CK0048 - Métodos Numéricos II

Tarefa 08: Usar quadratura de Gauss-Legendre para o cálculo da área de um superfície

Grupo 2

Maio 20, 2020

Problema 2: A região $U \in xy$ é $U = \left\{(x, y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1\right\}$

Antes de começar a resolução do problema, é possível ver que a equação em questão se trata de uma elipse com $a = 40$ e $b = 40$ pelos denominadores de x e y, ou seja, é um círculo.

Diferentemente do Problema 1, não há um intervalo de integração claro e bem definido logo de início. A fim de remediar isso será utilizada a técnica provida pelo arquivo da Aula 15 para mudança de variáveis

1) Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse

Fazendo a transformação de pontos (x, y) para um sistema de coordenadas onde $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 0, 2\pi$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot b \cdot \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot 40 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

Vendo agora a equação 'principal' para o cálculo da área:

$$\begin{aligned} A = \int_S \mathrm{d}S = \int_U \sqrt{(0.4 \cdot x)^2 + (0.4 \cdot y)^2 + 1}\mathrm{d}A \\ = \int_\Omega \sqrt{(0.4 \cdot x)^2 + (0.4 \cdot y)^2 + 1} \cdot \mid J \mid \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\mid J \mid$ é:

$$\begin{aligned} \mid J \mid &= det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\ &= \alpha \cdot a \cdot b \\ &= 1600\alpha \end{aligned}$$

Porém a representação de x e y agora é diferente e o valor de $\mid J \mid$ foi mostrado, logo é possível desenvolver a equação (1):

$$
\begin{aligned}
A = & \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{(0.4 \cdot \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta)^2 + (0.4 \cdot \alpha \cdot 40 \cdot \sin\beta)^2 + 1} \cdot 1600\alpha \ \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\alpha \\
= & \ 53917.89051394733
\end{aligned}
$$

2) Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1

Fazendo a transformação de pontos (x, y) para um sistema de coordenadas onde $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 0, 2\pi$:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot b \cdot \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot 40 \cdot \sin\beta \end{pmatrix} \tag{2}
$$

onde o $\mid J \mid$ de (2) é:

$$
\begin{aligned}
\mid J \mid &= det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \cdot a \cdot b \\
&= 1600\alpha
\end{aligned}
$$

Realizando agora a mudança de coordenadas exigida para um intervalo de integração de -1 a 1:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot \alpha \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2} \cdot \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \alpha \\ \pi + \pi \cdot \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{2} \\ \pi\beta + \pi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

onde o $\mid J \mid$ de (3) é:

$$
\mid J \mid = det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2}
$$

Aplicando (3) em (2):

$$\begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \cdot (\frac{\alpha+1}{2}) \cdot \cos(\pi\beta+\pi) \\ 40 \cdot (\frac{\alpha+1}{2}) \cdot \sin(\pi\beta+\pi) \end{pmatrix}$$

Assim, podemos descrever a Área como:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{(0.4 \cdot \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot 40 \cdot \cos(\pi\beta+\pi))^2 + (0.4 \cdot \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot 40 \cdot \sin(\pi\beta+\pi))^2 + 1} \cdot 1600 \cdot \frac{\alpha+1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\, \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\alpha$$

$$A = 53917.9$$

3) Quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção

Deixando de lado agora a resolução analítica, é possível resolver a equação final do item anterior utilizando a quadratura de Gauss-Legendre

$$A = 1600 \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(w_i w_j \sqrt{(8 \cdot (\alpha_j+1) \cdot \cos(\pi\beta_i+\pi))^2 + (8 \cdot (\alpha_j+1) \cdot \sin(\pi\beta_i+\pi))^2 + 1} \cdot \frac{\alpha_j+1}{2} \right)$$

Na forma tabular:

(α_j, β_i)	$w_j w_i$	$g(\alpha_j,\beta_i) = \sqrt{(8\cdot(\alpha_j+1)\cdot\cos(\pi\beta_i+\pi))^2 + (8\cdot(\alpha_j+1)\cdot\sin(\pi\beta_i+\pi)^2+1} \cdot \frac{\alpha_j+1}{2}$	$w_i w_j g(\alpha_j,\beta_i)$	$*800\pi$
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$	0.23238488559	0.07172373012	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}$	4.03112887414	1.99068092550	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$	12.6279846873	3.89752613808	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}$	0.23238488559	0.11475796819	
$(0,0)$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}$	4.03112887414	3.18508948080	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}$	12.6279846873	6.23604182093	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$	0.23238488559	0.07172373012	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}$	4.03112887414	1.99068092550	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$	12.6279846873	3.89752613808	
			21.4557508573	53924.18341657691

$$A = 53924.18341657691$$