第二章、第三章常考大题：

1、求函数$z = 2x^2 - xy + y^2 + 7y$的极值。

2、在约束条件$x + y = 1$下，求函数$f(x,y) = x^2 + 2xy$的极值。

3、求曲线$x = t^2 - t$，$y = t^2 + t$，$z = t^2$在$t = 1$处的切线方程。

4、求曲面$z = x^3 - 2xy$在点$(2,1,4)$处的切平面方程。

5、求函数$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xyz - 6$在点$(1,1,1)$处的梯度$\mathrm{grad}f(1,1,1)$。

6、求下列一元函数的不定积分：

$$(1)\int (x^2 - 3x)dx$$

$$(2)\int (3 - 2x^3)dx$$

7、验证$y^2dx + 2xydy$是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，并求出一个$u(x,y)$。

答案：

1、在点$(-1,-4)$处，取得极小值-14

2、在$(1,0)$处，取得极值 1

3、$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$

4、$10x - 4y - z - 12 = 0$

5、$\mathrm{grad}f(1,1,1) = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} = (3,5,7)$

6、$(1)\int (x^2 - 3x)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$

$(2)\int (3 - 2x^3)dx = 3x - \frac{1}{2}x^4 + C$

7、$u(x,y) = \int y^2\,dx = xy^2 + w(y)$，其中$w$是任意函数

$u(x,y) = \int 2xy\,dy = xy^2 + v(x)$，其中$v$是任意函数

对比上述两个式子可知：w、v都是常数

所以，$u(x,y)=xy^2$

第三章常考大题：

1、*计算二重积分*$\iint_D (xy)\,d\sigma$，*其中区域D由*$y=x^2$，$y=x$*所围成*

2、*计算二重积分*$\iint_D (x+y)\,d\sigma$，*其中区域D由*$x=y$，$x=y+1$，$x=1$，$x=2$ *所围成*

3、*计算二重积分*$\iint_D xy\,d\sigma$，*其中区域D*：$x^2+y^2\le 4$，$x\ge 0$，$y\ge 0$

4、*计算二重积分*$\iint_D x^2\,d\sigma$，*其中区域D*：$x^2+y^2\le 4$

5、*计算二重积分*$\iint_D y^2\,d\sigma$，*其中区域D*：$x^2+y^2\le 4$

【注】：$\int sin2x\,dx=-\frac{1}{2}cos2x$，$\int cos2xdx=\frac{1}{2}sin2x$

二倍角公式：$sin2x=2sinxcosx$，$cos2x=2cos^2x-1$

平方和公式：$sin^2x+cos^2x=1$

$sin0=0$，$sin\frac{\pi}{2}=1$，$cos0=1$，$cos\frac{\pi}{2}=0$

答案：

$$\mathbf{1、}\ \iint_D xyd\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy\,dy=\int_0^1\left(x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=x}\right)dx$$
$$=\int_0^1(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^5)\,dx=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{12}x^6\Big|_0^1=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

$$2、\ \iint_D (x+y)d\sigma=\int_1^2 dx\int_{x-1}^{x}(x+y)\,dy=\int_1^2\left(xy+\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=x-1}^{y=x}\right)dx$$
$$=\int_1^2(2x-\frac{1}{2})\,dx=x^2-\frac{1}{2}x\Big|_1^2=\frac{5}{2}$$

3、$\iint_D xy\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^3\sin\theta\cos\theta\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^4}{4}\sin\theta\cos\theta\Big|_{r=0}^{r=2}\right)d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin2\theta d\theta=-\cos2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\cos0-\cos\pi=2$

4、$\iint_D x^2\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\cos^2\theta\,dr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta\Big|_{r=0}^{r=2}\right)d\theta$

$=\int_0^{2\pi}4\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}(2+2\cos2\theta)d\theta=(2\theta+\sin2\theta)\Big|_0^{2\pi}=4\pi$

5、$\iint_D y^2\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\sin^2\theta\,dr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\sin^2\theta\Big|_{r=0}^{r=2}\right)d\theta$

$=\int_0^{2\pi}4\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}(2-2\cos2\theta)d\theta=(2\theta-\sin2\theta)\Big|_0^{2\pi}=4\pi$

第三章常考大题：

1、*计算二重积分*$\iint_D (x^2+y^2)\,d\sigma$*，其中区域*$D$*由*$x=1$，$x=2$，$y=2x$，$y=3x$*围成*

2、*计算二重积分*$\iint_D (x+y)\,d\sigma$*，其中区域*D：$x^2+y^2\le 4$，$x\ge 0$，$y\ge 0$

3、*计算三重积分*$\iint_\Omega (|x|+y+z)\,dv$*，其中区域*$\Omega$：$|x|\le 1$，$|y|\le 1$，$|z|\le 2$

4、*计算三重积分*$\iiint_\Omega x\,dv$*，其中区域*Ω*由*三个坐标面及平面 $2x+y+z=2$ *所围成*

5、*计算三重积分*$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv$*，其中*$\Omega$*是由*$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=1$ *所围成*

6、*计算三重积分*$\iiint_\Omega (x+y+z)\,dv$*，其中*$\Omega$*是由*$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=1$ *所围成*

7、*计算对弧长的曲线积分*$\int_L xyds$ *，其中*L*是从点*$(-1,1)$*到点*$(1,3)$*的直线段*

答案：

1、$\iint_D (x^2+y^2)\,d\sigma=\int_1^2 dx\int_{2x}^{3x}(x^2+y^2)dy=\int_1^2\frac{22}{3}x^3dx=\frac{55}{2}$

2、$\iint_D (x+y)\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2(r^2cos\theta+r^2sin\theta)dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{8}{3}cos\theta+\frac{8}{3}sin\theta)\,d\theta=\frac{16}{3}$

3、$\iint_\Omega (|x|+y+z)\,dv=2\int_0^1 dx\int_{-1}^1 dy\int_{-2}^2(x+y+z)dz=2\int_0^1 8xdx=8$

4、$\iiint_\Omega x\,dv=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}dy\int_0^{2-2x-y}xdz=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}(2x-2x^2-xy)dy=\int_0^1(2x^3-4x^2+2x)dx=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1=\frac{1}{6}$

5、$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^1 r^3\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta=\frac{\pi}{2}$

6、$\iiint_\Omega (x+y+z)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^1(r^2cos\theta+r^2sin\theta+rz)\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2cos\theta+r^2sin\theta+\frac{r}{2})\,dr=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3}cos\theta+\frac{1}{3}sin\theta+\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{2}$

7、曲线L的方程：$y=x+2$，$-1\le x\le 1$ $\int_L xyds=\int_{-1}^1 x\cdot(x+2)\cdot\sqrt{1+1^2}dx=\int_{-1}^1(\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x)dx=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

- 高等数学·第四章·重要大题：

1、计算对弧长的曲线积分$\int_L (x^2y+xy^2)ds$，其中 L 是从点$(-1,1)$到点$(2,1)$的直线段

2、计算对弧长的曲线积分$\int_L \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 是曲线$y=\sqrt{4-x^2}$

3、计算对坐标的曲线积分$\int_L (x^2-y)dx+(x+y^2)dy$，其中 L 为直线$y=x$从$(0,0)$到$(1,1)$的线段

4、计算对坐标的曲线积分$\int_L xydx+(y-x)dy$，其中 L 为有向折线 ABO，ABO 为$(-1,0)$，$(1,0)$，$(1,2)$

5、计算曲线积分$\int_L (x^3-x^2y)dx+(xy^2+y^3)dy$，其中 L 为圆周$x^2+y^2=1$逆时针方向

6、验证曲线积分$\int_{(0,0)}^{(2,3)}(xy^2-3x^2y)dx+(x^2y-x^3)dy$与路径无关，并计算其值。

答案：

1、$\int_{L} (x^2y+xy^2)ds=\int_{-1}^{2}(x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$

2、$\int_{L} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\frac{1}{2}\int_{L} ds=\pi$

3、$\int_{L} (x^2-y)dx+(x+y^2)dy=\int_{0}^{1}(x^2-x)dx+(x+x^2)dx=\int_{0}^{1}2x^2dx=\frac{2}{3}$

4、$\int_{L} xydx+(y-x)dy=\int_{AB}xydx+(y-x)dy+\int_{BO}xydx+(y-x)dy=\int_{0}^{2}(y-1)dy=0$

5、$\int_{L} (x^3-x^2y)dx+(xy^2+y^3)dy=\iint_{D} (x^2+y^2)d\sigma=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}r^3\,dr=\frac{\pi}{2}$

6、$\int_{(0,0)}^{(2,3)}(xy^2-3x^2y)dx+(x^2y-x^3)dy$

$$=\int_{(0,0)}^{(0,3)}(xy^2-3x^2y)dx+(x^2y-x^3)dy+\int_{(0,3)}^{(2,3)}(xy^2-3x^2y)dx+(x^2y-x^3)dy$$

$$=\int_{0}^{2}(9x-9x^2)dx=-6$$

第五章常考大题：

1、计算对面积的曲面积分$\iint_{\Sigma} (2-y-z)dS$，其中 Σ 是平面$x+y+z-1=0$ 在第一卦象中的部分。

2、求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x+y}}{e^{x+2y}}$的通解。

3、求微分方程$y'-\frac{2y}{x}=0$ 的通解。

4、求微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=xsinx$的通解。

5、求微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$的通解

6、求微分方程 $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$的通解

【提示】：一阶线性非齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$的通解为：

$$y = Ce^{\int -P(x)dx} + e^{\int -P(x)dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx$$