CK0048 - Métodos Numéricos II

Tarefa 10: Autovalores e Autovetores 01

Grupo 2

Junho 13, 2020

Primeiramente, serão calculados os autovalores para que só então os autovetores sejam calculados. Portanto, abaixo está esclarecida a forma utilizada:

Seja A a matriz original, x um vetor e λ um autovalor,

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

O x será colocado em evidência, porém para isso será necessário multiplicá-lo pela matriz identidade para que possa ser efetuada a operação em matrizes:

$$(A - I\lambda)x = 0 \tag{1}$$

Visto isso, para que o valor de λ possa ser encontrado é necessário fazer:

$$det(A - I\lambda) = 0$$

Que resultará em uma equação cujas raízes determinarão os possíveis valores de λ. Feito isso é possível plugar os valores individuais de *lambda* na equação (1) e obter, a partir de um sistema, o autovetor correspondente ao autovalor.

A lógica explicada até agora será utilizada nos itens que seguem:

1 M1=$\{\{5,2,1\},\{2,3,1\},\{1,1,2\}\}$

1.1 (A - Iλ) x = 0

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2 det(A - Iλ) = 0

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda + 18 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 - \sqrt{7}$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = 4 + \sqrt{7}$$

1.3 Aplicando cada raíz acima individualmente na equação do item 1.1

1.3.1 para $\lambda = 4 - \sqrt{7}$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 & 1 \\ 2 & -1+\sqrt{7} & 1 \\ 1 & 1 & -2+\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1+\sqrt{7})x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + (-1+\sqrt{7})x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + (-2+\sqrt{7})x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$
$$x_3 = 1$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}, 1)$

1.3.2 para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\\
x_1 + x_2 + 0x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema acima,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1\\
x_2 &= -x_1\\
x_3 &= -x_1
\end{aligned}
$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, -1, -1)$

1.3.3 para $\lambda = 4 + \sqrt{7}$

$$
\begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} & 2 & 1 \\ 2 & -1-\sqrt{7} & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
(1-\sqrt{7})x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\\
2x_1 + (-1-\sqrt{7})x_2 + x_3 &= 0\\
x_1 + x_2 + (-2-\sqrt{7})x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema acima,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3+\sqrt{7}}{2}\\
x_2 &= \frac{1+\sqrt{7}}{2}\\
x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}, 1)$

1.4 Relação de autovalores e autovetores

$$
\begin{aligned}
&(4-\sqrt{7}, (\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}, 1))\\
&(2, (1, -1, -1))\\
&(4+\sqrt{7}, (\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}, 1))
\end{aligned}
$$

2 M2=$\{\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}, \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\}, \{-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}\}$

2.1 (A - Iλ) x = 0

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2 det(A - Iλ) = 0

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 1$$

2.3 Aplicando cada raíz acima individualmente na equação do item 2.1

2.3.1 para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = x_1$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, 1, 1)$

2.3.2 para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = -x_1 - x_2$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, 1, -2)$

2.4 Relação de autovalores e autovetores

$$(-1, (1, 1, 1))$$
$$(1, (1, 1, -2))$$

3 M3=$\{\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}, \{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\}, \{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}\}$

3.1 (A - Iλ) x = 0

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 det(A - Iλ) $= 0$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 1$$

3.3 Aplicando cada raíz acima individualmente na equação do item 3.1

3.3.1 para $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = x_1$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, 1, 1)$

3.3.2 para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = -x_1 - x_2$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, 1, -2)$

3.4 Relação de autovalores e autovetores

$$(0, (1, 1, 1))$$
$$(1, (1, 1, -2))$$

4 M4=$\{\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}\}$

4.1 (A - Iλ) x $= 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.2 det(A - Iλ) $= 0$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 1$$

4.3 Aplicando cada raíz acima individualmente na equação do item 4.1

4.3.1 para $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = -x_1 - x_2$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, 1, -2)$

4.3.2 para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0$$

Resolvendo o sistema acima,

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = x_1$$

Logo, um autovetor ligado a esse autovalor é: $(1, 1, 1)$

4.4 Relação de autovalores e autovetores

$$(0, (1, 1, -2))$$
$$(1, (1, 1, 1))$$