尚德机构 SUNLANDS

《高等数学（工本)》

【计算题汇总】+【公式汇总】-丁大乔

◆ 第一章　空间解析几何与向量代数

第一章公式：

（1）向量$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，向量$\vec{\beta}=（b_1,b_2,b_3）$，则$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

（2）向量$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，与向量$\vec{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$的夹角$\theta$：

$$cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\cdot\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}$$

（3）向量叉乘： $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$是一个新的向量，并且同时垂直于$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

（4）两条直线的夹角：两条直线的方向向量分别为$\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$，两条直线的夹角为θ，则θ为$\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$所夹的锐角，即

$$cos\theta=\frac{|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}$$

（5）两个平面的夹角：两个平面的法向量分别为$\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$，两个平面的夹角为θ，则θ为$\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$所夹的锐角，即

$$cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

（6）直线与平面的夹角：直线的方向向量为$\vec{v}$，平面的法向量为$\vec{n}$，则直线与平面的夹角为90° - θ，其中θ为$\vec{v}$、$\vec{n}$所夹的锐角，即

$$cos\theta=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

【第 1 题】、求过点 A（1，-1，0），B（2，0，-3），C（1，-2，2）的平面方程。

- 方法：找出平面上的两个向量$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$，则$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$即平面的法向量。

$$\overrightarrow{AB}=\left(1，1，-3\right)，\overrightarrow{AC}=（0，-1，2）$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(-1，-2，-1\right)$$

设平面方程为$-x-2y-z+D=0$，把点 A（1，-1，0）代入方程得：$D=-1$

所以平面方程为$-x-2y-z-1=0$

【第 2 题】、把直线$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-3z-5=0 \end{cases}$转换成参数方程。

①第一步：确定方向向量：

两个平面的法向量为$\vec{m}=\left(1\,,\,-1\,,\,1\right)$，$\vec{n}=\left(2\,,\,1\,,\,-3\right)$

这条直线同时处于两个平面上，所以直线的方向向量为$\vec{m}\times\vec{n}=\left(2\,,\,5\,,\,3\right)$

②第二步：找到直线上一个点的坐标：

在原方程中，令 z=0，得到二元一次方程组：$\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$，解得 x=2，y=1

所以直线经过点（2，1，0）

$$直线的参数方程为：x=2t+2\,,\ y=5t+1\,,\ z=3t$$

【第3题】★

求直线$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$*与直线*$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$*与的夹角*$\theta$

两条直线的方向向量分别为$\overrightarrow{v_1}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{v_2}=(2,1,1)$

$$cos\theta=\frac{|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}|\cdot|\overrightarrow{v_2}|}=\frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

所以$\theta=60°$

【第4题】、*求直线*$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$*与平面*$2x+y+z-6=0$*的夹角*$\varphi$

直线的方向向量$\vec{v}=(1,-1,2)$，平面的法向量$\vec{n}=(2,1,1)$

设$\vec{v}$与$\vec{n}$的夹角为θ，则

$$cos\theta=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

所以$\theta=60°$，直线与平面的夹角$\varphi=90°-\theta=30°$

◆ 第二章　多元函数微分学

第二章公式：

（1）常见导数：

$$常数：(\mathrm{C})' = 0；$$

$$幂函数：(\mathrm{x}^n)' = n\mathrm{x}^{n-1}，如(\mathrm{x}^3)' = 3\mathrm{x}^2，\left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}}$$

$$对数函数：(\ln \mathrm{x})' = \frac{1}{\mathrm{x}}$$

$$指数函数：(\mathrm{a}^\mathrm{x})' = \mathrm{a}^\mathrm{x} \cdot \ln \mathrm{a}，如(\mathrm{e}^\mathrm{x})' = \mathrm{e}^\mathrm{x}；$$

$$三角函数：(\sin x)' = \cos x，(\cos x)' = -\sin x，(\arctan x)' = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$$

（2）导数的加减乘除四则运算：

加减法：$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

乘法：$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

除法：$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

（3）全微分：$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$*为函数* $\mathrm{z} = f(x,y)$*的全微分*

（4）复合函数$f[u(x)]$求导：$(f[u(x)])' = f'[u(x)] \cdot u'(x) = f'(u) \cdot u'$

二元复合函数$z = f(u(x,y))$的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial x}，\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

二元复合函数$z = f(u,v) = f[u(x,y)，v(x,y)]$的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

（5）隐函数的偏导数：设方程$F(x,y,z) = 0$决定了函数$z = f(x,y)$则：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}，\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

（6）二元函数的极值：

若点$(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$是函数 $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$的驻点，记

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)}，B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}，C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

当$B^2-AC>0$时，$f(x_0,y_0)$不是$f(x,y)$的极值

当$B^2-AC<0$，$f(x_0,y_0)$是$f(x,y)$的极值——(1)$A<0$，极大值；(2)$A>0$，*极小值*

（7）条件极值：在约束条件$\varphi(x,y)=0$下，求函数$z=f(x,y)$的极值——拉格朗日法：

令$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，*建立方程组：*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

则方程组的解(x_0,y_0)即在约束条件$\varphi(x,y)=0$下，求函数$z=f(x,y)$的极值。

（8）曲线L：$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$，*在*$t=t_0$*处的方向向量为*$\vec{\alpha}=\left(x'(t_0)，y'(t_0)，z'(t_0)\right)$

（9）曲面$F(x,y,z)=0$，*在*(x_0,y_0,z_0)*处的法向量为*$\vec{\beta}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0)，F_y(x_0,y_0,z_0)，F_z(x_0,y_0,z_0)\right)$

(10)梯度：*函数*$u(x,y,z)$*的梯度为：*$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}$

【第 5 题】★*求*$z=f\left(ysinx，xcosy\right)$*的全微分*$dz$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot ycosx+f_v\cdot cosy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u\cdot sinx-f_v\cdot xsiny$$

$$dz=(f_u\cdot ycosx+f_v\cdot cosy)dx+(f_u\cdot sinx-f_v\cdot xsiny)dy$$

【第 6 题】★*求*$z=e^{2x+3y}$*的全微分*dz

设$f(u)=e^u$，$u=2x+3y$

则$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2e^u=2e^{2x+3y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=3e^u=3e^{2x+3y}$$

【第7题】★

方程$x^2+y^2=z^2-2z+5$ 确定了函数$z=f(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

$$设F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+2z-5$$

$$则：F_x=2x，F_y=2y，F_z=2-2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2-2z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{2-2z}$$

【第8题】★求函数$\mathbf{z}=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$的极值。

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-2，\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}}=-\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+1$$
$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}^2}=2，\frac{\partial^2 \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}}=-1，\frac{\partial^2 \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}^2}=2$$
$$令\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}}=0，\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}}=0，得到方程组：\begin{cases}2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-2=0\\-\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+1\ =0\end{cases}，解得\boldsymbol{x}=1，\boldsymbol{y}=0$$
$$所以，(1,0)是驻点，且\mathbf{A}=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=2，\mathbf{B}=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-1，\mathbf{C}=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=2$$

$$因为B^2-AC<0，且\boldsymbol{A}>0，所以(1,0)是极小值点，极小值为\mathbf{z}(1,0)=-1$$

【第9题】、求函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{xy}$，在约束条件$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1$下的极值。

$$令\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{\lambda\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-1)，建立方程组：$$

$$\begin{cases}\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\lambda}=0\\\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}=0\\\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1\end{cases}$$

$$解得：\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}，\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}$$

$$所求极值为\frac{1}{4}$$

【第10题】★求曲面$x^2+y^2+z=0$，在$(1,1,-2)$处的法线方程。

$$F_x=2x，F_y=2y，F_z=1$$

$$所以，\vec{\beta}=(2,2,1)$$

$$法线方程为：\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$$

【第11题】★求曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，在$t=2$处的法平面方程。

$$t=2\text{ 时，曲线上的点为}(2,4,8)$$

$$x'(t)=1\text{，}y'(t)=2t\text{，}z'(t)=3t^2$$

$$\text{所以，}\vec{\alpha}=(1,4,12)$$

设法平面为：$x+4y+12z+D=0$，把点(2,4,8)代入方程得 114+$D=0$，所以 $D=-114$

$$\text{法平面方程为：}x+4y+12z-114=0$$

【第12题】、在空间的哪些点上，函数$u=x^2+y^2+z^2$的梯度平行于z轴。

$$\mathrm{grad}u=2x\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}+2z\cdot\vec{k}=\left(2x\text{，}2y\text{，}2z\right)$$

grad$u$平行于z轴，则$x=0$，$y=0$

在z轴上的点，函数的梯度平行于z轴。

◆ 第三章　重积分

第三章公式：

（1）常见一元函数的不定积分：

$$\text{常数：}\int a\,dx=ax+C\text{，其中}C\text{为任意常数}$$

$$\text{幂函数：}\int x^a\,dx=\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}+C$$

$$\text{指数函数：}\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax}+C$$

$$\text{三角函数：}\int sinax\,dx=-\frac{1}{a}cosax+C\text{，}\int cosax\,dx=\frac{1}{a}sinax+C$$

（2）二重积分的计算——把二重积分写成二次积分：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dx\int_a^b f(x,y)\,dy$$

关键点在于把区域D表示：$a<y<b$，$c<x<d$的形式

（3）极坐标下二重积分的计算：

若积分区域D：$x^2+y^2\le a^2$，则把二重积分转化为极坐标形式：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

若积分区域D：$x\ge 0$，$y\ge 0$，$x^2+y^2\le r^2$，则把二重积分转化为极坐标形式：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

（4）若积分区域Ω对称（如：$|x|\le 2$），被积函数含有绝对值，

则去掉一个绝对值符号，积分区域只取大于0 的部分，同时积分乘以2：

$$\iiint_\Omega (|x|+y+z)\,dv=2\iiint_{\Omega'}(x+y+z)\,dv$$

$$\iiint_\Omega (|x|+|y|+z)\,dv=4\iiint_{\Omega'}(x+y+z)\,dv$$

$$\iiint_\Omega (|x|+|y|+|z|)\,dv=8\iiint_{\Omega'}(x+y+z)\,dv$$

（5）三重积分的计算——积分区域Ω由平面$x+y+z=D$与坐标面围成：

由$x+y+z=D$：　　$0\le z\le D-x-y$

令$z=0$，则$x+y=D$：　　$0\le y\le D-x$

令$z=0$，$y=0$，则$x=D$：　　$0\le x\le D$

于是，$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\int_0^D dx\int_0^{D-x}dy\int_0^{D-x-y}f(x,y,z)\,dz$$

（6）若积分区域D：$x^2+y^2\le a^2$，$c\le z\le d$则把三重积分转化为柱坐标形式：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a dr\int_c^d f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot rdz$$

【第13题】★验证$(x+3y)dx+(3x+y)dy$是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，并求出一个$u(x,y)$。

设$f=x+3y$，$g=3x+y$，则$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3$，$\dfrac{\partial g}{\partial x}=3$

因为$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$，所以$(x+3y)dx+(3x+y)dy$是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，并且满足：

$$u(x,y)=\int(x+3y)\,dx=\frac{x^2}{2}+3xy+w(y)$$，其中w是任意函数

$$u(x,y)=\int(3x+y)\,dy=3xy+\frac{y^2}{2}+v(x)\text{，其中}v\text{是任意函数}$$

$$\text{对比上述两个式子可知：}w(y)=\frac{y^2}{2}\text{，}v(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$\text{所以，}u(x,y)=\frac{x^2}{2}+3xy+\frac{y^2}{2}$$

【第14题】★

$$\text{计算二重积分}\iint_D 2y\,d\sigma\text{，其中}D\text{是由}y=x^2\text{，}y^2=x\text{围成的区域。}$$

$$D：0\le x\le 1\text{，}x^2\le y\le\sqrt{x}$$

$$\iint_D 2y\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}2y\,dy=\int_0^1\left(y^2\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\right)dx=\int_0^1(x-x^4)\,dx=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$

【第15题】★

$$\text{计算二重积分}\iint_D x\,d\sigma\text{，其中区域}D：x^2+y^2\le 4\text{，}x\ge 0\text{，}y\ge 0$$

$$\iint_D x\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\cos\theta\cdot r\,dr d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^2\cos\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\cos\theta\Big|_{r=0}^{r=2}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}$$

【第16题】、$\text{计算三重积分}\iiint_\Omega x\,dv\text{，其中区域}\Omega：0\le x\le 1\text{，}0\le y\le 2\text{，}|z|\le 1$

$$\iiint_\Omega x\,dv=\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_{-1}^1 x\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^2 2xdy$$

$$=\int_0^1 4x\,dx=2x^2\Big|_0^1=2$$

【第17题】、$\text{计算三重积分}\iiint_\Omega(|x|+|y|+|z|)\,dv\text{，其中区域}\Omega：|x|\le 2\text{，}|y|\le 2\text{，}|z|\le 2$

$$\iiint_\Omega(|x|+|y|+|z|)\,dv=8\iiint_{\Omega'}(x+y+z)\,dv$$

$$= 8\int_0^2 dx\int_0^2 dy\int_0^2 (x+y+z)\,dz$$
$$= 8\int_0^2 dx\int_0^2 (2x+2y+2)dy$$
$$= 8\int_0^2 (4x+8)\,dx = 8\times(2x^2+8x\,\Big|_0^2) = 192$$

【第18题】★

计算三重积分$\iiint_\Omega x\,dv$，其中区域Ω由$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+2y+z=4$所围成

确定积分范围：$0\le z\le 4-x-2y$

令$z=0$，则$0\le y\le 2-\frac{x}{2}$

令$z=0$，$y=0$，则$0\le x\le 4$

$$\iiint_\Omega x\,dv = \int_0^4 dx\int_0^{2-\frac{x}{2}} dy\int_0^{4-x-2y} xdz$$

【第19题】★

计算三重积分$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv$，其中$\Omega$是由$x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=1$所围成

设$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 1$，$0\le z\le 1$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 dr\int_0^1 r^2\cdot rdz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3dr$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = \frac{\pi}{2}$$

◆ 第四章　曲线积分与曲面积分

第四章公式：

（1）在曲线L上对$f(x,y)$积分：$\int_L f(x,y)ds$

若曲线L的方程为：$y=y(x)$，$a\le x\le b$，则：$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

于是：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

即：把y换成$y(x)$，把ds换成$\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

（2）$\int_L ds$ 等于曲线L的弧长

（3）格林公式——把对坐标的曲线积分转化为二重积分：

设闭合区域D由逆时针方向的曲线L围成，则：$\int_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$

（4）若$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关

（5）在曲面Σ：$z=z(x,y)$上对三元函数$f(x,,y,z)$求曲面积分：

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}d\sigma$$

其中，区域D是由$z=z(x,y)$令$z=0$ 得到的x、y的取值范围。

【例】：曲面Σ是平面$x+y+z=C$在第一卦象中的部分，则区域D为：

令 $z=0$，得到y的范围：$0\le y\le C-x$

令 $z=0$，$y=0$，得到x的范围：$0\le x\le C$

（6）散度：向量场$\overrightarrow{A(x,y,z)}=P(x,y,z)\cdot\vec{i}+Q(x,y,z)\cdot\vec{j}+R(x,y,z)\cdot\vec{k}$的散度为：

$$\mathrm{div}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

【第20题】★

计算对弧长的曲线积分$\int_L xyds$，其中L是从点$(-1,1)$到点$(1,3)$的直线段

L的方程：$y=x+2$，$-1\le x\le 1$

$$\int_L xyds=\int_{-1}^{1}x\cdot(x+2)\sqrt{1+1}\,dy=\int_{-1}^{1}(\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x)\,dx=\frac{\sqrt{2}}{3}x^3+\sqrt{2}x^2\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

【第21题】、计算对弧长的曲线积分$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$是曲线$y=\sqrt{9-x^2}$

由$y=\sqrt{9-x^2}$可得：$x^2+y^2=9$，$y\geq 0$，所以L是圆的上半部分，弧长为3π

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_L e^3ds=e^3\int_L ds=3\pi\cdot e^3$$

【第22题】★

计算对坐标的曲线积分$\int_L xydx+(y-x)dy$，

其中L为有向折线AO，AO依次为$(-1,1)$，$(0,0)$

直线AO的方程为：$y=-x$，所以$dy=-dx$

$$\int_L xydx+(y-x)dy=\int_{-1}^{0}x\cdot(-x)dx+(-x-x)\cdot(-dx)$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2)dx+2xdx=\int_{-1}^{0}(2x-x^2)dx=-\frac{4}{3}$$

即：把y换成$y(x)$，把dy换成$y'dx$

【第23题】、计算对坐标的曲线积分$\int_L xydx+(y-x)dy$，

其中L为有向折线ABO，ABO依次为$(-1,1)$，$(0,1)$，$(0,0)$

直线AB的方程为：$y=1$，所以$dy=0dx=0$

直线 BO 的方程为：$x=0$，所以$dx=0dy=0$

$$\int_L xydx+(y-x)dy=\int_{AB}xydx+(y-x)dy+\int_{BO}xydx+(y-x)dy$$
$$=\int_{-1}^{0}xdx+\int_{1}^{0}ydy=-1$$

【第24题】★

计算曲线积分$\int_L (x+y)dx+xydy$，其中L为圆周$x^2+y^2=1$ 逆时针方向

$$\int_L (x+y)dx+xydy=\iint_D (y-1)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2sin\theta-r)dr$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}sin\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta=-\frac{1}{3}cos\theta-\frac{1}{2}\theta\left|\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}\right.=-\pi$$

【第25题】★

验证曲线积分$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(x+y)dx+(x-y)dy$ 与路径无关，并计算其值。

设 $P=x+y$，$Q=x-y$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关

设$A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(2,1)$，选取积分路径为折线ABC

在AB段：$y=0$，$dy=0$；在BC段：$x=2$，$dx=0$

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{AB}(x+y)dx+(x-y)dy+\int_{BC}(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=\int_1^2 xdx+\int_0^1(2-y)dy=3$$

【第26题】★

计算对面积的曲面积分$\iint_{\Sigma}(4-x-z)dS$，其中Σ是平面$x+y+z-2=0$ 在第一卦象中的部分。

$z=2-x-y$，$z_x=-1$，$z_y=-1$

区域D：令$z=0$，得到$0\le y\le 2-x$；令$z=0$，$y=0$，得到$0\le x\le 2$

$$\iint_{\Sigma}(4-x-z)dS=\iint_{D}(y+2)\cdot\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,d\sigma$$
$$=\sqrt{3}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(y+2)\,dy=\sqrt{3}\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2-4x+6\right)dx=\frac{16}{3}\sqrt{3}$$

◆ 第五章　常微分方程

第五章公式：

（1）指数函数与对数函数的性质：

$$e^{x+y}=e^x\cdot e^y$$
$$(e^x)'=e^x\text{，}(lnx)'=\frac{1}{x}$$
$$e^{lnx}=x$$
$$e^{\int\frac{a}{x}dx}=x^a$$

（2）一阶线性非齐次微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$$

$$方程的通解为：y = Ce^{\int -P(x)dx} + e^{\int -P(x)dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx$$

（3）一元二次方程的解：

$$一元二次方程ax^2 + bx + c = 0 的解：$$

$$(1)若b^2 - 4ac > 0，则方程有两不等实数根：\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(2)若b^2 - 4ac = 0，则方程只有一个二重根$$

$$(3)b^2 - 4ac < 0，则方程有两个复数根：\frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a}$$

（4）二阶常系数线性齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = 0，其中p、q都是常数$$

$$微分方程的特征方程：r^2 + pr + q = 0$$

$$(1)若特征方程有两不等实数根：r_1，r_2，则微分方程的通解为：y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

$$(2)若特征方程只有一个二重根：r，则微分方程的通解为：y = (C_1 + C_2x) \cdot e^{rx}$$

$$(3)若特征方程有两个复数根：\alpha \pm \beta i，则微分方程的通解为：y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 sin\beta x + C_2 cos\beta x)$$

【第27题】★

$$求微分方程\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 的通解。$$

$$P(x) = -\frac{1}{x}，Q(x) = x^2，代入公式得通解：$$

$$y = Ce^{\int \frac{1}{x}dx} + e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot \int x^2 \cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx$$

$$= Cx + x \cdot \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = Cx + \frac{1}{2}x^3$$

【第28题】★

$$求微分方程y'' + 3y' + 2y = 0 的通解$$

$$特征方程r^2 + 3r + 2 = 0 有两个实数根：-1，-2$$

$$所以通解为：y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

【第29题】、求微分方程$y''+2y'+y=0$ 的通解

特征方程$r^2+2r+1=0$ 有一个二重根：-1

所以通解为：$y=(C_1+C_2x)\cdot e^{-x}$

【第30题】、求微分方程$y''+2y'+2y=0$ 的通解

特征方程$r^2+2r+2=0$ 有两个复数根：$-1\pm i$

所以通解为：$y=e^{-x}\cdot(C_1sinx+C_2cosx)$

◆ 第六章　无穷级数

第六章公式：

(1)等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$，当$|q|<1$ 时，$q^n\to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$，此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 收敛

当$|q|\geq 1$ 时，$q^n\to\infty$，此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 发散

(2)p级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当$0<p\leq 1$ 时，p级数发散；当$p>1$ 时，p级数收敛

（3）特殊的极限：

当$n\to\infty$时：（在判断级数敛散性时可以直接做以下替换）

$$sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{cn+d}{an+b}=\frac{c}{a}\text{，其中}a\text{、}b\text{、}c\text{、}d\text{都是常数}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

（4）比值法：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$，若$\lambda<1$，则级数收敛；若$\lambda>1$，则级数发散

（5）根号法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$，若$\lambda < 1$，则级数收敛；若$\lambda > 1$，则级数发散

（6）若$u_n \geq 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$、 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 称为交错级数

若u_n单调递减趋于0，则交错级数收敛。

即：若$u_{n+1} \leq u_n$ ，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

（7）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称为绝对收敛；

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定也收敛。

若 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称为条件收敛。

（8）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，设 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$，若$|\lambda|$是一个非零正数，则幂级数的收敛半径$R = \frac{1}{|\lambda|}$

若$\lambda = 0$，则幂级数的收敛半径为∞，即幂级数在$(-\infty, +\infty)$都收敛

若$\lambda = \infty$，则幂级数的收敛半径为0，即幂级数仅在$x = 0$ 处收敛

（9）幂级数展开式$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$

（10）若$f(x)$是周期为2π的周期函数，则$f(x)$可以展开成傅里叶级数：

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)$$ ，其中：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx$$

（11）设函数$f(x) = \begin{cases} g(x)\text{，} & -\pi < x \leq 0 \\ h(x)\text{，} & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

$f(x)$的傅里叶级数：$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)$ ，$S(x)$称为$f(x)$傅里叶级数的和函数

则当$f(x)$连续时，$S(x)=f(x)$，当$f(x)$不连续时：

$$S(0)=\frac{g(0)+h(0)}{2}$$

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{g(-\pi)+h(\pi)}{2}$$

【第31题】、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{2}{3^n}$的敛散性。

级数$\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{2}{3^n}$的敛散性与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$相同

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$的敛散性与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$相同

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$是收敛的等比级数，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{2}{3^n}$收敛

【第32题】★

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$的敛散性。

$$u_n=\frac{n+1}{5^n}\text{，}u_{n+1}=\frac{n+2}{5^{n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\times\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{5}<1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$收敛

【第33题】、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$的敛散性。

$$u_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$收敛

【第34题】★

$$判断级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}，这是一个发散的p级数$$

$$设u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$因为u_{n+1}\le u_n，且\lim_{n\to\infty}u_n=0，所以交错级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}收敛$$

$$所以，级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}条件收敛$$

【第35题】★

$$将函数f(x)=\frac{1}{3-4x}展开成x的幂级数。$$

$$设t=\frac{4}{3}x$$

$$\frac{1}{3-4x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{3}x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-t}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{3^{n+1}}x^n$$

$$【注】：将\frac{1}{a+bx}展开成x的幂级数：设中间变量t=-\frac{b}{a}x，把\frac{1}{a+bx}转化成\frac{1}{1-t}的形式。$$

【第36题】★

$$将函数f(x)=\frac{1}{1+x}展开成x-1的幂级数。$$

$$设t=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}(x-1)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n$$

【第37题】★

$$设函数f(x)=\begin{cases}1，-\pi<x\le 0\\-1，0<x\le\pi\end{cases}，其傅里叶级数为\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)，求系数b_5$$

$$b_5=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}sin5xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-sin5xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{5}cos5x\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{5}cos5x\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{5\pi}-\frac{2}{5\pi}=-\frac{4}{5\pi}$$

【第38题】、*设周期为* 2π *的周期函数* $f(x)=\begin{cases}2x+1\text{，}-\pi<x\leq 0\\ 2\text{，}0\leq x<\pi\end{cases}$ *，其傅里叶级数为*

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx+b_n sinnx)\text{ ，求}S(-3\pi)$$

$$S(-3\pi)=S(\pi)=\frac{-2\pi+1+2}{2}=\frac{3}{2}-\pi$$