绝密★启用前

考试号

2019 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)

(课程代码 00023)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 在空间直角坐标系中,点 $(0,0,-2)$ 在

A. x 轴上　　B. y 轴上　　C. z 轴上　　D. oxy 平面上

2. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 连续　　B. 间断　　C. 偏导数存在　　D. 可微

3. 已知 $\cos x\cos y\mathrm{d}x-\sin x\sin y\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分,则 $u(x,y)=$

A. $\sin y\cos x$　　B. $\sin x\sin y$　　C. $-\sin x\cos y$　　D. $\sin x\cos y$

4. 下列微分方程中,属于一阶线性非齐次微分方程的是

A. $3y\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}x$　　B. $x\mathrm{d}y=(x^2+3y)\mathrm{d}x$

C. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x\sin y=19$　　D. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy^2=9$

5. 下列无穷级数中,绝对收敛的无穷级数是

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n+1}$

第二部分 非选择题

二、填空题:本大题共5空,每空2分,共10分。

6. 与向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\}$ 同方向的单位向量是________.

7. 设函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$,则 $f(x,y)=$________.

8. 设积分区域 $D:x^2+y^2\leqslant 9$,则二重积分 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在极坐标下的二次积分为________.

9. 微分方程 $y''+(x-1)y'+6y=12$ 的特解 $y^*=$________.

10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,$f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$,则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=$________.

三、计算题:本大题共12小题,每小题5分,共60分。

11. 已知平面 $\pi_1:x+2y-z-2=0$ 和平面 $\pi_2:2x+y+z-19=0$,求这两个平面的夹角 θ.

12. 设函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

13. 设函数 $z=x\sin(x-2y)$,求全微分 $\mathrm{d}z$.

14. 设方程 $x^z=z^y$ 确定函数 $z=z(x,y)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

15. 设函数 $f(x,y,z)=x^3y+y^3z+xz^3$,求 $\mathbf{grad}f(1,1,-1)$.

16. 计算二重积分 $\iint\limits_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 D 是由 $y=1-x^2$ 和 x 轴所围成的区域.

17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}s$,其中 C 是 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 一段弧.

18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2+1)\mathrm{d}y$,其中 C 是由 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的直线段.

19. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

20. 求微分方程 $y''-y=0$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的敛散性.

22. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

四、综合题:本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

23. 求函数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2-2x+6y-8$ 的极值.

24. 求曲面 $x^2+2y^2-z^2=2$ 在点 $P_0(1,-1,1)$ 处的法线方程.

25. 用定义证明无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

绝密★启用前

2019 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码 00023)

一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分。

1. C　　2. A　　3. D　　4. B　　5. A

二、填空题:本大题共 5 空,每空 2 分,共 10 分。

6. $\{\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$　　7. xy　　8. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 f(r^2) r dr$　　9. 2　　10. π

三、计算题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

11. 解:法向量 $\boldsymbol{n}_1 = \{1,2,-1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{2,1,1\}$

夹角余弦 $\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{1}{2}$　　(3 分)

所以夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$　　(2 分)

12. 解:令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$,则 $z = \ln u$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$　　(2 分)

$= \frac{1}{u} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$= \frac{y}{x^2 + y^2}$　　(3 分)

13. 解:$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(x - 2y) + x\cos(x - 2y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x\cos(x - 2y)$　　(2 分)

所以 $dz = [\sin(x - 2y) + x\cos(x - 2y)]dx + [-2x\cos(x - 2y)]dy$　　(3 分)

14. 解:令 $F(x,y,z) = x^z - z^y$,则

$F_x = zx^{z-1}$, $F_z = x^z \cdot \ln x - y \cdot z^{y-1}$　　(2 分)

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{zx^{z-1}}{x^z\cdot\ln x-y\cdot z^{y-1}}=-\dfrac{\frac{z}{x}}{\ln x-\frac{y}{z}}$ (3 分)

15. 解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2y+z^3,\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^3+3y^2z,\dfrac{\partial f}{\partial z}=y^3+3xz^2$ (3 分)

有 $\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=\{3x^2y+z^3,x^3+3y^2z,y^3+3xz^2\}$

所以 $\mathbf{grad}\,f(1,1,-1)=\{2,-2,4\}$ (2 分)

16. 解：在直角坐标系中，区域 D 可表示为 $0\leq y\leq 1-x^2,-1\leq x\leq 1$.

$$\iint\limits_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}(1-2x)\mathrm{d}y$$ (3 分)

$$=\int_{-1}^{1}(1-2x)(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2x^3-x^2-2x+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}$$ (2 分)

17. 解：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int_C\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^1(1+4x^2)\mathrm{d}x$$ (3 分)

$$=\frac{7}{3}$$ (2 分)

18. 解：C 的方程为 $y=x$，x 从 0 变到 1，

$$\int_C(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2+1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(6x^3-x^3)\mathrm{d}x+(6x^3-3x^3+1)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(8x^3+1)\mathrm{d}x$$ (3 分)

$$=3$$ (2 分)

19. 解：分离变量得方程 $y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x$

两边积分 $\int y\mathrm{d}y=\int x\mathrm{d}x$，解得 $\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+C_0$

即 $y^2=x^2+C(C=2C_0)$ (3 分)

又 $\because$ $y(0)=1$， $\therefore$ $C=1$

特解为：$y^2=x^2+1$ (2 分)

20. 解：特征方程为 $r^2-1=0$，特征根 $r_1=-1,r_2=1$. (2 分)

所以方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$ (3 分)

21. 解：$u_n=\frac{n}{2^n},\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1$ (3 分)

所以由比值审敛法知，该级数收敛. (2 分)

22. 解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以收敛半径 $R=1$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$ (2 分)

设和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in[-1,1)$

而 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\ |x|<1.$

所以 $S(x)=\int_0\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\quad x\in[-1,1)$ (3 分)

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 解：令 $\begin{cases}f_x(x,y)=2x+2y-2=0\\ f_y(x,y)=2x-2y+6=0\end{cases}$

解得驻点 $(-1,2)$ (2 分)

又因为 $A=f_{xx}=2,B=f_{xy}=2,C=f_{yy}=-2$

且 $B^2-AC=8>0$，所以 $(-1,2)$ 不是极值点，该函数无极值 (3 分)

24. 解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2-2$

$F_x=2x,F_y=4y,F_z=-2z$

$\because$ 在 $P_0(1,-1,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2,-4,-2\}$ (3 分)

$\therefore$ 法线方程为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{-2}$

即：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ (2 分)

25. 证明：$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

因此级数的部分和为

$S_n=(\sqrt{1+1}-\sqrt{1})+(\sqrt{2+1}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$ (3 分)

而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$，所以该级数发散 (2 分)