,f,g7 人，已知下列事实：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语和日语；g 会讲法语和德语。试问这 7 人如何排座位（圆桌），才能使每个人和他左右两边的人交谈？

今有a,b,c,d,e,f,g7 人，已知下列事实：a 会讲德语；b 会讲法语和德语；c 会讲俄语和英语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和汉语；f 会讲法语、日语和俄语；g 会讲英语和汉语。试问：这 7 个人应如何排座位（按圆桌排），才能使每个人和他身边的人交谈？

5.4 欧拉图与汉密尔顿图

∈ ⊆ ∈

已知a,b,c,d,e,f,g共7个人中，a会讲英语；b会讲英语和汉语；c会讲英语、意大利语和俄语；d会讲汉语和日语；e会讲意大利语和德语；f会讲俄语、日语和法语；g会讲德语和法语。若将他们的座位安排在圆桌旁，要使得每个人都能与他身边的人交谈，应如何安排座位，说明理由并画出座位安排图。

今有a,b,c,d,e,f,g共7人，已知下列事实：

(1)a会讲意大利语和韩语；

(2)b会讲汉语；

(3)c会讲韩语和英语；

(4)d会讲英语、法语和俄语；

(5)e会讲汉语、俄语和意大利语；

(6)f会讲英语；

(7)g会讲汉语和法语。

试问这7个人应如何排座位(圆桌)，才能使每个人和坐在他身边的人交谈？

今有a,b,c,d,e,f,g共7人，已知下列事实：a会讲汉语和英语；b会讲英语和韩语；c会讲英语和意大利语；d会讲法语、俄语和意大利语；e会讲俄语和韩语；f会讲汉语；g会讲法语和汉语。试问这7个人应如何排座位(圆桌)，才能使每个人和他身边的人交谈？

5.5 平面图

- 定义5.5.1 若一个图能画在平面上，使它的边互不相交（除在结点处），则称该图为平面图。画出的没有边交叉出现的图G，亦称为G的一个平面嵌入。

- K3,3与K5是非平面图。

- n点完全图Kn，当n≦4，Kn是平面图。当n≧5时，Kn是非平面图。

- 定义5.5.2 设G是一个连通平面图（G的某个平面嵌入），G的边将G所在的平面划分成若干个区域，每个区域称为G的一个面，其中面积无限的区域称为无限面或外部面。面积有限的区域称为有限面或内部面。包围每个面的所有边构成的回路的长度称为该面的次数。若区域记为R，则次数可记为deg(R)

- 定理5.5.1 设连通平面图G，面的次数之和等于其边数的两倍。

5.5 平面图

∈ ⊆ ∈

- 定理5.5.2 设连通平面图G，共有n个结点，m条边，r个面，则欧拉公式n-m+r=2。
- 例:证明当每个结点的度数大于等于3时，不存在有7条边的简单连通图。
- 定理5.5.3 设G是一个有v个结点e条边的连通简单平面图，若v≧3,则e≦3v-6
- 例：判定K5不是平面图。

5.6 树及应用

∈ ⊆ ∈

- 定义5.6.1 一个连通且无回路的无向图称为树。
- 树中度数为1的结点称为树叶，度数大于1 的结点称分枝点或内点。若一个无回路的无向图的每个连通分图是树，则它称作森林。
- 定理5.6.1 给定图T，有n个结点，以下关于树的定义是等价的：

① 无回路的连通图

② 无回路　e=v-1(其中e是边数，v是结点数)

③ 连通且e=v-1

④ 无回路但增加一条新边，得到一个仅有一个回路。

⑤ 连通，但删去一边后便不连通

⑥ 每一对结点间有且仅有一条路。

∈ ⊆ ∈

下列无向图一定是树的是

A. 连通图

B. 无回路但添加一条边则有回路的图

C. 每对结点之间都有通路的图

D. 有 n 个结点，$n-1$ 条边的图

下列无向图一定是树的是

A. 无回路的图

B. 边数比结点数少 1 的图

C. 连通但任意删去一条边都不连通的图

D. 每对结点之间都有通路的图

下列无向图一定是树的是

A. 无回路的连通图

B. 无环的连通图

C. 每对结点之间都有通路的图

D. 结点数比边数多 1 的图

∈ ⊆ ∈

下列无向图不一定是树的是

A. 有 n 个结点，$n-1$ 条边的图

B. 无回路的连通图

C. 连通但删去一条边则不连通的图

D. 无回路但添加一条边则有一个回路的连通图

下列无向图不一定是树的是

A. 结点数比边数多 1 的连通图

B. 每对结点之间都有通路的图

C. 无回路但添加一条边则有回路的图

D. 无回路的连通图

∈ ⊆ ∈

一棵树有 5 个 3 度结点,2 个 2 度结点,其它的都是 1 度结点,那么这棵树的结点数是

A. 13　　B. 14　　C. 16　　D. 17

一棵树的 3 个 4 度点,4 个 2 度点,其它的都是 1 度,那么这棵树的边数是

A. 13　　B. 14　　C. 15　　D. 16

一棵树有 2 个 2 度结点,1 个 3 度结点,3 个 4 度结点,则其 1 度结点数为

A. 5　　B. 7　　C. 8　　D. 9

5.6 树及应用

- 定理5.6.2 任一颗非平凡树至少有两片树叶。
- 定义5.6.2 设$G=<V,E>$是无向连通图，若G的生成子图T是一棵树，则称T是G的**生成树**。G在T中的边称T的**树枝**，G不在T中的边称为**弦**。所有弦的集合及其导出的子图称为G的**余树**。
- 定理5.6.3 连通图至少有一颗生成树。

设 $G = < V,E >$ 是连通图，且 $e \in E$，证明：当且仅当 e 是 G 的割边时，e 才在 G 的每棵生成树中。

5.6 树及应用

∈ ⊆ ∈

- 定义5.6.3 设无向连通带权图$G=<V,E,W>$设T是G的一颗生成树，若给T的每一条边一个权值，T的各边权值之和，称为T的**权**，记为**W(T)**。G的所有生成树中带权最小的生成树称为**最小生成树**。

- 定理5.6.4 设图$G=<V,E,W>$是无向连通带权图，它有m条边e1,e2,...,em,分别带权为：a1,a2,...,am,不妨设a1≦a2≦...≦am,以下算法产生的是最小生成树：

① 取权a1的边e1，使e1属于T（e1非环，若e1是环则不取）

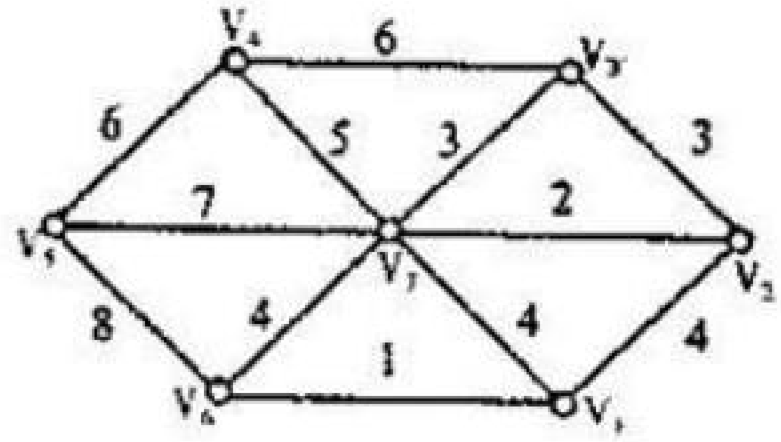
② 再取权为a2的边e2，使e2属于T，这时需保证e2与e1不构成回路，否则不取

③ 再查e3,继续这个过程，直到形成生成树为止。

∈ ⊆ ∈

例1

求 右 图的最小生成树。



某城市拟在六个区之间架设有线电话网，其网点间的距离如下列有权矩阵给出，请绘出有权图，给出架设线路的最优方案，并计算线路的总长度。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∈ ⊆ ∈

- 定义5.6.4 如果有向图在不考虑边的方向时，是一棵树，那么这个有向图称为有向树。
- 定义5.6.5 若一棵有向树，恰有一个结点入度为0，其余结点的入度均为1，则称该有向树为根数。入度为0的结点称为根，出度为0的结点称为叶，出度不为0的结点称为分枝点或内点。
- 定义5.6.6 设u是有根树的分枝点，若从u到w有一条弧(u,w),则称w为u的儿子或称u为w的父亲。若一个结点有两个儿子，则这两个儿子之间称为兄弟。若从u到z有一条有向路，则称z是u的子孙或称u是z的祖辈。
- 从根到某一结点v的路的长度，称为v的层数，从根到叶的最大层数，称为根数的高。
- 定义5.6.7 在一棵有向树中，在每一级的结点都指定某种次序，称树为有序树。

5.6 树及应用

∈ ⊆ ∈

- 定义5.6.8 在根数中，若每个结点的出度小于等于m，则称这棵树为m叉树。如果每一个结点的出度恰好等于m或0，则称这棵树为完全m叉树，若其所有树叶层次相同，称为正则m叉树。
- 定义5.6.5 设有完全m叉树，其树叶树为t，分枝点数为i，则(m-1)i=t-1。
- 定义5.6.9 树包含一个或多个结点，这些结点中的某一个称为根，而其他所有结点，被分成有限个称为子树的树。
- 对于二叉有序正则树主要有以下三种行遍或周游方法：

① 中序行遍法：左子树，树根，右子树

② 前序行遍法：树根，左子树，右子树

③ 后序行遍法：左子树，右子树，树根

∈ ⊆ ∈

例6