A072·02324(通卡)

绝密★启用前

2020年8月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学

（课程代码　02324）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共15小题，每小题1分，共15分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

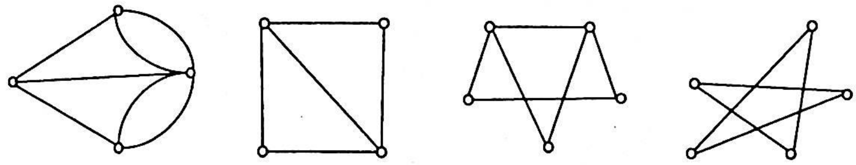
1. 设P：明天下雨，Q：我去游泳，命题“如果明天不下雨，我就去游泳”符号化为

   A. $\neg P \vee Q$　　B. $\neg P \wedge Q$　　C. $\neg Q \rightarrow P$　　D. $\neg P \rightarrow Q$

2. 下列关系矩阵所对应的关系具有反自反性的是

   A. $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

3. 下列图为欧拉图的是

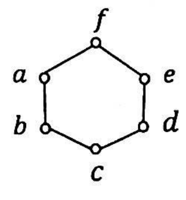


A.　　B.　　C.　　D.

4. 如题4图所示的格中，元e的补元是

   A. a和b　　B. a和c

   C. a和d　　D. a和f



题4图

5. 下列命题公式为重言式的是

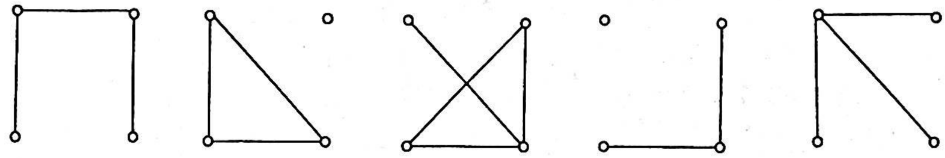
   A. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \vee R$　　B. $(P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$

   C. $\neg(P \rightarrow (Q \vee P))$　　D. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$

6. 设集合$A=\{a,b,c,d\}$，下列选项中A的真子集是

A. $\{a,e\}$　　B. $\{b,e,d\}$　　C. $\{b,c,d\}$　　D. $\{a,b,c,d\}$

7. 下列选项中与题 7 图互为补图的是



A.　　B.　　C.　　D.　　题 7 图

8. 设$S=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$，其中$\mathbf{Q}$为有理数集，$*$为$S$上的二元运算，$\forall\langle a,b\rangle,\langle x,y\rangle\in S$，有$\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle=\langle ax,by\rangle$，则$*$运算在$S$上的幺元为

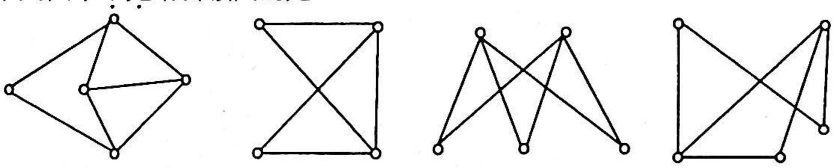
A. $\langle 0,0\rangle$　　B. $\langle 0,1\rangle$　　C. $\langle 1,0\rangle$　　D. $\langle 1,1\rangle$

9. 下列式子中，不正确的是

A. $A\to\forall xB(x)\Leftrightarrow\exists x(A\to B(x))$　　B. $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$

C. $\exists xA(x)\to B\Leftrightarrow\forall x(A(x)\to B)$　　D. $\neg\forall xB(x)\Leftrightarrow\exists x\neg B(x)$

10. 下列图中不是哈密顿图的是



A.　　B.　　C.　　D.

11. 设$\mathbf{R}$为实数集，下列关系中能构成函数的是

A. $\{<x,y>|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(y^2-x^2=1)\}$

B. $\{<x,y>|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge((x-1)^2=y)\}$

C. $\{<x,y>|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(y/x=1)\}$

D. $\{<x,y>|x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\wedge(y\cdot x>1)\}$

12. 谓词公式$\forall x(F(x)\wedge G(y))\to\exists y(H(x)\to S(y,z))$中量词$\exists y$的辖域是

A. $H(x)\to S(y,z)$　　B. $S(y,z)$　　C. $H(x)$　　D. $G(y)$，$S(y,z)$

13. 设R、S均为集合A上的二元关系，下列命题错误的是

A. 若R和S是对称的，则$R-S$也是对称的

B. 若R和S是反对称的，则$R-S$也是反对称的

C. 若R和S是反自反的，则$R-S$也是反自反的

D. 若R和S是传递的，则$R-S$也是传递的

14. 所有不同构的 6 阶无向树的棵数是

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

15. 在自然数集上的二元运算$\circ$满足$a\circ b=\min(a,b)$，则$\circ$不满足

A. 交换律　　B. 幂等律　　C. 结合律　　D. 消去律

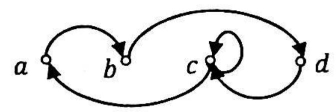
第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

16. 命题公式$\neg(P \to Q)$的主合取范式中含极大项的个数为________。
17. 设集合$A = \{1,2,\cdots,10\}$，在模 4 相等关系下，等价类$[5]$为集合________。
18. 设论域为整数集，命题$\forall x \exists y(x + y = 1)$的真值为________。
19. 设 7 阶连通平面图G有 6 个面，则图G的边数为________。
20. 设集合$A = \{1,2,3\}$的关系$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$, $S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, 则复合关系$R \circ S^2$为________。
21. 公式$\forall x F(x) \vee (\exists x G(x) \to \exists x H(x))$对应的前束范式为________。
22. 设具有 7 个顶点的无向简单图G共 10 条边，需要添加____条边才能得到完全图K_7。
23. 设集合$A = \{1,2\}$，代数系统$<\mathscr{P}(A), \cap>$的零元为________。
24. 设无向树有 2 个度为 4 的分支点，2 个度为 3 的分支点，其余为树叶，则树叶数为________。
25. 设集合$A = \{1,2,3\}$，集合$B = \{3,6,9\}$，给定函数$f = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,9\rangle, \langle 3,6\rangle\}$，则逆函数$f^{-1}$为________。

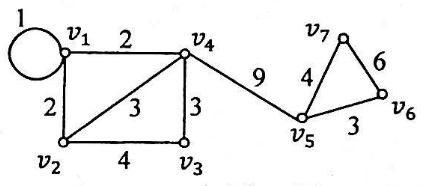
三、简答题：本大题共 7 小题，第 26~30 小题，每小题 6 分；第 31~32 小题，每小题 7 分，共 44 分。

26. 用真值表法判定命题公式$(P \wedge Q) \vee (\neg Q \to R)$是否为非重言式的可满足式。
27. 用等值演算法求命题公式$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \to Q)$的主合取范式。
28. 设集合$A = \{a, b, c, d\}$上的二元关系R的关系图如题 28 图所示，求R，并给出R的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R$以及对称闭包的关系矩阵$\boldsymbol{M}_{s(R)}$。



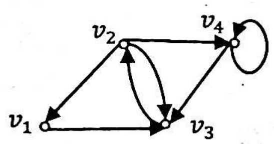
题 28 图

29. 利用 Kruskal 算法求题 29 图所示的连通带权图的最小生成树，请给出详细过程，画出最小生成树，并计算权。



题 29 图

30. 设有向图G如题 30 图所示，
    (1) 写出图G的邻接矩阵；
    (2) 计算图G中长度为 3 的通路数；
    (3) 计算图G中长度小于或等于 3 的回路数。



题 30 图

31. 用二叉树表示算术表达式$((a-b)*c)\ /\ ((d+e)*f)$，并给出先序、中序和后序遍历序列。

32. 设集合$A=\{1,2,3,6,9,18\}$，$\preccurlyeq$为整除关系，回答下列问题：

(1) 画出$\langle A,\preccurlyeq\rangle$的哈斯图；

(2) 求子集$B=\{3,6,9\}$的极大元，极小元，最大元，最小元；

(3) 判断该偏序集A是否为格。

四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。

33. 在整数集$\mathbf{Z}$上定义二元运算$\circ$：$a\circ b=a+b-1$，$\forall a,b\in\mathbf{Z}$，证明$\langle\mathbf{Z},\circ\rangle$构成交换群。

34. 用 CP 规则证明下面有效推理。

前提：$R\to Q$，$Q\to P$，$\neg P\vee S$

结论：$R\to S$

35. 设无向简单图$G=\langle V,E\rangle$，顶点数$|V|=9$，最大度数$\Delta(G)=8$，最小度数$\delta(G)=7$。证明：图G中至少有 5 个 8 度的顶点或至少有 6 个 7 度的顶点。

绝密★启用前

2020年8月高等教育自学考试全国统一命题考试

离散数学试题答案及评分参考

（课程代码　02324）

一、单项选择题：本大题共15小题，每小题1分，共15分。

1. D　2. B　3. D　4. A　5. B　6. C　7. B　8. D　9. A　10. C

11.B　12.A　13.D　14.C　15.D

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

16. 3
17. $\{1,5,9\}$
18. T
19. 11
20. $\{\langle 1,2\rangle\}$
21. $\forall x\forall y\exists z\big(F(x)\vee\neg G(y)\vee H(z)\big)$
22. 11
23. $\varnothing$
24. 8
25. $\{\langle 3,1\rangle,\langle 9,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$

三、简答题：本大题共7小题，第26~30小题，每小题6分；第31~32小题，每小题7分，共44分。

26. 解：命题公式$(P\wedge Q)\vee(\neg Q\to R)$的真值表如下

P	Q	R	$P\wedge Q$	$\neg Q\to R$	$(P\wedge Q)\vee(\neg Q\to R)$	
F	F	F	F	F	F	(1分)
F	F	T	F	T	T	(1分)
F	T	F	F	T	T	
F	T	T	F	T	T	(1分)
T	F	F	F	F	F	
T	F	T	F	T	T	(1分)
T	T	F	T	T	T	
T	T	T	T	T	T	(1分)

由上表可知，命题公式为非重言式的可满足式。　(1分)

27. 解：$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \to Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (R \vee Q)$ （2 分）

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ （1 分）

主合取范式为

$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$， （1 分）

成假赋值为 000，010，011 和 100。 （2 分）

28. 解：集合$A = \{a, b, c, d\}$的二元关系

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, c\rangle\},$$ （2 分）

R的关系矩阵$\boldsymbol{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$， （2 分）

对称闭包的关系矩阵$\boldsymbol{M}_{s(R)} = \boldsymbol{M}_R \vee \boldsymbol{M}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$。 （2 分）

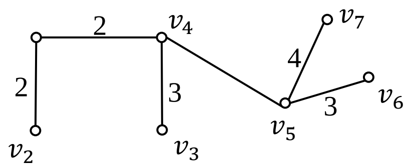
29. 解：利用 Kruskal 算法，避圈法过程如下，

添加权值为 2 的边(v_1, v_2)；添加权值为 2 的边(v_1, v_4)； （1 分）

添加权值为 3 的边(v_3, v_4)；添加权值为 3 的边(v_5, v_6)； （1 分）

添加权值为 4 的边(v_5, v_7)；添加权值为 9 的边(v_4, v_5)； （1 分）

得到的最小生成树如答 29 图所示。 （2 分）



答 29 图

该最小生成树的权为 23。 （1 分）

30. 解：

(1) 图G的邻接矩阵为$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。 （2 分）

(2) 由于

$$\boldsymbol{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$ （1 分）

$$\boldsymbol{M}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$ （1 分）

可知，图 G 中长度为 3 的通路数为 20 条。 (1 分)

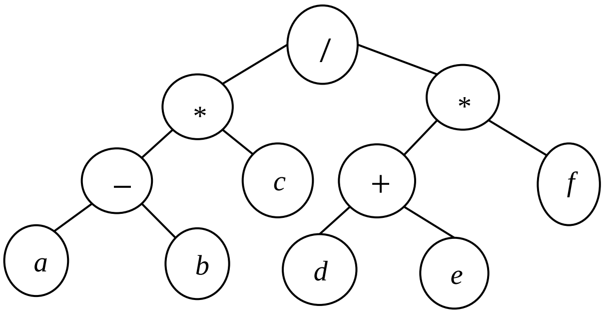
(3) 由$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}^2$及$\boldsymbol{M}^3$可知，图 G 中长度小于或等于 3 的回路数为 11。 (1 分)

31. 解：算术表达式$(a-b)*c/\big((d+e)*f\big)$的二叉树如答 31 图所示， (1 分)

先序遍历序列为$/(*(-ab)c)(*(+de)f)$，即$/*-abc*+def$; (2 分)

中序遍历序列为$\big((a-b)*c\big)/\big((d+e)*f\big)$，即$\mathrm{a}-b*c/d+e*f$; (2 分)

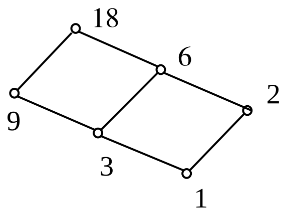
后序遍历序列为$\big((ab-)c*\big)\big((de+)f*\big)/$，即$ab-c*de+f*/$。 (2 分)



答 31 图

32. 解：集合$A=\{1,2,3,6,9,18\}$，

(1) $\langle A,\preccurlyeq\rangle$的哈斯图如答 32 图所示。 (2 分)



答 32 图

(2) 子集$B=\{3,6,9\}$的极大元为 6 和 9， (1 分)

极小元为 3， (1 分)

最大元不存在， (1 分)

最小元为 3。 (1 分)

(3) 该偏序集A是格，因为每对元素都有最小上界和最大下界。 (1 分)

四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。

33. 证明：

(1) 满足封闭性：$\forall a,b\in\mathbf{Z}$，有$a\circ b=a+b-1\in\mathbf{Z}$; (1 分)

(2) 满足结合律：$\forall a,b,c\in\mathbf{Z}$，有

$$(a\circ b)\circ c=a+b+c-2=a\circ(b\circ c);$$ (1 分)

(3) 存在幺元 1：$\forall a\in\mathbf{Z}$，有$a\circ1=a+1-1=a=1+a-1=1\circ a$; (1 分)

(4) 每个元素存在逆元：$\forall a\in\mathbf{Z}$，$a\circ(2-a)=(2-a)\circ a=1$，

故a的逆元为$2-a$;　(2 分)

(5) 满足交换律：$a\circ b=a+b-1=b\circ a$；　(1 分)

综上，$\langle \mathbf{Z},\circ\rangle$构成交换群。　(1 分)

34. 证明：

(1)	R	CP 规则（附加前提）	(1 分)
(2)	$R\to Q$	P 规则	(1 分)
(3)	Q	T (1) (2)	(1 分)
(4)	$Q\to P$	P 规则	(1 分)
(5)	P	T (3) (4)	(1 分)
(6)	$\neg P\vee S$	P 规则	(1 分)
(7)	S	T (5) (6)	(1 分)

由此得到推理是正确的。

35. 证明：反证法。假设G中 7 度顶点个数n_7 <6 且 8 度顶点个数n_8 <5。　(1 分)

已知无向简单图$G=\langle V,E\rangle$，$|V|=9$，$\Delta(G)=8$，$\delta(G)=7$。所以图G中顶点的度数或者为 7 或者为 8，故

$$n_7+n_8=|V|=9。\quad (1 分)$$

再由假设，有$n_7\le 5$且$n_8\le 4$，故必得

$$n_7=5,\ n_8=4,\quad (2 分)$$

从而，度数总和等于$n_7\times 7+n_8\times 8=5\times 7+4\times 8=67$，　(2 分)

显然，度数总和 67 为奇数与握手定理矛盾，故结论得证。　(1 分)