CK0048 - Métodos Numéricos II

Tarefa 09: Usar quadratura de Gauss-Legendre para o cálculo do volume abaixo de uma superfície

Grupo 2

Maio 20, 2020

Problema 2: A região $U \in xy$ é $U = \left\{(x,y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1\right\}$

Antes de começar a resolução do problema, é possível ver que a equação em questão se trata de uma elipse com $a = 40$ e $b = 20$ pelos denominadores de x e y.

Diferentemente do Problema 1, não há um intervalo de integração claro e bem definido logo de início. A fim de remediar isso será utilizada a técnica provida pelo arquivo da Aula 15 para mudança de variáveis

1) Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse

Fazendo a transformação de pontos (x, y) para um sistema de coordenadas onde $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 0, 2\pi$:

$$\begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot b \cdot \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot 20 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

Vendo agora a equação 'principal' para o cálculo do volume:

$$\begin{aligned} V &= \int_U f(x,y)\mathrm{d}A \\ &= \int_\Omega f(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)) \left| det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \right| \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \end{aligned} \tag{1}$$

onde f(x,y) é:

$$f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)$$

e a matriz jacobiana ("| J |") na equação (1) é:

$$
\begin{aligned}
\mid J \mid &= det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \cdot a \cdot b \\
&= 800\alpha
\end{aligned}
$$

Porém a representação de x e y agora é diferente e o valor de $\mid J \mid$ foi mostrado, logo é possível desenvolver a equação (1):

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 0.2((\alpha \cdot 40 \cdot cos\beta)^2 - (\alpha \cdot 20 \cdot sin\beta)^2) \cdot 800\alpha \; \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\alpha \\
&= 48000 \cdot \pi = 150796
\end{aligned}
$$

2) Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1

Fazendo a transformação de pontos (x, y) para um sistema de coordenadas onde $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 0, 2\pi$:

$$
\begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot b \cdot \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 40 \cdot \cos\beta \\ \alpha \cdot 20 \cdot \sin\beta \end{pmatrix} \tag{2}
$$

onde o $\mid J \mid$ de (2) é:

$$
\begin{aligned}
\mid J \mid &= det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \cdot a \cdot b \\
&= 800\alpha
\end{aligned}
$$

Realizando agora a mudança de coordenadas exigida para um intervalo de integração de -1 a 1:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot \alpha \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2} \cdot \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \alpha \\ \pi + \pi \cdot \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{2} \\ \pi\beta + \pi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

onde o $\mid J \mid$ de (3) é:

$$\mid J \mid = det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2}$$

Aplicando (3) em (2):

$$\begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \cdot (\frac{\alpha+1}{2}) \cdot \cos(\pi\beta+\pi) \\ 20 \cdot (\frac{\alpha+1}{2}) \cdot \sin(\pi\beta+\pi) \end{pmatrix}$$

Assim, podemos descrever o Volume como:

$$V = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} 0.2 \left((40 \cdot \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \cos(\pi\beta+\pi))^2 - (20 \cdot \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot \sin(\pi\beta+\pi))^2 \right) \cdot 800 \cdot \frac{\alpha+1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \, \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\alpha$$

$$V = 150796$$

3) Quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção

Deixando de lado agora a resolução analítica, é possível resolver a equação final do item anterior utilizando a quadratura de Gauss-Legendre

$$V = 80\pi \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(w_i w_j (20 \cdot (\alpha_j+1) \cdot \cos(\pi\beta_i+\pi))^2 + (10 \cdot (\alpha_j+1) \cdot \sin(\pi\beta_i+\pi))^2 \cdot \frac{\alpha_j+1}{2} \right)$$

Na forma tabular:

(α_j, β_i)	$w_j w_i$	$g(\alpha_j,\beta_i) = ((20 \cdot (\alpha_j+1) \cdot \cos(\pi\beta_i+\pi))^2 + (10 \cdot (\alpha_j+1) \cdot \sin(\pi\beta_i+\pi))^2 \cdot \frac{\alpha_j+1}{2}$	$w_i w_j g(\alpha_j,\beta_i)$	$*80\pi$
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9}$	1.07925130102	0.33310225340	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9}$	94.2413704661	46.5389483783	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9}$	526.672423309	162.553217070	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9}$	2.29039814613	1.13106081290	
$(0,0)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9}$	200	158.024691358	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9}$	1117.70960185	551.955358940	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9}$	1.07925130102	0.33310225340	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9}$	94.2413704661	46.5389483783	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9}$	526.672423309	162.553217070	
			1129.96164651627	283990.336602699

$$V = 283990.336602699$$