绝密 ★ 考试结束前

全国2020年10月高等教育自学考试

离散数学试题

课程代码:02324

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 15 小题,每小题 1 分,共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

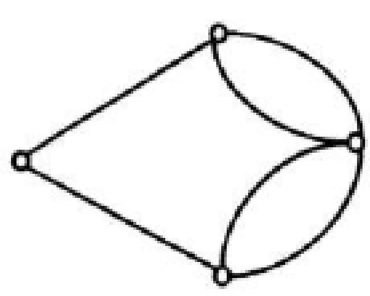
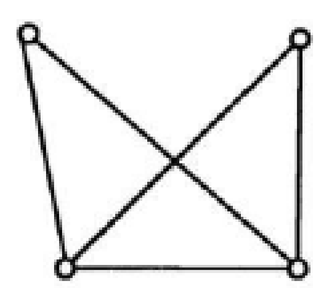
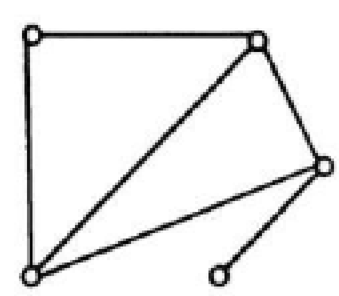
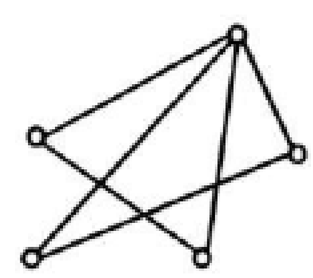
1. 设P:我周末不加班,Q:我去爬山,命题“只要我周末不加班,我就去爬山”符号化为

   A. $\neg P \vee \neg Q$　　B. $P \vee Q$　　C. $P \rightarrow Q$　　D. $Q \rightarrow P$

2. 下列关系矩阵所对应的关系具有对称性的是

   A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 下列图为欧拉图的是

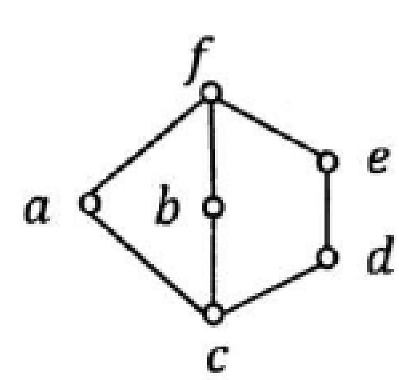





   A.　　B.　　C.　　D.

4. 如题 4 图所示的格中,元e的补元是

   A. a和b　　B. a和c

   C. a和d　　D. a和f



题 4 图

5. 下列命题公式为矛盾式的是

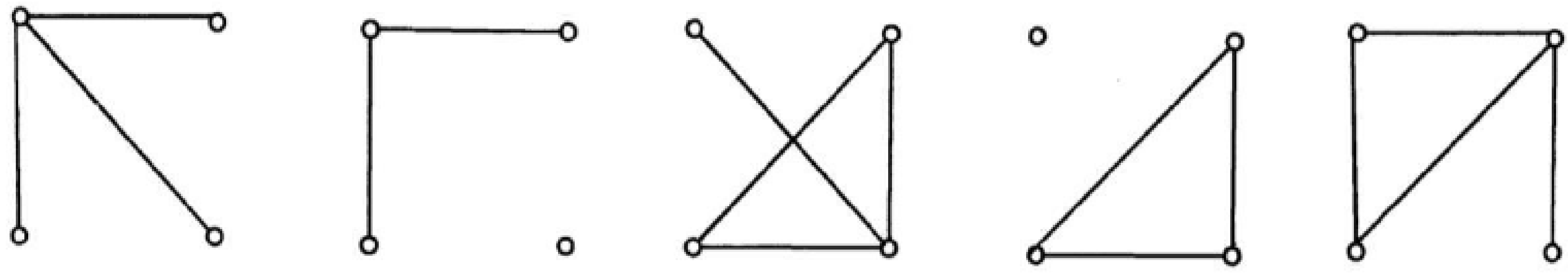
   A. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$　　B. $(P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$

   C. $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$　　D. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$

6. 设集合A中有 4 个元素，则A的不同的等价关系的个数为

A. 11　　B. 12　　C. 15　　D. 16

7. 下列选项中与题 7 图互为补图的是



A.　　B.　　C.　　D.　　题 7 图

8. 在自然数集 N上，$a,b\in N$，不满足交换律的运算是

A. $a*b=\min(a,b)$　　B. $a*b=a+b$

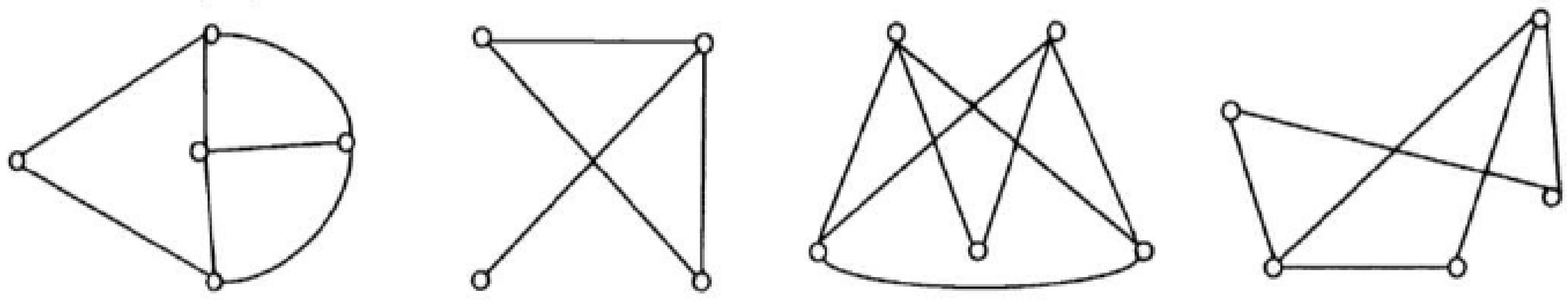
C. $a*b=a-b$　　D. $a*b=\max(a,b)$

9. 下列式子中，不正确的是

A. $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$　　B. $\exists x(A\to B(x))\Leftrightarrow A\to\exists xB(x)$

C. $\neg\forall xB(x)\Leftrightarrow\exists x\neg B(x)$　　D. $\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$

10. 下列图中不是哈密顿图的是



A.　　B.　　C.　　D.

11. 设$\mathbf{R}$为实数集，下列关系中能构成函数的是

A. $\{\langle x,y\rangle|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(y^2-2x=1)\}$

B. $\{\langle x,y\rangle|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(x^2+2y=1)\}$

C. $\{\langle x,y\rangle|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(2y/x=1)\}$

D. $\{\langle x,y\rangle|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(2y\cdot x=1)\}$

12. 谓词公式$\forall x(F(x)\wedge G(y))\to\exists y(H(x)\to S(y,z))$中量词$\forall x$的辖域是

A. $F(x)\wedge G(y)$　　B. $F(x)$

C. $\forall x(F(x)\wedge G(y))$　　D. $F(x),H(x)$

13. 设R、S均为集合A上的二元关系，下列命题错误的是

A. 若R和S是自反的，则$R-S$也是自反的

B. 若R和S是反自反的，则$R-S$也是反自反的

C. 若R和S是反对称的，则$R-S$也是反对称的

D. 若R和S是对称的，则$R-S$也是对称的

14. 下列度数列可简单图化的是

A. (5,4,4,2,1)　　B. (3,3,1,1)　　C. (4,4,3,3,2,2)　　D. (4,3,2,1)

15. 令$S=\{a,b,c\}$上的二元运算$*$如题 15 表所示，则该代数系统不满足

A. 交换律　　B. 幂等律

C. 结合律　　D. 消去律

题 15 表

$*$	a	b	c
a	a	b	b
b	b	b	b
c	b	b	c

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

16. 命题公式$\neg(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q\wedge\neg R$的主析取范式中含小项的个数为________。

17. 设集合$A=\{\varnothing,1,\{1\}\}$，则$A$的幂集$\mathscr{P}(A)$为________________________。

18. 设论域为整数集，命题$\forall x\exists y(x+y=10)$的真值为________。

19. 设连通平面图G的每个面至少由 5 条边围成，则G的边数m与顶点数n满足的不等式关系为____________。

20. 设集合$A=\{1,2,3\}$的关系$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$S=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则复合关系$R\circ S^{-1}$为________________。

21. 公式$\exists xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$对应的前束范式为________________。

22. 有 8 个顶点的无向完全图K_8，需要删除________条边才能得到生成树。

23. 设实数集$\mathbf{R}$上的二元运算$*$满足$\forall a,b\in\mathbf{R}$, $a*b=a+b+ab$, 则$(\mathbf{R},*)$的幺元为______。

24. 设无向树有 4 个度为 3 的分支点，2 个度为 2 的分支点，其余为树叶，则树叶数为________________。

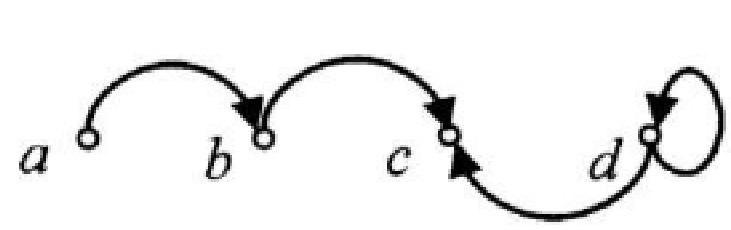
25. 设集合$A=\{1,2,3\}$，集合$B=\{2,4,6\}$，给定函数$f=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,6\rangle\}$，则逆函数$f^{-1}$为________________。

三、简答题：本大题共 7 小题，第 26~30 小题，每小题 6 分；第 31~32 小题，每小题 7 分，共 44 分。

26. 用真值表判定命题公式$(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg(P\vee R)$的公式类型。

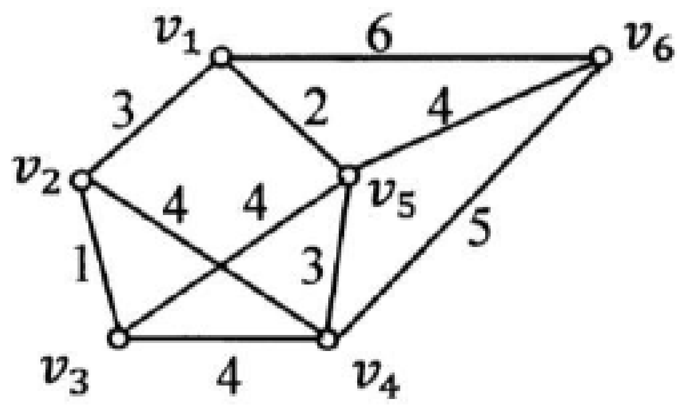
27. 用等值演算法求命题公式$\neg(\neg P\wedge Q)\vee Q$的主合取范式，并给出成假赋值。

28. 设集合$A=\{a,b,c,d\}$上的二元关系R的关系图如题 28 图所示，求R的集合表达式，并给出R的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R$以及自反闭包的关系矩阵$\boldsymbol{M}_{r(R)}$。



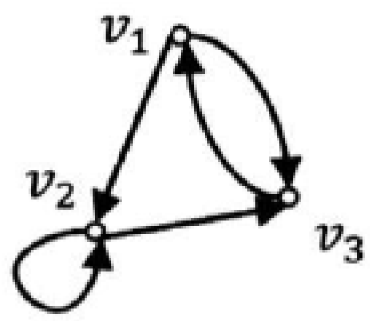
题 28 图

29. 利用 Kruskal 算法，求题 29 图所示的连通带权图的最小生成树，请给出详细过程，并画出最小生成树。



题 29 图

30. 设有向图G如题 30 图所示，



题 30 图

(1) 写出图G的邻接矩阵；

(2) 计算图G中长度为 3 的通路数；

(3) 计算图G中长度小于或等于 3 的回路数。

31. 用二叉树表示算术表达式$(2*a+1)*(2*b-3*c)$，并给出先序、中序和后序遍历序列。

32. 设集合$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，$\preccurlyeq$为整除关系，回答下列问题：

(1) 画出$\langle A,\preccurlyeq\rangle$的哈斯图；

(2) 求子集$B=\{2,3,6,12\}$的极大元，极小元，最大元，最小元；

(3) 判断该偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$是否为格。

四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。

33. 在整数集$\mathbf{Z}$上定义二元运算$\circ$：$a\circ b=a+b-7$，$\forall a,b\in\mathbf{Z}$，证明$\langle\mathbf{Z},\circ\rangle$构成交换群。

34. 用 CP 规则证明下面有效推理。

前提：$P\to(Q\to S)$，$P\vee\neg R$，Q

结论：$R\to S$

35. 利用 3–正则图的性质证明：若有n个人，每个人恰有三个朋友，则n为偶数。

绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学试题答案及评分参考

（课程代码　02324）

一、单项选择题：本大题共15小题，每小题1分，共15分。

1. C　2. B　3. D　4. A　5. D　6. C　7. B　8. C　9. D　10. B

11.B　12.A　13.A　14.C　15.D

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

16. 1

17. $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{1\},\{\{1\}\},\{\varnothing,1\},\{\varnothing,\{1\}\},\{1,\{1\}\},\{\varnothing,1,\{1\}\}\}$

18. T

19. $5n-3m\geq 10$

20. $\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

21. $\forall x\forall y(\neg P(x)\vee Q(y))$(或$\forall x\forall y\big(P(x)\rightarrow Q(y)\big)$)

22. 21

23. 0

24. 6

25. $\{\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$

三、简答题：本大题共7小题，第26~30小题，每小题6分；第31~32小题，每小题7分，共44分。

26. 解：$(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg(P\vee R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P\wedge Q$	$P\vee R$	$\neg(P\vee R)$	$(P\wedge Q)\leftrightarrow\neg(P\vee R)$	
F	F	F	F	F	T	F	(1分)
F	F	T	F	T	F	T	(1分)
F	T	F	F	F	T	F	
F	T	T	F	T	F	T	(1分)
T	F	F	F	T	F	T	
T	F	T	F	T	F	T	(1分)
T	T	F	T	T	F	F	
T	T	T	T	T	F	F	(1分)

由上表可知，命题公式为非重言式的可满足式。　(1分)

27\. 解：$\neg(\neg P \wedge Q) \vee Q$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee Q$ (1 分)

$\Leftrightarrow P \vee (\neg Q \vee Q)$ (1 分)

$\Leftrightarrow P \vee \mathrm{T}$ (1 分)

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$ (1 分)

由此，公式为重言式，主合取范式为T， (1 分)

无成假赋值。 (1 分)

28\. 解：集合$A = \{a, b, c, d\}$上的二元关系$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$， (2 分)

R的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$， (2 分)

自反闭包的关系矩阵$\boldsymbol{M}_{r(R)} = \boldsymbol{M}_R \vee \boldsymbol{M}_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。 (2 分)

29\. 解：利用 Kruskal 算法，按权值从小到大对边进行排列，

添加权值为 1 的边(v_2, v_3)； (1 分)

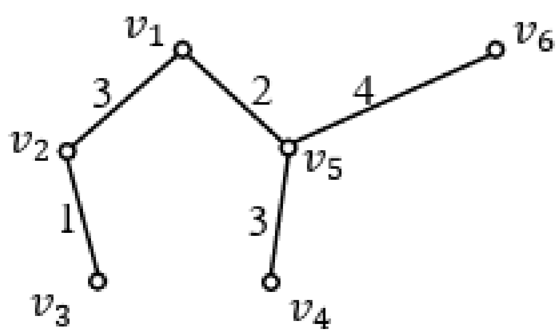
添加权值为 2 的边(v_1, v_5)； (1 分)

添加权值为 3 的边(v_1, v_2)； (1 分)

添加权值为 3 的边(v_4, v_5)； (1 分)

添加权值为 4 的边(v_5, v_6)； (1 分)

得到的最小生成树如答 29 图所示。 (1 分)



答 29 图

30\. 解：

(1) 图G的邻接矩阵为$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。 (2 分)

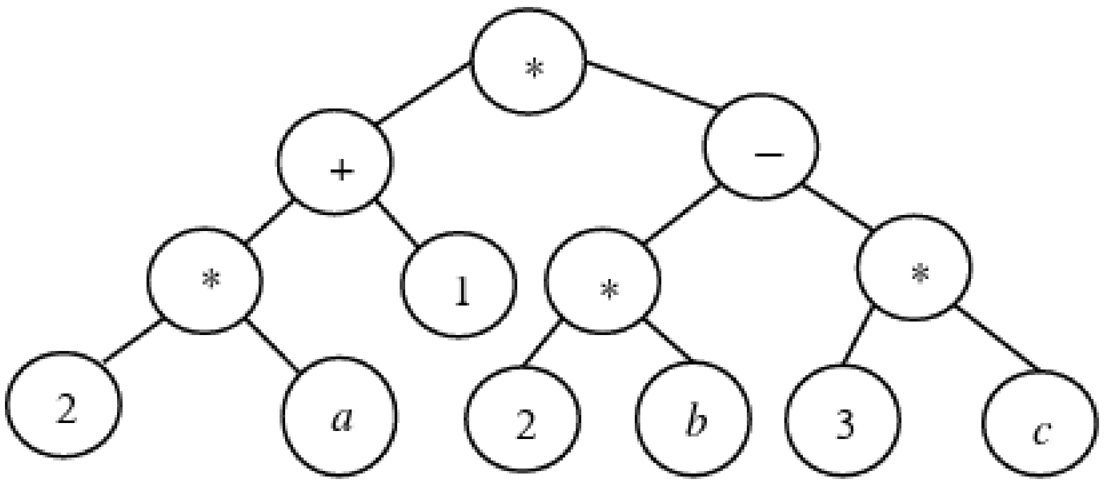
(2) 由于$\boldsymbol{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$， (1 分)

$\boldsymbol{M}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$， (1 分)

可知，图G中长度为 3 的通路数为 13 条。 (1 分)

(3) 由$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}^2$及$\boldsymbol{M}^3$可知，G中长度小于或等于 3 的回路数为 8。 (1 分)

31. 解：算术表达式$(2*a+1)*(2*b-3*c)$的二叉树如答 31 图所示。 (1 分)



答 31 图

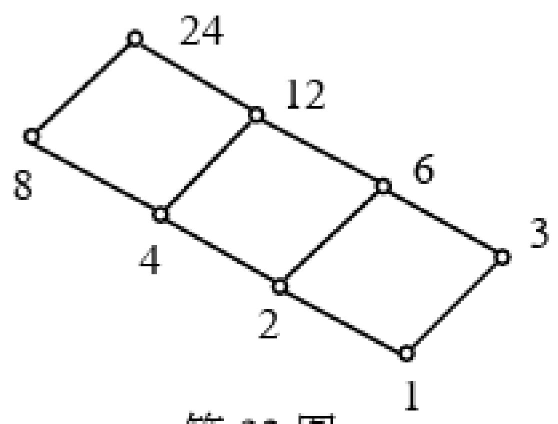
先序遍历序列为$*+*2a1-*2b*3c$； (2 分)

中序遍历序列为$2*a+1*2*b-3*c$； (2 分)

后序遍历序列为$2a*1+2\mathrm{b}*3c*-*$。 (2 分)

32. 解：

(1) $\langle A,\preccurlyeq\rangle$的哈斯图如答 32 图所示。 (2 分)



答 32 图

(2) 子集$B=\{2,3,6,12\}$的极大元为 12， (1 分)

极小元为 2 和 3， (1 分)

最大元为 12， (1 分)

最小元不存在。 (1 分)

(3) 该偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$是格，因为 A 中每对元素都有最小上界和最大下界。 (1 分)

四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。

33. 证明：

(1) 满足封闭性：$\forall a,b\in\mathbf{Z}$，有$a\circ b=a+b-7\in\mathbf{Z}$； (1 分)

(2) 满足结合律：$\forall a,b,\mathrm{c}\in\mathbf{Z}$，有

$$(a\circ b)\circ c=a+b+\mathrm{c}-14=a\circ(b\circ c);$$ (1 分)

(3) 存在幺元 7：$\forall a\in\mathbf{Z}$，有$a\circ 7=a+7-7=a=7+a-7=7\circ a$； (1 分)

(4) 每个元素存在逆元：$\forall a \in \mathbf{Z}$，有$a \circ (14-a) = (14-a) \circ a = 7$，

故a的逆元为$14-a$; (2 分)

(5) 满足交换律：$\forall a,b \in \mathbf{Z}$，有$a \circ b = a + b - 7 = b \circ a$; (1 分)

综上，$\langle \mathbf{Z}, \circ \rangle$构成交换群。 (1 分)

34. 证明：

(1)	R	CP 规则（附加前提）	(1 分)
(2)	$P \vee \neg R$	P 规则	(1 分)
(3)	P	T (1) (2)	(1 分)
(4)	$P \to (Q \to S)$	P 规则	(1 分)
(5)	$Q \to S$	T (3) (4)	(1 分)
(6)	Q	P 规则	(1 分)
(7)	S	T (5) (6)	(1 分)

由此得到推理是正确的。

35. 证明：

用n个顶点代表n个人，两个朋友对应的顶点连边，得一个 3−正则图。 (2 分)

下证 3−正则图必有偶数个顶点，从而n必为偶数。

事实上，设G为 3−正则图，n个顶点分别记为$v_1, v_2, \cdots, v_n$，则图G的全体顶点的度数之和为$\sum_{i=1}^{n} v_i = 3n$。 (2 分)

根据图论定理，顶点的度数总和必为偶数， (2 分)

故 $3n$为偶数，进而n为偶数。 (1 分)