

2023 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学

(课程代码 02324)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

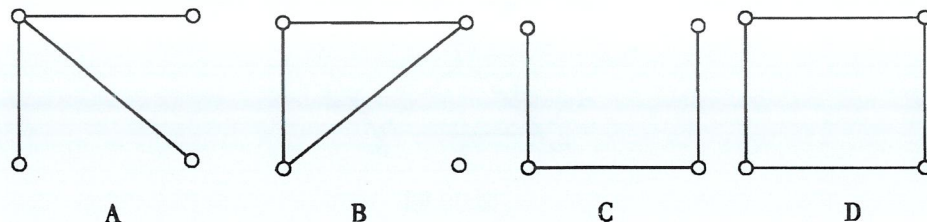
一、单项选择题: 本大题共 15 小题, 每小题 1 分, 共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 p : 今天晴天, q : 我们去放风筝, 命题“今天要是晴天, 我们就去放风筝。”的符号化为
A. $p \rightarrow q$ B. $p \rightarrow \neg q$ C. $q \rightarrow p$ D. $\neg q \rightarrow p$
2. 下列命题公式是矛盾式的是
A. $p \wedge (p \rightarrow q)$ B. $\neg (p \rightarrow q) \wedge q$ C. $p \wedge (p \leftrightarrow q)$ D. $p \vee (p \leftrightarrow q)$
3. 下列式子不正确的是
A. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$
B. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$
C. $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
D. $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$
4. 设命题公式 A 含有 2 个命题变元, 且已知 A 为矛盾式, 则 A 的主合取范式含大项的个数为
A. 2 B. 3 C. 4 D. 1
5. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$, 则 R 具有
A. 自反性 B. 反自反性 C. 对称性 D. 反对称性
6. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, 则 R 是
A. 相容关系 B. 等价关系
C. 偏序关系 D. 全序关系
7. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, 给定 $f = \{\langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 7 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle\}$, 则下列选项中, 正确的是
A. f 不是从 A 到 B 的函数 B. f 是单射函数
C. f 是满射函数 D. f 是双射函数
8. 设集合 A 有 2 个元素, 则 $A \times A$ 的所有不同的等价关系的个数是
A. 4 B. 8 C. 12 D. 15

9. 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, $\forall x \in B, x \wedge x' =$
A. Φ B. B C. 0 D. 1

10. 正整数集上二元运算 $*$ 封闭的是
A. $x * y = |x - y|$ B. $x * y = x - y$
C. $x * y = x/y$ D. $x * y = x + 2y$
11. 设 $S = \{0, 1, 2, 5\}$, 则代数系统 $\langle P(S), \cup \rangle$ 中 \cup 运算的幺元是
A. 0 B. 1 C. Φ D. S
12. 设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 \circ 是二元运算, 如果 $*$ 和 \circ 满足交换律, 结合律和吸收律, 则 $\langle S, *, \circ \rangle$ 构成一个
A. 环 B. 域 C. 格 D. 布尔代数

13. 下列是自补图的是



14. 设一棵树的结点个数为 2020, 则此树中的割边数为
A. 2018 B. 2019 C. 2020 D. 2021
15. 在有 6 个顶点 12 条边的连通简单平面图中, 所围成每个面的边数为
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

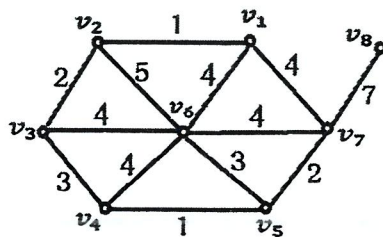
第二部分 非选择题

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

16. 两个不同大项的析取式的真值是_____。
17. 设论域的元素为 a 和 b , 则由消去量词可得 $\forall x A(x) \wedge \exists y B(y) \Leftrightarrow$ _____。
18. 公式 $\forall x (A(x) \wedge \exists y B(y)) \rightarrow C(x)$ 中 $\exists y$ 的辖域是_____。
19. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$, $S = \{\langle 2, 1 \rangle\}$, 则 $(R \circ S)^{-1} =$ _____。
20. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则从 A 到 B 的所有不同满射函数的个数有_____个。
21. 设 R 是实数集, 在 R 上定义二元运算 $*$, $\forall x, y \in R, x * y = x + y + 2xy$, 则 $\langle R, * \rangle$ 的幺元为_____。
22. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是一个格, 则公式 $a \vee b \leq b$ 的对偶公式是_____。
23. 无向图 G 为欧拉图, 当且仅当 G 是连通的, 且 G 中无_____数度顶点。
24. 5 阶非同构的树共有_____棵。
25. 一棵高度为 5 的正则 3 叉树中叶结点的个数为_____。

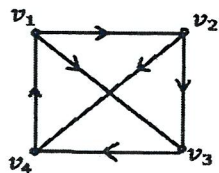
三、简答题：本大题共 8 小题，第 26 ~ 30 小题，每小题 6 分；第 31 ~ 33 小题，每小题 7 分，共 51 分。

26. 用真值表法判定命题公式 $(p \vee \neg q) \rightarrow (q \wedge r)$ 是否为非重言式的可满足式。
27. 用等值演算法求命题公式 $(p \rightarrow q) \wedge r$ 的主析取范式。
28. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ ，写出自反闭包 $r(R)$ ，对称闭包 $s(R)$ 和传递闭包 $t(R)$ 的集合表达式。
29. 画出 $A = \{2, 4, 8, 12, 24\}$ 上整除关系的哈斯图，并求 $B = \{4, 8, 12\}$ 的极大元、极小元。
30. 利用 Kruskal 算法求题 30 图所示的连通带权图的最小生成树，请给出详细过程并画出最小生成树，求出最小生成树的权。



题 30 图

31. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, R 为 $A \times A$ 上的二元关系,
 $\forall \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in A \times A, \langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x + y = u + v$
 (1) 证明 R 为等价关系;
 (2) 求 R 导出的等价类。
32. 设有向图 D 如题 32 图所示,
 (1) 写出图 D 的邻接矩阵 M_D ;
 (2) 计算图 D 中长度为 4 的通路数;
 (3) 计算图 D 中长度小于或等于 4 的回路数。



题 32 图

33. 用二叉树表示算术表达式 $(a * (b + c)) \div (g + (h - i))$ ，并给出该树的先序、中序、后序遍历序列。

四、证明题：本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分。

34. 证明：正有理数集 Q^+ ，关于普通乘法运算构成交换群。
35. 用 CP 规则证明下面有效推理。

前提： $p \rightarrow r, \neg q \vee p, s \rightarrow q$

结论： $s \rightarrow r$

2023 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学试题答案及评分参考

(课程代码 02324)

一、单项选择题：本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分。

1. A 2. B 3. B 4. C 5. B 6. A 7. C 8. D 9. C 10. D
11. C 12. C 13. C 14. B 15. A

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

16. T
17. $(A(a) \wedge A(b)) \wedge (B(a) \vee B(b))$
18. $B(y)$
19. $\{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$
20. 6
21. 0
22. $a \wedge b \geq b$
23. 奇
24. 3
25. 81

三、简答题：本大题共 8 小题，第 26 ~ 30 小题，每小题 6 分；第 31 ~ 33 小题，每小题 7 分，共 51 分。

26. 解： $(p \vee \neg q) \rightarrow (q \wedge r)$ 的真值表如下

p	q	r	$p \vee \neg q$	$q \wedge r$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (q \wedge r)$	(1 分)
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	(1 分)
0	1	0	0	0	1	
0	1	1	0	1	1	(1 分)
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	(1 分)
1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	(1 分)

由上表可知，命题公式 $(p \vee \neg q) \rightarrow (q \wedge r)$ 为非重言式的可满足式。(1 分)

27. 解: $(p \rightarrow q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (2 分)

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ (2 分)

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$ (1 分)

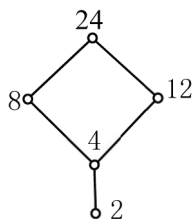
由此可得 $(p \rightarrow q) \wedge r$ 的主析取范式为 $m_1 \vee m_3 \vee m_7$ (1 分)

28. 解: $r(R) = R \cup I_A = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ (2 分)

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ (2 分)

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ (2 分)

29. 解: $A = \{2, 4, 8, 12, 24\}$ 上整除关系的哈斯图如答 29 图



答 29 图

(4 分)

$B = \{4, 8, 12\}$ 的极大元 8, 12; 极小元 4。

(2 分)

30. 解: 利用 Kruskal 算法计算, 按权值从小到大对边进行排列,

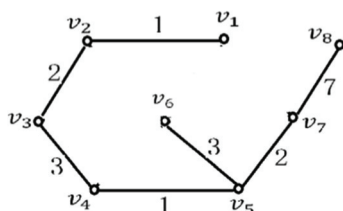
添加权值为 1 的边 $v_1 v_2, v_4 v_5$; (1 分)

添加权值为 2 的边 $v_2 v_3, v_5 v_7$; (1 分)

添加权值为 3 的边 $v_3 v_4, v_5 v_6$; (1 分)

添加权值为 7 的边 $v_7 v_8$; (1 分)

得到的最小生成树如答 30 图所示。



答 30 图

得到的最小生成树的权为 19。 (2 分)

31. 证明: $A \times A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ (1 分)

(1) 因为 $\forall \langle x, y \rangle \in A \times A, x + y = x + y$,

从而 $\langle x, y \rangle R \langle x, y \rangle$, 即 R 具有自反性; (1 分)

$\forall \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in A \times A, \langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle$, 则 $x + y = u + v$,

从而 $u + v = x + y$, 故 $\langle u, v \rangle R \langle x, y \rangle$, 即 R 具有对称性; (1 分)

$\forall \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle, \langle m, n \rangle \in A \times A, \langle x, y \rangle R \langle u, v \rangle, \langle u, v \rangle R \langle m, n \rangle$,

则 $x + y = u + v, u + v = m + n$,

从而 $x + y = m + n$, 故 $\langle x, y \rangle R \langle m, n \rangle$, 即 R 具有传递性; (1 分)

综上, R 是 $A \times A$ 上的等价关系。 (1 分)

(2) R 导出五个等价类为: $[\langle 1, 1 \rangle]_R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$, $[\langle 1, 2 \rangle]_R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$,

$[\langle 1, 3 \rangle]_R = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$, $[\langle 2, 3 \rangle]_R = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$,

$[\langle 3, 3 \rangle]_R = \{\langle 3, 3 \rangle\}$ (2 分)

32. 解: (1) 图 D 的邻接矩阵 M_D 为 (1 分)

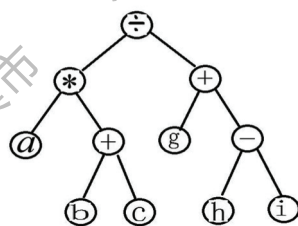
$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 由于 $M_D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_D^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3 分)

由 M_D^4 可知, 图 D 中长度为 4 的通路数是 16 条。 (1 分)

(3) 由 M_D, M_D^2, M_D^3, M_D^4 可知, 图 D 中长度小于或等于 4 的回路数是 10 条。 (2 分)

33. 解: 算术表达式 $(a * (b + c)) \div (g + (h - i))$ 的二叉树如答 33 图所示,



答 33 图

先序遍历序列为 $\div * a + bc + g - hi$ (1 分)

中序遍历序列为 $a * b + c \div g + h - i$ (2 分)

后序遍历序列为 $abc + * ghi - + \div$ (2 分)

四、证明题：本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分。

34. 证明：(1) 满足封闭性： $\forall a, b \in Q^+$, 则有 $a * b \in Q^+$ (1 分)
(2) 满足结合律： $\forall a, b, c \in Q^+$, 则有 $(a * b) * c = abc = a * (b * c)$ (1 分)
(3) 存在幺元 1： $\forall a \in Q^+$, 有 $1 * a = a * 1 = a$ (1 分)
(4) 每个元素都存在逆元： $\forall a \in Q^+$, 有 $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$, 且 $a^{-1} \in Q^+$,
故 a 的逆元为 a^{-1} 。 (2 分)
(5) 满足交换律： $\forall a, b \in Q^+$, 有 $a * b = ab = ba = b * a$ (1 分)
综上所述, 正有理数集 Q^+ , 关于普通乘法运算构成交换群。 (1 分)
35. 证明：(1) s CP 规则 (附加前提) (1 分)
(2) $s \rightarrow q$ P 规则 (1 分)
(3) q T(1)(2) (1 分)
(4) $\neg q \vee p$ P 规则 (1 分)
(5) p T(3)(4) (1 分)
(6) $p \rightarrow r$ P 规则 (1 分)
(7) r T(5)(6) (1 分)
由此得到推理是正确的。 (1 分)