CK0048 - Métodos Numéricos II

Tarefa 04: Desenvolvimento da estimativa do erro para a fórmula aberta com polinômio de substituição de grau 2

Grupo 2

Abril 08, 2020

1 Resolvendo equações necessárias para Ea

Para a estimativa de erro, usaremos:

$$Ea = Ie - If \tag{1}$$

Primeiramente, vejamos o Ie :

$$Ie = \int_a^b f(x)dx = h\int_{-1}^{1} f(\bar{x} + \xi h)d\xi h$$

$$Ie = h\int_{-1}^{1} (f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\xi h) + (\frac{1}{2!})f''(\bar{x})(\xi h)^2 + (\frac{1}{3!})f'''(\bar{x})(\xi h)^3 + ...)d\xi h$$

Efetuando as integrações da equação acima:

$$Ie = h(2f(\bar{x}) + \frac{h^2}{2!}f''(\bar{x})(\frac{2}{3}) + \frac{2}{4!}f^{iv}(\bar{x})(\frac{2}{5}) + ...) \tag{2}$$

Agora vejamos o If :

Pela regra de Milne:

$$If = \frac{\Delta x}{3}(2f(a + \frac{\Delta x}{4}) - f(a + 2\frac{\Delta x}{4}) + 2f(a + 3\frac{\Delta x}{4})) \tag{3}$$

Calculemos então os termos que multiplicam "$\frac{\Delta x}{3}$":

$$f(a + \frac{\Delta x}{4}) = f(\bar{x} - \frac{1}{2}h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(-\frac{1}{2}h) + (\frac{1}{2!})f''(\bar{x})(-\frac{1}{2}h)^2 + (\frac{1}{3!})f'''(\bar{x})(-\frac{1}{2}h)^3 + ...$$

$$f(a + 2\frac{\Delta x}{4}) = f(\bar{x})$$

$$f(a + 3\frac{\Delta x}{4}) = f(\bar{x} + \frac{1}{2}h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\frac{1}{2}h) + (\frac{1}{2!})f''(\bar{x})(\frac{1}{2}h)^2 + (\frac{1}{3!})f'''(\bar{x})(\frac{1}{2}h)^3 + ...$$

Aplicando as equações acima em (3), temos:

$$If = \frac{\Delta x}{3}(2([2f(\bar{x}) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})2(\frac{h^2}{2^2}) + \frac{1}{4!}f^{iv}(\bar{x})2(\frac{h^4}{2^4}) + ...] + [-f(\bar{x})]))$$

Logo,

$$If = \frac{\Delta x}{3}(3f(\bar{x}) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\frac{h^2}{1}) + \frac{1}{4!}f^{iv}(\bar{x})(\frac{h^4}{2^2}) + ...) \tag{4}$$

2 Resolvendo Ea

Aplicando (2) e (4) em (1):

$$Ea = h(2f(\bar{x})+\frac{h^2}{2!}f''(\bar{x})(\frac{2}{3})+\frac{h^4}{4!}f^{iv}(\bar{x})(\frac{2}{5})+...)-\frac{2h}{3}(3f(\bar{x})+\frac{h^2}{2!}f''(\bar{x})+\frac{h^4}{4!}f^{iv}(\bar{x})(\frac{1}{4})+...)$$

Retendo apenas o termo dominante a estimativa de erro fica:

$$Ea = \frac{1}{4!}h^5 f^{iv}(\bar{x})(\frac{2}{5} - [\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}])$$
$$= \frac{1}{4!}h^5 f^{iv}(\bar{x})(\frac{2}{5} - \frac{1}{6})$$
$$Ea = \frac{1}{4!}h^5 f^{iv}(\bar{x})(\frac{7}{30})$$

com h = $\frac{\Delta x}{2}$

Desenvolvendo um pouco mais a fórmula acima:

$$\begin{aligned} Ea &= (\frac{\Delta x}{2})^5 \cdot \frac{7}{720} \cdot f^{iv}(\bar{x}) \\ &= (\frac{\Delta x^5}{2^5}) \cdot \frac{7}{720} \cdot f^{iv}(\bar{x}) \cdot \frac{2^5}{2^5} \\ &= (\frac{\Delta x}{4})^5 \cdot \frac{14}{45} \cdot f^{iv}(\bar{x})) \end{aligned}$$

Estimativa de erro para a fórmula aberta com polinômio de substituição de grau 2:

$$Ea = (\frac{\Delta x}{4})^5 \cdot \frac{14}{45} \cdot f^{iv}(\bar{x}))$$