00023 高等数学（工本） 2023年10月真题

1、【单选题】在空间直角坐标系中，点**(1,1,0)**在

A: Oxy平面上

B: Oxz平面上

C: Oyz平面上

D: z轴上

答案：A

2、【单选题】极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} x\sin\frac{1}{xy}$

A: 等于0

B: 等于1

C: 等于3

D: 不存在

答案：A

3、【单选题】微分方程**dy/dx=x/y+y/x**是

A: 可分离变量的微分方程

B: 齐次方程

C: 一阶线性齐次微分方程

D: 一阶线性非齐次微分方程

答案：B

4、【单选题】下列无穷级数中，收敛的无穷级数是

A: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-2}{3n+1}$

B: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

C: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n+1}}$

D: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

答案：D

5、【单选题】

设积分区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 4$，则二重积分 $\iint\limits_D (2 - x - y)\,dx\,dy =$

A: 0
B: 4π
C: 8π
D: 16π

答案：C

6、【单选题】设向量 **α={2,1,-9},β={1,0,1}**,则 **α·β=**
A: -9
B: -7
C: 1
D: 2

答案：B

7、【单选题】 设函数 $f(x,y) = \frac{4xy}{x^2 - y^2}$，则 $f(1, \frac{y}{x}) =$

A: $\frac{4y}{x^2 - y^2}$

B: $\frac{4y}{y^2 - x^2}$

C: $\frac{4xy}{x^2 - y^2}$

D: $\frac{4xy}{y^2 - x^2}$

答案：C

8、【单选题】

设积分区域 Ω: $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$, $|z|\leq 1$, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

A: 2
B: 4
C: 8
D: 16

答案：D

9、【单选题】

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，$f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3}{n^2}\cos nx$

则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $b_1=$

A: -3
B: 0
C: 3
D: 15/4

答案：B

10、【单选题】微分方程 **y"+(x²+1)y′+y=2** 的一个特解 **y*=**

A: 2
B: 2x
C: 2+x
D: x^2

答案：A

11、【计算题】

求平面 Π: $2x+y-z=3$ 和直线 L: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$ 的交点坐标.

答案：

解:直线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}$

代入平面方程 $2(2t+1) + (3t-1) - (-t+2) - 3 = 0$

解得 $t = \dfrac{1}{2}$

所以交点坐标为 $(2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$

12、【计算题】已知常数 **k>0,** 且原点到平面 **x+ky-2z=9** 的距离为 **3,** 求常数 **k** 的值**.**

答案:

解:由原点到平面 $x + ky - 2z = 9$ 的距离为 3,可知

$$\frac{|-9|}{\sqrt{1^2 + k^2 + (-2)^2}} = 3$$

则 $1 + k^2 + 4 = 9$,又 $k > 0$,可得 $k = 2$

13、【计算题】 设函数 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,求全微分 $\mathrm{d}u$.

答案:

解:$\because$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\therefore \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)$$

14、【计算题】 设方程 $\mathrm{e}^{-xy} - 3z + \mathrm{e}^z = 0$ 确定函数 $z = z(x, y)$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

答案：

解：令 $F(x,y,z)=e^{-xy}-3z+e^{z}$

则 $F_x=-ye^{-xy}, F_z=-3+e^{z}$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-3}$$

15、【计算题】设函数 **f(x,y)=excosy,** 求梯度 **gradf(0,π/4)**

答案：

解：$\because \quad \frac{\partial f}{\partial x}=e^{x}\cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-e^{x}\sin y$

$$\mathbf{grad}f(x,y)=e^{x}\cos y\boldsymbol{i}-e^{x}\sin y\boldsymbol{j}$$

$$\therefore \quad \mathbf{grad}f(0,\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}$$

16、【计算题】

计算二重积分 $\iint\limits_D (2x-y)\,dxdy$，其中积分区域 D 是由 $x+y=2, y=x$ 及 x 轴所围区域.

答案：

解：在直角坐标系中，区域 D 可表示为 $y\leqslant x\leqslant 2-y, 0\leqslant y\leqslant 1$.

$$\iint\limits_D (2x-y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(2x-y)\,dx$$

$$=\int_0^1(2y^2-6y+4)\,dy$$

$$=\frac{5}{3}$$

17、【计算题】

答案:

解:L 的参数方程为 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

$ds=2d\theta$

所以 $\oint_L(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}4\cdot 2d\theta=16\pi$

18、【计算题】

计算对坐标的曲线积分 $\int_L e^{x+y}dy$,其中 L 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的直线段.

答案:

解:L 的方程为 $y=x$, x 从 0 变到 1.

$$\int_L e^{x+y}dy=\int_0^1 e^{x+x}dx$$

$$=\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

19、【计算题】将函数 **f(x)=ln(1+x)**展开为 **x** 的幂级数**.**

答案:

$$\text{解}: f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

$$f(x)=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]dx+f(0)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} \qquad (-1<x\leqslant 1)$$

20、【计算题】求微分方程 **y"+5y′+6y=0** 的通解**.**

答案：特征方程为 $r^2+5r+6=0$ 特征根 $r_1=-2,r_2=-3$ 方程通解为：$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$

21、【综合题】 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ 的敛散性.

答案：

$$\text{解}: u_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}$$

$$=\frac{1}{3}<1$$

由根值审敛法知，该级数收敛.

22、【综合题】

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x\,dx\,dy$，其中 Σ 是平面 $x+y+z=3$ 被三个坐标面所截得部分，取上侧.

答案：

解：$\sum$ 在 Oxy 平面上的投影为 D_{xy}：$0 \leqslant y \leqslant 3-x, 0 \leqslant x \leqslant 3$.

又 $\sum$ 取上侧，则

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{3-x} x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^3 x(3-x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{2}$$