

核心素养统领的数学教育

《义务教育数学课程标准(2022年版)》修订的理念与要点

◇史宁中

近期,教育部颁布了义务教育课程方案与课程标准。下面主要谈一下《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称2022年版课标)修订的理念与要点,和大家一起讨论如何在教学实践中落实。

一、课标修订的背景与要点

(一)课标修订的背景。

课程改革是21世纪开始的基础教育改革的核心,主要体现在课标的制定和落实上。2001年颁布了《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》(以下简称2001年版课标),同时出版相应的教材。2005年出现了一些争议,教育部启动数学课标的修订工作,要求我主持修订工作。经过几年的研磨,《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称2011年版课标)颁布实施,主要变化体现在三个方面。

一是课程目标从“双基”拓展到“四基”,即在传统的基础知识、基本技能的基础上增加了基本思想、基本活动经验,使得过去只重视结果的教育转向既重视结果也重视过程的教育;与此同时,把“两能”拓展为“四能”,即在分析问题、解决问题能力的基础上增加了发现问题、提出问题的能力,以适应培养创新型人才的需要。这样的课程目标的实现,需要学生经历亲身参与的数学教学活动,在思考的过程中学会思考,在做事的过程中学会做事,这就是经验的积累。

二是课程内容的调整。2001年版课标中

没有“几何”的概念,2011年版课标中把“空间与图形”修改为“图形与几何”,并且确定若干个几何基本事实,使得几何证明成为可能。可是,当课标颁布以后,有些数学教研员问我:“是不是只有几何中才有证明,代数中没有证明?”我听了之后非常吃惊,因为现代数学的证明主要是代数中的证明。后来我想明白了,他们之所以提出这个问题,是因为2011年版课标中没有明确给出代数的基本事实。为此,2022年版课标中增加了两个代数的基本事实,我在后面再详细谈这个问题。

三是把传统的数学三大能力,即运算能力、推理能力和空间想象能力,拓展为十个核心词,包括数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识和创新意识。可以看到,新增加的数感、符号意识等核心词都与抽象能力有关,弥补了我国传统数学教育不重视抽象能力的倾向,须知抽象能力的培养对数学学习来说非常重要。这些在2001年版课标中已经有所体现,2011年版课标中的表述更加全面和清晰。

“四基”的想法是在2006年形成的。因为拿不准,于是请几位数学家到东北师范大学来,记得有北京大学的姜伯驹、复旦大学的李大潜、南开大学的侯自新、吉林大学的伍卓群等,也请当时教育部主管基础教育的副部长陈小娅、基础教育司司长姜沛民等,一起商讨把“四基”作

为课程目标是否可以。“四基”得到大家的一致认可,尤其是大家对“基本活动经验”的提出非常认可。因为数学家都知道,数学的结论是“看”出来的而不是“证”出来的,要“看”出结论,需要经验的积累,凭借的是数学的直观。但是姜伯驹先生问我:“数学的基本思想是什么?”我当时还缺乏思考,于是回答:“以后写书来回答吧。”经过认真思考后,我确定了判断数学基本思想的两个原则:一是数学的产生和发展所必须依赖的那些思想,二是学习过数学的人应当具有的思维特征。根据这两个原则,我得出的结论是:数学基本思想包括抽象、推理、模型。于是就有了五卷本的《数学思想概论》和后来的《数学基本思想18讲》。这些基本思想对数学的作用大体如下:

通过抽象得到数学的研究对象。对现实生活中的数量与数量关系、图形与图形关系进行抽象,得到研究对象及其关系,形成概念,用定义或符号表达。

通过推理得到数学的研究结果。借助归纳与类比,考察数学研究对象的性质、关系和规律,得到结论;借助计算和演绎,验证结论。

通过模型构建数学与现实世界之间的桥梁。通过模型,用数学的概念、方法和结论认识、理解和表达现实世界。

(二)课标修订的要点。

这次课标修订有两个根本任务,是所有学科都必须完成的。一是落实立德树人根本任务,这个任务需要通过核心素养落实。党的十八大提出教育要落实立德树人根本任务,十九大进一步强调。2014年,教育部提出通过核心素养的培养落实立德树人根本任务,并针对当时正在修订的高中课标提出用核心素养统领的明确要求。这次义务教育课标的修订,需要进一步落实核心素养。二是落实学科融合要求。学科融合不仅是深化基础教育改革的要求,也顺应了国际课程的发展趋势。义务教育课标的修订加强了学科间的相互关联,提倡把跨学科内容、传统文化内容融入数学课程。

数学学科具有特殊性,需要关注以下五个

问题。(1)如何划分学段?(2)如何把“四基”“四能”与核心素养有机融合?如何理解核心素养?(3)如何调整课程结构与内容?(4)如何丰富“综合与实践”的内容?(5)如何在小学阶段,体现数的认识的一致性和数的运算的一致性?

在这里,我想特别说一下“数与运算”中的一致性问题的,这涉及小学阶段的数学是否需要数学化的问题。现在的小学数学中,数的认识是通过现实背景实现的,如自然数是通过数量的个数认识的,小数是通过元、角、分或者米、分米、厘米认识的,分数是通过对“1”的等分认识的;数的运算是通过生产、生活问题的实际意义学习的,各说各的理,其中最典型的是分数和小数的除法,这是小学数学中的重点,也是难点。

分数的除法可以用包含除说明^[1]。例如,要计算 $4 \div \frac{1}{3}$,先通过包含除认识1包含3个 $\frac{1}{3}$,于是得到 $1 \div \frac{1}{3} = 3$;又因为任何数乘1结果不变,所以 $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times 1 \div \frac{1}{3} = 4 \times (1 \div \frac{1}{3}) = 4 \times 3$ 。可是,任何数除以1结果也不变,按照上面的方式,得到 $4 \div \frac{1}{3} = 4 \div 1 \div \frac{1}{3}$,接下来,该怎么处理?这就变成了很复杂的事情。

小数的除法一般用商不变的规律说明。例如, $0.4 \div 0.02 = (0.4 \times 100) \div (0.02 \times 100) = 40 \div 2 = 20$ 。应当如何解释该算法的道理呢?在教学过程中,商不变的规律是根据自然数的除法归纳出来的,为什么对小数的除法也成立呢?

事实上,要回答上面提出的问题,比直接解释分数除法和小数除法的算理还要困难。正如弗赖登塔尔在《作为教育任务的数学》中所说:“一味地依赖具体情境会使得除法问题变得更加复杂。由于教师与教材编写者对于如何从直观的分数进展到算法的分数,最终又如何引出分数的计算规则,缺乏适当的观念,从而使情况更为恶化。”事实上,解决问题的根本方法是数学化,也就是突出数学表达的一致性。数学教育的最终结果,必须使数的认识和运算脱离实际背景,这就是数学抽象的本质,也是数学具有

一般性的具体体现。后面还会谈到2022年版课标是如何解决这个问题的。

二、核心素养的理解与表达

2022年版课标重新思考了通过数学教育要培养的核心素养是什么,既包括数学核心素养的内涵,也包括数学核心素养的特征和表达。

(一)数学核心素养的内涵。

像前面说的那样,《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称2017年版高中课标)提出“数学学科核心素养”这一概念,是为了落实立德树人根本任务,2022年版课标将其进一步强化。这样,核心素养不仅涉及高中,也涉及小学和初中,还应当涉及大学甚至研究生的教育,可能还会指向教师和研究者的基本素养。因此,核心素养就应当具有三个基本特征。首先是内涵的一致性,即内涵要保持不变,是每一个学习过数学的人都应当具有的但又是终极的;其次是表现的阶段性,即不同学段有不同的表现,涉及身心发展、知识储备,也涉及经验积累;最后是表述的整体性,即既要有数学学科的特征,又要有数学教育的特征,既表述学科思维,又表述认知心理。因此学生通过数学教育所获得的核心素养,也可以简单表述为数学核心素养。

数学核心素养是具有数学基本特征的关键能力、思维品质及情感、态度与价值观的综合体现;是数学教育的、与人的行为(思维、做事)有关的终极目标;是学生在参与数学教学活动的过程中逐步形成和发展的;是经验的积累,是过程性目标的拓展,是“四基”的继承和发展。而2022年版课标把数学核心素养表述为“三会”。这样,就需要重新理解数学。

会用数学的眼光观察现实世界,比数学抽象更加上位。什么是数学的眼光?为什么可以用于观察?数学为人们提供了一种认识与探究现实世界的观察方式。通过对现实世界中基本数量关系与空间形式的观察,学生能够:直观理解所学的数学知识及其现实背景;在生活实践和其他学科中发现基本的数学研究对象及其

所表达的事物之间简单的联系与规律;在情境中发现和提出有意义的数学问题,进行数学探究;逐步养成从数学角度观察现实世界的意识与习惯,发展好奇心、想象力和创新意识。

会用数学的思维思考现实世界,比数学推理更加上位。什么是数学的思维?数学家是如何思考现实世界的?数学为人们提供了一种理解与解释现实世界的思考方式。通过经历独立的数学思维过程,学生能够:理解数学基本概念和法则的发生与发展,数学基本概念之间、数学与现实世界之间的联系;合乎逻辑地解释或论证数学的基本方法与结论,分析、解决简单的数学问题和实际问题;探究自然现象或现实情境中所蕴含的数学规律,经历数学“再发现”的过程;发展质疑问难的批判性思维,形成实事求是的科学态度,初步养成讲道理、有条理的思维品质,逐步形成理性精神。

会用数学的语言表达现实世界,比数学模型更加上位。什么是数学的语言?为什么可以用数学的语言表达?数学为人们提供了一种描述与交流现实世界的表达方式,描述和交流时的语言就是数学的概念、结论与方法。通过经历用数学语言表达现实世界中的简单数量关系与空间形式的过程,学生能够:初步感悟数学与现实世界的交流方式;有意识地运用数学语言表达现实生活与其他学科中事物的性质、关系和规律,并解释表达的合理性;感悟数据的意义与价值,有意识地使用真实数据表达、解释与分析现实世界中的不确定现象;欣赏数学语言的简洁与优美,逐步养成用数学语言表达与交流的习惯,形成跨学科的应用意识与实践能力。

(二)数学核心素养的特征。

会用数学的眼光观察现实世界,体现于数学抽象,对应数学的一般性;会用数学的思维思考现实世界,体现于逻辑推理,对应数学的严谨性;会用数学的语言表达现实世界,体现于数学模型,对应数学应用的广泛性。虽然数学研究可以分为不同的流派,但数学的“三性”,即一般性、严谨性和应用的广泛性,是全世界几代数学家共

识。因此“三会”具有明显的数学特征。

对于核心素养的教育特征,包括教学特征,我还没有想清楚,这需要结合教学实际进行深入研究,是数学教育研究者、教研员、一线教师的强项。我只知道核心素养的表述会用到意识、观念和能力等词语,这些词语表达了受教育者认知事物的载体和程度。其中,意识是指基于经验的感悟,观念是指基于概念的理解,能力是指基于实践的掌握,大概是这样的,供参考。

核心素养具有阶段性特征,因为数学核心素养贯穿数学教育的始终,在不同学段有不同的表现,是日积月累逐步形成的。大体上可以这样把握:低学段基于感官,更具体、更侧重意识;高学段基于概念,更一般、更侧重观念和能力。基于这样的构想,高中、初中、小学各学段数学核心素养的主要表现如下所示。

表1 数学核心素养体系构成及对比

核心素养	高中	初中	小学
数学的眼光	数学抽象	抽象能力	符号意识、数感、量感
	直观想象	空间观念、几何直观	空间观念、几何直观
数学的思维	逻辑推理	推理能力	推理意识
	数学运算	运算能力	运算能力
数学的语言	数学建模	模型观念	模型意识
	数据分析	数据观念	数据意识

另外,数学的眼光里统筹了创新意识,数学的语言里统筹了应用意识。

可以看到,这些核心素养的主要表现,统筹并发展了2011年版课标中的十个核心词和2017年版高中课标中的六个数学学科核心素养。

(三)数学课程性质的表述。

为了适应数学课程合理融入数学核心素养的需要,数学课程性质的表述发生了很大变化,因为必须兼容数学学科和数学教育的基本特征。2022年版课标中课程性质的表述,保留了“数学是研究数量关系和空间形式的科学”的基本观点,然后强调:

数学源于对现实世界的抽象,通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象,得到数学的研究对象及其关系;基于抽象结构,通过对研究对象的符号运算、形式推理、模型构建等,形成数学的结论和方法,帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律。数学不仅是运算和推理的工具,还是表达和交流的语言。数学承载着思想和文化,是人类文明的重要组成部分。

这种对数学的理解是从伽利略那个时代开始的。伽利略曾经感慨:“哲学被写在展现于我们眼前的伟大之书上,这里我指的是宇宙。但是,如果我们不首先学会用来书写它的语言和符号,我们就无法理解它。这本书是以数学语言写的,它的符号就是三角形、圆和其他几何图形,没有这些符号的帮助,我们简直无法理解它的片言只语;没有这些符号,我们只能在黑暗的迷宫中徒劳地摸索。”爱因斯坦是这样评价的:“由于伽利略看到了这一点,尤其是由于他向科学界谆谆不倦地教导这一点,他才成为近代物理学之父,事实上,也成为整个近代科学之父。”

伽利略和爱因斯坦所说的是,用数学的语言表达现实世界的规律,然后通过观察或实验验证数学表达的正确性,这就是现代科学研究的基本方法。基于这样的认识,可以更好地理解课程性质的表述和课标的理念,也可以把这样的认识融入日常的数学教学中。

三、内容变化与教学建议

课程内容的修订主要体现在学段的调整、内容结构化、体例表述变化、具体内容调整四个方面。

在学段安排上,小学由两个学段调整为三个学段,这样,义务教育阶段的数学教学共分为四个学段:第一学段为1~2年级,第二学段为3~4年级,第三学段为5~6年级,第四学段为7~9年级。对于周课时的安排,建议四个学段依次安排3、4、5、6个课时。理想的课时分配应该是这样的:低学段分配更多课时给语文学科,因为这个学段的学生不容易理解数学语言的表达,应当先学会生活语言的表达;到了高学段,再增加数学学科的课时分配。当然,课时的具体分配

应依据地方教育管理部门的最终决定而定。在课标的体例表述上,增加了“学业质量”一章,在“课程实施”中增加了“教学研究与教师培训”的相关内容。特别是,把传统的“课程内容”分为“内容要求”“学业要求”“教学提示”三个方面进行表述,分别涉及学生学习什么、学到什么程度、如何学习,无论是教材编写还是教师教学,都需要前后对照阅读、认真分析。

下面,主要分析课程内容的变化与相应的教学建议。

(一)主题整合。

课程内容的四大领域没有变化,但为了落实以核心素养为导向的课程目标,对各领域的主题进行了整合。整合时主要遵循两个原则。

一是在整合的形式上,基于抽象结构。抽象结构是现代数学研究的基本形式(详见参考文献[2]),可以表述为“研究对象+”的形式,其中“+”的内容可以是性质、关系、运算。亚里士多德在《形而上学》中是这样阐述的:“数学家用抽象的方法对事物进行研究,去掉感性的东西,关于线、角,或者其他的量(的定义),不是作为存在而是作为关系。”希尔伯特认为:“欧几里得关于点、线、面的定义在数学上是不重要的,它们之所以成为讨论的中心,仅仅是因为公理述说了它们之间的关系。换句话说,无论把它们称为点、线、面,还是把它们称为桌子、椅子、啤酒瓶,最终推理得到的结论都是一样的。”^[3]这对教材编写和教学的启示是:在考虑研究对象的概念的同时,还要强调研究对象的性质、关系、运算。例如,在从数量中抽象出自然数的同时,还要一并从数量的多少关系中抽象出数的大小关系。

二是在整合的理念上,强调核心素养。第一个原则谈到,提倡研究对象概念的教学要与研究对象的性质、运算、关系的教学有机结合,事实上,这样的形式有利于开展“整体设计、分段实施”的以核心素养为导向的教学。这是因为核心素养往往与数学知识的具体内容无关,而与数学知识的表现形态关系密切,上面所说的概念、性质、运算、关系等要素都是数学知识

的表现形态。表现形态搭建了数学知识与核心素养之间的桥梁,例如,概念与抽象更为接近,性质与推理更为接近,关系与模型更为接近。因此,教师在未来的教学中,不仅要知道知识所表达的内容,还要进一步分析知识所具有的形态,基于表现形态落实以核心素养为导向的教学。

基于上述两个原则,对小学领域的主题进行了整合。例如,把原来“数与代数”领域的六个主题整合为两个:把“数的认识”“数的运算”这两个主题整合为“数与运算”这个主题,把“常见的量”移至“综合与实践”领域,把“方程”“反比例”移至初中,把“探索规律”“式”“正比例”整合为“数量关系”这个主题(注:原来“式与方程”“正比例、反比例”各为一个主题);把原来“图形与几何”领域的四个主题整合为两个:把“图形的认识”“测量”这两个主题整合为“图形的认识与测量”这个主题,把“图形的运动”“图形与位置”这两个主题整合为“图形的位置与运动”这个主题。

对于这样的整合,如第二个原则所说,建议开展“整体设计、分段实施”的以核心素养为导向的教学。也就是说,在教学设计上,建议集体备课,包括全学年、全学段甚至全校数学教师的集体备课,每位教师都应当知道自己所教的内容处于什么位置,知道知识的前后关系、素养的发展联系,最终把以核心素养为导向的教学落实到每一节数学课。显然,教学设计应当针对核心素养的一致性、阶段性和整体性。需要整体把握数学知识体系与知识所对应的核心素养;需要保证概念从最初提出到最后实际应用的一致性;需要体现数学知识的进阶,还要体现核心素养的进阶。再次说明,我只是提出一些想法和建议,供参考。

(二)内容变化。

具体内容的变化除了遵从主题整合,还遵循一个基本原则,这就是增加代数推理、增强几何直观。这个基本原则与高中数学课标的修订原则是一脉相承的,最终希望学生能够通过几何直观获得解决问题的思路,通过代数推理表述解决问题的过程。下面,分别说明四个领域

的内容变化和相应的教学建议。

1. 数与代数。

主要体现在四个方面。

第一,为了实现代数推理,增加了两个基本事实,即关系的传递性和等式的基本性质。传递性是指:如果 $a=b$, $b=c$,那么 $a=c$;如果 $a>b$, $b>c$,那么 $a>c$ 。等式的基本性质是指:如果 $a=b$,那么 $a\pm c=b\pm c$;如果 $a=b$,那么 $ac=bc$ 或 $a\div d=b\div d(d\neq 0)$ 。

一般来说,推理是指从命题(判断)到命题(判断)的思维过程,这样的过程中至少需要三个命题,分别称为前提命题、论证命题、结论命题。一个推理过程是否具有逻辑性,不是通过结论的对错进行判断,而是通过推理的过程进行判断。有逻辑的推理具有两个明显特征:一是论证的对象不变,二是对对象的性质不变。一般称这两个特征为推理过程的传递性,这样,一个推理过程具有逻辑性当且仅当这个推理过程具有传递性^[4]。数学推理具有传递性,因此是有逻辑的推理。数学推理大体分为归纳推理和演绎推理两大类,推理形式分别为:

归纳推理:发现 $X\rightarrow P$,如果 $X\in A$,那么 $A\rightarrow P$ 。

演绎推理:已知 $A\rightarrow P$,如果 $X\in A$,那么 $X\rightarrow P$ 。

其中 A 表示集合, X 表示元素。

归纳推理是说,发现某些元素 X 具有性质 P ,如果能够找到一个包含这些元素的集合 A ,那么就推断这个集合 A 中所有的元素都具有性质 P 。比如,哥德巴赫猜想,发现4、6、8、10等数均可以表示为两个素数之和: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$,等等,这就是前提命题 $X\rightarrow P$;4、6、8、10等数均是偶数,用 A 表示所有偶数组成的集合,这就是论证命题 $X\in A$;于是推断所有的偶数都可以表示为两个素数之和,这就是结论命题 $A\rightarrow P$ 。显然,这样的推理是具有传递性的,是有逻辑的推理。但通过归纳推理得到的结论不一定是对的。无论如何,归纳推理通过检验过的结论推断未曾检验过的结论,可以得到新的结果,因此归纳推理是得到数学结论的重要方法。

演绎推理是说,已经知道集合 A 中的元素

都具有性质 P ,如果能够论证元素 X 属于集合 A ,那么可推断元素 X 具有性质 P 。这样的推理是有逻辑的,并且得到的结论必然是正确的,但是通过这样的推理不能得到新的结果,因此演绎推理是验证结论的推理,也就是我们通常所说的证明。例如,曹冲称象的故事,前提命题是“等量的等量相等”,也就是前面所说的传递性这一基本事实;论证命题是大象的质量等于船的排水量,石头的质量也等于船的排水量,可以用 a 表示大象的质量,用 b 表示船的排水量,用 c 表示石头的质量,这是一个特例;所以得到结论命题,从推理过程的传递性可知,曹冲称象的方法是正确的。这就是小学数学中的代数说理,在小学阶段不强调推理的形式,因此是说理。可以看到,代数说理是更加接近生活的说理。到了初中,则开始强调推理的形式,要求证明“一个数加上一个正数变大”这样的命题,在证明的过程中,感悟有理数加法的本质,还要求证明“一个三位数,如果个位、十位、百位上的数之和能被3整除,那么这个三位数能被3整除”,这是小学时通过归纳得到的结论,到了初中可用演绎推理证明这个结论。

此外,特别希望教材编写者认真思考如何编写教材,以便让学生感悟“化未知为已知”的数学基本方法。例如,讲完两位数乘一位数、两位数乘两位数、三位数乘一位数以后,是否可以引导学生通过归纳自己得到三位数乘两位数的计算方法?如果是这样,那么教材的编写就不能只写竖式不写横式,因为竖式表达的是算法,横式表达的才是算理,算法是通过算理得到的,因此不教算理永远得不到新的算法。例如,分析三位数乘两位数的计算过程: $123\times 12=123\times (2+10)=123\times 2+123\times 10=246+1230=1476$,其中把12拆分为2和10,然后运用分配律,述说的就是算理,而具体的计算就是算法(从低位乘起);如果把12拆分为10和2,然后运用分配律,那么就得到不同的算法(从高位乘起);如果拆分123,就会得到完全不同的算法。如果把分配律称为算律,那么数学计算的流程是:算律确定算

理,算理确定算法。这就是数学的一般性。当然,如果得到了算法,就可以不再理睬算律和算理了,但是为了培养创造性的思维,经历这样的过程是必要的。在教学过程中,如何让学生恰到好处地感悟、合乎逻辑地思考,是对教材编写者的考验,也是对教研员和一线教师的考验,这就是人们通常所说的教学的艺术。

第二,将方程、反比例内容从小学移到了初中,百分数移到“统计与概率”领域,负数放在“综合与实践”领域。

方程是1978年下放到小学的,同时将小学算术提升为小学数学,目的是引导学生在小学阶段理解代数,但实际上这个目标没有达成。将方程内容移到初中有两个理由。一是没有体现代数的本质。小学阶段“用字母表示数”的内容很少,也就一两个课时,主要是在简易方程中用字母表示未知数,这还停留在古希腊丢番图的表达层面,依然是算术。真正的代数是韦达开始的,主要表现是用字母表示方程中的系数。因此,未来小学教材中需要加强字母的表达,用字母可以表达性质、关系和规律,大概需要6~8个课时,让学生感知字母可以像数一样进行运算和推理,得到的结论具有一般性,从中感悟数学抽象的层次性。二是没有体现方程的必要性。事实上,新概念、新方法的引入应该让学生感受到引入的必要性,可以源于日常生活,也可以源于数学本身。过去小学教材是从 $5-x=2$ 这类简单方程入手的,这类方程并没有实际背景,学生无法感知学习方程的必要性。因此,对于方程,应该从“鸡兔同笼”这样的问题入手,在用算术方法解决问题非常困难的时候,教师提供一种新的方法,从而使学生感受到引入新方法的必要性。用字母表示的性质、关系、规律就是初中所说的代数式或者用代数式表达的关系,那么未来的初中教材,就可以从数的运算过渡到代数式的运算,从字母表示的数量关系过渡到方程,让学生感悟建立方程是在讲两个故事,两个故事中的量相等。

第三,增加了“计数单位”的概念。这个概念的引入是为了实现前面提到的数的认识的一

致性、数的运算的一致性,对此,2022年版课标是这样表述的:“初步体会数是对数量的抽象,感悟数的概念本质上的一致性,形成数感和符号意识;感悟数的运算以及运算之间的关系,体会数的运算本质上的一致性,形成运算能力和推理意识。”为了实现这样的要求,需要把计数单位作为抓手。

对于数的认识,可以用计数单位统领数的表达。无论是整数、分数还是小数,都是“多少个计数单位”的表达。比如,分数 $\frac{4}{3}$ 是4个 $\frac{1}{3}$,其中 $\frac{1}{3}$ 是计数单位,这样也解决了假分数的认识问题。因此,数的大小比较需要基于相同的计数单位进行,例如,要比较 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$ 的大小,需化为 $\frac{3}{6}$ 与 $\frac{2}{6}$ 再比较, $\frac{1}{6}$ 就是相同的计数单位。

对于数的运算,与大小比较同理,数的加减运算要基于相同计数单位进行,分数的通分就是为了得到相同的计数单位;数的乘除运算则要复杂一些,可以类比2米乘3米的运算,是“多少个”与“多少个”进行乘除运算,得到新的“多少个”,“计数单位”与“计数单位”进行乘除运算,得到新的“计数单位”。

第四,初中需要从头开始讲负数,因为小学把负数内容移到“综合与实践”领域,是作为数量的表达,这样,初中数学可以帮助学生从正数扩充到包含负数的整数数系,从有理数扩充到包含无理数的实数数系。负数最早出现时也是对数量的抽象,是一种表达而不是通过运算得到的。负数的概念最早出现在《九章算术》中,讲述了一个买卖牲畜的故事,卖牛和卖马得到的钱为正,买猪付出的钱就为负,但钱本身是一样的。因此,负数与对应的正数“数量相等,意义相反”,绝对值就表示数量相等。初中还增加了近似计算的内容,把韦达定理的有关内容由选学调整为必学,也是为了增加代数推理。

2. 图形与几何。

2022年版课标还有一个理念,就是增强几何直观。几何的研究对象也是通过抽象得到

的,几何抽象的本质,大概是把三维物体的形状在二维平面上表达出来,因此教学的重点是三维物体形状与二维几何图形之间的转化,使学生感悟抽象物的存在,形成并提高空间想象力。第一学段,学生主要认识三维空间物体的形状,这是可以直接感知的;第二学段,借助长方体认识点、线、面,得到抽象的几何研究对象;第三学段,通过度量得到长度、面积、体积,从量的角度进一步认识和表达物体形状和几何图形。

在这样的学习过程中,几何的直观感觉是非常重要的,但过去在小学“图形与几何”的教学中,有目的、有意义的动手操作太少,因此,2022年版课标在小学阶段增加了尺规作图的内容。主要有两个具体要求。一个要求是作与给定线段长度相等的线段,使学生在认识刻度的基础上,抽象地认识线段的长度,感悟两点间的距离,知道什么是线的等长,可以拓展到以给定线段为边作等边三角形,知道可以用圆规作出两条线段的交点。另一个要求是利用尺规作图理解三角形的周长。小学生理解三角形的周长比较困难,教师可以用尺规作图引导学生把三角形的三条边依次落在一条直线上,感悟什么是三角形的周长。到了初中阶段,提高了对尺规作图的要求,希望能够引导学生经历构思图形、设计流程、作图验证的过程。比如,作一条线段的垂直平分线的问题,可以在一张透明纸上画一条线段,通过对折使得线段的两个端点重合,让学生感悟中间那条折线就是垂直平分线,然后启发学生想办法把那条折线画出来,最后通过实际作图验证自己的想法,在这样的过程中,培养学生的空间想象力和几何直观。再比如,可以让学生作给定的三角形,在这样的过程中猜想三角形全等的条件,培养逻辑思维能力 and 数学表达能力。

3. 统计与概率。

在信息时代和大数据时代,统计与概率的应用价值越来越突出,应用范围越来越广泛。处理大数据的一个重要手段,就是数据分类和特征提取。在2022年版课标中,小学阶段有“数据分类”主题,引导学生经历从“实物分类”

到“抽象分类”的过程,感悟分类时需要制定标准;到了初中,学生要学习如何制定分类标准,如何用数学语言表达标准,比如,给出了如何把我国10个省份2020年人均地区生产总值(人均GDP)分为两组的案例,引导学生先用生活语言构想分类标准:组内差距尽可能小、组间差距尽可能大,然后用离差平方和表达。

小学阶段的一个重要变化,是把百分数的内容从“数与代数”领域移到“统计与概率”领域。这是因为在信息时代,百分数作为一个统计量,越来越多地应用于随机现象的处理。过去用百分数表达饮料中果汁含量、税率、利息、折扣等,是一种相对稳定的表达;但是,百分数还可用来表达投篮命中率、下雨概率、经济增长率等,这样的表达是相对随机的,并且具有预测功能。因此在教学过程中,教师要引导学生感悟百分数的两种特征,在解决问题的过程中,培养学生的数据意识和数字素养。百分数还可以作为对随机现象进行决策的工具。2022年版课标给出“确定五年级学生跳绳达标线”的案例(例46)。首先,在体育课上开展跳绳活动,可以随机抽取100个学生,记录这些学生1分钟内的跳绳个数(可以每个学生测1次,也可以每个学生测3次,取这3次的平均数)。其次,把这100个学生的跳绳个数从小到大依次排列。最后,可以这样确定达标线:如果希望大多数学生(占比大于75%)很快就能达标,那么可以选择第25个学生对应的跳绳个数作为达标线。学生在这样的过程中,积累思考和做事的经验,形成创造性思维。在初中阶段,还增加了平均数分布式计算的内容,对应于高中阶段方差的分布式计算,这是因为在处理大数据的过程中,为了加快信息处理的速度,往往需要多台计算机同时计算,因此分布式计算的应用越来越广泛。

4. 综合与实践。

2022年版课标赋予了“综合与实践”具体的内容,小学阶段以主题式学习为主,初中阶段尝试项目式学习。课程计划要求跨学科内容不

低于总课时的10%,因此小学阶段的主题式学习,把“常见的量”作为跨学科的内容融入“综合与实践”。例如,“欢乐购物街”,认识人民币、元、角、分;“时间在哪里”,认识时、分、秒;“我的教室”,认识上、下、左、右、前、后;等等。初中阶段,每学期至少要设计两个项目式学习活动,可以以跨学科的内容为主。问题解决是项目式学习的主线,强调解决真实情境中的真实问题。大多数真实问题的处理,只靠数学知识是不够的,因为会涉及其他学科,不仅涉及自然科学,还会涉及社会学甚至人文学科的内容。在这样的学习过程中,引导学生经历发现和提出问题、分析和解决问题的过程,形成和发展用“三会”表达的核心素养。

此外,2022年版课标还强调中华优秀传统文化与数学的融合。比如,设计了“曹冲称象的故事”“圆周率的故事”“度量衡的故事”等案例。如同前面对曹冲称象的故事的解释那样,在讲述这些故事时,还要讲数学的知识。这应当作为一个原则,未来的教学设计,应当思考如何合情合理地把中华优秀传统文化和数学文化融入数学课堂。

参考文献:

[1]史宁中.关于除数是分数或者小数除法的一个注[J].数学教育学报,2019,28(5).

[2]美国科学院国家研究理事会.2025年的数学科学[M].刘小平,李泽霞,译.北京:科学出版社,2014.

[3]康斯坦丝·瑞德·希尔伯特:数学世界的亚历山大[M].袁向东,李文林,译.上海:上海科学技术出版社,2001.

[4]史宁中.试论数学推理过程的逻辑性:兼论什么是有逻辑的推理[J].数学教育学报,2016,25(4).

(本文系作者于2022年5月7日在东师教师教育论坛“义务教育课程标准(2022年版)大家谈”线上会议上所做的报告,略有改动。作者单位:东北师范大学。文字整理:东北师范大学教育学部侯泽华、丁锐)

[Y]

本次义务教育数学课程标准修订的最大特色是确立了数学核心素养为义务教育数学教育的基本导向。《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称新课标)基于数学核心素养确立了课程目标,并据此确立了学业质量标准,而且设计了相应的课程内容,特别是强化了跨学科的主题活动促进数学教学方式的改革。以核心素养为视角,可以更好地理解这次标准修订中数学内容的变化,更好地促进课堂教学的改革,更好地促进在新课标理念下深入开展小学数学教学研究。

一、数学核心素养的意义和内涵

新课标把数学核心素养作为数学课程的基本导向。新课标指出:“通过数学的学习,形成和发展面向未来社会和个人发展所需要的核心素养。核心素养是在数学学习过程中逐渐形成和发展的。”

数学的核心素养是跨学科的核心素养在数学教育中的体现和落实,体现了数学学科育人的基本导向。新课程标准将党的教育方针具体化,具体设计了数学核心素养,体现了正确的价值观、必备品格和关键能力的要求。数学核心素养是立德树人根本任务在数学课程中的具体表达。

什么是数学学科的核心素养呢?新课标明确指出,就是会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界。

提倡“三会”,反映了数学学科的本质要求。数学源于对现实世界的抽象,基于数学的抽象概念,通过推理形成数学结论和方法,帮助人们认识、理解和表达数学的关系和规律。所