UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
comprometida con el desarrollo regional

CENTRO DE INNOVACION EN TIC PARA APOYO A LA ACADEMIA
CINTIA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

-

DESARROLLO

1. Definición de grafos

Un grafo G = (V, A, fg) es una estructura combinatoria constituida por un conjunto no vacío V = V(G) de elementos llamados VÉRTICES; un conjunto A = A(G) de pares no ordenados de vértices distintos llamados ARISTAS y fg, es una función que asocia a cada arista un par de vértices, llamada FUNCION DE INCIDENCIA.

Un grafo se denota por:

G = (V, A)

Donde

V = Conjunto de Vértices y **A** = Conjunto de Aristas

Ejemplo 1: **G=(V,A)**

V(G)= {A, B, C, D, E}

A(G)= {(A, B),(B, C),(C, D),(D, A),(A, E),(B, E),(C, E),(D, E)}

F(G) = {(A, B),(B, C),(C, D),(D, A),(A, E),(B, E),(C, E),(D, E)}

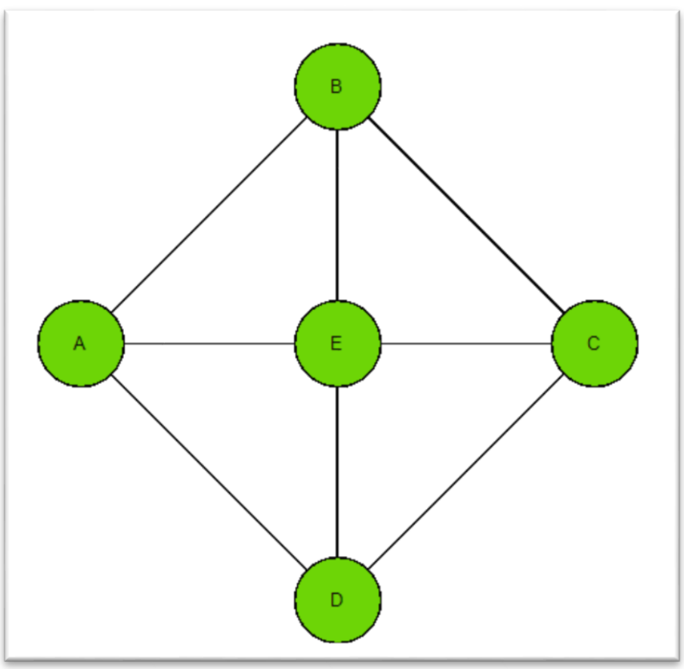

Figura 1: Grafo

2. **Representación gráfica:** un grafo se representa gráficamente como un conjunto de puntos (vértices o nodos) unidos por líneas (aristas). Desde un punto de vista práctico, los grafos permiten estudiar las interrelaciones entre unidades que interactúan unas con otras.

   2.1. Vértices: Se indica comúnmente por medio de un pequeño círculo y se les asigna un numero o letra.

   Ejemplo 3: De la figura 1 se encuentran los siguientes vértices:

   V(G)= {A, B, C, D, E}

   2.2. Aristas: Son las líneas que unen un vértice con otro y se le asigna una letra, un número o una combinación de ambos y con la cual se construyen los llamados "caminos".

   Ejemplo 4: De la Figura 1 se encuentra las siguientes aristas:

   A(G)= {(A, B), (B, C),(C, D),(D, A),(A, E),(B, E),(C, E),(D, E)}

3. **Algunas Situaciones Que se dan en grafos**

   3.1. Cruces: Son aquellas que se cruzan en un punto sin hacer conexión

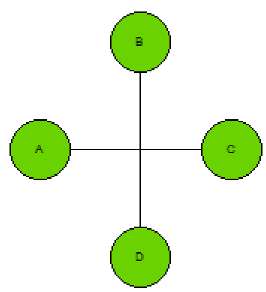

Figura 2: cruces

   3.2. Terminal: Es un vértice de grado uno.

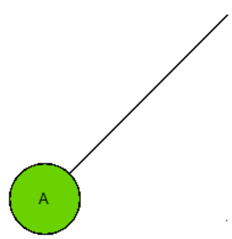

Figura 3: Vértice Terminal

3.3. Adyacentes: Dos vértices que se conectan por una arista se denominan adyacentes

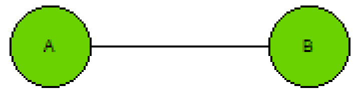

Figura 4: Vértice Adyacentes

3.4. Incidencia: si dos vértices están conectados por una arista, entonces cada uno de estos vértices es incidente a dicha arista.

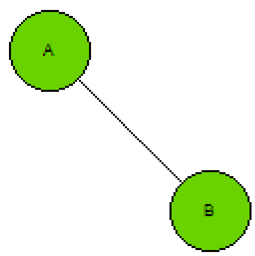

Figura 5: Incidencia

3.5. Aristas adyacentes: Son las que convergen al mismo vértice

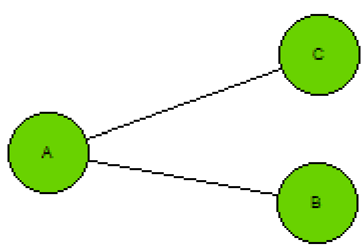

Figura 6: Aristas Adyacentes

3.6. Aristas paralelas: Dos o más aristas distintas con el mismo conjunto de puntos extremos se dicen que son paralelas.

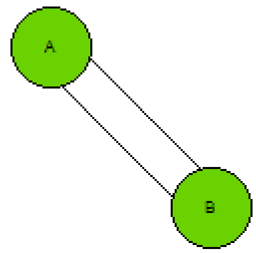

Figura 7: Aristas Paralelas

4. Tipos de grafos

4.1 Grafo vacío: Sea un grafo G=(V, A) se dice que es un grafo vacío si y solo si A={}, es decir, que es un grafo que no tiene aristas o arcos entre sus vértices.

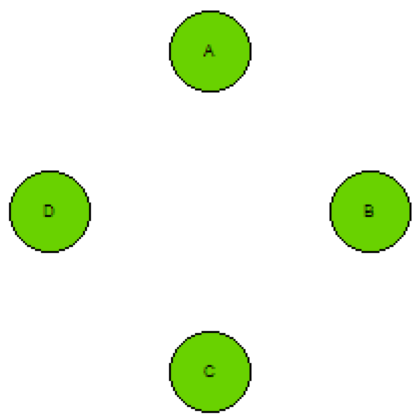

Figura 8: Grafo Vacío

4.2. Grafo trivial: Un grafo *trivial* es un grafo con un único vértice

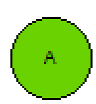

Figura 9: Grafo Trivial

4.3. Grafo finito: Un grafo se dice finito si tiene finitos vértices y aristas. Un grafo es localmente finito si cada vértice es borde de una cantidad finita de aristas.

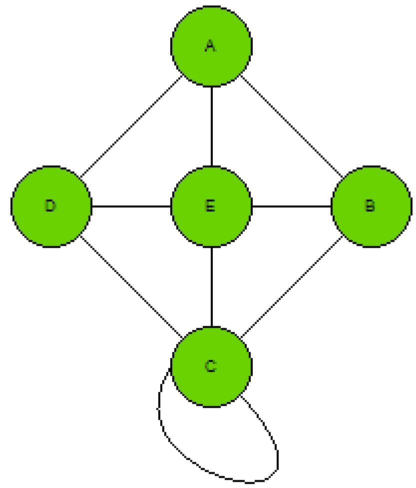

Figura 1: Grafo Finito

4.4. Grafo simple: Son aquellos que no tienen bucles ni aristas paralelas

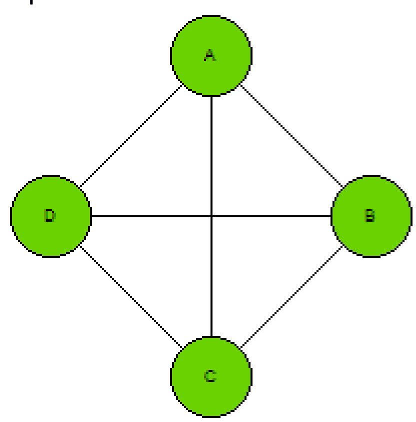

Figura 2: Grafo Simple

5. Tipos de Grafos notables

5.1 K-regular: es un grafo donde cada vértice tiene el mismo grado o valencia. Un grafo regular con vértices de grado k es llamado grafo k-regular o grafo regular de grado k. Los grafos regulares de grado hasta 2 son fáciles de clasificar: Un grafo 0-regular consiste en un grafo con vértices desconectados, un grafo 1-regular consiste en un grafo con aristas desconectadas, y un grafo 2-regular consiste en un ciclo o unión disjunta de ciclos. Y un grafo 3-regular se conoce como grafo cúbico.

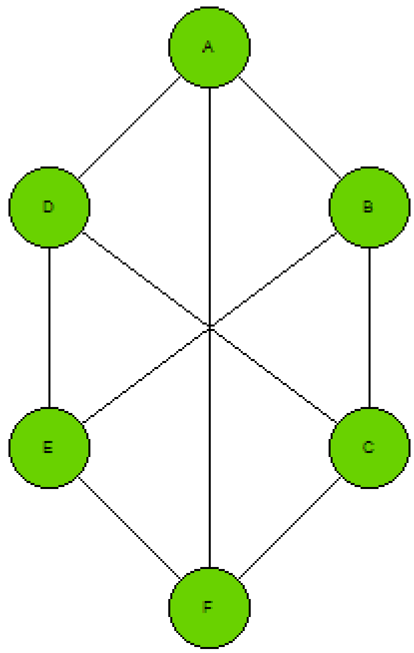

Figura 3: Grafo K-Regular

5.2 Completo: es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista.
Un grafo completo de n vértices tiene n(n-1)/2 aristas, y se nota k_n. Es un grafo regular con todos sus vértices de grado n-1.

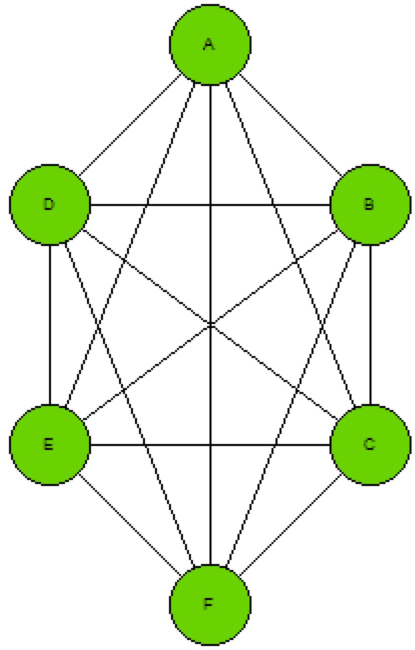

Figura 4: Grafo Completo

5.3 Petersen: es un grafo no dirigido que sirve como un útil ejemplo y contraejemplo en la teoría de grafos. Este grafo es nombrado así por Julius Peter Christian Petersen, quien lo publicó en 1898.
El grafo de Petersen es comúnmente dibujado como un pentágono con una estrella de 5 puntas dentro.

Características:

- Es un grafo regular de grado 3.
- Dos vértices adyacentes no tienen vecinos en común, pero, no es bipartito, pues existen varios ciclos de longitud impar.
- Dos vértices no adyacentes tienen exactamente un vecino en común.

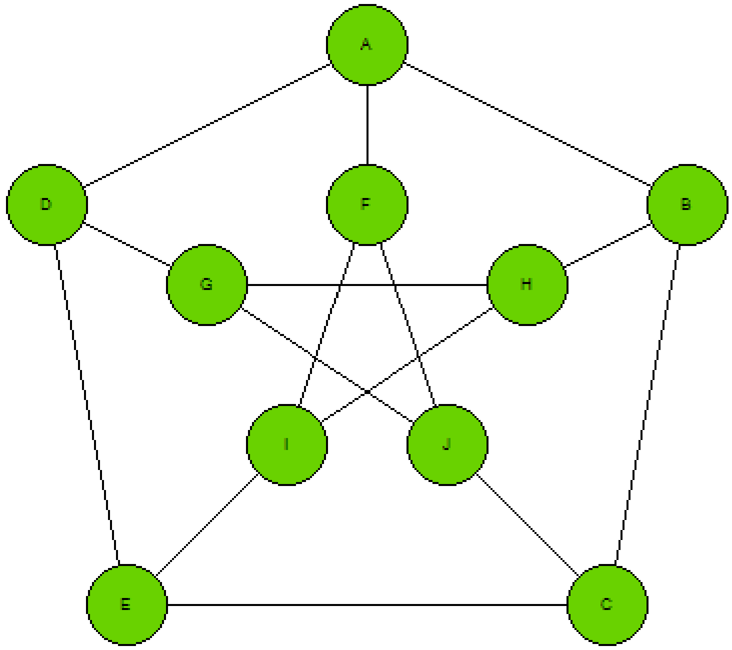

Figura 5: grafo de Petersen

5.4 bipartito: Es un grafo que está compuesto por dos conjuntos de vértices A= {a_1, a_2,..,a_n} y B= {b_1, b_2,..,b_n}, en donde los elementos del conjunto A se relacionan con los del conjunto b, pero entre vértices de un mismo conjunto no existe arista alguna.
Una forma muy sencilla de saber si un grafo es bipartido es aplicar el hecho de que nunca tiene un ciclo de longitud impar, además de que debe cumplir con las características mencionadas anteriormente

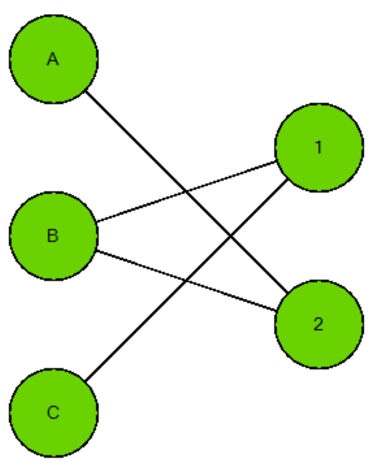

Figura 6: Grafo Bipartito

5.5 bipartito completo: está formado por dos conjuntos disjuntos de vértices y todas las posibles aristas que unen esos vértices.
El grafo completo bipartito con particiones de tamaño $|V_1|=m$ y $|V_2|=n$, es denotado como $k_{m,n}$
$K_{3,2}$

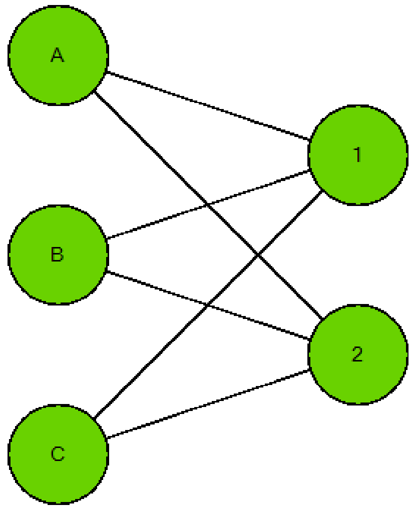

Figura 7: Grafo Bipartito Completo $K_{3,2}$

6. **Grados de un vértice:** Sea **G** un grafo y ***v*** un vértice de G. El grado de v, que se denota por deg(v), es igual al número de aristas que inciden en v, con una arista que es un bucle contado dos veces; El grado total de G es la suma de los grados de todos los vértices de G.

Ejemplo: Tomando la Figura 16: Grafo Bipartito Completo $K_{3,2}$ de los vértices

Deg(A)=2	**Deg(1)=3**
Deg(B)=2	**Deg(2)=3**
Deg(c)=2	

Entonces **2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12**

6.1 teorema de los grados de un vértice y su demostración.

El teorema del saludo de mano: Si G es cualquier grafo, entonces la suma de los grados de todos los vértices de G es dos veces el número de aristas de G.

Específicamente, si los vértices de G son $v_1, v_2, \ldots, v_n$, donde n es un entero no negativo, entonces

el grado total de G = $deg(v_1) + deg(v_2) + \ldots + deg(v_n)$
= 2 * (el número de aristas de G).

Ejemplo: continuado con el ejemplo anterior 2 * 6 = 12

Demostración: Sea G un grafo particular que se elige arbitrariamente y suponga que G tiene n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y m aristas, donde n es un entero positivo y m es un entero no negativo. Pretendemos que cada arista de G contribuya en 2 al grado total de G. Se supone que **e** es una arista arbitrariamente elegida con puntos extremos vi y vj. Esta arista contribuye con 1 al grado de vi y con 1 al grado vj. Como se muestra a continuación, es verdadero aún si i = j ya que se cuenta dos veces una arista que es un bucle en el cálculo del grado del vértice en el que incide.

Por tanto, **e** contribuye con 2 al grado total de G. Ya que **e** se escogió arbitrariamente, esto muestra que cada arista de G contribuye con 2 al grado total de G. Por tanto, el grado total de G = 2 * (el número de aristas de G).

6.2 vértice pendiente: es aquel grafo que contiene una sola arista, es decir, que es de grado 1

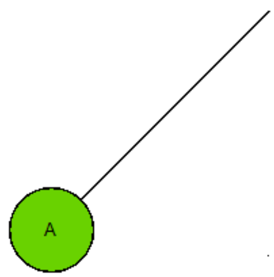

Figura 8: Vértice Pendiente

6.3 vértice aislado: es un vértice de grado cero

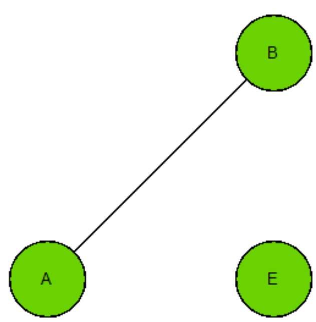

Figura 9: Vértice Aislado

7. Teorema Havel-Hakimi (verificar si una secuencia de números que representan los grados de los vértices de un grafo es graficable o no)

Una secuencia de $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_v \geq 0$ enteros es gráfica sí, y sólo sí también lo es la lista: que resulta de $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_v$ eliminar el primer elemento y restar una unidad a los siguientes d_1 valores de la lista.

Condiciones para poder utilizar este teorema que son:

1.- Debe cumplirse el lema del apretón de manos.
2.- En número de vértices de grado impar es par.
3.-El valor máximo debe ser menor que la longitud de la secuencia. Se debe ordenar la sucesión en cada reiteración.

Ejemplo: Mediante la siguiente secuencia aplicaremos el teorema de Havel-Hakimi: 5, 5, 7, 6, 4, 2, 4, 5

7, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 2	Se ordena descendientemente la secuencia
5, 4, 4, 4, 3, 3, 1	Se elimina el 7, se resta 1 a los 7 siguientes
3, 3, 3, 2, 2, 1	Se elimina el 5, se resta 1 a los 5 siguientes
2, 2, 1, 2, 1	Se elimina el 3, se resta 1 a los 3 siguientes
2, 2, 2, 1, 1	Se ordena descendientemente la secuencia
1, 1, 1, 1	Se elimina el 2, se resta 1 a los 2 siguientes
	SI ES GRAFICA

EJERCICIOS/ACTIVIDADES

Taller 1: conceptos fundamentales

1. Dibujar el grafo g y decir el tipo de grafo es según lo que expresan los siguientes conjuntos:

    - v(g) = {a, b, c, d, e, f}
    - a(g) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
    - f(g) = {f(1)=(a, b); f(2)=(b, c); f(3)=(a, d); f(4)=(a, c); f(5)=(c, f): f(6)=(f, d); f(7)=(f, e); f(8)=(d, e); f(9)=(e,b) }

2. Construir un grafo de 6 vértices en los que cada uno tenga los siguientes grados: 4,3,3,3,3,4.
3. ¿Cuántas aristas tiene un grafo si sus vértices tienen los siguientes grados: 3,2,2,2,2,3? Dibujarlo.
4. Aplicar el teorema de Havel-Hakimi a las siguientes secuencias y decir si se pueden graficar o no:
    - 5 ,4 ,4 ,3 ,3, 3
    - 5 ,3 ,3 ,2 ,2

BIBLIOGRAFIA

- Epp, S. (2012). *Matemáticas discretas con aplicaciones (4a. ed.)*. 1st ed. México, D.F.: CENGAGE Learning, pp.625-641.
- Jiménez Murillo, J. and Rodríguez Cruz, F. (2014). *Matemáticas para la computación*. 1st ed. México: Alfaomega Grupo Editor, pp.287-288.
- Comellas Padró, F. (2002). *Matemática discreta*. 1st ed. México, D.F.: Alfaomega, pp.103-105.
- Wikiwand. (2017). Grafo | Wikiwand. [online] Available at: http://www.wikiwand.com/es/Grafo [Accessed 5 Jul. 2017].
- Wilson, R. and García Camarero, E. (1983). Introducción a la teoría de grafos. Madrid: Alianza, pp.20-50.
- Ore, O. (1995). Grafos y sus aplicaciones. Madrid: DLS-EULER, pp.70-98.