绝密★启用前

2022年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)

(课程代码　00023)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题:本大题共10小题,每小题3分,共30分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 在空间直角坐标系中,点(0,1,0)在

A. x 轴上　B. y 轴上　C. z 轴上　D. oxz 平面上

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

A. 等于0　B. 等于1　C. 等于2　D. 不存在

3. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\sin x$ 是

A. 可分离变量的微分方程　B. 齐次微分方程

C. 一阶线性齐次微分方程　D. 一阶线性非齐次微分方程

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处收敛,则该级数在 $x=-1$ 处

A. 发散　B. 绝对收敛

C. 条件收敛　D. 敛散性不确定

5. 设 $D:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x$,则二重积分 $I=\iint\limits_D(x+y)dxdy=$

A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{2}{3}$　C. $\dfrac{3}{4}$　D. $\dfrac{4}{5}$

6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{2,-4,-3\}$,$\boldsymbol{\beta}=\{1,-1,1\}$,则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$

A. 0　B. 1　C. 3　D. 5

7. 设函数 $z=\sin(2x+y)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

A. $\cos(2x+y)$　B. $2\cos(2x+y)$

C. $-\cos(2x+y)$　D. $-2\cos(2x+y)$

8. 设 Ω 是由 $x^2+y^2=1, z=0, z=1$ 围成的空间闭区域,则三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega dxdydz=$

A. $\dfrac{\pi}{4}$　B. $\dfrac{\pi}{2}$　C. π　D. $\dfrac{3}{2}\pi$

9. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的和为

A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. 1　D. 2

10. 设 C, C_1, C_2 是任意常数,则微分方程 $y''=x+\cos x$ 的通解为

A. $\dfrac{1}{6}x^3-\sin x+C$　B. $\dfrac{1}{6}x^3+C_1\cos x+C_2x$

C. $\dfrac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$　D. $\dfrac{1}{6}x^3-\cos x+C_1x+C_2$

第二部分　非选择题

二、计算题:本大题共10小题,每小题6分,共60分。

11. 求点 $P(2,-1,2)$ 到平面 $\pi:2x-2y+z+1=0$ 的距离 d.

12. 求过点 $P(1,1,1)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ 垂直的平面方程.

13. 求曲线 $x=2t, y=t^2, z=t^3+1$ 在 $t=1$ 对应点处的切线方程.

14. 设函数 $f(x,y)=\ln\dfrac{x}{y}$,求梯度 $\mathbf{grad}\,f(2,3)$.

15. 设方程 $e^z - xyz = 0$ 确定函数 $z = z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域.

17. 计算对弧长的曲线积分$\int_L (4x+y-6)\,ds$，其中 L 是直线的一段 $y = 1-2x\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

18. 计算对坐标的曲线积分$\int_L x^2 \sin y\,dx$，其中 L 是从点$(0,0)$沿曲线 $y = x^3$ 到点$(1,1)$的弧段.

19. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛半径和收敛区间.

20. 求微分方程$\frac{dy}{dx} = 2xy$ 满足初始条件 $y(0) = 2$ 的特解.

三、综合题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分。

21. 用定义证明无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 收敛，并且收敛于 $1-\sqrt{2}$.

22. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} z\,dxdy$，其中 $\sum$ 是平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截得部分的上侧.

2022年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码　00023)

一、单项选择题:本大题共10小题,每小题3分,共30分。

1. B　2. A　3. D　4. D　5. A　6. C　7. B　8. C　9. B　10. D

二、计算题:本大题共10小题,每小题6分,共60分。

11. 解:$d=\dfrac{|2\times 2-2\times(-1)+1\times 2+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}$　(3分)

$=3$　(3分)

12. 解:法向量 $\boldsymbol{n}=\{-2,1,1\}$　(3分)

由点法式有 $-2\times(x-1)+1\times(y-1)+1\times(z-1)=0$

化简得　$2x-y-z=0$　(3分)

13. 解:$\because$　$x'_t=2,y'_t=2t,z'_t=3t^2$,

$\therefore$　$t=1$ 对应点处的切向量 $\boldsymbol{s}=\{2,2,3\}$　(3分)

$t=1$ 对应点为$(2,1,2)$

则切线方程为$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$　(3分)

14. 解:$\because$　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{x},\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{1}{y}$,　(3分)

$\mathbf{grad}\,f(x,y)=\dfrac{1}{x}\boldsymbol{i}+(-\dfrac{1}{y})\boldsymbol{j}$

$\therefore$　$\mathbf{grad}\,f(2,3)=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{j}$　(3分)

15. 解:设 $F(x,y,z)=e^z-xyz$,则 $F_y=-xz,F_z=e^z-xy$,　(3分)

得　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{xz}{e^z-xy}$　(3分)

16. 解:$D:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 2$

$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\cdot r\,dr$　(3分)

$=2\pi\cdot\dfrac{r^3}{3}\Big|_0^2$

$=\dfrac{16}{3}\pi$　(3分)

17. 解：由于 L 由方程 $y=1-2x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 给出，因此

$$\int_L(4x+y-6)\mathrm{d}s=\int_0^1(2x-5)\sqrt{1+(-2)^2}\,\mathrm{d}x$$ （3 分）

$$=\sqrt{5}(x^2-5x)\Big|_0^1$$

$$=-4\sqrt{5}$$ （3 分）

18. 解：$\because$ $L: y=x^3$，x 从 0 到 1，

$\therefore$ $$\int_L x^2\sin y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\sin x^3\,\mathrm{d}x$$ （3 分）

$$=-\left(\frac{1}{3}\cos x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}(1-\cos 1)$$ （3 分）

19. 解：$\because$ $$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\cdot 3^n}}=\frac{1}{3}$$ （3 分）

$\therefore$ 收敛半径 $R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$. （3 分）

20. 解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$，

两端积分得 $\ln|y|=x^2+C_1$， （3 分）

从而 $y=\pm \mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$

令 $C=\pm \mathrm{e}^{C_1}$，则 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$

代入 $y(0)=2$ 得 $C=2$

则所求特解为 $y=2\mathrm{e}^{x^2}$. （3 分）

三、综合题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分。

21. 证明：$\because$ $$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$$ （2 分）

$\therefore$ $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+(1-\sqrt{2})=1-\sqrt{2}.$$

则由定义可知此级数收敛，且收敛于 $1-\sqrt{2}$. （3 分）

22. 解：$$\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y$$ （3 分）

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}$$ （2 分）