绝密★启用前

2022年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

概率论与数理统计（二）

（课程代码　02197）

注意事项：

1．本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。

2．应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。

3．涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．在区间$(0,1)$与$(1,2)$中各随机取一个数，则两数之和大于$\frac{7}{4}$的概率为

A．$\frac{9}{32}$　　B．$\frac{11}{32}$　　C．$\frac{21}{32}$　　D．$\frac{23}{32}$

2．设$f_1(x)$为区间$[-1,2]$上的均匀分布的概率密度，$f_2(x)$为标准正态分布的概率密度，若$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0, \end{cases}$（常数$a>0,b>0$）为概率密度，则$a,b$应满足

A．$3a+2b=6$　　B．$2a+3b=6$　　C．$a+b=1$　　D．$a+b=2$

3．设随机变量X与Y独立同分布，其概率分布为$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，则$P\{X=Y\}=$

A．0　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

4．设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \frac{1}{3}, & -2\leqslant x<1, \\ 1, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则X的数学期望$E(X)=$

A．0　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．1

5．设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(0,2;4,9;0.5)$，则$D(X-3Y+2)=$

A．-21　　B．33　　C．67　　D．69

6．设在每次试验中事件A发生的概率为0.75，且已知事件A在n次独立重复试验中出现的频率在0.74～0.76之间的概率至少为0.9，则利用切比雪夫不等式可得试验次数n至少为

A．17　　B．186　　C．1875　　D．18750

7．设随机变量X服从自由度为n的t分布，且$n>1$，记$Y=\frac{1}{X^2}$，则Y的概率分布为

A．$F(n,1)$　　B．$F(1,n)$　　C．$N(0,1)$　　D．$\chi^2(n)$

8．设随机变量X服从区间$(0,\theta)$上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，$\bar{X},S^2$分别为样本均值和样本方差，则未知参数θ的极大似然估计为

A．$2\bar{X}$　　B．S^2

C．$\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$　　D．$\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

9．甲乙二人同时使用t检验法检验同一个假设$H_0:\mu=\mu_0$，甲的检验结果是拒绝H_0，乙的检验结果是接受H_0，则以下叙述中错误的是

A．在检验中，甲有可能犯第一类错误

B．在检验中，乙有可能犯第一类错误

C．上面结果可能是各自选取的显著性水平不同而得出的

D．上面结果可能是各自抽取的样本不同而得出的

10．设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2都未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n>1)$为来自总体X的样本，记$\bar{X}$为样本均值，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则假设$H_0:\mu=0$的$t$检验使用的统计量表达式为

A．$\frac{\bar{X}}{\sqrt{n(n-1)}Q}$　　B．$\frac{\bar{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$　　C．$\frac{\bar{X}}{\sqrt{n}Q}$　　D．$\frac{\bar{X}}{Q}\sqrt{n}$

02197

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分。

11. 甲乙两人各投篮一次，设 A 为甲投中，B 为乙投中，则甲乙两人都投中可表示为________.

12. 9 张电影票中有 4 张为头等座票，随机发给先后到来的 9 个人，第二个到的人拿到头等座票的概率为________.

13. 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)=0.3$，$P(B|A)=0.4$，$P(A|B)=0.6$，则 $P(A\cup B)=$________.

14. 设 X 服从 $[2,9]$ 上的均匀分布，则 $P\{1<X<5\}=$________.

15. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},(-\infty<x<+\infty)$，则当 $x\geqslant 0$ 时，X 的分布函数 $F(x)=$________.

16. 某校体检表明学生的身高 X（单位：m）服从正态分布，学生平均身高为 1.70m，若身高的标准差为 0.08m，则 $P\{1.62<X<1.78\}=$________.
（附：$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$\Phi(1)=0.841$）

17. 设随机变量 X 与 Y 都服从区间 $[0,4]$ 上的均匀分布，且 $P\{X\leqslant 3,Y\leqslant 3\}=\frac{9}{16}$，则 $P\{X>3,Y>3\}=$________.

18. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，已知 X 服从参数为 1 的指数分布，$P\{Y=-1\}=\frac{3}{4}$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{4}$，则 $P\{2X\leqslant Y+3\}=$________.

19. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，Y 服从参数为 3 的指数分布，则 $E(X-3Y+1)=$________.

20. 设 a 为区间 $(0,1)$ 内的一个定点，随机变量 X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，以 Y 表示 X 到 a 的距离，若 $E(Y)=\frac{1}{4}$，则 $a=$________.

21. 已知随机变量 $X\sim B\left(16,\frac{1}{2}\right)$，$Y$ 服从参数为 4 的泊松分布，$D(X-Y)=2$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

22. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 是来自总体 X 的样本，若 $P\{X=0\}=0.8$，$P\{X=1\}=0.2$，则依据中心极限定理将概率 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 28\right\}$ 用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 近似表示为________.

23. 设随机变量 X 的分布律为 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & 1-3\theta & \theta & 2\theta \end{array}$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则 θ 的矩估计为________.

24. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的样本，则 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$，$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$ 作为 μ 的估计量，有效估计量是________.

25. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的样本，考虑检验假设问题 $H_0:\mu=2$，若检验的拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geqslant 2.6\}$，则检验犯第一类错误的概率为________.（附：$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$\Phi(2.4)=0.9918$）

三、计算题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

26. 设某地区成年居民中偏胖者占 10%，不胖不瘦者占 82%，偏瘦者占 8%，又知偏胖者患高血压病的概率为 20%，不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%，偏瘦者患高血压病的概率为 5%.
（1）求该地区成年居民患高血压病的概率；
（2）现知该地区某一成年居民患有高血压病，求其是偏胖者的概率.

27. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ax^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$
求：（1）常数 a；（2）$P\{X+Y>1\}$.

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分。

28. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} 4x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且 $Y=-2X+1$，
求：（1）X 的分布函数 $F(x)$；（2）$P\left\{\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$；（3）$Y$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

29．设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	a	b

（1）当a,b为何值时，X与Y不相关；

（2）当X与Y不相关时，分别求关于X,Y的边缘分布律，并判断X与Y是否相互独立？

（3）求$X+Y$的分布律及$P\{X+Y\leqslant 3\}$.

五、应用题：本题10分。

30．设某人群的体重X（单位：kg）$\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从该人群中随机抽取9个人，其体重分别为：60，63，75，75，60，60，68，68，65.

求：（1）样本均值$\bar{x}$及样本方差s^2；

（2）总体均值μ的置信度为95%的置信区间.（附：$t_{0.025}(8)=2.306$）

绝密★启用前

2022年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

概率论与数理统计（二）试题答案及评分参考

（课程代码　02197）

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

1. D	2. B	3. C	4. A	5. C
6. D	7. A	8. D	9. B	10. B

二、填空题：本大题共15小题，每小题2分，共30分。

11. AB	12. $\frac{4}{9}$	13. 0.38	14. $\frac{3}{7}$
15. $1-\frac{1}{2}e^{-x}$	16. 0.682	17. $\frac{1}{16}$	18. $1-\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{3}{4}e^{-1}$
19. 2	20. $\frac{1}{2}$	21. 3	22. $\Phi(2)$
23. $\frac{1}{5}\overline{X}$	24. $\hat{\mu}_3$	25. 0.0082	

三、计算题：本大题共2小题，每小题8分，共16分。

26．解　设 A_1,A_2,A_3 分别表示该地区成年居民为偏胖者、不胖不瘦者、偏瘦者，

B 表示该地区成年居民患高血压病.　　　　……2分

（1）$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$

$=0.2\times0.1+0.1\times0.82+0.05\times0.08=0.106$；　　　　……5分

（2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times0.1}{0.106}=\dfrac{10}{53}$　　　　……8分

27．解　（1）因为 $\int_0^1 dx\int_0^3 ax^2 dy=1$，所以 $a=1$；　　　　……4分

（2）$P\{X+Y>1\}=1-P\{X+Y\leqslant1\}=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2 dy=\dfrac{11}{12}$.　　　　……8分

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分。

28．解 （1）当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$，

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}4t^{3}\mathrm{d}t=x^{4}$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}4t^{3}\mathrm{d}t=1$，

因此 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^{4}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1;\end{cases}$ ……4 分

（2）$P\left\{\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^{4}=\frac{15}{256}$； ……8 分

（3）$f_{Y}(y)=\frac{1}{|-2|}f_{X}\left(\frac{1-y}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\times 4\left(\frac{1-y}{2}\right)^{3}, & 0\leqslant\frac{1-y}{2}\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-y)^{3}, & -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ……12 分

29．解 （1）X,Y,XY 的分布律分别是

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+a+b$

，

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+a$	$\frac{1}{18}+b$

，

XY	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$	a	b

，

$E(X)=1+2a+2b$，$E(Y)=\frac{8}{9}+2a+3b$，$E(XY)=\frac{11}{9}+4a+6b$，

因 X 与 Y 不相关等价于 $E(XY)=E(X)E(Y)$，

又由分布律的性质知 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+a+b=1$，

解得 $a=\frac{2}{9},b=\frac{1}{9}$； ……4 分

（2）

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

，

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

，可以验证：

$P\{X=x,Y=y\}=P\{X=x\}P\{Y=y\}$ 对于 $x=1,2,y=1,2,3$ 都成立，

故 X 与 Y 相互独立； ……8 分

（3）

$X+Y$	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

，得 $P\{X+Y\leqslant 3\}=\frac{11}{18}$． ……12 分

五、应用题：本题 10 分。

30．解 （1）$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{60+63+75+75+60+60+68+68+65}{9}=66$，

$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=36$； ……4 分

（2）总体均值 μ 的置信度为 95%的置信区间是：

$$\left[\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right],$$

$$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=66-\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}t_{0.025}(8)=61.388,$$

$$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=66+\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}t_{0.025}(8)=70.612,$$

所以 μ 的置信度为 95%的置信区间是 $[61.388, 70.612]$． ……10 分