

离散数学



第二章 谓词演算

- 主要内容
- 2.1谓词的概念与表示
- 2.2量词与合式公式
- 2.3谓词演算的等价式与蕴含式
- 2.4前束范式
- 2.5谓词演算的推理理论

2.1 谓词的概念与表示

- ☛ 客体：指可以独立存在的对象，一个具体的事物，一个抽象的概念
- ☛ 谓词：指明客体性质或指明客体之间关系
- ☛ 例：（1）王强是个大学生
- ☛ （2）7是质数
- ☛ （3）哥白尼指出地球绕太阳转
- ☛ （4）济南位于北京与上海之间
- ☛ 我们将用大写字母表示谓词，小写字母表示客体名称。

2.1 谓词的概念与表示

- 个体常项：具体、特定的个体
 - 个体变项：抽象、泛指个体
 - 个体域（论域）：个体变项的取值范围
 - 全总个体域：一切事物组成的个体域
 - 谓词常项：表示具体性质或关系的谓词
-
- 定义2.1.1 由一个谓词，一些个体变元组成的表达式简称为谓词变项或命题函数。
 - 谓词变项中，个体变元的数目称为谓词变项的元数。
 - 如 $F(x)$ 为一元谓词， $L(x,y)$ 为二元谓词。 $F(a)$ （ a 为常量）为0元谓词

2.1 谓词的概念与表示

- ☛ 例：以谓词表达下述命题。
- ☛ 某人大于18岁，身体健康，无色盲，大学毕业，则他可参加飞行员考试。
- ☛ 解：设某人为 a 。 $A(x)$: x 超过18岁； $B(x)$: x 身体健康； $C(x)$: x 色盲； $D(x)$: x 大学毕业； $E(x)$: x 参加飞行员考试；

$$A(a) \wedge B(a) \wedge \neg C(a) \wedge D(a) \rightarrow E(a)$$

2.1 谓词的概念与表示

- ☛ 例：用0元谓词符号化下列命题。
- ☛ (a) 如果3小于4，且4小于5，则3小于5.
- ☛ (b) 如果某数是有理数，则某数可写成分数。
- ☛ 解：(a) 设 $L(x,y):x$ 小于 y

$$L(3,4) \wedge L(4,5) \rightarrow L(3,5)$$

(b) 设 $G(x):x$ 是有理数； $H(x):x$ 可写成分数； a ：某数。

$$G(a) \rightarrow H(a)$$

2.1 谓词的概念与表示

☞ 练习：P29 3



2.2 量词与合式公式

☛ 量词：表示数量的词

☛ 量词有2种：

- ☛ 1.全称量词：对应日常语言中的“一切”“任意的”“所有”“凡是”等词。 \forall 用符号 $\forall x$ 表示。 $\forall x F(x)$ 表示对个体域里所有的 x ，而表示个体域里所有个体，都有性质 F 。
- ☛ 2.存在量词：对应日常语言中的“存在的”“有一个”“至少有一个”等词。用符号 $\exists x$ 表示。 $\exists x F(x)$ 表示存在个体域中的个体，而表示存在个体域中的个体具有性质 F 。

2.2 量词与合式公式

☛ 例：每个自然数都是实数。

☛ 解：个体域设为自然数集 N ，令 $R(x)$:表示 x 是实数。 $\forall xR(x)$

☛ 若不指明论域，那么可设 $N(x)$ ： x 是自然数， $R(x)$: x 是实数

$$\forall x(N(x) \rightarrow R(x))$$

☛ 例：有些人可以活过百岁。

☛ 解：若把人类领域作为论域，令 $G(x)$: x 可以活过百岁。 $\exists xG(x)$

☛ 若不指明论域，令 $S(x)$: x 是人， $G(x)$: x 可以活过百岁。

$$\exists x(S(x) \wedge G(x))$$

2.2 量词与合式公式

☛ 例：每个自然数都是实数。

☛ 解：个体域设为自然数集 N ，令 $R(x)$:表示 x 是实数。 $\forall xR(x)$

☛ 若不指明论域，那么可设 $N(x)$: x 是自然数， $R(x)$: x 是实数 $\forall x(N(x) \rightarrow R(x))$

☛ 例：有些人可以活过百岁。

☛ 解：若把人类领域作为论域，令 $G(x)$: x 可以活过百岁。 $\exists xG(x)$

☛ 若不指明论域，令 $S(x)$: x 是人， $G(x)$: x 可以活过百岁。 $\exists x(S(x) \wedge G(x))$

☛ $N(x), S(x)$ 都是用来指明论域，它们称特性谓词。

☛ 在全称量词中，特性谓词是条件式的前件。

☛ 在存在量词中，特性谓词后跟一个合取项。

2.2 量词与合式公式

☛ 例：凡是偶数均能被2整除。

☛ 解：E(x):x是偶数；G(x)：x能被2整除。

$$\forall x(E(x) \rightarrow G(x))$$

☛ 例：没有不犯错误的人。

☛ 解：设M(x):x是人；F(x):x犯错误。 $\neg \exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$

☛ 本题可改述为：所有人都犯错误。 $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

2.2 量词与合式公式

- ☛ 例：著名的苏格拉底三段论可叙述如下：
- ☛ (a) 所有人都会死的；
- ☛ (b) 因为苏格拉底是人；
- ☛ (c) 所以苏格拉底总是要死的。
- ☛ 解：设 $M(x)$: x 是人； $D(x)$: x 是要死的； a ：苏格拉底
- ☛ (a) $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$
- ☛ (b) $M(a)$
- ☛ (c) $D(a)$
- ☛ 前提： $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$, $M(a)$ 结论： $D(a)$

2.2 量词与合式公式

14. 设 $A(x)$: x 是实数, $B(x)$: x 是有理数, 命题“每个有理数都是实数”符号化为 ()

A. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

C. $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$

D. $(\forall x)(B(x) \rightarrow A(x))$

15. 设 $A(x)$: x 是实数, $B(x)$: x 是有理数, 命题“有的实数不是有理数”符号化为 ()

A. $\neg(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

C. $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$

D. $\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$



2.2 量词与合式公式

18. 设 $A(x)$: x 是实数, $B(x)$: x 是有理数, 命题“有的实数是有理数”符号化为 ()

A. $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$

B. $(\exists x)(A(x) \vee B(x))$

C. $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

$\neg(\forall x)(A(x) \wedge \neg B(x))$



2.2 量词与合式公式

16. 设 $A(x)$: x 是鸟, $B(x)$: x 会飞, 命题“有的鸟不会飞”符号化为 ()

A. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

C. $\neg(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$

D. $\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

17. 设 $A(x)$: x 是鸟, $B(x)$: x 会飞, 命题“没有不会飞的鸟”符号化为 ()

A. $\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

B. $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

C. $\neg(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$

D. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$



2.2 量词与合式公式

- 定义2.2.1 由一个或几个原子命题函数以及逻辑联结词组合而成的表达式称为复合命题函数。
- 定义2.2.2 谓词演算的合式公式，可由下述各条组成（合式公式A记为 $WffA$ ）：
 - （1）原子谓词公式是合式公式。
 - （2）若A是合式公式，则 $\neg A$ 是一个合式公式。
 - （3）若A和B都是合式公式，则 $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ， $(A \rightarrow B)$ ， $(A \leftrightarrow B)$ 是合式公式。
 - （4）如果A是合式公式，x是A中出现的任何变元，则 $(\forall x)A$ 和 $(\exists x)A$ 都是合式公式。
 - （5）只有经过有限次应用规则（1）（2）（3）（4）所得到的公式是合式公式。

2.2 量词与合式公式

1. 下列式子不是谓词合式公式的是 ()

A. $(\forall x) P(x) \rightarrow R(y)$

B. $(\forall x) \neg P(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

C. $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow (\exists x)R(x)$

D. $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (\exists z)R(x, z)$

2. 下列式子不是谓词合式公式的是 ()

A. $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee (\exists x)P(x, y)$

B. $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \vee Q(x, z) \wedge (\exists x)P(x, y)$

C. $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$

D. $(\exists x)P(x) \wedge Q(y, z)$



2.2 量词与合式公式

定义2.2.3 给定谓词合式公式 A ，其中一部分公式形式为 $(\forall x)B(x)$ 或 $(\exists x)B(x)$

称量词 \forall, \exists 后面所跟的 x 为**指导变元**或**作用变元**。称 $B(x)$ 为相应量词的**辖域**（或作用域）。

在辖域中， x 的一切出现称为**约束出现**。 $B(x)$ 中除去约束出现的其他变项的出现为**自由出现**。

2.2 量词与合式公式

例：指出下列各合式公式中的指导变元，量词的辖域，个体变项的自由出现和约束出现。

(a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y))$

(b) $(\exists x)F(x) \wedge G(x, y)$

(c) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge (\exists x)P(x, y)$

2.2 量词与合式公式

5. 对于公式 $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x)R(x, y)$ ，下列说法正确的是（ ）

A. y 是自由变元

B. y 是约束变元

C. $(\exists x)$ 的辖域是 $R(x, y)$

D. $(\forall x)$ 的辖域是 $(\exists y)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x)R(x, y)$

6. 对于公式 $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee (\exists z)R(x, z)$ ，下列说法正确的是（ ）

B. y 是自由变元

B. y 是约束变元

C. $(\forall x)$ 的辖域是 $(P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \vee (\exists z)R(x, z)$

D. $(\forall x)$ 的辖域是 $P(x, y)$

2.2 量词与合式公式

3. 公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, z)) \wedge (\exists y)R(x, y)$ 的约束变元为 _____, 自由变元为 _____。

4. 公式 $(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(x, z)) \wedge (\exists y)R(x, y)$ 的约束变元为 _____, 自由变元为 _____。

5. 公式 $P(x) \rightarrow (\forall y)(\exists z)R(x, y, z)$ 的约束变元为 _____, 自由变元为 _____。

6. 公式 $(\exists x)(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(z)) \vee R(z)$ 的约束变元为 _____, 自由变元为 _____。

7. 合式公式 $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge (\exists x)P(x, y)$ 中, $(\forall x)$ 和 $(\forall y)$ 的作用域是 _____, $(\exists x)$ 的作用域是 _____。



2.2 量词与合式公式

- 在谓词合式公式中，有的个体变元既可以是约束出现，又可以是自由出现，为了避免混淆采用下列两个规则：
- (1) **约束变元改名规则**，在量词辖域中，某个约束出现的个体变元及相应指导变元改成本辖域中未出现过的个体变元，其余不变。
- (2) **自由变元代入规则**，对某个自由出现的个体变元可用个体常元或用与原子公式中与所有个体变元不同的个体变元去代入，且处处代入。
- 例：对 $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)) \wedge Q(x, y)$ 换名。
- 解： $(\forall z)(P(z) \rightarrow R(z, y)) \wedge Q(x, y)$
- 例：对公式 $(\forall x)(P(y) \rightarrow Q(x, y)) \wedge R(x, y)$ 中的自由变元代入。
- 解： $(\forall x)(P(z) \rightarrow Q(x, z)) \wedge R(x, z)$

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

☛ 当确定论域后 $(\forall x)P(x)$, 与 $(\exists x)P(x)$ 都是一个特定的命题。

☛ 例如 $(\forall x)S(x)$ 表示 x 是个大学生 , 论域是 $\{a,b,c\}$, 则 :

☛ $(\forall x)S(x)$ 即是 $S(a) \wedge S(b) \wedge S(c)$

☛ $(\exists x)S(x)$ 即是 $S(a) \vee S(b) \vee S(c)$

☛ 例 : 如果论域是集合 $\{a,b,c\}$, 试消去下面公式中的量词 :

$$(\forall x)R(x) \wedge (\exists x)S(x)$$

☛ 解 : 原式 $\Leftrightarrow (R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)) \wedge (S(a) \vee S(b) \vee S(c))$

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

7. 设论域为 $\{1, 2\}$, 与公式 $(\forall x)A(x)$ 等价的是 ()

A. $A(1) \vee A(2)$

B. $A(1) \rightarrow A(2)$

C. $A(1) \wedge A(2)$

D. $A(2) \rightarrow A(1)$

8. 设论域为 $\{1, 2\}$, 与公式 $(\exists x)A(x)$ 等价的是 ()

A. $A(1) \vee A(2)$

B. $A(1) \rightarrow A(2)$

C. $A(1)$

D. $A(2) \rightarrow A(1)$

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

☛ 例：给定论域 $D = \{2, 3\}$ ， $a = 2$ ， $f(2) = 3$ ， $f(3) = 2$ ， $S(2) = F, S(3) = T, G(2, 2) = T, G(3, 2) = T, L(2, 2) = L(3, 3) = T, L(2, 3) = L(3, 2) = F$ 。在上述赋值下，求下列各式的真值。

☛ (a) $(\forall x)(S(x) \wedge G(x, a))$

☛ (b) $(\exists x)(S(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$

☛ (c) $(\forall x)(\exists y)L(x, y)$

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

☛ 例：寻求下式的真值。

☛ $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$, 其中 $P:2>1, Q(x):x \leq 3$, $R(x):x>5, a=5$,
且论域 $\{-2,3,6\}$

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

3. 在下列的解释下, 下列公式为真的是()

A. $(\forall x) (P(x) \vee Q(x)), P(x):x=1, Q(x):x=2$. 论域: $\{1, 2\}$

B. $(\exists x) (P(x) \wedge Q(x)), P(x):x=1, Q(x):x=2$. 论域: $\{1, 2\}$

C. $(\exists x) (P(x) \rightarrow Q(x)), P(x):x>2, Q(x):x=0$. 论域: $\{3, 4\}$

D. $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)), P(x):x>2, Q(x):x=0$. 论域: $\{3, 4\}$

4. 设给定赋值 N 如下: 个体域为自然数集; 特定元素 $a=0$; 特定函数 $f(x, y)=x+y$, $g(x, y)=xy$; 特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x=y$ 。在赋值 N 下, 下列公式为真的是()

A. $(\forall x) F(g(x, a), x)$

B. $(\forall x)(\forall y)(F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$

C. $(\forall x)(\forall y)(\forall z) F(f(x, y), z)$

D. $(\forall x)(\forall y)(F(f(x, y), g(x, y)))$



2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

- 定义2.3.1 给定任何两个谓词公式WffA和WffB，设它们有共同的个体域E，若对A和B的任一组变元进行赋值，所得命题的真值相同，则称谓词公式A和B在E上是等价的，并记作 $A \Leftrightarrow B$
- 定义2.3.2 给定任意谓词公式WffA，其个体域为E，对于A的所有赋值WffA都为真，则称WffA在E上有效的（或永真的）
- 定义2.3.3 一个谓词公式WffA，如果在所有赋值下都为假，则称WffA为不可满足。
- 定义2.3.4 一个谓词公式WffA，如果至少在一种赋值下为真，则称WffA为可满足。

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

定理 2.3.1 量词与否定联结词之间有如下关系：

(1) $\neg \forall x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg Q(x)$

(2) $\neg \exists x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \neg Q(x)$

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

20. $\forall x \exists y P(x, y)$ 的否定是 ()

A. $\forall x \forall y \neg P(x, y)$

B. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

C. $\forall x \exists y \neg P(x, y)$

D. $\exists x \exists y \neg P(x, y)$



2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

表2.3.1

2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

9. 下列等价式正确的是 ()

A. $(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$

B. $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

C. $A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$

D. $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

10. 下列等价式正确的是 ()

A. $(\exists x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (\exists x)B(x)$

B. $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

C. $A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$

D. $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$



2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

11. 下列等价式正确的是 ()

A. $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

B. $A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$

C. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$

D. $(\exists x)(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$

12. 下列等价式不正确的是 ()

A. $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

B. $A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$

C. $(\exists x)(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$

D. $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$



2.3 谓词演算的等价式与蕴含式

13. 下列等价式错误的是 ()

A. $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$

B. $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$

C. $(\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$

D. $A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$



2.4 前束范式

- 定义2.4.1 一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域，延伸到整个公式的末尾，则该公式叫做前束范式。
- 定理2.4.1 任意一个谓词公式均和一个前束范式等价。
- 例：把公式 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ 化为前束范式。

$$\begin{aligned}(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) &\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \\&\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))\end{aligned}$$

2.4 前束范式

☛ 例：把下列公式化为前束范式。

☛ (1) $\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$

☛ (2) $((\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \rightarrow (\forall x)R(x)$

19. 下列谓词公式中为前束范式的是 ()

A. $\forall x \forall y \exists z (B(x, y) \rightarrow A(z))$

B. $\neg \forall x \exists y B(x, y)$

C. $\exists x \forall y \forall x (A(x, y) \wedge B(x, y))$

D. $\forall x (A(x, y) \rightarrow \exists y B(y))$

2.5 谓词演算的推理理论

☛ (1) **全称指定规则 (US)** : 由 $(\forall x)P(x)$ 得到 $P(c)$ 。

☛ P 是谓词，而 c 是论域中的任意某个个体，如果论域中全部个体有 $P(x)$ ，那么全称指定规则有结论 $P(c)$

☛ (2) **全称推广规则 (UG)** : 由 $P(c)$ 得到 $(\forall x)P(x)$

☛ 如果能够证明对论域中任一客体 x 断言 $P(x)$ 都成立，则全称推广规则可得到结论 $(\forall x)P(x)$

☛ (3) **存在指定规则 (ES)** : 由 $(\exists x)P(x)$ 得到 $P(c)$

☛ C 是论域中某些个体（不是任意存在的）

☛ (4) **存在推广规则 (EG)** : 由 $P(c)$ 得到 $(\exists x)P(x)$

2.5 谓词演算的推理理论

- 例：著名的苏格拉底论证可以用下式表示：

$$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \vdash M(s)$$

- $H(x)$: x 是一个人； $M(x)$: x 是要死的； s ：苏格拉底。

- 用推论方法证明。

- (1) $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$ P

- (2) $H(s) \rightarrow M(s)$ US(1)

- (3) $H(s)$ P

- (4) $M(s)$ T(2)(3)I

2.5 谓词演算的推理理论

- ☛ 例：专业委员会成员都是教授，并且是计算机设计师，有些成员是资深专家，所以有的成员是计算机设计师，且是资深专家。请用谓词推理理论证明上述推理。
- ☛ 证：设个体域为全总个体域。
- ☛ $M(x)$: x 是专业委员会成员； $H(x)$: x 是教授； $G(x)$: x 是计算机设计师； $R(x)$: x 是资深专家。
- ☛ 前提 $(\forall x)(M(x) \rightarrow H(x) \wedge G(x))$ $(\exists x)(M(x) \wedge R(x))$
- ☛ 结论 $(\exists x)(M(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$

2.5 谓词演算的推理理论

证：前提 $(\forall x)(M(x) \rightarrow H(x) \wedge G(s))(\exists x)(M(x) \wedge R(x))$

结论 $(\exists x)(M(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$

① $(\exists x)(M(x) \wedge R(x))$ P

② $M(c) \quad R(c)$ ES(1)

③ $(\forall x)(M(x) \rightarrow H(x) \wedge G(s))$ P

④ $M(c) \rightarrow H(c) \quad G(c)$ US(3)

⑤ $M(c)$ T(2)I

⑥ $H(c) \quad G(c)$ T(4)(5)I

⑦ $R(c)$ T(2)I

⑧ $G(c)$ T(6)I

⑨ $M(c) \quad R(c) \quad G(c)$ T(5)(7)(8)I

⑩ $(\exists x)(M(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$ EG(9)

2.5 谓词演算的推理理论

☛ 例：证明 $(\forall x)(G(x) \vee Q(x)) \mapsto (\forall x)G(x) \vee (\exists x)Q(x)$

①	$\neg((\forall x)G(x) \vee (\exists x)Q(x))$	P(附加前提)
②	$\neg(\forall x)G(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)$	T(1)E
③	$\neg(\forall x)G(x)$	T(2)I
④	$(\exists x)\neg G(x)$	T(3)E
⑤	$\neg(\exists x)Q(x)$	T(2)I
⑥	$(\forall x)\neg Q(x)$	T(5)E
⑦	$\neg G(c)$	ES(4)
⑧	$\neg Q(c)$	US(6)
⑨	$\neg G(c) \quad \neg Q(c)$	T(7)(8)I
⑩	$\neg (G(c) \quad Q(c))$	T(9)E

2.5 谓词演算的推理理论

(11) $(\forall x)(G(x) \vee Q(x))$

P

(12) $G(c) \quad Q(c)$

US(11)

(13) $\neg(G(c) \quad Q(c)) \quad (G(c) \quad Q(c))$

T(10)(12)I 矛盾



2.5 谓词演算的推理理论

☛ 用CP规则

☛ 例：证明 $(\forall x)(G(x) \vee Q(x)) \vdash \neg(\forall x)G(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

① $\neg(\forall x)G(x)$ P(附加前提)

② $(\exists x)\neg G(x)$ T(1)E

③ $\neg G(c)$ ES (2)

④ $(\forall x)(G(x) \vee Q(x))$ P

⑤ $G(c) \vee Q(c)$ US (4)

⑥ $Q(c)$ T(3) (5) I

⑦ $(\exists x)Q(x)$ EG(6)

⑧ $\neg(\forall x)G(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ CP

2.5 谓词演算的推理理论

2. 符号化下列命题，并构造推理证明：三角函数都是周期函数，有些三角函数是连续函数，所以有些周期函数是连续函数。
3. 符号化下列命题，并构造推理证明：所有有理数是实数，有些有理数是整数，所以有些实数是整数。
4. 构造下面的推理证明：任何自然数都是整数，存在着自然数，所以存在着整数。（设个体域为实数集合 R ）