

编者按 2022年10月是本刊刊庆50周年华诞,我们与广大读者朋友一起分享刊庆的喜悦和荣光,为教师的专业成长和教育教学研究提供更有深度和温度的高水平服务,继续谋划中学数学教育发展之大计。为此,《中数参》编辑部于2022年11月—12月组织了“数学教育的时代创新暨创刊50周年刊庆公益活动”,邀请十位专家与广大读者开展线上教研活动,就中学数学教育的相关问题进行交流。第一场报告由东北师范大学原校长史宁中教授主讲,史校长报告内容非常精彩,征得史校长同意,我刊将其报告进行整理,在本刊第四期和第五期连载,以飨读者。

美与数学

史宁中(东北师范大学)

摘要:美在现实生活中无处不在,人们为什么能够感悟美?是如何感知美的?如何用数学的语言来表达美?阐述数学中的简洁美、对称美、周期美与和谐美,以及相应的数学表达。

关键词:数学美;简洁美;对称美;周期美;和谐美;数学表达

文章编号:1002-2171(2023)4-0002-06

各位老师晚上好!我今天想讲的题目是《美与数学》。从题目可以看出不是讲数学如何美,而是讨论美,讨论这样两个问题——第一个问题是人们为什么能够感悟美?是如何感知美的?即人们审美的基础是什么?第二个问题是如何用数学的语言来表达这样的感知,在这样的过程中,我们会发现只有揭示了一个事物的本质属性之后,我们才可能更好地用数学的语言予以表达。

因此,就像《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》所指出的,人们借助数学的语言认识、理解、表达现实世界,当然也包括现实世界中的美。这个内容在高中数学选修D类课程中,即人教社出版的选修教材《美与数学》。今天谈五个问题,第一个问题是“用数学语言为什么能够表达美?谈谈数学中的简洁美、对称美、周期美与和谐美,以及相应的数学表达是什么?”

1 用数学语言表达美

美是什么?美是人们对事物的一种感觉。西方“审美”这个词来自希腊语“Aesthetikos”,其原意就是感觉。

可以把美分成两类:一类是自然的,就是指没有经过人类加工的事物的原貌;另一类是艺术的,经过人加工的东西,包括音乐、绘画、戏剧、电影,也包括现

代计算机设计,等等。人们虽然对美的感觉是存在差异的,甚至同一个人心情不同,对美的感觉也可能有所改变。但是在大多数情况下,人们对美的感觉是具有共性的。比如春天盛开的鲜花、夏日晴朗的夜空都会使人心旷神怡;敦煌的壁画千年不朽;李白的诗歌传唱至今……这都是美的象征。

凡是具有共性的东西,都是可以学习的,学会审美非常重要。因此,人们现在非常强调审美。美可以陶冶情操,增加生活乐趣;美可以改善人的思维品质,提高行为的素养。故而,美育教育也是非常重要的。美还能激发人的创造力,许多科学家包括数学家,做学问的动力不仅仅是探究真理,也来自对美的追求。比如庞加莱,20世纪末21世纪初,数学的最重要的工作之一就是解决了庞加莱猜想,这是关于拓扑学的一个猜想。庞加莱说:“科学家之所以研究自然,不是因为这样做很有用,他们研究自然是因为能从中得到乐趣,而他们能够得到乐趣是因为它美。如果自然不美,它就不值得去探求,生命也不值得存在……我指的是本质上的美,它根源于自然各部分和谐的秩序,并且纯理智能够领悟它。”

爱因斯坦在普朗克(普朗克是量子力学的创始人)六十岁生日的时候讲了一段话。他说:“首先我同意叔本华所说的,把人们引向艺术和科学的最强烈的动机之一,是要逃避日常生活中令人厌恶的粗俗和使

人绝望的沉闷……除了这种消极的动机之外,还有一种积极的动机。人们总是想以最适当的方式来画一幅简化的和易领悟的世界图像。”一位有思想的科学家希望用自己的语言来表达现实世界,就是用简化和易懂的语言来表达现实世界。

因此,无论是庞加莱所说的自然各部分和谐秩序,还是爱因斯坦所说的一幅简单的容易领悟的世界图像,都涉及自然界的规律或者事物的共性。

我现在非常想说的是,凡是具有规律或共性的东西,必然会存在某种客观的本质属性,对于美而言,这就是审美的对象,引发人们从各个角度观察与追求,也是数学表达的对象。一个本质属性是具有相对稳定性的,美也是这样。马克思有句话在美学中经常被引用,马克思在《政治经济学·导言》中是这样说的:“困难不在于理解希腊艺术和史诗同一定社会发展形式结合在一起,困难的是,它们何以仍然能够给我们以艺术享受,而且从某些方面来说还是一种规范的高不可及的范本。”

这句话是什么意思?就是希腊艺术和时代发展相结合,这是好理解的,但是为什么过去了几千年,仍然能够得到艺术的欣赏而且是高不可及的呢?这里就说明了一件事情,艺术的发展和科学的发展是不一样的,科学大多是继承的,是转型,越来越深刻,越来越严格。艺术并不是这样,艺术经常是转型的,发展到一定阶段,到了顶峰之后就改变形式。比如,古希腊的雕塑、文艺复兴的古典主义、西方的巴洛克艺术、洛可可艺术、古希腊的雕塑、哥特式、文艺复兴时期古典主义、浪漫主义艺术、印象派艺术、现代派艺术等,包括现代印象派、现代艺术派。再如,中国古代的诗歌,包括屈原的辞、汉代的赋、曹操的四言诗(曹操时期四言诗达到顶峰),后来唐朝出现了五言诗(唐朝的五言诗和七言诗已经达到顶峰),之后又出现了宋词、元曲。

因此,对艺术而言,往往会在某一个时代达到顶峰,然后进行转型,这个与科学的发展是有所不同的。审美对象之所以能够相对稳定,这在于美的本质属性。古今中外探究美的本质属性的著作,种类繁多、举不胜举,但主要有两类:关于一般美学的哲学著作和关于各种艺术形式鉴赏的著作,人们用很多著作来描绘这些本质属性。比如,中国古代刘勰的《文心雕龙》是研究一般美学的著作,顾恺之的《论画》、张彦远的《历代名画记》、石涛的《苦瓜和尚画语录》等是关于中国古代绘画艺术鉴赏的著作,等等。这些著作论述的道理千差万别,甚至对于美的定义也是众说纷纭,但是这些著作有一个共同的特点,那就是书写这些著

作的语言都是日常生活中的语言,虽然这些语言的表达形式会因为国家或民族的不同而不同。而今天我想说的是用数学的语言来描述,因为数学也是一种语言。世界上可以用三种语言来表达人们对世界的感悟:一种语言是日常生活中的语言;一种语言是数学的语言,也是我今天尝试来阐述的事情;还有一种语言就是艺术的语言,人们可以通过绘画、音乐等来感悟他对这个世界的理解。

我今天想讲的是,如何用数学的语言来感悟、表达美。数学之所以可以表达美是源于两个方面的因素:一方面,数学也是一种语言,人们借助这种语言能够很好地认识、理解和表达现实世界中的那些具有共性的、规律性的东西。如马克思所说:“美的客观本质属性相对稳定,具有规律性”。另一方面,数学本身也具有美的本质属性,许多数学家不仅从逻辑的角度、也从美的角度审视数学结论。如德国数学家外尔曾经这么说:“我的工作总是尽力把真和美统一起来,但当我必须在两者中挑选一个时,我通常选择美。”这就是数学与美之间的关系。

数学美的本质属性,我想就是简洁、对称、周期与和谐。接下来我逐个谈“为什么简洁是美”“为什么对称是美”“为什么周期是美”“为什么和谐是美”“如何用数学语言来表达它们”。

数学是一种语言。首先这个理解是从伽利略和牛顿那个时代开始的,作为科学家的伽利略曾经感慨:哲学被写在展现于我们眼前的伟大之书,这里我指的是宇宙。但是,如果我们不首先学会用来书写它的语言和符号,我们就无法理解它。这本书是以数学语言写的,它的符号就是三角形、圆和其他几何图形,没有这些符号的帮助,我们简直无法理解它的片言只语;没有这些符号,我们只能在黑暗的迷宫中徒劳地摸索。

关于这一点,爱因斯坦给出了极高的评价:“由于伽利略看到了这一点,尤其是由于他向科学界谆谆不倦地教导这一点,他才成为近代物理学之父,事实上,也成为整个近代科学之父。”

从伽利略开始的现代科学的研究方法就是用数学的语言来表达现实世界的本质关系和规律,然后通过观察或者实验来验证它用数学表达得是否正确,这是现代研究的基本手法。数学就是用证明的方法来证明逻辑推理,而科学则是通过现实验证。(现代科学研究方法:用数学的语言表达,用观察或实验的结果验证)

现在我们想用数学语言来表达美,这有两个方面的原因。一个原因就是刚才说过的数学也是一种语

言;另一个原因就是数学本身也有美的属性。下面在报告中简单谈一下数学的简洁、数学的对称、数学的周期与数学的和谐。

2 简洁美与数学表达

大家都知道中国哲学被称为大道至简。大道源于《周易》,《周易》开篇说“乾以易知,坤以简能。易则易知,简则易从……易简而天下之理得矣。”这里说的乾坤是万物伊始,易知是指容易认识,易从是指容易操作。因此它是在说“世上的事物,往往都是起源于简单,简单容易理解,也容易操作。”《道德经》说得更为具体:“为学日益,为道日损。”就是说,学习要日积月累,得道要放弃多余。这就是中国的大道至简的理念。

美国数学家伯克霍夫在《美学度量》中给出美的度量方法,即一个分数形式 $M = \frac{O}{C}$,分母 C 是复杂程度,分子 O 是秩序。可以感到越复杂就是越不美,越简单就是越美。我希望我们的教师在教数学,特别是将数学应用于物理、应用于美学的时候,能遵循恩格斯说过的一句话:“我们主观的思维和客观的世界服从于同样的规律,两者在自己的结果中不能相互矛盾,必须彼此一致,这个事实绝对地统治着我们的整个理论思维,它是我们的理论思维的不自觉的和无条件的前提。”因此可以这么认为:我们对数学的整个认识和大自然的规律应该保持一致,否则就应该被淘汰。因此,之所以简洁能够成为大自然的普遍规律、成为美,就是因为大自然是具有秩序的。如果大自然本身是杂乱无章的,那么简洁就不能成为美的共性。

2.1 数学中的简洁美

比如,不知道教师是否感觉到这一点:不论多么大的圆,周长和直径的比都是一个常数,这个常数是一个不可思议的无理数 π ,圆面积是 πr^2 ,圆周长是 $2\pi r$;三角形内角和为 180° ;所有直角三角形中勾股定理都成立;三角形、矩形、梯形面积公式统一;圆锥曲线的统一公式;顶点、棱、面个数关系的欧拉公式等。

还有,量角器有两个弧,两个弧长度不一样,但能够对应一个角。那么为什么用长度能够量角呢?这是高中数学最重要的任务,用长度量角就是用弧度制来量角,就是出于这么一个基本事实,不管这个圆多大,一个角确定的话,弧长和半径之比就是一个常数。三角函数也是如此,直角三角形中的一个锐角一旦确定,对边和邻边之比就是一个常数。这正说明了大自然的简洁和统一,统一才可能达到简洁,这就是大自然的规律,也是数学研究的规律。再比如,欧拉公式、几何公理、欧几里得五个公理是非常美的:(1)等于

同量的量彼此相等;(2)等量加等量,其和相等;(3)等量减等量,其差相等;(4)彼此能重合的物体全等;(5)整体大于部分;等等。

2.2 物理中的简洁美

还有物理学的美,行星的轨道是椭圆这件事情几乎是不可思议的,开普勒试了十八种函数,最终选择了椭圆。如果行星围绕太阳运转这个轨道是椭圆,那么就意味着它的速度不恒定,有的时候快,有的时候慢,这几乎是不可思议的一件事情。

开普勒第一定律指出行星沿椭圆轨道运行,且速度不一样。但是事实就是这样,在中国的《隋史》中记载,南北朝的张子信观测三十年,发现“日行在春分后则迟,秋分后则速”。郭守敬则是认真地进行了计算。所以,教师在讲授综合与实践课程时可以查阅资料,中国古代很早就发现了冬天经过春天到夏天的时间和夏天经过秋天到冬天的时间是不一样的,这是由太阳与地球的距离不同造成的,太阳离地球比较近的时候地球运动得就快一些,太阳离地球远的时候地球运动得就慢一些,即开普勒第二定律:相等时间内,行星与恒星的连线扫过的面积相等。

还有牛顿力学,牛顿定义了力($F=ma$)。正比例这个概念是极为重要的,几乎所有物理学定义都源于正比例。几千年来,尽管人们能感知到力,但都很难定义什么是力,牛顿给出了定义“力是改变物体运动状态的因素”,因此力与加速度成正比,与物体的质量成正比。万有引力也是如此($F_{\text{引}} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$,解释行星运动规律,直到登月轨道的设计),其与两个物体质量的乘积成正比,与距离的平方成反比;物质的能量($E=mc^2$)和物质的质量成正比,和光速的平方成正比。因为大自然具有秩序,所以才可能简洁地表达大自然。

普朗克在量子力学方面卓有建树,他凭借对量子纠缠的研究获得了诺贝尔奖,因此,现在人们更多地在讨论量子力学的事情。量子力学是说这么一件事情,能量的放射不是连续的(对频率为 ν 的电磁辐射,物体只能以 $E=h\nu$ 为单位吸收或者发射能量,其中 $h=6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 是一个常量,即普朗克常数,决定了电磁辐射的能量只可能以 E 的整数倍吸收或者发射),这是什么意思?无论能量是吸收还是放射,都跟普朗克常数有关。是多少倍普朗克常数才可能吸收。如果连续不断地往外释放能量的话,物体很快地就要把能量丧失尽了。当然,我们不讨论这些问题,但是通过这些可以看到,大自然本身是有秩序可循的,因此数学才能够简洁地表达这些东西。

大自然的秩序(统一性)形成了简洁美,数学的统一性也形成了简洁美,人们可以使用数学的语言恰到好处地表达大自然的秩序(普适性)。

这样的话我们看到,简洁的数学表达了世界的普适性,从容不迫,井然有序。希望我们的数学教师能有两个感觉:一个是感觉到这个普适性,从容不迫,井然有序,就是“非淡泊无以明志,非宁静无以致远”这样的感受;另一个感觉就是这种简洁给人以自信,增强人们认识世界的深度和广度,即杜甫所说的“会当凌绝顶,一览众山小”的感觉。数学教师如果在数学教育的过程中,能够通过简洁的数学表达教出从容不迫和井然有序,能够教出广度和深度,就体现出了数学的美。正是基于这样的功能,数学逐渐成为人们研究现实世界的工具,成为人们表达现实世界的语言。

2.3 文学中的简洁美

文学中也体现了数学美,因为时间关系我不过多地来阐述。

中国古代文章的特点是言简意赅,通过简洁的语言表达深刻的思想,与大道至简理念一致,如五千字的《道德经》。

孟子在《离娄章句下》中说:“博学而详说之,将以反说约也。”是说,广博学习,详尽解说,融会贯通后将会返归简约。

华罗庚说:“读书要从薄到厚,再从厚到薄。”

刘勰在《文心雕龙》中说:“文以辨洁为能,不以繁缛为巧。”

莎士比亚在《哈姆雷特》中说:“简洁是智慧的灵魂,冗长是肤浅的藻饰。”如何做到?如法国文学艺术评论家丹纳在《艺术哲学》(傅雷译)中所说:“特征不但需要具备最大的价值,还得在艺术品中尽可能地支配一切。”

.....

换句话说,一幅画、一个雕塑、一首诗、一所建筑物、一曲交响乐,其中所有的效果都应当集中,集中程度决定作品的地位。

2.4 艺术中的简洁美

在艺术中也体现了美,能够实现简洁美,艺术形式的唯一手段就是抽象,这一点与数学是一致的。如意大利画家达·芬奇说:“画家应当研究普遍自然,就眼睛所看到的东西多加思索,要运用组成每一事物的类型的那些优美的部分。用这种方法,他的心就会像一面镜子,真实地反映面前的一切,就会变成好像是第二自然。”

在《西方美学史·上》中,朱光潜对这段话这样评价:从对“普遍自然”的观察和思索,找出事物类型中

的优美的部分来运用,这就需要选择和集中,这也就是典型化或理想化。

可以更为一般地理解,这里所说的“选择和集中”就是抽象的过程,有了这样的抽象过程才可能达到“典型化或理想化”。

达·芬奇说:“美在本质上就是一个抽象的过程。”绘画也是这样,绘画也必须抽象,把握物质的本质。朱光潜在解释达·芬奇的话时就谈到了抽象,他理解的抽象的过程就是集中和选择。如一万六千年前西班牙的阿尔塔米拉洞窟岩画(图1),一万年前的贺兰山岩画(直到落基山脉)(图2),齐白石所画贝叶草虫(图3),吴冠中所画江南水乡(图4),都体现了简洁美;再如贝聿铭的房屋设计,贝聿铭的两个设计都非常好,一个是卢浮宫玻璃金字塔(图5),另一个是苏州博物馆(图6),这个博物馆与四周融洽得非常好,也体现了江南文化。因此,简洁的美与数学的关系、与绘画的关系是一致的。

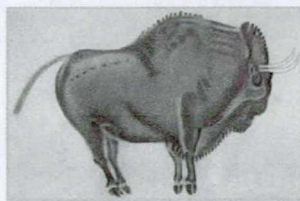


图1



图2



图3



图4

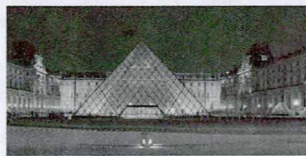


图5



图6

3 对称美与数学表达

对称现象普遍存在,与我们的生活形影不离,对称给人以平衡、典雅、和谐、安定的感觉,逐渐将对称的感知演化为美的享受。

如德国数学家外尔所说:“对称,狭义地定义它也好,宽泛地定义它也罢,千百年来它都是人们试图借以理解并创造秩序、美和完美的一种概念。”

大家都能够感觉到对称是一种美。比如这个枫叶(图7)和蝴蝶(图8),都能感受到对称美。为什么人们感到对称是一种美呢?为了本次报告,我非常认

真地查阅了很多资料,后来发现是这样,这个世界本质上有两种东西,一种是固体,一种是生物体。无论是固体的物质还是生物体最初的阶段,它们都是对称的。



图 7

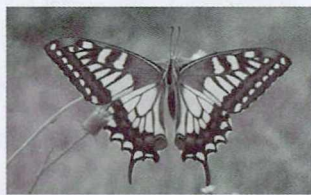


图 8

比如,使得生物体祖先积累的经验能够传递下去的就是基因,DNA 是双螺旋的,是对称的(图 9)。晶体也是如此,所有晶体都是对称的,比如,氯化钠的晶体结构就是对称的(图 10)。

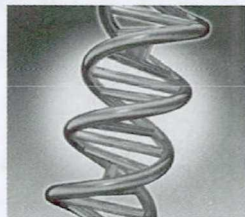


图 9

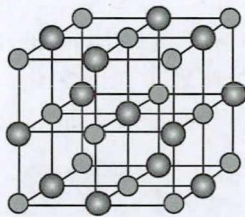


图 10

再比如,初中所学的根与系数的关系、一元二次方程根与系数的关系和一元三次方程根与系数的关系都是对称的,能推导一元 n 次方程吗? 结果会怎么样?

当 $k=2$ 时,若方程 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 的两个解为 x_1, x_2 , 那么 $x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_0}, x_1 \cdot x_2=\frac{a_2}{a_0}$ 。

当 $k=3$ 时,若方程 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个解为 x_1, x_2, x_3 , 那么 $x_1+x_2+x_3=-\frac{a_1}{a_0}, x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3=\frac{a_2}{a_0}, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=-\frac{a_3}{a_0}$ 。

那么当 $k=n$ 时,有什么结论? n 次方程的解是对称的: x_p 与 x_q 可以交换,伽罗华证明了当 $k \geq 5$ 时不存在公式解,阿贝尔提出了群的概念,产生了一个专门研究对称性质的数学学科:群论。

根与系数的关系涉及方程的解,因此在根与系数的关系里能看到这么一种现象,就是一元 n 次方程的根是对称的。什么叫对称? 就是把方程的下标换一下,它们之间的整个关系是不变的,这个就是方程根最本质的特征——根与系数的关系。正因为如此,这次修订《义务教育数学课程标准》,原来的根与系数关系是选学内容,现在将其变成了必学内容。因为根与系数的关系太重要了,这是代数学的本质。大家可能知道 5 次和 5 次以上的方程没有公式解,这个源于根对称,也就是源于群论。

那么怎么来刻画对称呢? 人们尝试用数学的语言刻画对称程度。可以这样刻画,用 A 表示一类平面图形, $S(A)$ 表示 A 的对称程度, $S(A)$ 的值越大越对称。如一般的三角形不对称,因此,运动之后保持形状不变是对称的话,那么一般三角形是不对称的,因此,它只有一种形式 $S(A)=1$ 。而等边三角形,旋转是对称的,对于轴也是对称的,每个都有三种情况,因此等边三角形的对称度是 $S(A)=6$ 。最对称的东西,终极状态是什么? 极限状态是圆,绕圆心旋转任意角度都保持形状不变,圆的对称度是无穷的 ($S(A)=\infty$)。这个思想非常重要,这种思想对对称的度量很困难,所以前面讲的氯化钠晶体的情况就得用群论的方法进行研究。于是发展一般的数学方法群论,是数学的一个重要研究领域。

现代数学就是用几何建立直观,用代数予以表达。

这样的美在中国数学史包括中国的传统文化中比比皆是。如阴阳、太极(图 11)、《道德经》的阴阳之说。阴阳之说源于《周易》,也源于《老子》。《周易·系辞上》说:“一阴一阳谓之道”,《老子》说:“一生二,二生三”。20 世纪最伟大的历史学家是英国的汤因比,他写的名著《历史研究》中指出,静止状态和活动状态不仅是历史发展的规律,也是一种宇宙的规律,这个规律就像中国用阴和阳表现出来的。

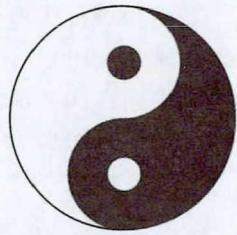


图 11

中国这样的表现方式,不是心理学的也不是机械学的,甚至不是数学的,而是直接的符号表达。因此,汤因比说《历史研究》将用中国的这种符号来阐述整个历史的进程。阴阳之说这个辩证统一的认识世界的方法源于对称。比如,六十四卦,原来是八卦,后来演变为六十四卦,六十四卦的三十二卦都是对称的,一正一反一正一反……因此,笔者认为中国《周易》不仅有一分为二,而且有合二为一,就表现在这里,就是“一生二,二生三,三生万物”,既有一分为二,也有合二为一。

教师可以查一下高庙文化,湖南洪江市(原黔阳县)高庙新石器时代遗址(距今 7 800 年到 6 300 年前),人们发现了八角星图像(图 12),这个图很可能就是《易经》所说的“河图”和“洛书”的原形,八角星图像与古书所言“河图”“洛书”相似,与周易八卦存在渊源。



图 12

(下转第 16 页)

等关系形成知识结构图的环节,教师带着学生梳理画知识结构图,并给学生5分钟时间独立梳理画出知识结构图,从学生课后的反馈调研来看,给他们留下的感觉差异巨大,后者对这个环节印象非常深刻,且有收获感的比例要远远高于前者。实际上,正如史蒂文·斯洛曼在《知识的错觉》一书中所说:“大多数人都觉得自己懂得很多,但其实个体对世界的了解少得可怜,但我们自己往往意识不到这一点。”当学生听和看教师梳理画知识结构图时,会自以为这些自己都知道、都理解,认为这个环节就是在浪费时间,难以引起关注。而当学生独立去完成知识结构图的绘制时,才会觉察意识到自己对所学知识是杂乱无序还是结构清晰,这有助于引发学生的注意力,切实感受结构性理解的重要性。

3.4 知情统一协调发展,促进学生自主发现与探索

相等关系与不等关系是预备知识主题之下的一个单元,预备知识这个主题承担着一个重要的教学任务,就是帮助学生在心理、学习方式和知识技能等方面做好准备,完成初高中数学学习的过渡。此外,再从教育的本真目的来看,任何一个单元的学习都应该把促进人的发展作为根本目标。在教学中,如果忽视了学习的态度与情感,学习就很难持续,因此,教师应该在教学中成为促进学生自主学习的促进者,这就需要教师在一些适当场和(学生自主有所作为的可能)后退一步,给学生自主发现与探索让出空间,真诚地去尊重和倾听学生的想法,让自己教的行为发生在学生自主思维活动之后。这样一方面,有助于学生自我觉察,认识到自己的不足,看到他人表现出来的

值得自己学习的品质;另一方面,自己发现的问题会更容易激发探索的欲望,构建学习的意义,因为这是自己思考中的问题。

从上述观点来看第三个环节,三位教师在处理时可以先给学生2分钟时间:想一想,在相等关系的知识结构中,还有哪些需要进一步研究的内容?类比相等关系的知识结构,梳理不等式关系的知识结构图,并指出在初中的基础上可以在哪些地方进一步发展与扩展认识。这个活动本身有助于促进学生构建本单元概貌甚至更大的知识网络,当学生理解了“为什么要学本单元”“本单元将要学习什么”“怎么学”之后,在后续课时展开对具体知识的学习时,整个知识和方法都是连贯的、自然的,也能更好地促进学生自主有效地学习,不仅如此,实际上也为学生的自由学习奠定了基础,部分学生完全可以在此基础上自主且自由地(脱离教师教学的节奏)进行课下的学习。

参考文献:

- [1] 章建跃,陶维林.概念教学必须体现概念的形成过程——“平面向量的概念”的教学与反思[J].数学通报,2010(1):25-29.
- [2] 李昌官.素养为本的高中数学单元起始课教学——兼谈“平面向量及其应用”单元起始课教学[J].中学数学教学参考(上旬),2020(7):21-26.
- [3] 边锋.章起始课教学略谈[J].中学数学教学参考(上旬),2020(11):66-67.
- [4] 张希仓.数学起始课教学实践与思考[J].新课程学习(中),2012(3):149.
- [5] 李大永,白永潇,张思明.高中数学特别教案[M].福州:福建教育出版社,2012.

(上接第6页)

这里充分表现了中国古代对对称的理解,用对称的、对立统一的思想来阐述这个世界。同时,对称思想影响着中国文化,不仅影响到了思维模式,也影响到了表现形式。比如,诗歌中的对仗:“两个黄鹂鸣翠柳,一行白鹭上青天”“窗含西岭千秋雪,门泊东吴万里船”;对联中的呼应:福如东海长流水,寿比南山不老松;判断依存:“祸兮福所倚,福兮祸所伏”;诉说事情两全:“有无相生,难易相成,长短相形,高下相倾,音声相和,前后相随,恒也”。

这种思想也深深地影响了中国的传统文化。比如,剪纸,最早的剪纸是在新疆吐鲁番发现的,是北朝时候的“对马团花”(图13);京剧脸谱,1980年发行的《京剧脸谱》特种邮票全套8枚是绝对对称的(图14);西安的古建筑(唐代街道)(图15)、北京故宫的建筑群(图16)都是对称的。



图13



图14



图15



图16

(未完待续)

美与数学(续)

史宁中(东北师范大学)

文章编号:1002-2171(2023)5-0002-04

4 周期美与数学表达

下面我们谈周期的美。周期的美有非常重要的地位。这个世界你感到有趣,很多原因就是由于许多现象是周而复始、延绵不断的。

自然界有许多现象周而复始、延绵不绝,人们称这样的现象具有周期性。仰望星空,会发现北极星周围的星星围绕北极星旋转具有周期性;生活在海边,会发现潮起潮落的循环具有周期性;耕种田野,会感悟春种秋收的交替具有周期性。在日常生活中,太阳升起落下,日复一日;月亮阴晴圆缺,月复一月;气候四季交替,年复一年。逐渐形成一种基于周期的美感,因而会有白居易“一岁一枯荣”的诗句,王维“每逢佳节倍思亲”的感叹。

4.1 周期与时间有关

那么人们为什么会感到周期的美呢?跟时间有关。那么什么是时间呢?如何刻画时间呢?这对我们每一位数学教师而言都是一个很大的问题。我们需要认真地把握这件事情,如果能给学生讲清楚,那么你不仅讲了数学,而且讲了如何从数学的角度来认识世界,即用数学的眼光观察世界。怎么来理解呢?

刻画时间需要参照物,在远古时代,最好的参照物就是太阳、月亮和浩瀚的星空。建立年、月、日的基本依据是地球围绕太阳运转一周的时间、月亮围绕地球运转一周的时间、地球自转一周的时间,基本方法是考虑三个运转周期之间的比例。非常遗憾,这三个运转周期之间的比例都不是整数,比如,地球围绕太阳运转一周的时间是地球自转一周时间的365倍多一点;月亮围绕地球运转一周的时间是地球自转一周时间的29倍多一点;地球围绕太阳运转一周的时间相当于月亮围绕地球运转12周再加11日多一点。“多一点”是一个无法精确表达的数。在认识世界最基本的问题上,大自然就是用这样复杂的结构来考验和启迪人类的智慧。

4.2 农耕历法

古代的历史学家都是数学家,为什么呢?他要写

天文历法,而天文历法的运算是相当复杂的。因此,一直到汉武帝之前,所有历史学家都是数学家。后来独尊儒术,把学问归类之后,使得文科,包括历史学家逐渐地脱离了数学,到唐代以后他们就不懂数学了。但是在这之前,历法数学极为重要,就是要会用数学眼光看事物。

古代:生活用阴历,称为年,12个月共354日;种地用阳历,称为岁,商周测定为366日,二十四节气。《尚书·尧典》说:期三百有六旬有六日,以闰月定四时成岁。《周礼·夏官司马》中说:土方氏掌土圭之法,以致日景。当时的方法称为土圭之法,也就是立杆测影的方法,我简单地说一下。人们用什么方法认识世界?那就是立竿测影,也就是土圭之法。《周礼》说了周朝就有专门用土圭之法来认识世界这样一些官员。中国是农耕社会,不知道春夏秋冬是不可以的。在一个平台上立一个杆子,这个杆子是八尺长,一天内影长最短的是中午,叫作这一日的影长;一年内影长最短这一天取名为夏至,影长最长这一天取名为冬至。而隋朝时春天到夏至的时间比夏至到冬天的时间要稍长一点,为什么呢?中国古代把夏至的影长和冬至的影长加在一起,除以2,达到这个影长的时候是春天和秋天,春天到夏至的时间和夏至到冬天的时间不一样就是因为这个原因。为什么一年是 $365\frac{1}{4}$ 天?中国在商朝时可能就知道了这是怎么回事,照理说一年过后,夏至那一天的影长应该跟去年达到一样,但是没有,第二年也没有,第三年也没有,第四年这个影长达到一致了。这四年一共有多少天呢?用1461日除以4就是一年,是 $365\frac{1}{4}$ 天,这是

《后汉书·律历》中说的:日发其端,周而为岁,然其景不复,四周千四百六十一日,而景复初,是则日行之终。以周除日,得三百六十五度四分度之一,为岁之日数。

中国古代从数学的角度来认识世界这件事情是非常了不得的。我为此写了一篇文章,发表在《历史

研究》上,就是《宅兹中国:周人确定“地中”的地理和文化依据》。我把这些都写出去了,我希望我们数学老师去看“中国”这个名字是怎么来,我是为了研究这件事情。《历史研究》的历史学家非常高兴,因为我刚才说的到了司马迁之后,即到了后汉后,他们就搞不清周公是怎么来定这个“世纪”的,所以我把周公那个时候是怎么算,我用算计帮他算了一下,其中只用到了正切函数,这个很简单,我们所有老师肯定都会算,你可以看一下我是怎么算的。这就是用数学的眼光、用数学的思维、用数学的语言来表达这个世界,来表达美。

4.3 中国传统文化:十二生肖

中国有十二地支,对十二的重视肯定是跟一年有十二个月有关,对十的重视肯定跟人有十个指头有关。中国很特殊的就是十二地支和十个天干,奇数对奇数,偶数对偶数,正好是六十个。因此地支天干合起来六十个,不是都合,而是奇数和奇数合,偶数和偶数对,这样的话对出六十个,叫作一个甲子。

中国传统文化中有一个周期现象与每一个人都有关,就是属相,依次为:鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪,十二生肖对应十二地支,与恒星二十八宿有关。西周把一天划分为十二个时辰。东汉王充《论衡》记载十二地支命名:子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。宋代把时辰一分为二,称为小时,沿用至今。天干共有十个,依次为甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸,天干的奇数配地支的奇数,天干的偶数配地支的偶数。正好是10与12的最小公倍数: $2 \times 5 \times 6 = 60$,即六十为一个甲子,循环记录。甲子纪年,从东汉至今。

还有过去一天是十二个时辰,后来是二十四个小时,二十四个小时是从汉代开始的。图17是1980年起发行的十二生肖邮票,现在已到第四轮。这些内容,我认为作为传统文化也好,作为其他什么也好,如果老师能够在课堂上讲一讲是最好的。



图 17

4.4 周期表现于音乐

周期性最重要的表现是音乐,音乐的周期性非常明显。因为物体都有共振,共振之后就表现了简谐运动。而且在中学特别是在高中数学开始讨论用三角函数来表示这个周期性了。传说是毕达哥拉斯学派发明了音阶,他发现这么一件事情,如果弦长固定的紧弦,且紧度差不多,那么弦长之间成整数比就会产生和谐,比如弦长的比为3:2,会产生一种和谐的声音,相差五度。

结论:音乐的和谐在于多根弦的长度成整数比,从而发明了音阶。

中国古代《管子》记载的“三分损益”要比毕达哥拉斯更早一些。“三分损益”法是什么意思呢?

“三分损一”将长度 a 三等分,然后减去一份,得到 a 的 $\frac{2}{3}$ 。“三分益一”就是将长度 a 三等分,然后增添一份,得到 a 的 $\frac{4}{3}$ 。方法交替、连续运用,得到长度比例为2:3:4,得到和谐的声音。

比如,做笛子,中国古代做笛子,把一个长度分三份,去掉一份叫作减一,加上一份叫作增一,通过减一和增一就得到了长度之间的比例。

比如,古筝,长度之间成比例就得到了和弦,笛子也是这样,如果笛子的孔之间成比例就和弦。

古代中国五声音阶:宫、商、角、徵、羽,相当于现在音阶的1、2、3、5、6,称为五度相生律。中国因为是用三分损益法,因此是五律的,即没有半音。

音叉、单摆、弹簧等这一类物体的振动有共同的特点(图18),就是在相同的时间间隔周期性地重复,这类振动称为简谐运动。

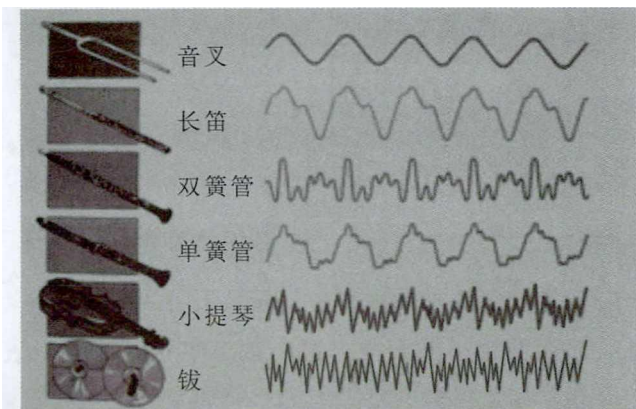


图 18

最重要的是我希望我们的中小学都可以讲一讲朱载堉算出最佳的进阶方法——十二音率。这是个了不得的事情,什么意思呢?从低音的do到高音do之间跳几个是最合适的,研究这个问题。

把do音与高音do的频率分别记为1和2,弦长

分别记为 a 和 $2a$ 。在 a 后,每个音都比前一个音的频率高 $\sqrt[12]{2}$ 倍,即 $a_0 = a, a_{i+1} = \sqrt[12]{2} a_i, i = 0, 1, \dots, 12$, 因为公比为 $\sqrt[12]{2} \approx 1.059\ 463\ 094 \approx 1.06$, 接近有理数,称为十二平均律。

刚才我说了中国古代是跳五个,毕达哥拉斯是跳七个,有两个半音。最合理的是多少呢?最合理的是成等比级数,公比是 $\sqrt[12]{2}$ 。这个计算是了不得的一件事情,明代朱元璋九世孙朱载堉(1536—1611)精确计算,记载在《乐律全书》中,得到公比为 1.059 463 094 359 295 264 561 825。朱载堉设计了大算盘,用算盘算 $\sqrt[12]{2}$, 算出这个数正好接近有理数。这个比例,人的耳朵是分不清的,因此以这个音律来调音乐。后来巴赫的十二平均率就参照了朱载堉的计算,它也是十二音率。现在的所有键盘乐,比如,钢琴都是十二平均率,德国作曲家巴赫 1722 年发表《诸和音律曲集》,十二平均律的键盘乐器都是来自巴赫的《诸和音律曲集》这本书,钢琴里的黑键就是半音。因此,将这件事情讲给学生听后再讲等比级数、讲三角函数是有道理的。

那么为什么成整比例的时候音乐是和弦呢?这是我的推理,你们回去想一想我的想法对不对。如果成整比例的话,那么这个三角函数总会在某一个地方重合,这样的话就是和弦。因此,音乐能够不断地得到重合意味着和弦,这个东西用三角函数能够表达得非常合理。

为什么是有理数,因为有理数可以共同度量,做分数时计算可以通分,音频成比例可以得到共同的周期(图 19)

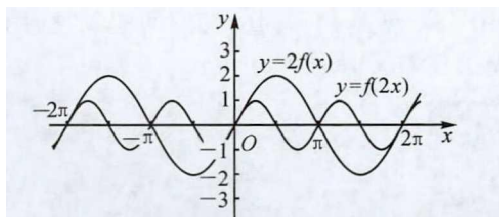


图 19

除了我前面说的《美与数学》这本书之外,我们还给高中老师编写了《音乐中的数学》《美术中的数学》和《体育中的数学》。其中《音乐中的数学》里用很大的篇幅讨论了三角函数如何使得音乐达到和弦,这个很有意思的一件事情。这个数学表达式对这个表达达到了登峰造极的程度。

5 和谐美与数学表达

最后我们谈一下和谐美。和谐这个词出自《管子》“和合故而能谐”,是说人与人之间如果和平共处的话,那么就能够和谐。然后《国语·楚语》把这个拓展为美:“夫美者,上下、内外、大小、远近皆无害焉,故

曰美。”因此,和谐是一种美,人们就把和谐作为审美的标准。

5.1 原则与语言表达

毕达哥拉斯学派干脆就认为美是和谐与比例,就是用数来表达和谐与比例,万物皆数:利用数表达和谐与比例,从音乐拓展到宇宙。文艺复兴以后,哥白尼研究日心说之后,总结自己三十多年的研究成果,非常惊叹地说:“天体的运动及轨道的大小都有确定的和谐关系。”其实两个物体之间的运动无所谓是地球绕太阳转还是太阳围着地球转,就是看你把坐标系设定在哪。但是多个物体运动的时候你就必须设立合理的坐标系了,这完全是为了表达的方便,设立在太阳那里表达更方便。因此开普勒用“世界的和谐”作为自己著作的名字,他在这里讲到了自然的和谐与和谐的美。

下面我们来讨论和谐美。老师一定记住这件事情,就是和谐并不等于相等。什么意思呢?比如,我要画一幅画,画中包含三部分颜色,这并不意味着三部分的面积占有相等的面积,而是根据绘画的内容和颜色的深浅确定适当的比例。

5.2 用数学语言定量表述

还有黄金分割数 0.618。古希腊人认为,什么叫作美呢?一个长度如果分为成两部分,长的那部分表示为 x ,短的那部分表示成 $1-x$,长的那部分比上整体等于短的那部分比上长的这部分就是美。意思就是分成两部分,长的这一块比这个线段的总长(总长是 1)等于短的部分比长的部分,那就是漂亮。

如果把一条长度为 1 的直线段分为不相等的两段,长段为 x ,短段为 $1-x$ 。古希腊人认为最美的比例应当是 $\frac{\text{长段}}{\text{整体}} = \frac{\text{短段}}{\text{长段}}$, 即 $x:1 = (1-x):x$, 得到方程 $x^2 + x - 1 = 0$, 解得 $x = 0.618$, 这就是黄金分割数。

再看维纳斯,她的头到腰的距离与腰到脚的距离之比是 0.618(图 20),前两年高考还考过。达·芬奇的《维特鲁威人》(图 21)体现了古罗马的一个建筑师提出的长例理论,赞赏人体比例和黄金分割。



图 20

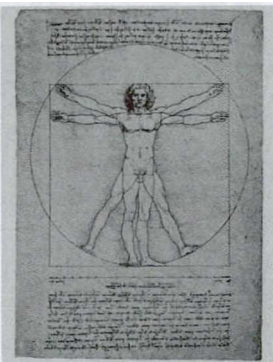


图 21

这种和谐的思想非常重要,对中国传统文化的影响也是非常大的。比如,中国的书法讲究留白,中国的绘画也讲究留白,即行与行、字与字之间要留白。《快雪时晴帖》是王羲之在雪后给朋友写的(图22),怀素大家可能知道,《自述帖》是草书(图23)。绘画也是这样,八大山人画的《鱼》利用留白展现题跋、印章(图24);赵孟頫字写得很好,他这印章《大雅》体现了布局中的和谐美(图25),篆刻艺术就是从赵孟頫开始的。



图22

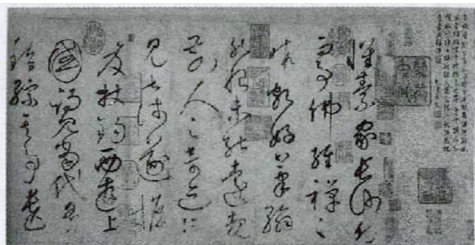


图23



图24



图25

还有一种黄金分割可能老师过去没有注意到。这个黄金分割是长度的黄金分割,还有长方体一层一层拔掉的一个黄金分割,还有一个角度的黄金分割。角度的黄金分割是什么样呢?就是大的角和小的角之间的度数比是0.618。这时得到的角是 137.5° ,这个比例为什么是黄金分割呢?仔细看向向日葵,那些花都是按照这个顺序来长的。现代通过计算机模拟发现,只有这样的情况才是点数最多的,发散角大于或小于 137.5° ,圆点间都会出现空隙(图26)。因此很多花,比如,龙舌兰叶片的生长顺序(图27),向日葵果实的排列(图28),仔细观察它们的花瓣,都是按照1234……这个顺序逐渐长起来的。

植物花瓣、果实的黄金分割角 $\alpha=137.5^\circ$ 。

因此我们可以看到数学表达了大自然的这些美,包括数学本身也变得美了,这些东西是大自然所固有的规律,而大自然的这个规律就是简洁,它的简洁是因为它有秩序。大自然是对称的,对称的美是因为什

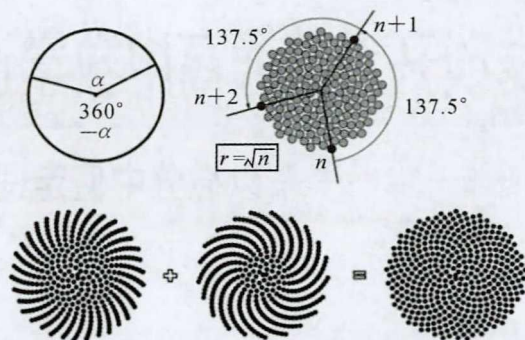


图26

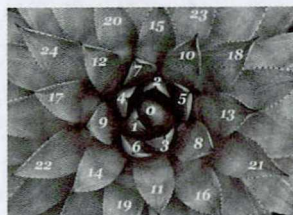


图27

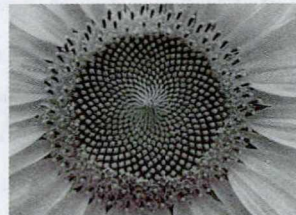


图28

么呢?因为固体也好,生命体也好,最原始状态下它就是对称的,而所有的生物体的本质是一种物质,因此整个的对称美就体现出来了。还有一个是周期的美,周期的美是因为时间,没有时间的话人们就无法度量过程,无法度量过程的话就无法度量这个宇宙。因此,时间和空间就是认识宇宙的最根本的东西,这个东西本身是跟周期有关,因为周期人们才能够度量时间,最后是一个和谐的美。

6 结束语

恩格斯在《自然辩证法》中说:我们主观的思维和客观的世界服从于同样的规律,两者在自己的结果中不能相互矛盾,必须彼此一致,这个事实绝对地统治着我们的整个理论思维,它是我们理论思维不自觉的和无条件的前提。就是说我们之所以能够用数学来表达美,或者说我们之所以能够感悟自然界中的美,我们共性的感悟,是因为自然界的秩序,因为自然界的本质属性。而凡是事情有了本质属性,有了规律,我们都可以用数学的语言来表达。对于物理现象也是这样,对于美、对于大自然表现出来的美的现象也是这样,同样是在表达大自然美的过程中我们才能更好地感悟数学的美。因此,我们数学老师在数学教学的过程中,应该把数学与大自然的美有机地结合,让学生在学习数学的过程中感悟到用数学的语言能够认识、理解和表达现实世界,也能够表达大自然的美,这是艺术。

人对于美的感觉与大自然的规律融为一体,数学恰到好处地表达了这样的美。

今天就讲这么多,谢谢大家。

(续完)