COURS NO4

Chapitres 1, 2, 3 ÉI

- Le taux d'intérêt , l'intérêt simple et l'intérêt composé
- Différents facteurs : F/P, P/F, P/A, A/P, F/A, A/F
- Gradients arithmétiques et géométriques
- L'utilisation des tables d'intérêts
- Représentation des flux monétaires : diagrammes

Contenu

- Notion d’intérêt
  - Signification, notation et convention
  - Simple et composé
- Équivalence
- Déplacement de $ dans le temps par :
  - Montant unique
  - Annuité
  - Gradient linéaire
  - Gradient géométrique
  - Flux monétaire composé
- TRAM
- Séries décalées

L'intérêt et la valeur de l'argent

DÉFINITION:

Somme versée pour utiliser les services d'un capital monétaire pendant un certain temps ***(loyer de l'argent)***

Intérêt = → Coût pour l'emprunteur
→ Source de revenu pour le prêteur

Deux catégories principales d'intérêts

Intérêt = → Simple
→ Composé

Notation dans les transactions impliquant l'intérêt

- ***P* =** montant présent
- ***F* =** montant dans le futur
- ***A* =** série de montants égaux (annuités) (fin de période)
- ***G* =** Gradient arithmétique
- ***g* =** gradient géométrique
- ***n* =** nombre de périodes d'intérêt
- ***i* =** taux d'intérêt ou de rendement par période
- ***I* =** montant en $ d'intérêt (total)

Intérêt simple

- Intérêts sont payés uniquement sur le capital initial
- Ces intérêts sont retirés à chaque échéance. Seul le capital est replacé lors de la période suivant une échéance.
- Notamment utilisés dans les financements à court terme.

FORMULES:

Intérêts cumulés après n années: $I = Pin$

Capital + intérêts: $F = P\,(1 + in)$

__Exemple:__ P = 1 000 $; i =8%/année; n =4 ans.

I = 1 000 $ x 8 % x 4 = 320 $

F = 1 000$ x (1+8%x4)=1 320$ (capital + intérêts)

Intérêt composé

Les intérêts composés sont la huitième merveille du monde:
Celui qui les comprend les gagne… et celui qui ne les comprend pas les paie'.
- *Albert Einstein*

- **Les intérêts sont replacés avec le capital et rapportent à leur tour des intérêts.**
- **Les intérêts versés à la date d'échéance du prêt**
- **Ce mode de calcul est souvent utilisé dans les cas de financement à long et moyen terme.**
- **FORMULE**:

$$I = P(1+i)^n - P$$

- **Intérêt + capital**:

$$F = P(1+i)^n$$

Exemple: **P = 1 000 \$; i =8%/année; n =4 ans.**

F = 1 000\$ x (1+8%)^4= 1 360.50\$

INTÉRÊT SIMPLE (I_s) v.s. INTÉRÊT COMPOSÉ (I_c)

- **Intérêt simple:** $I_s = P\boldsymbol{i}n$
- **Intérêt composé:** $I_c = P(1+\boldsymbol{i})^n - P$

- $\Delta I = I_c - I_s$

$$= \left[P(1+\boldsymbol{i})^n - P \right] - \left[P\boldsymbol{i}n \right]$$

$$= P \left[(1+\boldsymbol{i})^n - (1+\boldsymbol{i}n) \right]$$

- **Quand** $n = 1$, $I_c = I_s$

- **Quand** $\boldsymbol{i}$ et n augmentent, l'écart entre I_c et I_s augmente

EXEMPLE : IMPACT DE L'INTÉRÊT

Exemple: Valeur de l'île de Manhattan

Données

En 1626

P = 24$

i = 8%

Valeur foncière de l'île en 2016?

Résolution

1. Intérêt simple 8%:

F=24$*(1+8%*390)=773$

2. Intérêt composé 8%:

$F=24\$*(1+8\%)^{390}= 26 \times 10^{13}\$$!!

En 1626, Peter Minuit, de la Dutch West India Company, a acheté aux Autochtones l'île de Manhattan pour 24$. Si i=8%, valeur en 2016?

Règle de 72

Objectif

Permet de connaître approximativement le nombre d'années (n) pour doubler un capital à un certain taux d'intérêt (i).

$$\boxed{n = \frac{72}{\mathrm{i}}}$$

Exemple:

$$\mathrm{i} = 8\,\%$$

$$n = \frac{72}{8} = 9 \text{ ans}$$

Ou : $$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i\%)} = \frac{\ln 2}{\ln(1.08)} = 9\,ans$$

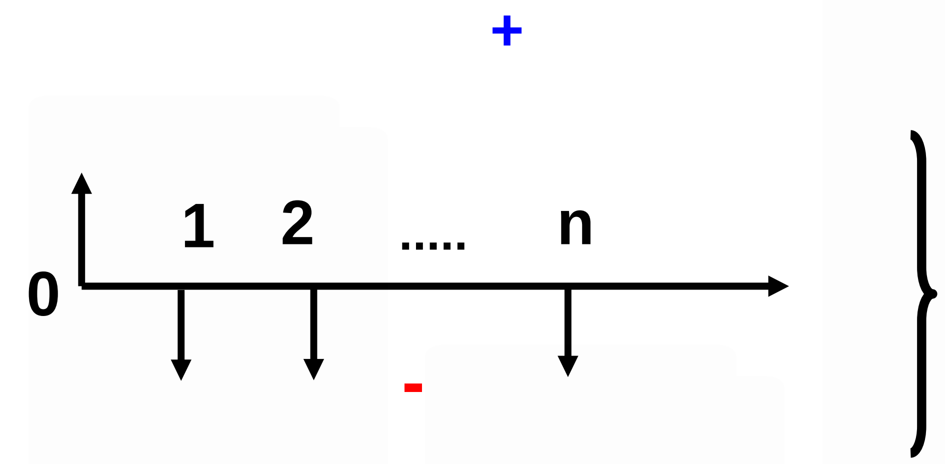
Formules d’équivalence

- Montant unique
- Annuité
- Gradient
- Flux monétaire composé (ou quelconque)

Diagramme des flux monétaires

Point de vue de l'emprunteur et du prêteur.

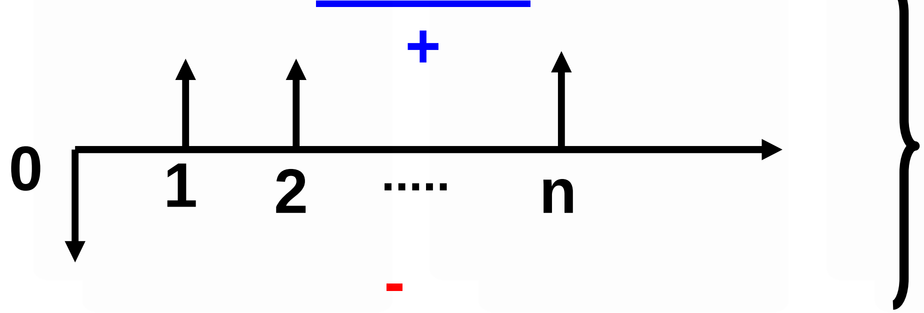
Emprunteur



Encaissements

Décaissements

Prêteur



Encaissements

Décaissements

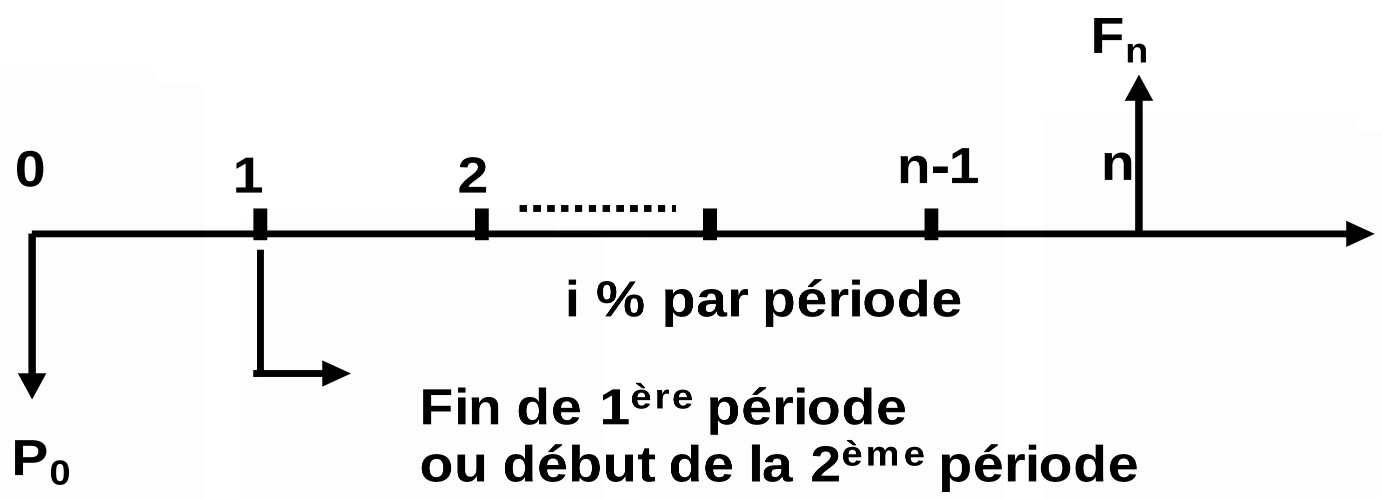
La notation universelle des facteurs d'intérêt

- Forme générale : **$(X/Y;i;n)$**

  - *X* représente la valeur **inconnue**.
  - *Y* représente la valeur **connue**.
  - *i* et *n* représentent **des données** qui peuvent être connues ou inconnues, selon le problème.

Formules de paiements uniques (facteurs F/P et P/F)

Diagramme des flux monétaires de base



1) $F_n = P_0(1 + \boldsymbol{i})^n \rightarrow$ **Facteur** $(F/P;\boldsymbol{i};n) \rightarrow$ Excel : =VC($\boldsymbol{i}$;n;;-P)

2) $P_0 = F_n(1 + \boldsymbol{i})^{-n} \rightarrow$ **Facteur** $(P/F;\boldsymbol{i};n) \rightarrow$ Excel : =VA($\boldsymbol{i}$;n;;-F)

Formules de calcul des intérêts

1) Trouver une **valeur future (F)** quand on connaît sa **valeur présente (P)**: (montant composé) **(F/ P; i; n)**

à la fin de la 1ère période: $F = P + Pi = P(1+i)$

à la fin de la **2ème** période:
$$F = (P+Pi) + (P+Pi)i = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$$

....

à la fin de **nième** période: $F=P(1+i)^n$ **(1)**

qu'on dénote: **F=P(F/P; i; n)**

Table F/P

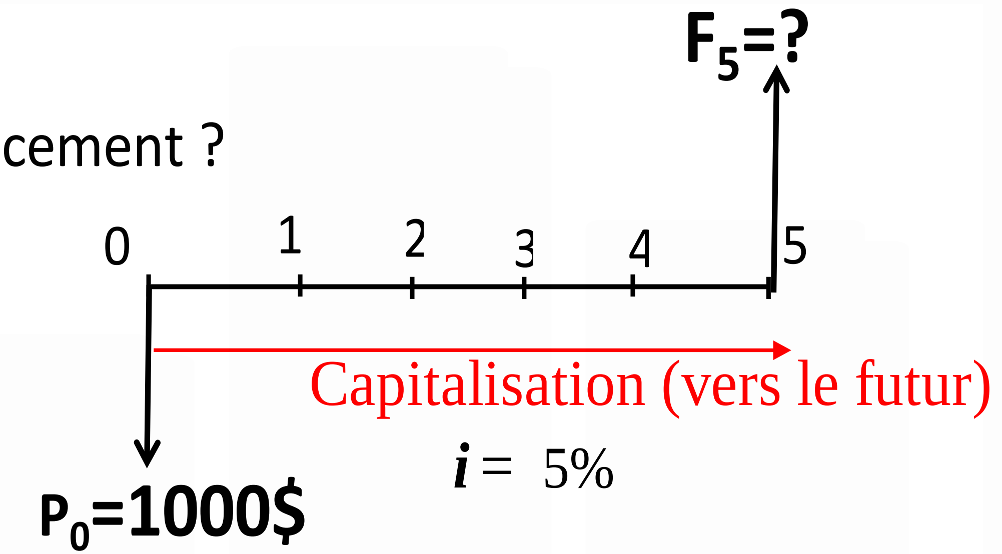
(F/P;i;n)= Facteur de valeur accumulée d'un paiement unique

Excel : =VC(i;n;;-P)

EXEMPLE (F/P;*i*;n)

1000 \$ placés à 5%/an, à taux composé pendant 5 ans.
Valeur à la fin des 5 ans (capital + intérêts) ?

Valeur future d'un placement ?



$F_5 = 1000(1+5\%)^5$ 1000 x 1.2763 = **1 276 \$**

(F/P;5%;5)

Ou:

F= P (F/P;5%;5)= 1 000\$ x 1.2763= 1 276 \$

Excel: = VC(5%;5;;-1000)

Table

2) Trouver une valeur présente (P) quand on connaît sa valeur future (F) (P/F; *i*; n)

$$P = F(1+i)^{-n} \qquad (2)$$

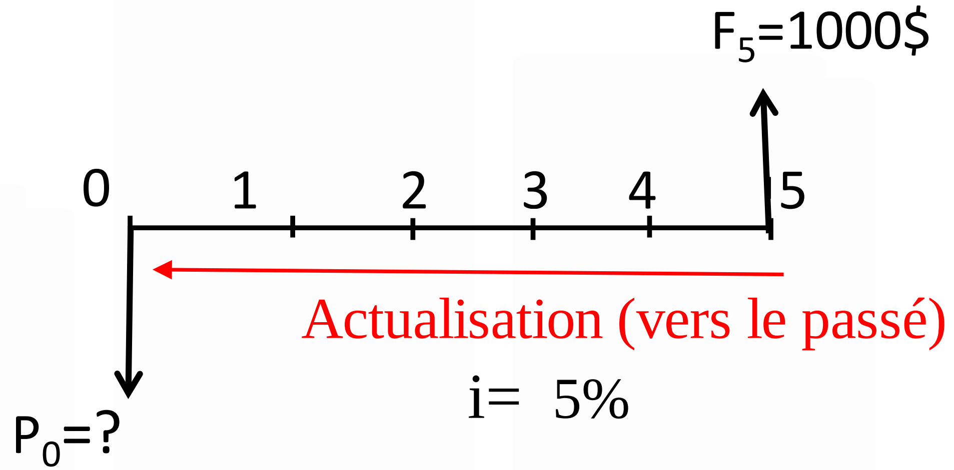
$$= F(P/F; i; n)$$

(P/F;i;n) = Facteur de la valeur présente d'un montant futur unique.

Excel : =VA(*i*;*n*;;-*F*)

EXEMPLE: (P/F;i;n)

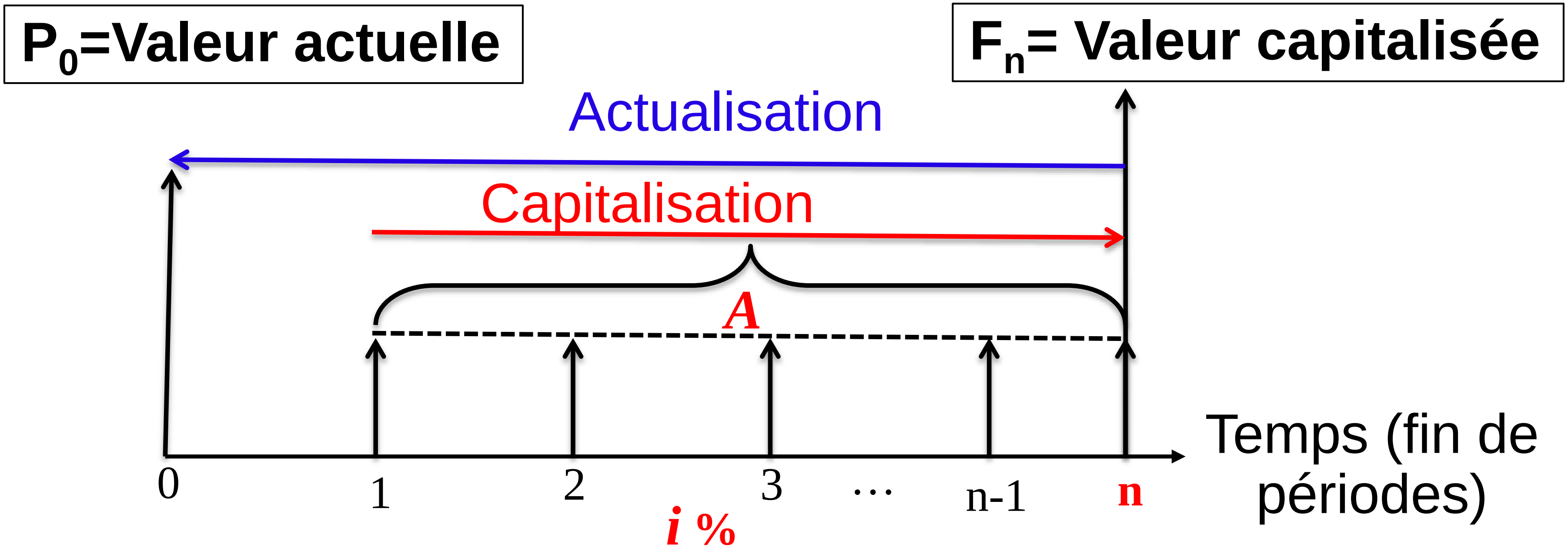
Montant à déposer aujourd'hui pour accumuler un montant donné



$$P_0 = 1000(1+5\%)^{-5} = \quad 1000 \times \underbrace{0.7835}_{(P/F;5\%;5)} = \boxed{784\ \$}$$

Montant à placer aujourd’hui à 5% pour accumuler une somme de 1000$ à la fin de la 5e année ?

Les annuités: série constantes sans interruption



Requis : trouver *P ou F* lorsque *A* est connu (facteurs F/A et P/A)

Les flux monétaires sont constants, consécutifs et se produisent à la fin de chaque période d'intérêt.

$$P_0 = A\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$= A(P/A;i;n)$$

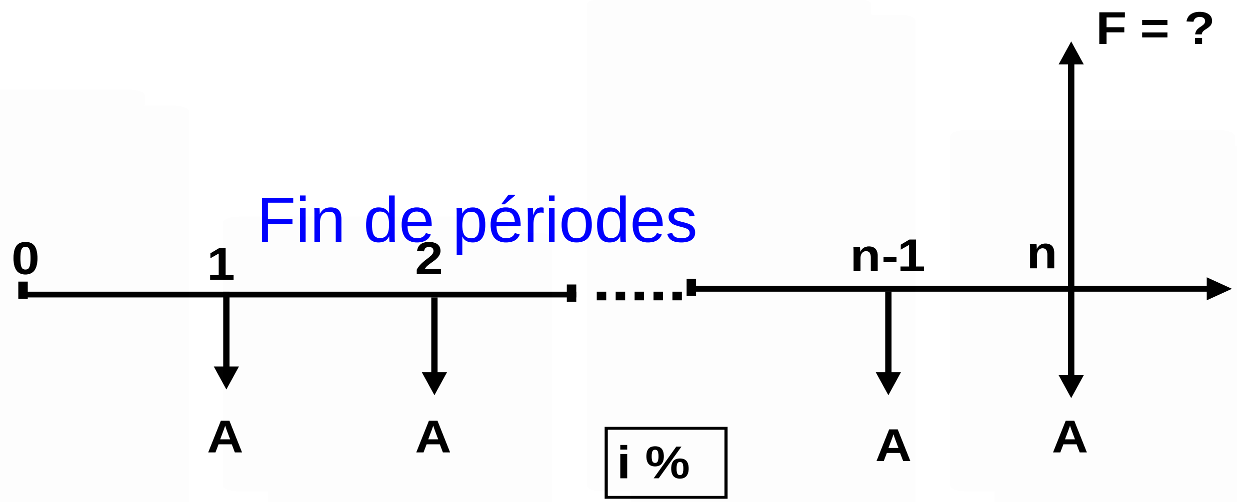
$$F_n = A\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$= A(F/A;i;n)$$

$\boxed{\text{Excel : =VA(}i;n;-A\text{)}}$

Excel : =VC(*i*;*n*;-*A*)

3) Trouver une valeur finale (F) quand le montant de l'annuité (A) est connu. (Montant composé série uniforme) (F/A; i; n)



On peut établir la relation entre F et A comme suit:

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \dots + A(1+i)^{2} + A(1+i)^{1} + A(1+i)^{0} \qquad (3)$$

En multipliant les deux côtés de (3) par (1 + i) on aura :

$$F(1+i) = A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i)^{2} + A(1+i)^{1} \qquad (4)$$

(4) - (3): $F(1+i-1) = A(1+i)^{n} - A$

$$F\,i = A[(1+i)^{n} - 1]$$

$$\text{Donc } F = A\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right] \qquad (5)$$

$$= A(F/A; i; n)$$

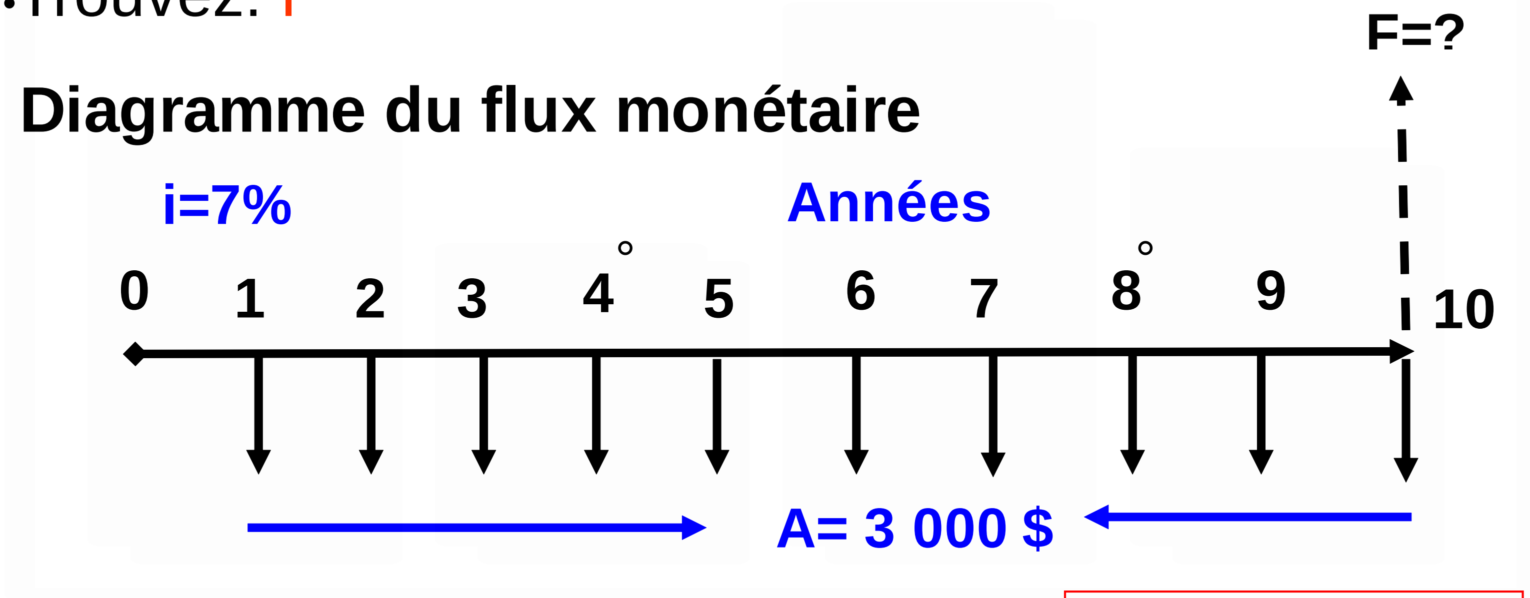
Facteur (*F*/*A*;*i*;*n*), Excel =VC(*i*;*n*;-*A*)

EXEMPLE (F/A;i;n)

Dépôt dans un compte d'épargne ayant un taux de rendement de 7%

- Soit: A= 3 000$, n= 10 années et i= 7% par année
- Trouvez: F

Diagramme du flux monétaire



F = 3 000$ (F/A;7%;10)
= 3 000$ (13.8164)
= **41 449.20$**

$$\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

Table,n=10,i=7%

Excel : =VC(*7%*;*10*;*-3000*)

4) Trouver la valeur présente P quand le montant de l'annuité (A) est connu (Facteur d'actualisation série uniforme) (P/A;i;n) (Table)

En combinant les équations 1 et 5

$$F = P(1+i)^n \quad (1) \qquad F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \quad (5)$$

On obtient:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = A(P/A;i;n) \quad (6)$$

<u>Où:</u>

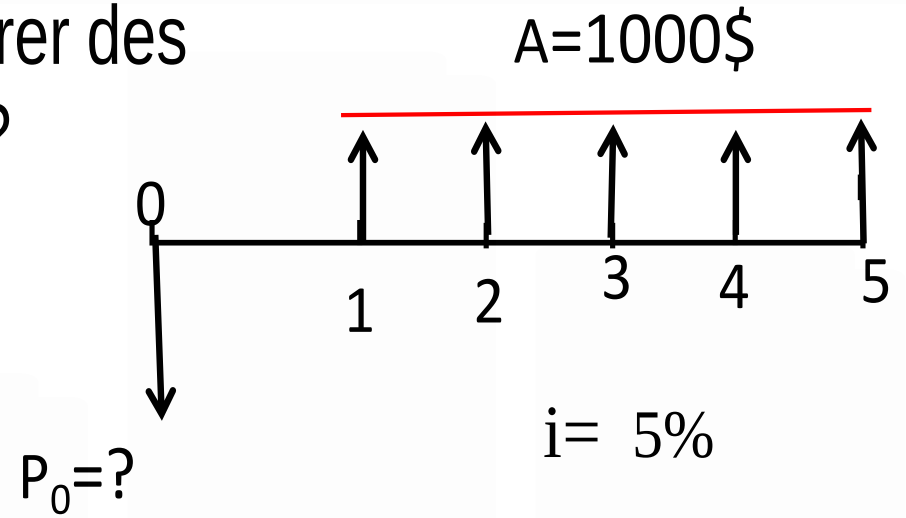
[P/A;i;n] = Facteur de valeur présente d'une annuité de fin de Période.

Facteur ($P/A;i;n$)

Excel : =VA(i;n;-A)

EXEMPLE (P/A;i;n)

Dépôt aujourd'hui pour assurer des retraits constants sur 5 ans?



$$P_0 = 1000\ [(1+5\%)^5-1]/[5\%(1+5\%)\quad 1000\ \times\ 4.3295\ =\ 4\,329\ \$$$

(P/A;5%;5)

Montant à placer aujourd’hui à 5% pour nous assurer une entrée de 1000$ par année pendant chacune des 5 années ?

5) Trouver l'annuité (A) quand la valeur présente (P) est connue (Recouvrement du capital) (A/P;i;n)

En reformulant **l'équation (6),** on trouve:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$= P(A/P;i;n)$$

Facteur de recouvrement du capital

(7)

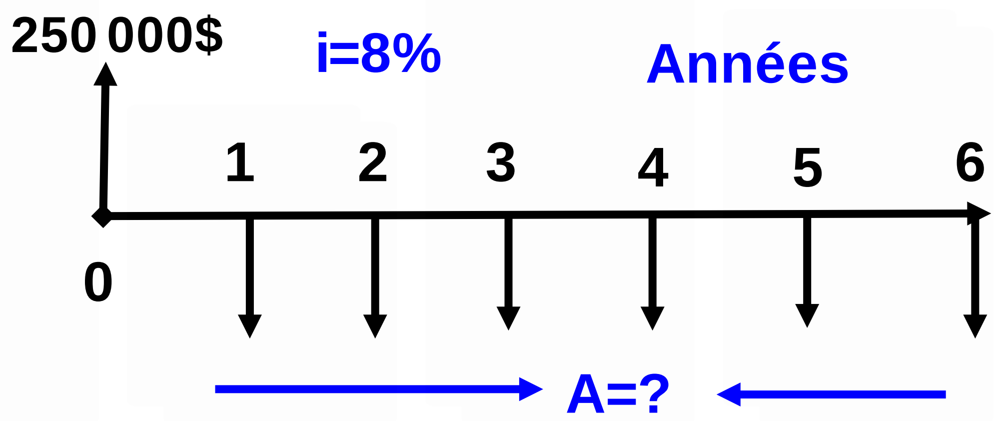
Facteur (*A*/*P*;*i*;*n*)

Excel : =VPM(*i*;*n*;-*P*)

EXEMPLE: **(A/P;i;n)**

- Soit: P= 250 000$, n= 6 années et i= 8% par année
- Trouvez: A

Diagramme du flux monétaire



$$\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

A = 250 000$ (A/P,8%,6)

= 250 000$ (0.2163)

= **54 075$**

Table,n=6,i=8%

Excel = VPM(8%;6;-250000)

6) Trouver l'annuité (A) quand la valeur future (F) est connue (A/F;i;n)

En reformulant **l'équation (5),** on obtient:

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] = F(A/F; i; n) \quad \textbf{(8)}$$

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Facteur (*A*/*F*;*i*;*n*)

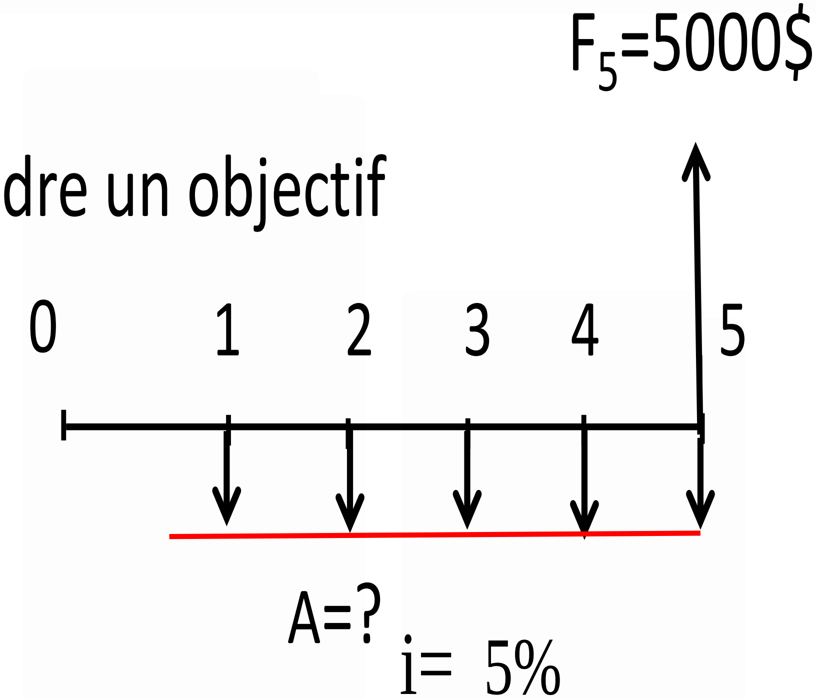
Excel : =VPM(*i*;*n*;;-*F*)

Où: [A/F; i; n]= Facteur donnant l'annuité d'une valeur finale

A/F: Exemple

6. (A/F;i;n)

Épargne périodique pour atteindre un objectif futur (ex fonds de pension)?

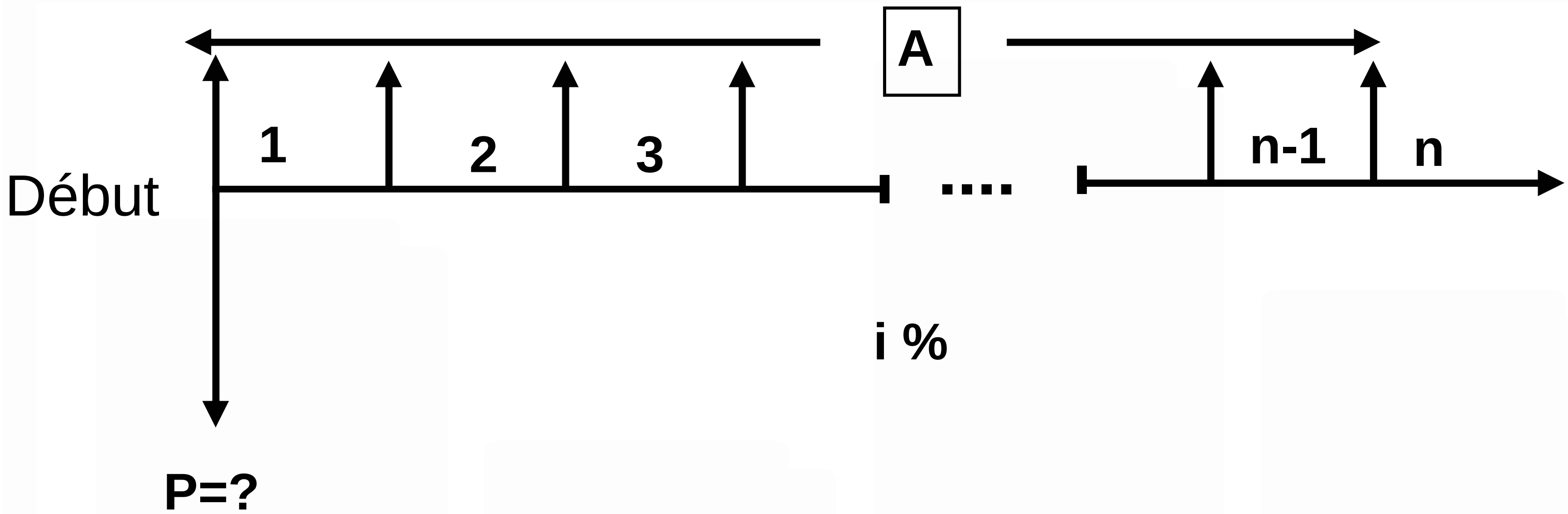


A = 5000 [5%/[(1+5%)^5-1] 5000 x 0.18097 = 905 $

(A/F;5%;5)

Excel = VPM(8%;5;;-5000)

Série uniforme avec paiements au **début** de période

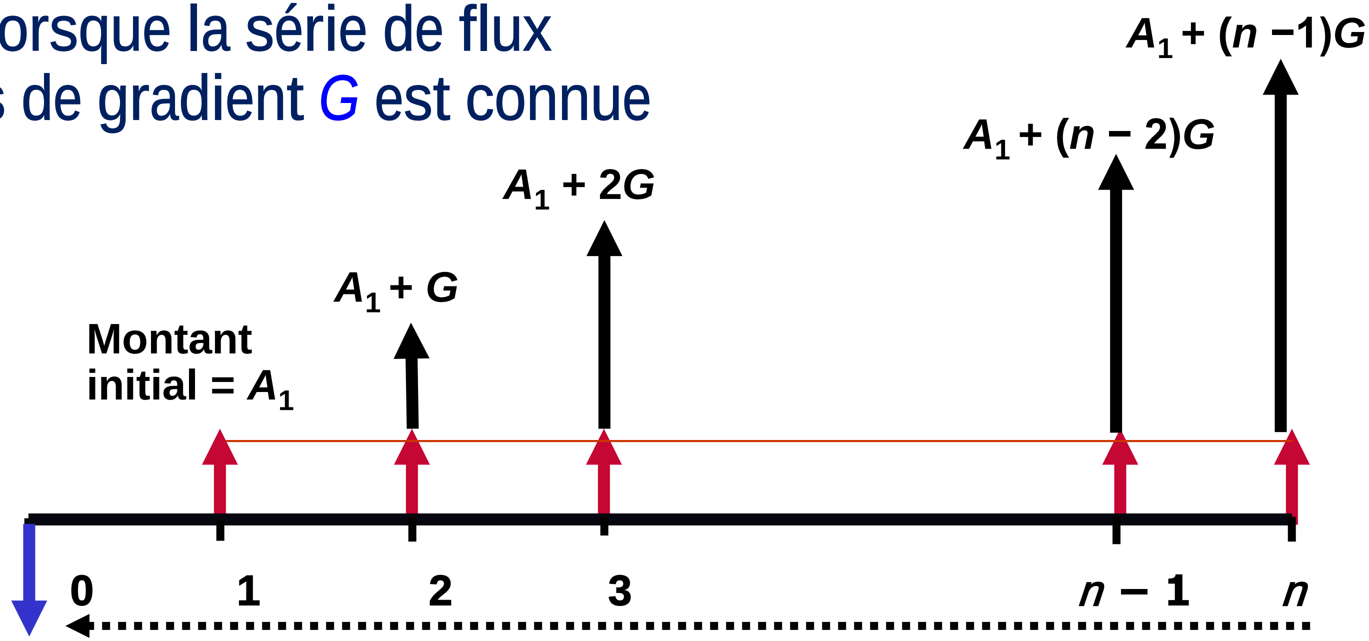


$$\boxed{P = A\,[P/A; i; (n-1)] + A}$$

$$\boxed{F = A\,[F/A, i, n] \times [F/P, i, 1]}$$

Les facteurs des séries arithmétiques de gradient *G* (facteurs *P*/*G* et *A*/*G*)

7) Trouver *P* lorsque la série de flux monétaires de gradient *G* est connue



$$P = G\,(1+i)^{-2} + 2G\,(1+i)^{-3} + \ldots + (\boldsymbol{n}-1)\,G\,(1+i)^{-\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{A};\boldsymbol{i};\boldsymbol{n})$$

$$P = \boldsymbol{A}_1\;(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{A};\boldsymbol{i};\boldsymbol{n}) \;+\; G\,(P/G;i;n)$$

(1/i) [(P/A) – n(P/F)]

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] = G\,[P/G;i;n]$$

8) Trouver A quand G est connu (A/G;i;n)

La relation entre A et P est donnée par l'éq 9:

$$A = P\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad \textbf{(9)}$$

et celle entre P et G, l'équation 10:

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \qquad \textbf{(10)}$$

Combinant les équations 9 et 10, on obtient:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \\ &= G\,(A/G;\,i;\,n) \end{aligned}} \qquad \textbf{(11)}$$

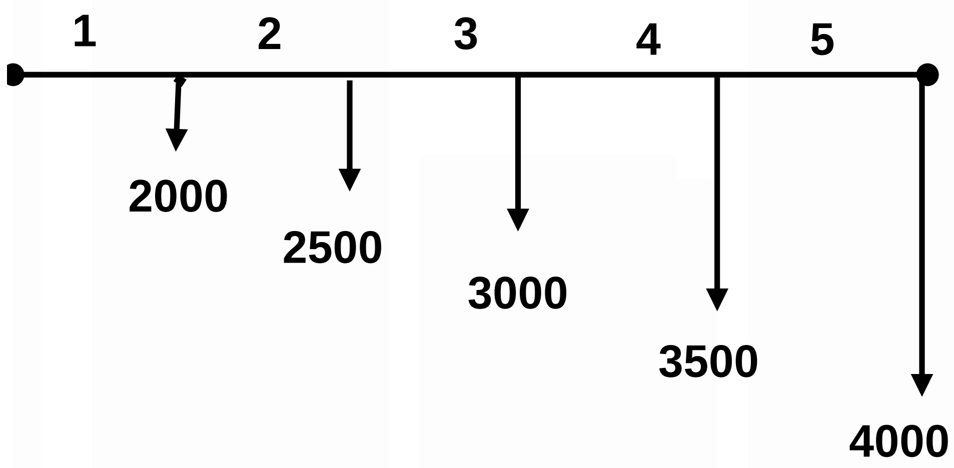
Table

(A/G; i; n) est donné par **la table**

(1/i) [1– n(A/F)]

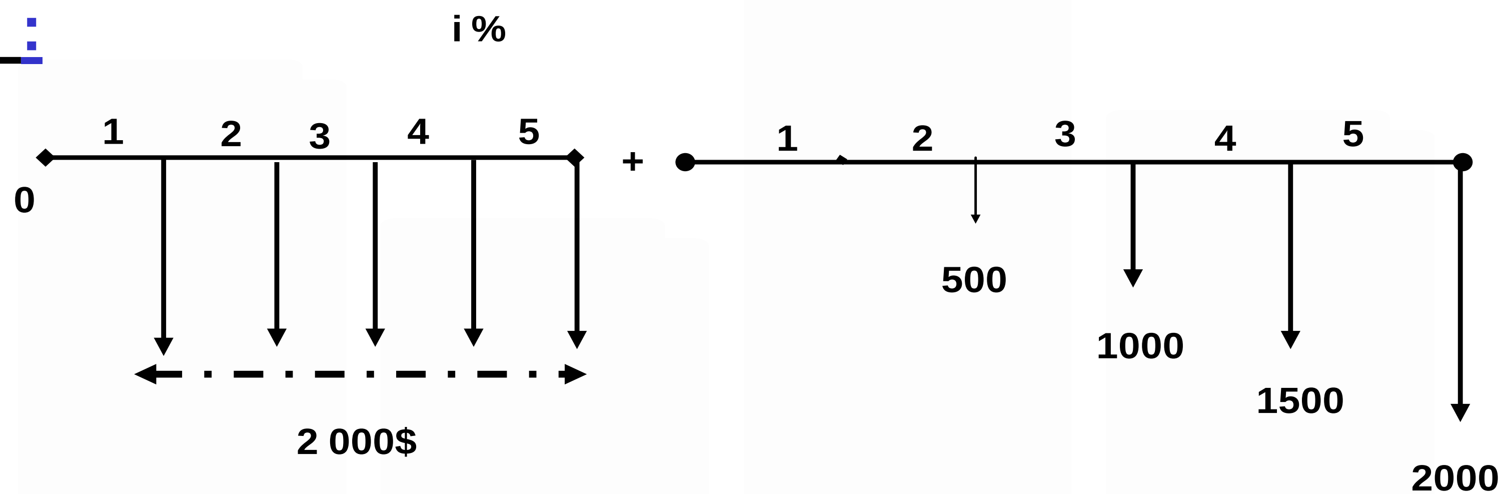
Gradient arithmétique (Exemple)

Les coûts d'entretien d'un équipement s'établissent comme suit (taux = 12%):



Gradient arithmétique (Exemple)

Ou :



P =	**A(P/A;12%;5)**	**+**	**G(P/G;12%;5)**
=	**2 000 $ x 3.6048**	**+**	**500 x 6.3970**
=	**10 040 $**		

(1/i) [(F/A) – n]

F =	**A(F/A;12%; 5)**	**+**	**G(F/G;12%;5)**
=	**2 000 $ x 6.3528**	**+**	**500 (F/P, 12%, 5)x(P/G;12%;5)**
=	**2 000 $ x 6.3528**	**+**	**500 x 1.7623 x 6.3970**
=	**18 342 $**		

Gradient géométrique: facteur d’actualisation

Trouver un facteur **(P/A;g;i;n)** qui permettra de convertir les flux monétaires capitalisés en une valeur actualisée unique en temps **t=0**

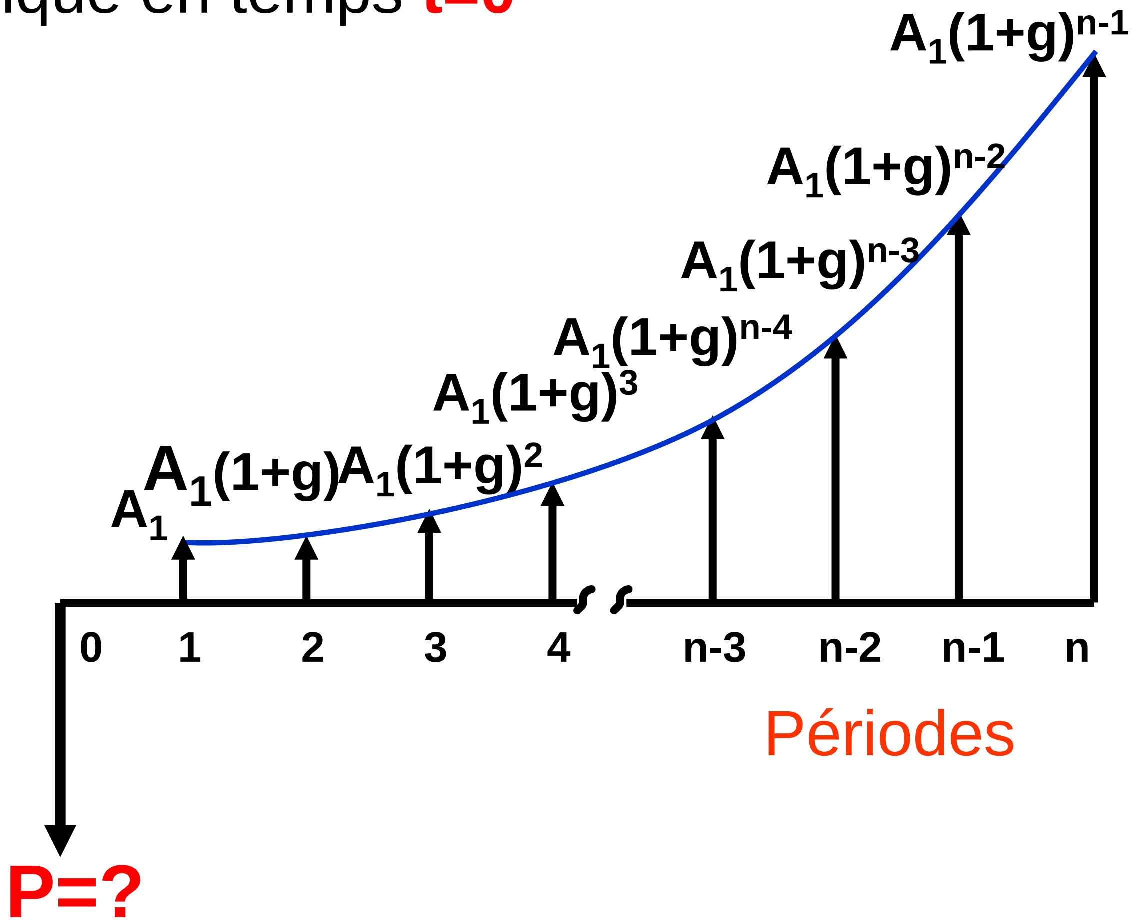
$-Si \;\; i \neq g, \;\; alors$

$$P = A_1\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}\right]$$

$$= A_1(P/A_1;g;i;n)$$

$-Si \;\; i = g \;\; , \;\; \text{alors}$

$$P = \frac{nA_1}{1+i}$$

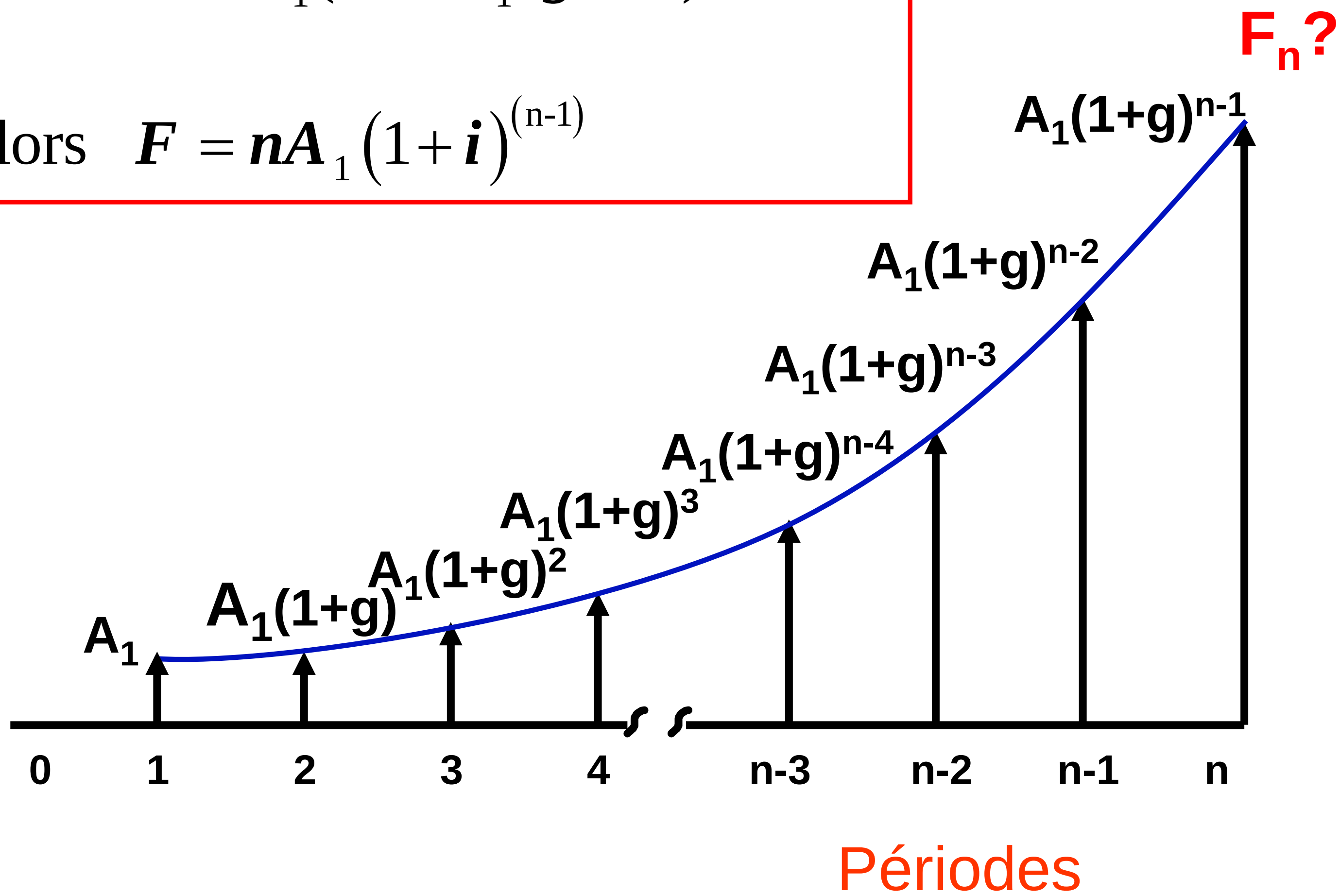


GRADIENT GÉOMÉTRIQUE: FACTEUR DE CAPITALISATION

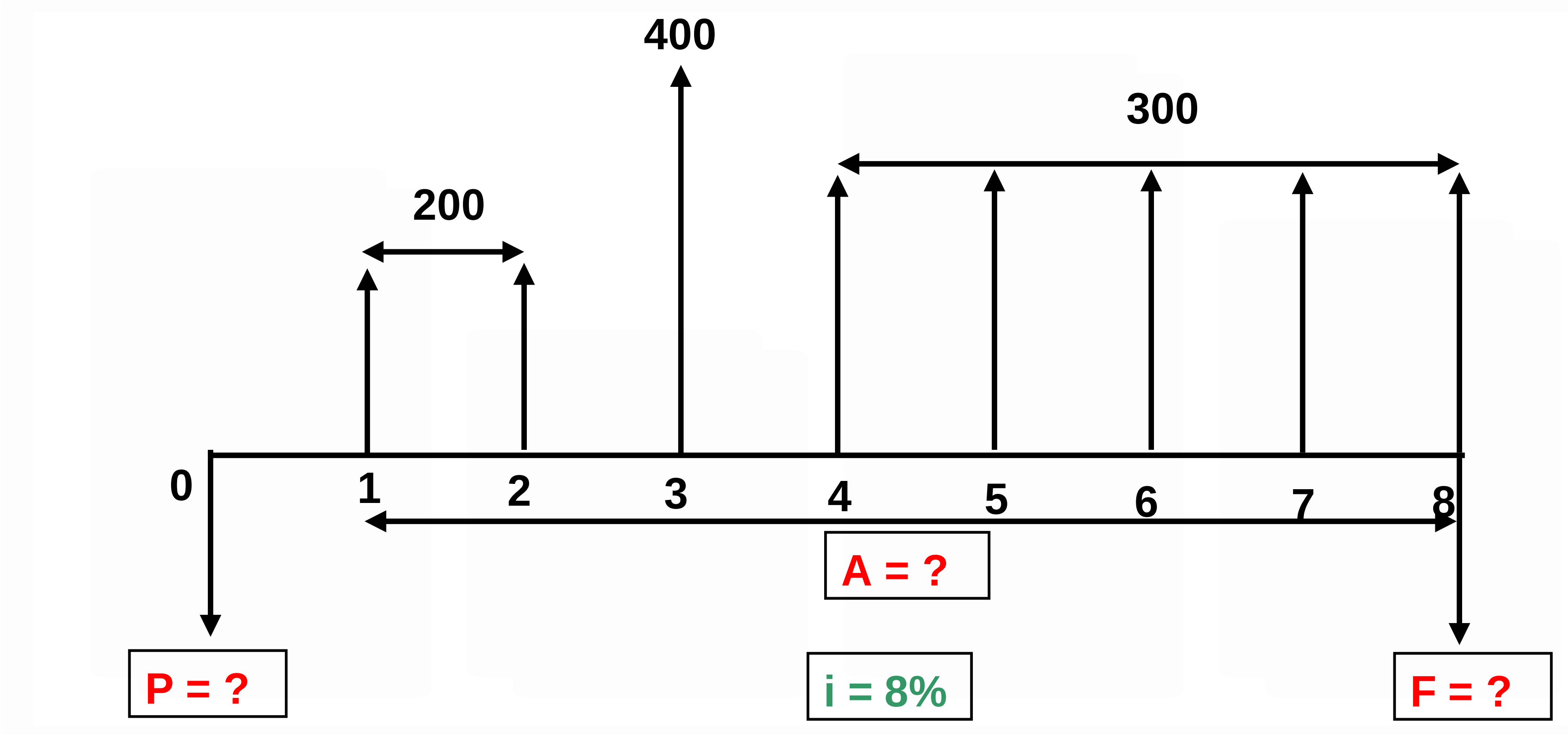
$$-Si\ \ \mathrm{i} \neq g,\ alors\ \ F = A_1\left[\frac{(1+i)^n - (1+g)^n}{i-g}\right]$$

$$= A_1(F/A_1; g; i; n)$$

$$-Si\ \ g = i\ ,\ \ \text{alors}\ \ F = nA_1(1+i)^{(\text{n-1})}$$



Exemple d'application



P = 1 625$

F = 3 008$

A = 283$

Le taux de rendement acceptable minimum (TRAM)

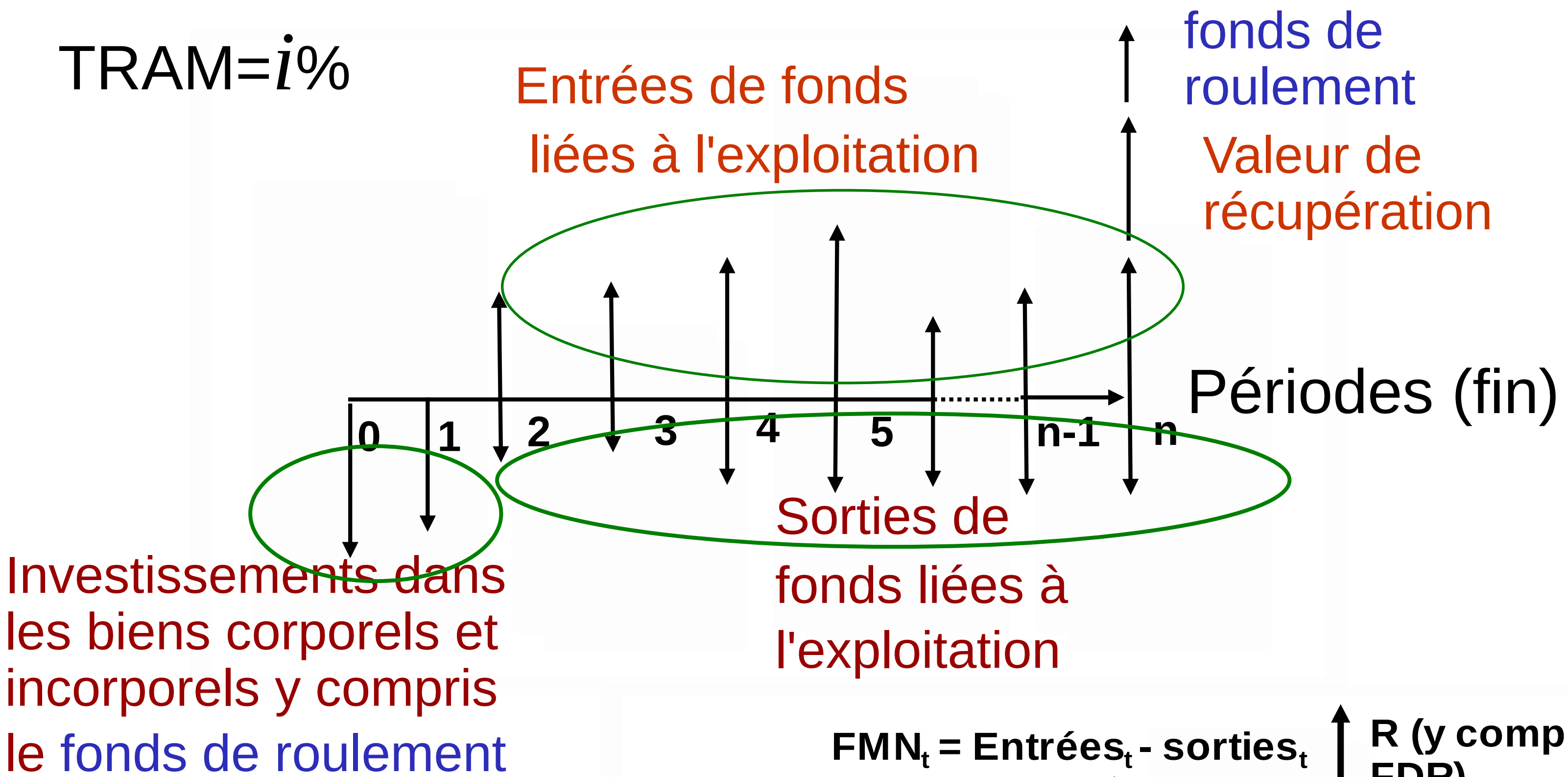
- Le TRAM est établi par les gestionnaires financiers d'une entreprise.
- Le TRAM s'exprime en pourcentage.
- On estime le TRAM à partir du coût moyen pondéré du capital de l'entreprise provenant de toutes les sources confondues.
- La plupart des projets, voire tous, devraient procurer un taux de rendement égal ou supérieur au TRAM établi.
- TR de l'entreprise > TRAM > coût du capital, où TR est le taux de rendement
- Le TRAM devrait permettre:
  - d'absorber le **coût du capital**;
  - d'absorber ou d'amortir les **aspects inflationnistes** perçus;
  - de tenir compte du **risque**;
  - de tenir compte d'une **marge bénéficiaire.**

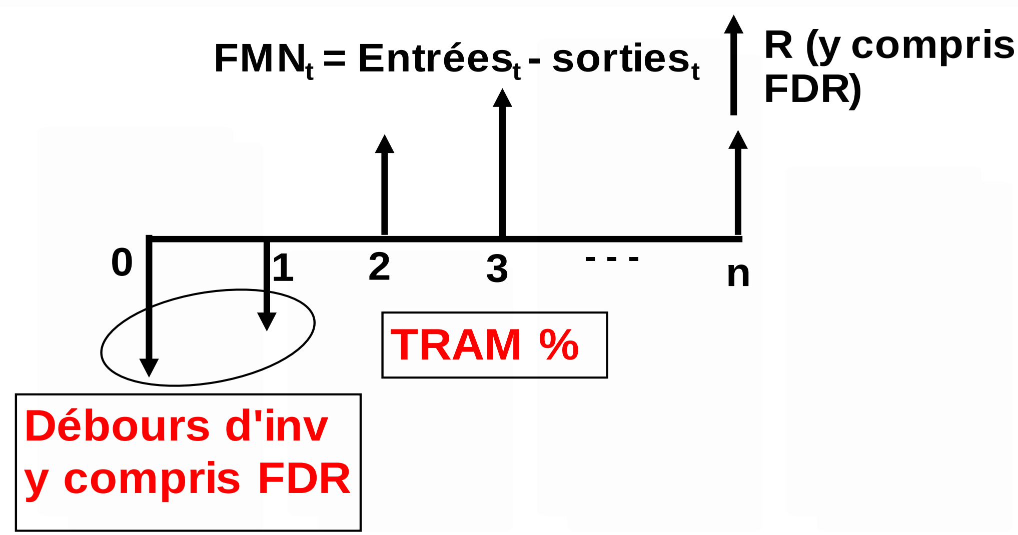
Les flux monétaires : estimations et diagrammes

- Définition des termes
  - Encaissements (recettes): rentrées de fonds de l'entreprise
  - Décaissements (débours) : sorties de fonds de l'entreprise
- Flux monétaires nets (**FMN**)
  - Encaissements – décaissements
- Convention pour analyse : **fin de période**
  - On considère que les flux monétaires se produisent à la fin d'une période (d'intérêt) donnée.

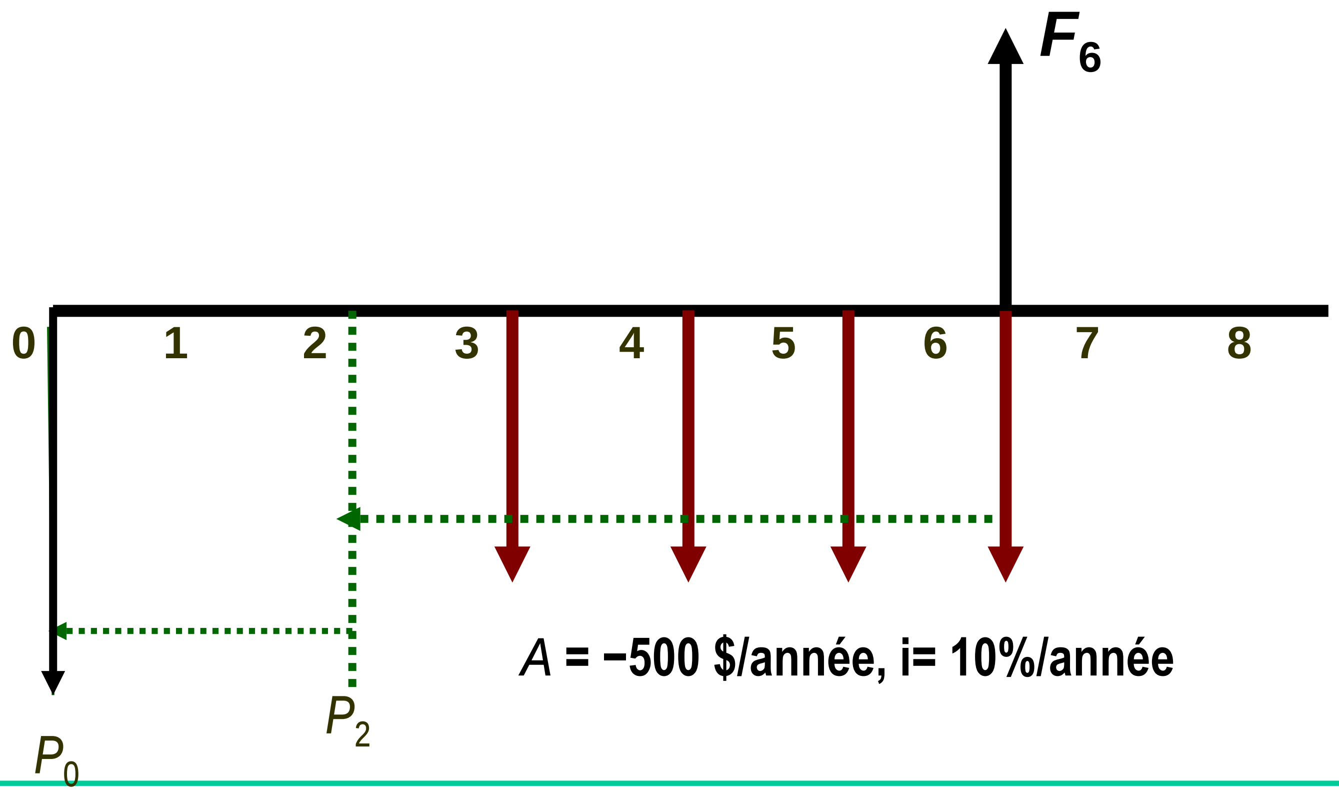
ÉLÉMENTS DES FLUX MONÉTAIRES

TRAM=i%





Exemples de valeurs *P* et *F* d'une série constante décalée



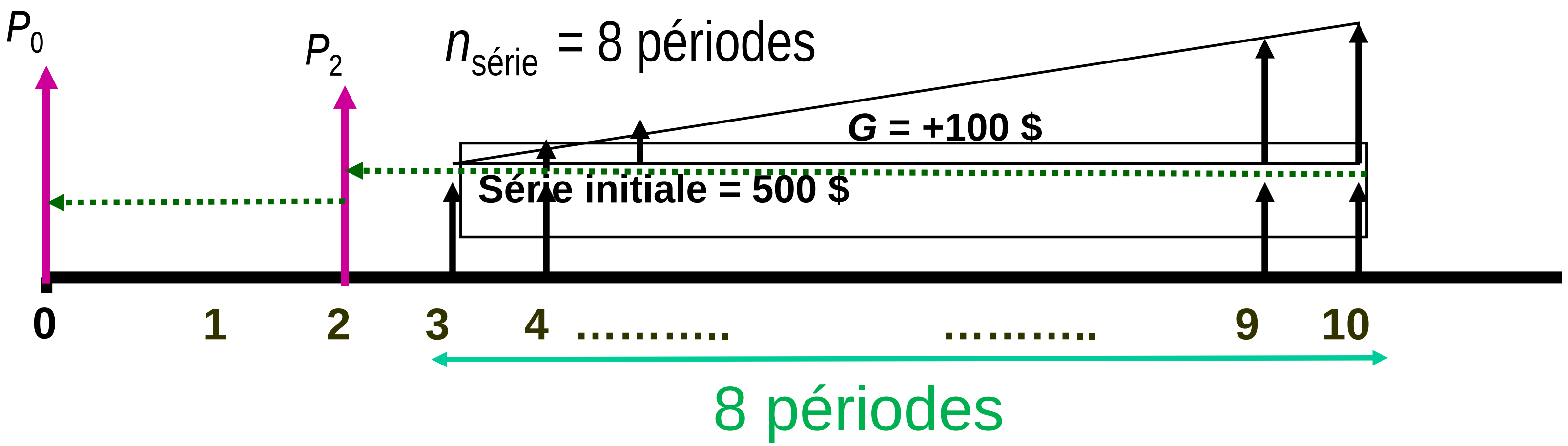
Valeur *F* de cette série située à l'année $t = 6$:

$F_6 = -500(F/A;10\%;4) = -500x4{,}64100 = -2\ 320{,}5\$$

Valeur P_0 de cette série située à l'année 0 :

$P_0 = \mathbf{-500}(P/A;10\%;4)(P/F;10\%;2) = -500x3{,}16987x0{,}82645 = 1\ 309{,}87\$$

Série arithmétique de gradient G décalée: exemple



- **VA l'annuité 500**:

$P_0 = 500(P/A;10\%;8)(P/F;10\%;2)$

$= 500(5{,}3349)\ (0{,}8264) = \mathbf{2\ 204{,}38\ \$}$

- **VA du gradient 100**:

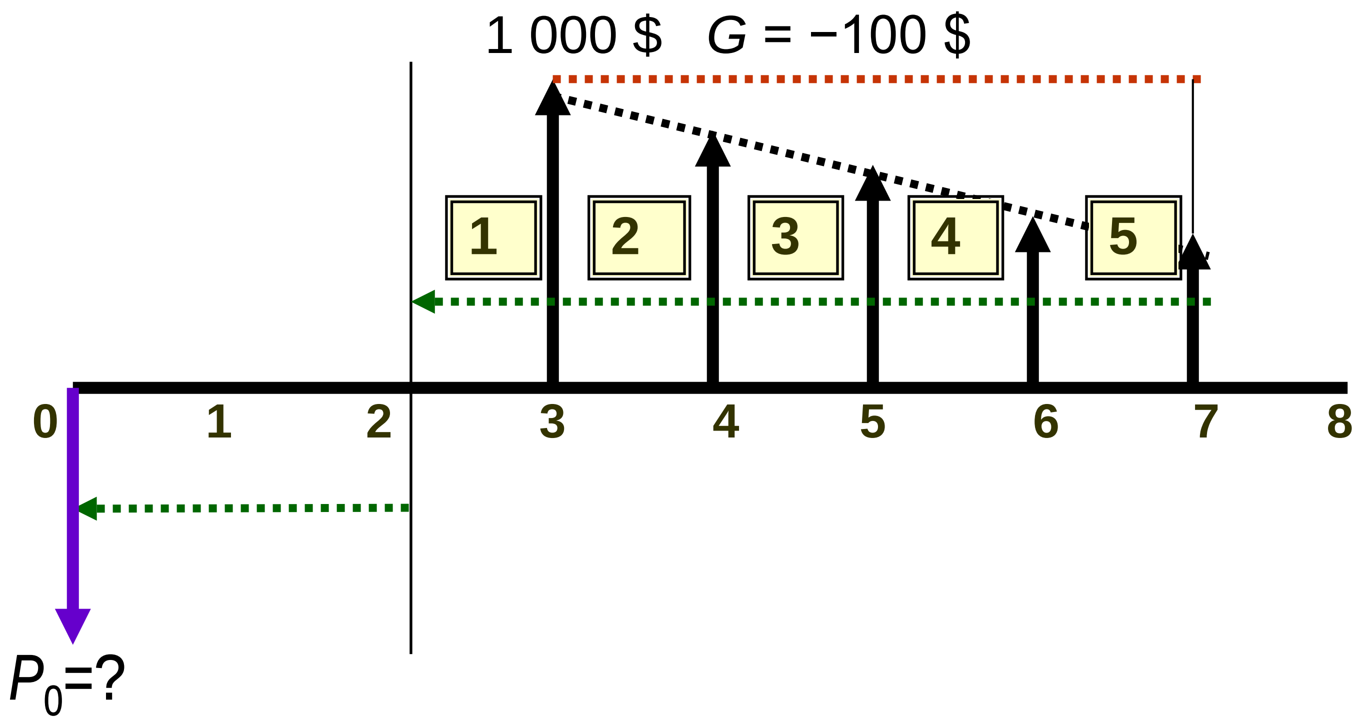
$P_0 = 100\ \$(P/G;10\%;8)\ )(P/F;10\%;2)$

$= 100\ \$(16{,}0287)\ (0{,}8264) = \mathbf{1\ 324{,}61\ \$}$

- **VA totale:**

$P = 2\ 204{,}38\ \$ + 1\ 324{,}61\ \$ = \underline{\mathbf{3\ 528{,}99\ \$}}$

Séries arithmétiques de gradient *G* décalées et décroissantes: exemple



SOLUTION

$$P_0 = \left[1\,000\ \$(P/A;10\%;5) - 100\ \$(P/G;10\%;5)\right](\mathrm{P/F};10\%;2)$$

$$P_0 = \left[1\,000\ \$(3{,}7908) - 100\ \$(6{,}8618)\right](0{,}8264) = \underline{\mathbf{2\,565{,}65\ \$}}$$

TAUX D'INTÉRÊT VARIABLES

- Cas de **montants différents**: calcul de la valeur actualisée **P**

$$P = F_1(P/F;i_1;1) + F_2(P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1) + \ldots$$
$$+ F_n(P/F;i_n;1)(P/F;i_{(n-1)};1) \ldots (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1)$$

- Cas de **montant unique**: calcul de la valeur actualisée **P**

$$P = F_n(P/F;i_n;1)(P/F;i_{(n-1)};1) \ldots (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1)$$

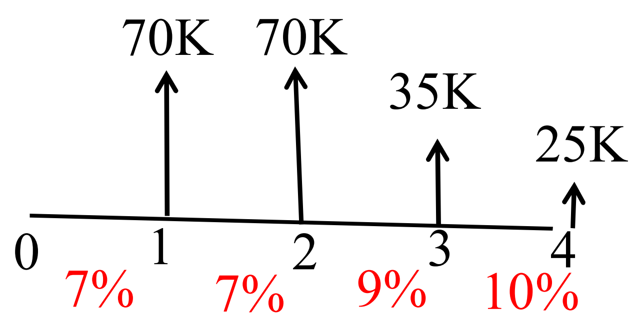
- Calcul de **l'annuité équivalente** (**A**): trouver d'abord la valeur P à l'aide de l'une des deux dernières équations précédentes, puis remplacer chaque symbole $\mathbf{F_t}$ par le symbole **A**.

$$A = P \,/\, [\,(P/F;i_1;1) + (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1) + \ldots$$
$$+ (P/F;i_n;1)(P/F;i_{(n-1)};1) \ldots (P/F;i_2;1)(P/F;i_1;1)\,]$$

TAUX D'INTÉRÊT VARIABLES: exemple 4.12

Déterminez la valeur actualisée **P** et la valeur équivalente **A** des flux monétaires nets (FMN) suivants en considérant les taux indiqués.

Année	**1**	**2**	**3**	**4**
FMN	70 000	70 000	35 000	25 000
Taux annuel	7 %	7 %	9 %	10 %



Solution

P = [70 000(P/A;7 %;2) + 35 000(P/F;9 %;1)(P/F;7 %;2)
+ 25 000(P/F;10 %;1)(P/F;9 %;1)(P/F;7 %;2)]

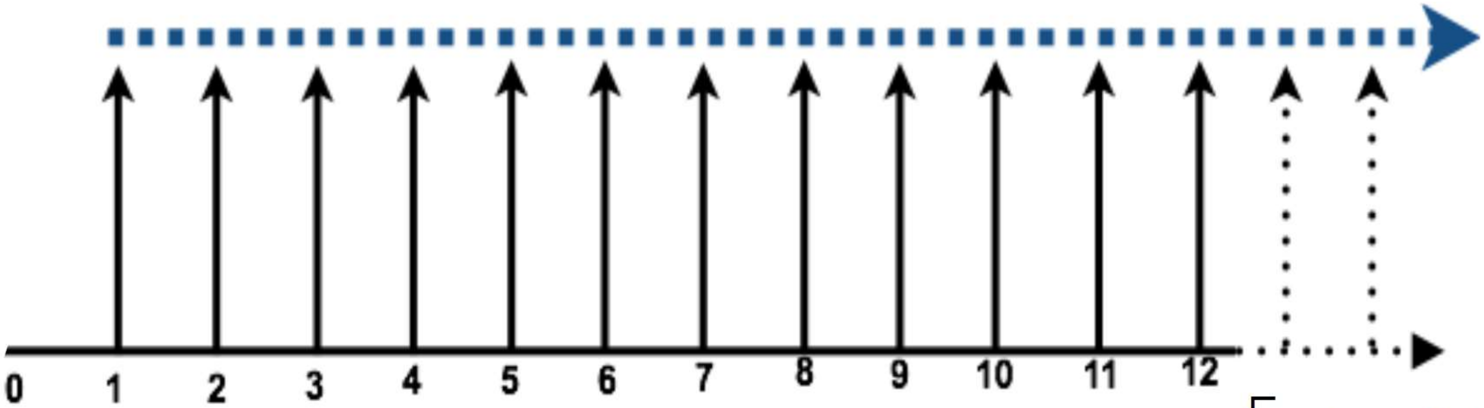
= [70 000(1,8080) + 35 000(0,8013) + 25 000(0,7284)]

= **172 816 $**

A: 172 816 $ = A(1,8080 + 0,8013 + 0,7284)

A = 172 816 $ / 3,3377 = 51 777$

Le facteur *P*/*A* avec *n* tendant vers l'infini



Facteur *P*/A : $$P = A(P/A;i;n) = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Diviser par $(1+i)^n$: $$P = A\left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right]$$

Quand *n* tend vers +∞, on aura : $\boxed{\text{Coût immobilisé (CI)}=P=\frac{A}{i}}$

Montant annuel pour toujours : $\boxed{A = Pi = (CI)i}$

Exemple sur le coût immobilisé 5.4

Paramètres du problème

Le coût du système à l'installation est de **150 000 $** et les coûts supplémentaires sont de **50 000 $ après 10 ans**.

Les frais de maintenance annuels du logiciel sont de **5 000 $ les 4 premières années, et de 8 000 $ par la suite.**

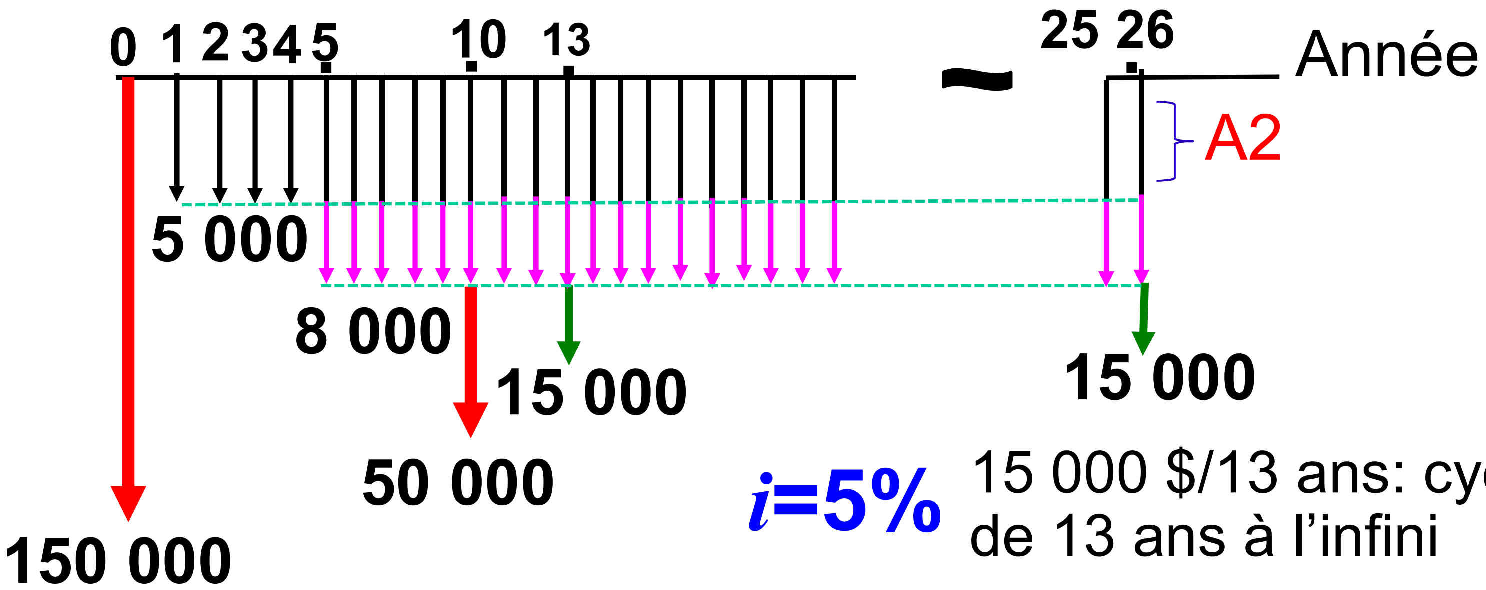
On prévoit également un **coût récurrent de 15 000 $ pour des mises à niveau importantes effectuées tous les 13 ans.** Les calculs sont basés sur i **= 5 %** par année pour les fonds de la municipalité.

Déterminez :

1. la valeur actualisée **(P)** des coûts à 5 %;
2. le montant annuel ($/année) **(A)** que devra débourser la municipalité .

Exemple 5.4 - solution

**



i=5%

15 000 $/13 ans: cycle de 13 ans à l'infini

A_1 = 15 000(A/F;5%;13) = **847,00 $**

A_2 = **5 000 $**

CI_1 = 150 000 + 50 000(P/F;5%;10) =	**180 695 $**
CI_2 = (3 000/0,05)(P/F;5%;4) =	**49 362 $**
CI_3 = $(A_1 + A_2)/i$ = (847 + 5 000)/0,05 =	**116 940 $**

CI_T = P= 180 695 $ + 49 362 $ + 116 940 $ = **346 997 $**

A = Pi=CI_T (i) =346 997$ x 5%= **17 350 $/an pour toujours**

TRAVAIL À FAIRE

- **Problèmes: Économie pour ingénieurs**:

  1.10, 1.11, 1.20, 1.32, 1.42

  2.1, 2.2, 2.6, 2.13, 2.18, 2.21, 2.29, 2.34, 2.44, 2.45, 2.61

  3.2, 3.4, 3.16, 3.21, 3.23, 3.33, 3.45, 3.50, 3.55
- **Lire chapitres 4, 5, 10 et 14** : **Économie pour ingénieurs**