CK0048 - MÉTODOS NUMÉRICOS II

Tarefa 20: Método dos Elementos Finitos

Gabriel Camurça Fernandes de Sousa - 420549

Lívia Belizario Rocha - 418304

Faça o que se pede.

1. Resolver o PVC1 com N = 8. Compare os seus resultados com aqueles apresentados na Tabela 1, ampliando a tabela com os valores obtidos e os erros relativos à solução exata.

- **Divisão do domínio em N partes (elementos).**

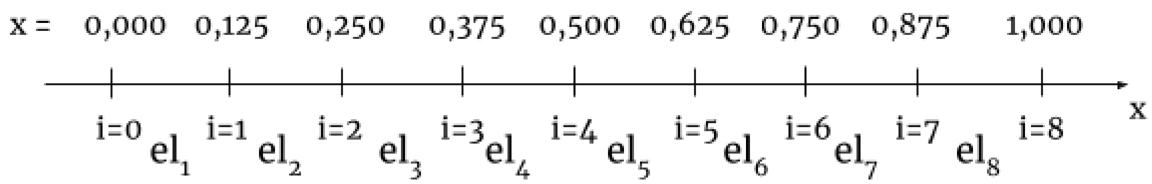
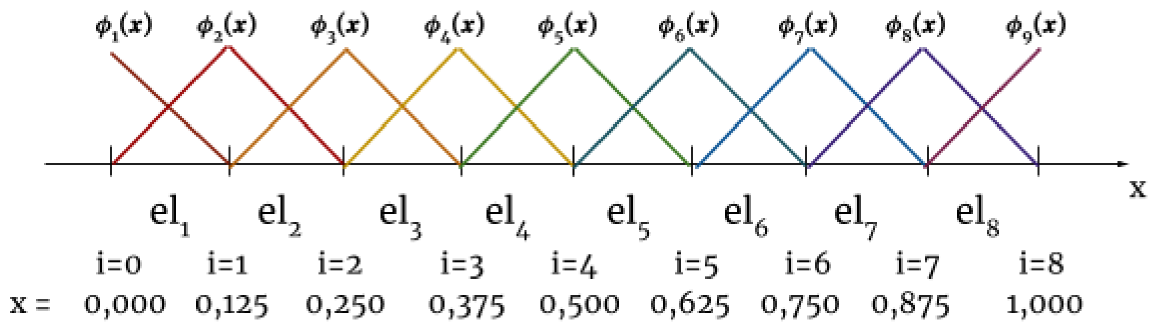


Figura 1. Divisão do domínio [0, 1] em oito partes iguais com nós nas posições i

- **Definição das funções de interpolação, $\phi_i(x)$ para cada nó i.**



- **Definição da função que representa a solução aproximada.**

<u>Utilizaremos a formulação fraca, portanto temos que utilizar y^h e w pertencentes à U e W.</u>

Baseado na figura do passo acima, podemos reescrever y^h a partir das funções de interpolação, como:

(1) $y^h(x) = \sum_{i=1}^{9} \phi_i(x)y_i = \phi_1(x)y_1 + \phi_2(x)y_2 + \phi_3(x)y_3 + \phi_4(x)y_4 + \phi_5(x)y_5 + \phi_6(x)y_6 + \phi_7(x)y_7 + \phi_8(x)y_8 + \phi_9(x)y_9.$

Pelas condições de Dirichlet temos que são especificados:

$y_1 = 0$, $y_9 = 1$

- **Definição da função que representa a ponderação.**

Podemos escrever a função de ponderação como:

(2) $w(x) = \sum_{i=1}^{9} \phi_i(x)w_i = \phi_1(x)w_1 + \phi_2(x)w_2 + \phi_3(x)w_3 + \phi_4(x)w_4 + \phi_5(x)w_5 + \phi_6(x)w_6 + \phi_7(x)w_7 + \phi_8(x)w_8 + \phi_9(x)w_9.$

Também pelas condições de Dirichlet:

$w_1 = 0$, $w_9 = 0$

- **Substituição de $u,(x)$ e $w(x)$ no PVC.**

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2y^h(x)}{dx^2} - y^h(x)\right)w(x)dx = \int_0^1 \frac{d^2y^h(x)}{dx^2}w(x)dx - \int_0^1 y^h(x)w(x)dx = 0$$

A integral do PVC está definida sobre o domínio D, que é [0,1] nesse caso.

Porém não devemos prosseguir com a fórmula acima; devemos primeiro retirar da equação a formatação em 'derivada segunda', ficando da seguinte forma:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2y^h(x)}{dx^2} - y^h(x)\right)w(x)dx = -\int_0^1 \frac{dy^h(x)}{dx}\frac{dw(x)}{dx}dx - \int_0^1 y^h(x)w(x)dx = 0$$

Substituindo (1) e (2) na equação acima e organizando o resultado na forma de uma matriz, tem-se

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 \end{vmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \int_0^1 \phi_1'\phi_1'dx & \int_0^1 \phi_1'\phi_2'dx & \dots & \int_0^1 \phi_1'\phi_8'dx & \int_0^1 \phi_1'\phi_9'dx \\ \int_0^1 \phi_1'\phi_1'dx & \int_0^1 \phi_1'\phi_2'dx & \dots & \int_0^1 \phi_1'\phi_8'dx & \int_0^1 \phi_1'\phi_9'dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 \phi_8'\phi_1'dx & \int_0^1 \phi_8'\phi_2'dx & \dots & \int_0^1 \phi_8'\phi_8'dx & \int_0^1 \phi_8'\phi_9'dx \\ \int_0^1 \phi_9'\phi_1'dx & \int_0^1 \phi_9'\phi_2'dx & \dots & \int_0^1 \phi_9'\phi_8'dx & \int_0^1 \phi_9'\phi_9'dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} \right) +$$

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 \end{vmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \int_0^1 \phi_1\phi_1dx & \int_0^1 \phi_1\phi_2dx & \dots & \int_0^1 \phi_1\phi_8dx & \int_0^1 \phi_1\phi_9dx \\ \int_0^1 \phi_1\phi_1dx & \int_0^1 \phi_1\phi_2dx & \dots & \int_0^1 \phi_1\phi_8dx & \int_0^1 \phi_1\phi_9dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 \phi_8\phi_1dx & \int_0^1 \phi_8\phi_2dx & \dots & \int_0^1 \phi_8\phi_8dx & \int_0^1 \phi_8\phi_9dx \\ \int_0^1 \phi_9\phi_1dx & \int_0^1 \phi_9\phi_2dx & \dots & \int_0^1 \phi_9\phi_8dx & \int_0^1 \phi_9\phi_9dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} \right) =$$

0

Nessa equação, todos os termos da linha 1 e da linha 9 da matriz são multiplicados por 0 e são eliminadas. Assim, a matriz resultante tem suas colunas 1 e 9 multiplicadas por 0 e 1 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} \int_0^{0.25} \phi_2'\phi_2'dx & \int_{0.125}^{0.25} \phi_2'\phi_3'dx & & & & & \\ \int_{0.125}^{0.25} \phi_3'\phi_2'dx & \int_{0.125}^{0.375} \phi_3'\phi_3'dx & \int_{0.25}^{0.375} \phi_3'\phi_4'dx & & & & \\ & \int_{0.25}^{0.375} \phi_4'\phi_3'dx & \int_{0.25}^{0.5} \phi_4'\phi_4'dx & \int_{0.375}^{0.5} \phi_4'\phi_5'dx & & & \\ & & \int_{0.375}^{0.5} \phi_5'\phi_4'dx & \int_{0.375}^{0.625} \phi_5'\phi_5'dx & \int_{0.5}^{0.625} \phi_5'\phi_6'dx & & \\ & & & \int_{0.5}^{0.625} \phi_6'\phi_5'dx & \int_{0.5}^{0.75} \phi_6'\phi_6'dx & \int_{0.625}^{0.75} \phi_6'\phi_7'dx & \\ & & & & \int_{0.625}^{0.75} \phi_7'\phi_6'dx & \int_{0.625}^{0.875} \phi_7'\phi_7'dx & \int_{0.75}^{0.875} \phi_7'\phi_8'dx \\ & & & & & \int_{0.75}^{0.875} \phi_8'\phi_7'dx & \int_{0.75}^{1} \phi_8'\phi_8'dx \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^{0.25} \phi_2\phi_2dx & \int_{0.125}^{0.25} \phi_2\phi_3dx & & & & & \\ \int_{0.125}^{0.25} \phi_3\phi_2dx & \int_{0.125}^{0.375} \phi_3\phi_3dx & \int_{0.25}^{0.375} \phi_3\phi_4dx & & & & \\ & \int_{0.25}^{0.375} \phi_4\phi_3dx & \int_{0.25}^{0.5} \phi_4\phi_4dx & \int_{0.375}^{0.5} \phi_4\phi_5dx & & & \\ & & \int_{0.375}^{0.5} \phi_5\phi_4dx & \int_{0.375}^{0.625} \phi_5\phi_5dx & \int_{0.5}^{0.625} \phi_5\phi_6dx & & \\ & & & \int_{0.5}^{0.625} \phi_6\phi_5dx & \int_{0.5}^{0.75} \phi_6\phi_6dx & \int_{0.625}^{0.75} \phi_6\phi_7dx & \\ & & & & \int_{0.625}^{0.75} \phi_7\phi_6dx & \int_{0.625}^{0.875} \phi_7\phi_7dx & \int_{0.75}^{0.875} \phi_7\phi_8dx \\ & & & & & \int_{0.75}^{0.875} \phi_8\phi_7dx & \int_{0.75}^{1} \phi_8\phi_8dx \end{pmatrix}$$

$$
\cdot \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_{0.875}^{1} \phi_8' \phi_9' dx + \int_{0.875}^{1} \phi_8 \phi_9 dx \end{pmatrix}
$$

- **Montagem alternativa do sistema de equações algébricas**

$$
(21)\ \mathbf{K}_i = \left(\begin{bmatrix} \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{in} \bar{\phi}'_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{in} \bar{\phi}'_{fin} \mathrm{d}x \\ \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{fin} \bar{\phi}'_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{fin} \bar{\phi}'_{fin} \mathrm{d}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{in} \bar{\phi}_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{in} \bar{\phi}_{fin} \mathrm{d}x \\ \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{fin} \bar{\phi}_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{fin} \bar{\phi}_{fin} \mathrm{d}x \end{bmatrix} \right)
$$

$$
(22)\ \mathbf{K}_i = \left(\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \overbrace{N'_{in} \frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} \overbrace{N'_{in} \frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} \overbrace{\frac{L_i}{2}}^{|J|} \mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} \overbrace{N'_{in} \frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} \overbrace{N'_{fin} \frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{fin}(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} \overbrace{\frac{L_i}{2}}^{|J|} \mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1} N'_{fin} \frac{2}{L_i} N'_{in} \frac{2}{L_i} \frac{L_i}{2} \mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} N'_{fin} \frac{2}{L_i} N'_{fin} \frac{2}{L_i} \frac{L_i}{2} \mathrm{d}s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} N_{in} N_{in} \frac{L_i}{2} \mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} N_{in} N_{fin} \frac{L_i}{2} \mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1} N_{fin} N_{in} \frac{L_i}{2} \mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} N_{fin} N_{fin} \frac{L_i}{2} \mathrm{d}s \end{bmatrix} \right)
$$

$$
L_i = \frac{1}{8}
$$

$$
N_{in} = \frac{1-s}{2}, N_{fin} = \frac{1+s}{2}
$$

$$
N_{in}' = \frac{-1}{2}, N_{fin}' = \frac{1}{2}
$$

$$
\frac{2}{L_i} = \frac{ds}{dx}
$$

$$
K_i = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{48} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}
$$

$$
K_i = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{48} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}
$$

$$K_i = \begin{pmatrix} \frac{193}{24} & \frac{383}{-48} \\ \frac{-383}{48} & \frac{193}{24} \end{pmatrix}$$

$$K_i = \begin{pmatrix} 8.04 & -7.98 \\ -7.98 & 8.04 \end{pmatrix}$$

Na montagem da matriz global,

$$K = \begin{pmatrix} 16.08 & -7.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.98 & 16.08 \end{pmatrix}$$

Vetor do lado direito

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_{0.875}^{1} \phi_8' \phi_9' dx + \int_{0.825}^{1} \phi_8 \phi_9 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.98 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos escrever o sistema de equações como:

$$\begin{pmatrix} 16.08 & -7.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.98 & 16.08 & -7.98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.98 & 16.08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y2 \\ y3 \\ y4 \\ y5 \\ y6 \\ y7 \\ y8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.98 \end{pmatrix}$$

- **Resolução do sistema de equações algébricas.**

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10728145041415268 \\ 0.21617615572175125 \\ 0.3283216302883234 \\ 0.44540427222765216 \\ 0.5691847227719078 \\ 0.7015243420796508 \\ 0.8444131996141552 \end{pmatrix}$$

Valor Exato	**Valor Obtido**	**Erro relativo**
0.10664197408831186	0.10728145041415268	0.0059607352750375
0.21495239978860506	0.21617615572175125	0.005660920044860
0.3266258322317176	0.3283216302883234	0.0051650512794926
0.443409441985037	0.44540427222765216	0.004478695798399
0.5671303501574106	0.5691847227719078	0.0036093249384706
0.6997242143587125	0.7015243420796508	0.0025660231769034
0.8432655127515679	0.8444131996141552	0.00135915315287785