

绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学

(课程代码 02324)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 15 小题, 每小题 1 分, 共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 P : 他勤奋, Q : 他成绩高, 命题“只有他勤奋, 他成绩才高”符号化为
A. $P \vee Q$ B. $Q \rightarrow P$ C. $\neg P \vee \neg Q$ D. $P \rightarrow Q$
2. 下列命题公式是矛盾式的为
A. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ B. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
C. $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ D. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$
3. 下列式子中, 不正确的是
A. $\exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$ B. $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
C. $A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \exists x (A \rightarrow B(x))$ D. $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
4. 设论域的元素为 a 和 b , 与谓词公式 $\forall x P(x)$ 等价的是
A. $P(a) \wedge P(b)$ B. $P(a) \vee P(b)$ C. $P(a) \rightarrow P(b)$ D. $P(b) \rightarrow P(a)$
5. 下列关系矩阵所对应的关系具有自反性的是
A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. 下列非负整数度序列可简单图化的是
A. (5,5,4,1,1) B. (3,3,2,2,1,1) C. (3,3,3,1) D. (4,3,2,1)
7. $S = \{a, b\}$ 的二元运算 \circ 定义为 $a \circ a = a$, $a \circ b = b$, $b \circ a = b$, $b \circ b = a$, 则 \circ 不满足
A. 交换律 B. 幂等律 C. 结合律 D. 消去律

8. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, 则 R 是 A 上的
A. 相容关系 B. 等价关系 C. 偏序关系 D. 拟序关系

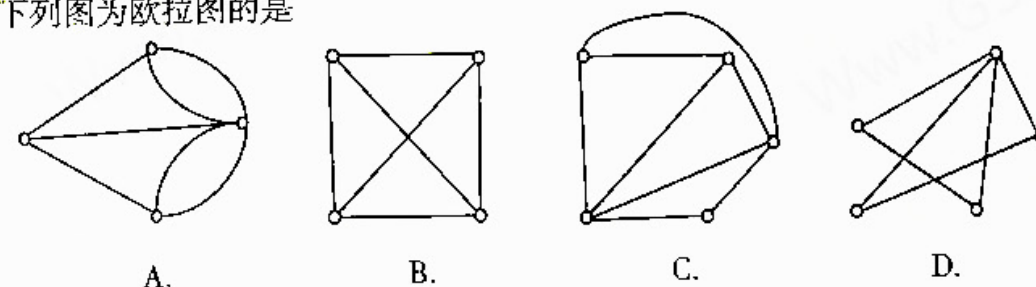
9. 设 R 为实数集, 下列关系中能构成函数的是

- A. $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (y^2 - x = 0)\}$
- B. $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (x^2 + y = 0)\}$
- C. $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (y/x = 1)\}$
- D. $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (y \cdot x = 1)\}$

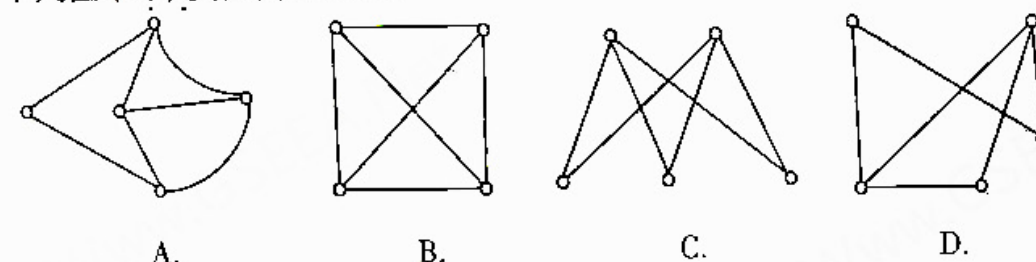
10. 设 R, S 均为集合 A 上的二元关系, 下列命题错误的是

- A. 若 R 和 S 是反自反的, 则 $R \cup S$ 也是反自反的
- B. 若 R 和 S 是自反的, 则 $R \cup S$ 也是自反的
- C. 若 R 和 S 是反对称的, 则 $R \cup S$ 也是反对称的
- D. 若 R 和 S 是对称的, 则 $R \cup S$ 也是对称的

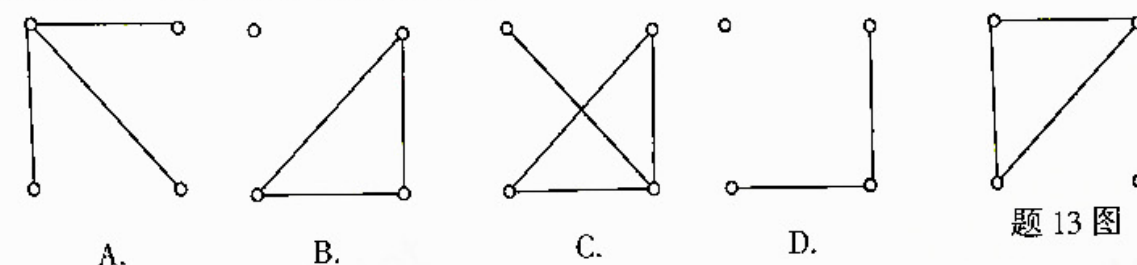
11. 下列图为欧拉图的是



12. 下列图中不是哈密顿图的是



13. 下列选项中与题 13 图互为补图的是



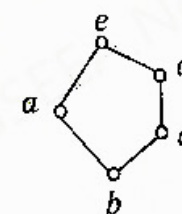
题 13 图

14. 在下列代数系统 (G, \circ) 中, \circ 是普通加法运算, 其中不是群的是

- A. G 为自然数集合
- B. G 为偶数集合
- C. G 为有理数集合
- D. G 为整数集合

15. 如题 15 图所示的格中, 元 c 的补元是

- A. a B. b C. d D. e



题 15 图

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

16. 任意两个不同大项的析取式的真值是_____。
17. 设论域为整数集，命题 $\exists x \forall y (x * y = 1)$ 的真值为_____。
18. 公式 $\forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x Q(x)$ 对应的前束范式为_____。
19. 设代数系统 $(S, *)$ 为独异点， $\forall a, b \in S$ ，均有逆元 $a^{-1}, b^{-1} \in S$ ，且 $a * b$ 也有逆元，则 $a * b$ 的逆元为_____。
20. 设无向树有 8 片树叶，1 个度为 4 的分支点，其余的分支点的度为 3，则树的结点数为_____。
21. 设 G 为连通平面图，共 8 个顶点，其平面表示中共有 6 个面，则边数为_____。
22. 有 9 个顶点的无向完全图 K_9 ，需要删除_____条边才能得到生成树。
23. 设集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，则 A, B 的幂集的对称差 $\mathcal{P}(A) \oplus \mathcal{P}(B)$ 为_____。
24. 设集合 $A = \{a, b, c\}$ ， A 上的关系 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$ ， $S = \{\langle b, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$ ，则复合关系(采用右复合) $R \circ S$ 为_____。
25. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $B = \{a, b\}$ ，从 A 到 B 的不同的满射的个数为_____。

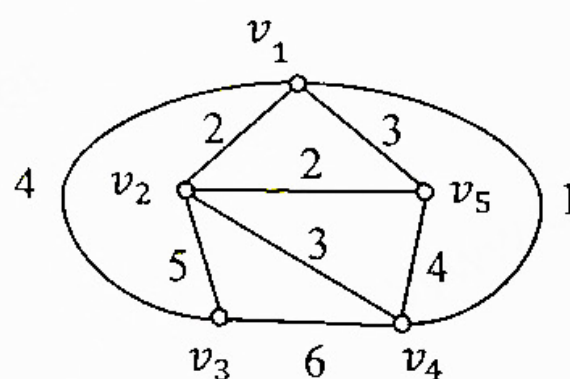
三、简答题：本大题共 7 小题，第 26~30 小题，每小题 6 分；第 31~32 小题，每小题 7 分，共 44 分。

26. 用真值表法判定命题公式 $(P \leftrightarrow (P \wedge Q)) \vee R$ 是否为非重言式的可满足式。

27. 用等值演算法求命题公式 $(P \rightarrow Q) \wedge \neg R$ 的主析取范式。

28. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$ ，写出自反闭包 $r(R)$ ，对称闭包 $s(R)$ 和传递闭包 $t(R)$ 的集合表达式。

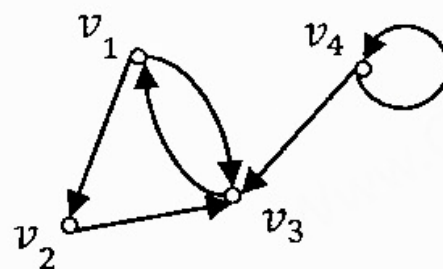
29. 利用 Kruskal 算法求题 29 图所示的连通带权图的最小生成树，请给出详细过程并画出最小生成树。



题 29 图

30. 设有向图 G 如题 30 图所示，

- (1) 写出图 G 的邻接矩阵；
- (2) 计算图 G 中长度为 4 的通路数；
- (3) 计算图 G 中长度小于或等于 4 的回路数。



题 30 图

31. 用二叉树表示算术表达式 $(3 * a - 2) / (b + c * d)$ ，并给出先序、中序和后序遍历序列。
32. 设 $A = \{1, 2, 4, 6, 12\}$ ， \leq 为整除关系，回答下列问题：
- (1) 画出 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图；
 - (2) 求子集 $B = \{2, 4, 6\}$ 的极大元，极小元，最大元，最小元；
 - (3) 判断该偏序集是否为格。

四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。

33. 在整数集 \mathbb{Z} 上定义二元运算 \circ ： $a \circ b = a + b - 3, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ ，证明 $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ 构成交换群。
34. 用 CP 规则证明下面有效推理。
- 前提： $P \rightarrow (Q \rightarrow R), S \rightarrow P, Q$
- 结论： $S \rightarrow R$
35. 设 G 是 $n(n \geq 2)$ 阶无向简单图，且 G 为自补图，证明 $n = 4k$ 或 $n = 4k + 1$ ，其中 k 为正整数。

绝密★启用前

2021 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学试题答案及评分参考

(课程代码 02324)

一、单项选择题：本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分。

1. B 2. D 3. C 4. A 5. D 6. B 7. B 8. A 9. B 10. C
 11. D 12. C 13. A 14. A 15. A

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

16. T
 17. F
 18. $\exists x \forall y (\neg P(x) \vee \neg Q(y))$ (或 $\exists x \forall y \neg (P(x) \wedge Q(y))$ 或蕴涵式)
 19. $b^{-1} * a^{-1}$
 20. 13
 21. 12
 22. 28
 23. $\{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$
 24. $\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$
 25. 30

三、简答题：本大题共 7 小题，第 26~30 小题，每小题 6 分；第 31~32 小题，每小题 7 分，共 44 分。

26. 解：($P \leftrightarrow (P \wedge Q)$) $\vee R$ 的真值表如下

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \leftrightarrow (P \wedge Q)$	$(P \leftrightarrow (P \wedge Q)) \vee R$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

(1 分)

(1 分)

(1 分)

(1 分)

(1 分)

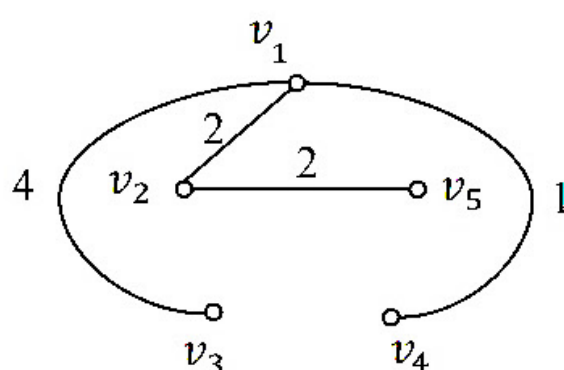
由上表可知，命题公式为非重言式的可满足式。

(1 分)

27. 解: $(P \rightarrow Q) \wedge \neg R$
 $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge \neg R$ (2 分)
 $\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)$ (2 分)
 $\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$ (1 分)
 由此得原命题公式的主析取范式为
 $(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ 。 (1 分)

28. 解:
 $r(R) = R \cup I_A = R \cup \{\langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$
 $= \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$, (2 分)
 $s(R) = R \cup R^{-1} = R \cup \{\langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$
 $= \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$, (2 分)
 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = R \cup \{\langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle\} = E_A$
 $= \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$. (2 分)

29. 解: 利用 Kruskal 算法计算, 按权值从小到大对边进行排列,
 添加权值为 1 的边 (v_1, v_4) ; (1 分)
 添加权值为 2 的边 (v_1, v_2) ; (1 分)
 添加权值为 2 的边 (v_2, v_5) ; (1 分)
 添加权值为 4 的边 (v_1, v_3) ; (1 分)
 得到的最小生成树如答 29 图所示。 (2 分)



答 29 图

30. 解:
 (1) 图 G 的邻接矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 (1 分)
 (2) 由于

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1 \text{ 分})$$

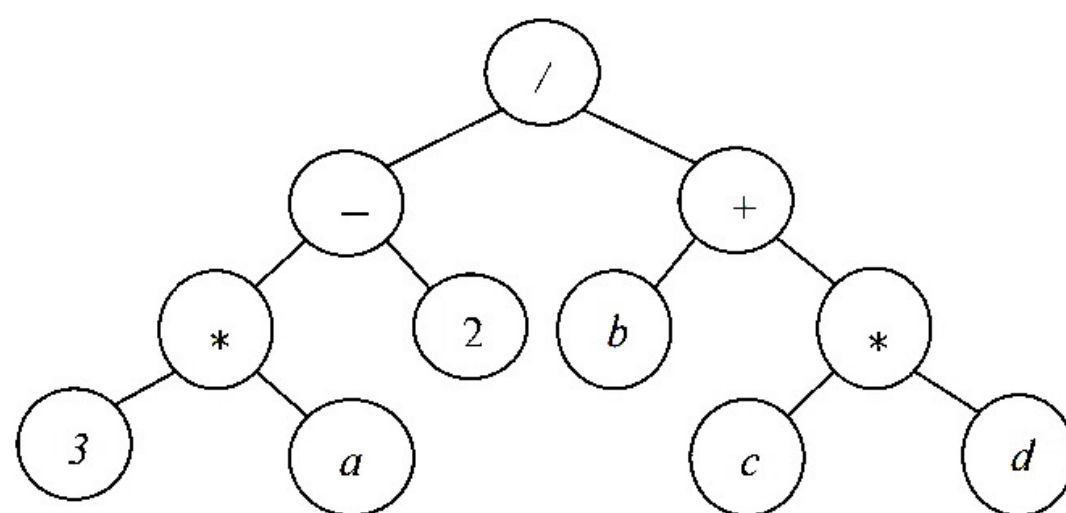
$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1 \text{ 分})$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1 \text{ 分})$$

由 M^4 可知, 图 G 中长度为 4 的通路数为 16 条。 (1 分)

(3) 由 M , M^2 , M^3 和 M^4 可知, G 中长度小于或等于 4 的回路数为 11。 (1 分)

31. 解: 算术表达式 $(3 * a - 2) / (b + c * d)$ 的二叉树如答 31 图所示:



答 31 图 (1 分)

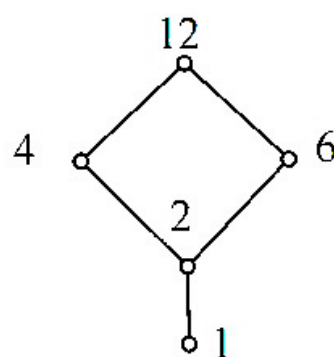
先序遍历序列为 $/(-(*3a)2)(+b(*cd))$, 即 $- * 3a2 + b * cd$; (2 分)

中序遍历序列为 $((3 * a) - 2) / (b + (c * d))$, 即 $3 * a - 2 / b + c * d$; (2 分)

后序遍历序列为 $((3a *) 2 -) (b(cd *) +) /$, 即 $3a * 2 - bcd * + /$ 。 (2 分)

32. 解:

(1) $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如答 32 图所示: (2 分)



答 32 图

- (2) 子集 $B = \{2, 4, 6\}$ 的极大元为 4 和 6, (1 分)
 极小元为 2, (1 分)
 最大元不存在, (1 分)
 最小元为 2。 (1 分)
- (3) 该偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 是格, 因为 A 中每对元素都有最小上界和最大下界。 (1 分)

四、证明题: 本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分。

33. 证明:

- (1) 满足封闭性: $\forall a, b \in \mathbf{Z}$, 有

$$a \circ b = a + b - 3 \in \mathbf{Z};$$
 (1 分)
- (2) 满足结合律: $\forall a, b, c \in \mathbf{Z}$, 有

$$(a \circ b) \circ c = a + b + c - 6 = a \circ (b \circ c);$$
 (1 分)
- (3) 存在幺元 3: $\forall a \in \mathbf{Z}$, 有

$$a \circ 3 = a + 3 - 3 = a = 3 + a - 3 = 3 \circ a;$$
 (1 分)
- (4) 每个元素存在逆元: $\forall a \in \mathbf{Z}$, $a \circ (6 - a) = (6 - a) \circ a = 3$,
 故 a 的逆元为 $6 - a$; (2 分)
- (5) 满足交换律: $\forall a, b \in \mathbf{Z}$, 有

$$a \circ b = a + b - 3 = b \circ a;$$
 (1 分)
- 综上, $\langle \mathbf{Z}, \circ \rangle$ 构成交换群。 (1 分)

34. 证明:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------|-------|
| (1) S | CP 规则 (附加前提) | (1 分) |
| (2) $S \rightarrow P$ | P 规则 | (1 分) |
| (3) P | T (1) (2) | (1 分) |
| (4) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | P 规则 | (1 分) |
| (5) $Q \rightarrow R$ | T (3) (4) | (1 分) |
| (6) Q | P 规则 | (1 分) |
| (7) R | T (5) (6) | (1 分) |

由此得到推理是正确的。

35. 证明: 由补图的定义可知, 对于 n 阶图 G 有 $G \cup \bar{G} = K_n$, (1 分)
 设 G 与 \bar{G} 的边数分别为 m 和 \bar{m} , 则有 $m + \bar{m} = n(n-1)/2$, (2 分)
 另外, 由于 G 为自补图, $G \cong \bar{G}$, 二者的边数相同, $m = \bar{m}$, (1 分)
 故 $m = \bar{m} = n(n-1)/4$, (2 分)
 由于 n 和 $n-1$ 是连续自然数, 二者互素, 又因为 m 是整数, 所以 n 被 4 整除或
 $n-1$ 被 4 整除, 即 $n = 4k$ 或 $n = 4k+1$, 其中 k 为正整数。 (1 分)