DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL
Exemplos resolvidos

Livia Flavia Carletti Jatobá

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico

CAPÍTULO 1

MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS: ESCOAMENTO COUETTE ENTRE PLACAS PLANAS

LIVIA FLAVIA CARLETTI JATOBÁ

Controle de versão: T01-1.1

Objetivo: demonstrar a solução numérica do escoamento entre placas planas usando o Método dos Volumes Finitos com aproximação linear para o fluxo difusivo.

1.1 Definição do problema

Considere o escoamento de um fluido Newtoniano, laminar, incompressível e plenamente desenvolvido entre duas placas planas paralelas. A placa superior desloca-se com velocidade conhecida V, a inferior está parada e a pressão do escoamento é uniforme. Este é um problema clássico da literatura conhecido como escoamento Couette, onde a força motriz é dada pelo gradiente de velocidade entre a placa superior e inferior. As equações que descrevem este escoamento, ou seja, a modelagem matemática do problema, são: a equação de Continuidade e a equação de Navier-Stokes.

Assim, como o escoamento é estacionário puramente difusivo, a equação de Navier-Stokes tem apenas a contribuição do termo devido o transporte difusivo de quantidade de movimento linear para o fluido newtoniano. Vamos aplicar o Método dos Volumes Finitos com aproximação linear para o termo difusivo para a equação que governa este escoamento e comparar a solução numérica com a solução analítica. A Figura 1.1 mostra a geometria e malha para o escoamento entre as placas planas onde d é a distância entre as placas, a malha é uniforme e divida em 5 volumes de controle.

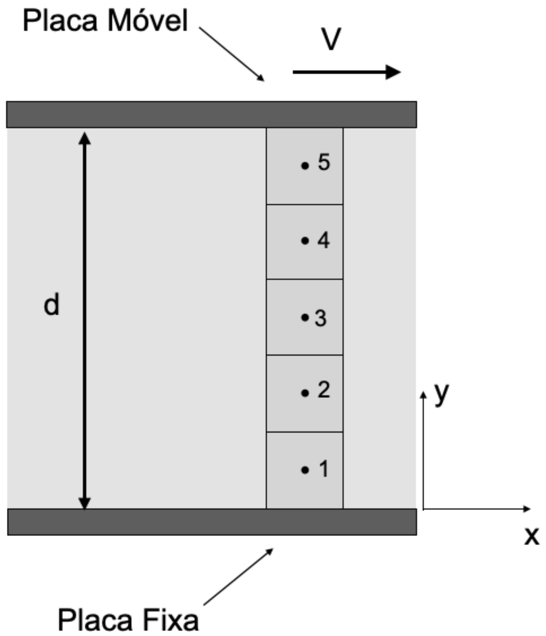

Figura 1.1 Geometria do escoamento entre placas planas com malha 1D em y.

1.2 Solução analítica

A primeira etapa será demonstrar a solução analítica. Recorde as equações da Continuidade e de Navier-Stokes abaixo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \rho \mathbf{g} \tag{1.2}$$

Simplificadas para o escoamento estacionário, incompressível, plenamente desenvolvido e sem contribuição da gravidade.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = 0 \tag{1.4}$$

Vamos adotar o sistema de coordenadas cartesianas. Sabemos ainda que o problema em questão tem apenas velocidade na direção x, ou seja, $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$. Assim, a modelagem simplifica para:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

$$\nabla \cdot (\nabla U_x) = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = 0 \tag{1.6}$$

Sabendo que o plano z é um plano de simetria a equação simplifica para a solução apenas para $U_x(y)$:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dU_x}{dy}\right) = 0 \tag{1.7}$$

As etapas para chegar a solução solução analítica são:

$$\frac{dU_x}{dy} = C_1 \tag{1.8}$$

$$\int dU_x = \int C_1 dy \tag{1.9}$$

$$U_x = C_1 y + C_2 \tag{1.10}$$

Sabendo que as condições de contorno são dadas por $U_x = 0$ para $y = 0$ e $U_x = V$ para $y = d$, temos:

$$C_2 = 0 \tag{1.11}$$

$$C_1 = \frac{V}{d} \tag{1.12}$$

A solução analítica para o perfil de velocidade é dada por:

$$U_x = \frac{V}{d} y \tag{1.13}$$

1.3 Equação discreta para volumes internos

Vamos agora aplicar o Método dos Volumes Finitos para os volumes internos da malha. Recorde que precisamos apenas da solução para componente x da velocidade. A primeira etapa consiste na integração da equação de conservação no volume de controle e a transformada da integral em volume para integral em área, usando o Teorema de Gauss.

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\nabla U_x)\, dV = \sum_{A_f} \int_{A_f} (\nabla U_x \cdot \mathbf{n})\ dA = 0 \tag{1.14}$$

A Figura 1.2 mostra a malha uniforme com $\Delta y = d/N$, onde $N = 5$ é o número de volumes de controle da malha. Considere a seguinte notação: P é o centro do volume de controle, N é o centro do volume de controle à norte de P e S é o centro do volume de controle à sul de P. As faces do volume de controle P são, n e s, para as faces à norte e sul, respectivamente. O escoamento entre placas planas é um problema 1D em y, ou seja, temos apenas as faces norte e sul em cada volume de controle, e a equação fica,

$$\int_{A_n} (\nabla U_x \cdot \mathbf{n})\ dA + \int_{A_s} (\nabla U_x \cdot \mathbf{n})\ dA = 0 \tag{1.15}$$

que é aproximada por:

$$(\nabla U_x \cdot \mathbf{n})_n A_n + (\nabla U_x \cdot \mathbf{n})_s A_s = 0 \tag{1.16}$$

Note que a operação tensorial que temos em U_x é,

$$\nabla U_x \cdot \mathbf{n} = \frac{dU_x}{dx} n_x + \frac{dU_x}{dy} n_y + \frac{dU_x}{dz} n_z \tag{1.17}$$

onde a normal para cada face é dada por:

$$\mathbf{n}_n = (0, 1, 0) \tag{1.18}$$

$$\mathbf{n}_s = (0, -1, 0). \tag{1.19}$$

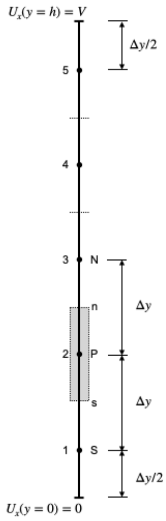

Figura 1.2 Malha 1D em y com 5 volumes de controle.

Assim, sabendo que a malha para o problema é uniforme e $A_n = A_s = A$, a equação aproximada para as faces norte e sul fica:

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_n A - \left(\frac{dU_x}{dy}\right)_s A = 0 \tag{1.20}$$

Precisamos agora escolher funções de interpolação para aproximar as derivadas de U_x nas faces norte e sul, usando os valores dos volumes vizinhos. Vamos considerar a aproximação das derivadas por uma função linear usando dois pontos vizinhos. A aproximação por uma função linear entre dois pontos vizinhos equivale a uma aproximação por diferenças centrais da derivada.

Recorde a definição de derivada de U_x em relação a y avaliada no ponto y_i qualquer:

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y_i} = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{U_x(y_i + \Delta y) - U_x(y_i)}{\Delta y} \tag{1.21}$$

Se quisermos aproximar a derivada por uma função linear, podemos escrever:

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y_i} \cong \frac{U_x(y_i + \Delta y) - U_x(y_i)}{\Delta y} \tag{1.22}$$

Sabendo que P é o centro do volume de controle em análise, N o centro do volume de controle acima e S o centro do volume de controle abaixo. Sabendo que Δy é a distância entre os pontos N-P e P-S, respectivamente, uma aproximação linear para a derivada na face norte é,

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_n \cong \frac{(U_x)_N - (U_x)_P}{\Delta y} \tag{1.23}$$

e na face sul é

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_s \cong \frac{(U_x)_P - (U_x)_S}{\Delta y}. \tag{1.24}$$

Agora observe o seguinte, recorde que uma aproximação por diferenças centrais para uma função ϕ qualquer é dada por,

$$\left(\frac{d\phi}{dy}\right)_i \cong \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} + O(h^2) \tag{1.25}$$

onde h é a distância entre o ponto i e $i+1$ e $i-1$, respectivamente.

Considere a posição da face norte o índice i, a posição do centro de volume P é $i-1$ e a posição do volume norte N é $i+1$. Neste caso a distância entre a face norte e os pontos P e N, respectivamente é $\Delta y/2$ e a aproximação para a componente x da velocidade fica:

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_n \cong \frac{(U_x)_N - (U_x)_P}{2(\Delta y/2)} = \frac{(U_x)_P - (U_x)_S}{\Delta y}. \tag{1.26}$$

Por este motivo, é possível afirmar que neste caso, a aproximação linear equivale a uma aproximação por diferenças centrais com erro da ordem de $(\Delta y)^2$, ou seja, com erro de segunda ordem. A mesma analise pode ser repetida para a face sul.

A próxima etapa agora consiste em substituir as aproximações das derivadas na equação de conservação,

$$\left(\frac{(U_x)_N - (U_x)_P}{\Delta y}\right) A - \left(\frac{(U_x)_P - (U_x)_S}{\Delta y}\right) A = 0 \tag{1.27}$$

e re-arranjar os termos da seguinte forma,

$$\left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_N - \left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_P - \left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_P + \left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_S = 0. \tag{1.28}$$

A solução de sistemas algébricos é mais adequada para diagonais positiva. Os termos da diagonal serão aqueles dados pelo ponto P. Assim, as equações são descritas como:

$$-\underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_S}(U_x)_S + \underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y} + \frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_P = a_S + a_N}(U_x)_P - \underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_N}(U_x)_N = \underbrace{0}_{S_P} \tag{1.29}$$

Assim, as equações para $P = 2, 3\ e\ 4$ podem ser descritas por:

$$-a_S(U_x)_S + a_P(U_x)_P - a_N(U_x)_N = 0 \tag{1.30}$$

onde,

$$a_S = \frac{A}{\Delta y}\ ;\ a_N = \frac{A}{\Delta y}\ ;\ S_P = 0 \tag{1.31}$$

e

$$a_P = a_S + a_N + S_P \tag{1.32}$$

Precisamos ainda, escrever estas equações de forma conveniente para montar o sistema algébrico. Assim, para P=2 temos S=1 e N=3,

$$-\frac{A}{\Delta y}(U_x)_1 + \frac{2A}{\Delta y}(U_x)_2 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_3 + 0(U_x)_4 + 0(U_x)_5 = 0 \tag{1.33}$$

para P = 3, temos S=2 e N=4,

$$0(U_x)_1 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_2 + \frac{2A}{\Delta y}(U_x)_3 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_4 + 0(U_x)_5 = 0 \tag{1.34}$$

e para P = 4, temos S = 3 e N = 5,

$$0(U_x)_1 + 0(U_x)_2 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_3 + \frac{2A}{\Delta y}(U_x)_4 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_5 = 0 \tag{1.35}$$

Estas equações serão utilizadas na seção 1.6, para montar o sistema algébrico.

1.4 Equação discreta para volumes no contorno

Vejamos agora como descrever as equação para os volumes vizinhos às fronteiras, ou no contorno. Vamos começar pelo volume P =1. Neste caso, não temos face sul, e sim a face do contorno, onde a condição de contorno determina que $U_x = 0$ em $y = 0$. A integração da equação neste volume é

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{n=1-2} A - \left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y=0} A = 0 \tag{1.36}$$

onde a face norte é a face entre os volumes 1-2 e a face $y = 0$ é a do contorno.

Precisamos novamente adotar funções de interpolação para as derivadas e vamos começar pela a derivada na face norte. Vamos utilizar a aproximação linear, ou por diferenças centrais, para descrever a aproximação para a derivada da velocidade na face norte.

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{n=1-2} \cong \frac{(U_x)_2 - (U_x)_1}{\Delta y} \tag{1.37}$$

Uma aproximação linear também é adotada para a derivada na face do contorno. Entretanto, como temos acesso apenas aos valores das variáveis nas face do contorno e no centro do volume de controle P = 1, a aproximação da derivada na face do contorno, pode ser melhor explicada a partir da aproximação por diferença avançada.

Recorde a aproximação para a derivada no ponto i por diferença avançada entre o ponto i e $i+1$ é dada por,

$$\left(\frac{d\phi}{dy}\right)_i \cong \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + O(h) \tag{1.38}$$

onde h é a distância entre os pontos i e $i+1$.

Voltemos agora para a face do contorno $y = 0$, considere esta face o ponto i e o ponto no centro do volume P=1, $i+1$. A distância entre estes pontos é $\Delta y/2$ e a aproximação para a derivada na face do contorno é:

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y=0} \cong \frac{(U_x)_1 - (U_x)_{y=0}}{\Delta y/2} \tag{1.39}$$

Substituindo na equação discreta para P = 1, temos,

$$\left(\frac{(U_x)_2 - (U_x)_1}{\Delta y}\right) A - \left(\frac{(U_x)_1 - (U_x)_{y=0}}{\Delta y/2}\right) A = 0 \tag{1.40}$$

$$\left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_2 - \left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_1 - \left(2\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_1 + \left(2\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_{y=0} = 0 \tag{1.41}$$

que para uma equação com diagonal positiva fica,

$$\underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y} + 2\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_N + S_P}(U_x)_1 - \underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_N}(U_x)_2 = \underbrace{\left(2\frac{A}{\Delta y}\right)}_{S_P}(U_x)_{y=0} \tag{1.42}$$

Assim, a equação para $P = 1$ podem ser escrita por:

$$-a_S(U_x)_S + a_P(U_x)_P - a_N(U_x)_N = S_P(U_x)_{y=0} \tag{1.43}$$

onde,

$$a_S = 0 \ ; \ a_N = \frac{A}{\Delta y} \ ; \ S_P = 2\frac{A}{\Delta y} \tag{1.44}$$

e

$$a_P = a_S + a_N + S_P. \tag{1.45}$$

Sabendo que $U_x(y=0)=0$, a equação fica:

$$\left(\frac{A}{\Delta y}+2\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_1-\left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_2+0(U_x)_3+0(U_x)_4+0(U_x)_5=0 \tag{1.46}$$

Vamos agora repetir o procedimento para o volume de controle P = 5, vizinho a face da fronteira $y=h$. Neste caso, não temos face norte, e sim a face do contorno, onde a condição de contorno determina que $U_x=V$ em $y=h$. A integração da equação neste volume é

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y=h}A-\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{s=4-5}A=0 \tag{1.47}$$

onde a face sul é a face entre os volumes 4-5 e a face $y=h$ é a do contorno.

Vamos substituir as aproximações lineares das derivadas, onde a derivada na face sul , ou seja, entre os volumes 4-5 é,

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{s=4-5}\cong\frac{(U_x)_5-(U_x)_4}{\Delta y} \tag{1.48}$$

e a derivada para a face do contorno é dada por um esquema de diferença recuada, onde i é a face do contorno e i-1 é o ponto 5.

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y=h}\cong\frac{(U_x)_{y=h}-(U_x)_5}{\Delta y/2} \tag{1.49}$$

Substituindo temos,

$$\left(\frac{(U_x)_{y=h}-(U_x)_5}{\Delta y/2}\right)A-\left(\frac{(U_x)_5-(U_x)_4}{\Delta y}\right)A=0 \tag{1.50}$$

$$\left(2\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_{y=h}-\left(2\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_5-\left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_5+\left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_4=0 \tag{1.51}$$

re-arranjando para a diagonal positiva,

$$-\underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_S}(U_x)_4+\underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y}+2\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_S+S_P}(U_x)_5=\underbrace{\left(2\frac{A}{\Delta y}\right)}_{S_P}(U_x)_{y=h} \tag{1.52}$$

Assim, a equação para $P=5$ podem ser escrita por:

$$-a_S(U_x)_S+a_P(U_x)_P-a_N(U_x)_N=S_P(U_x)_{y=h} \tag{1.53}$$

onde,

$$a_S=\frac{A}{\Delta y}\ ;\ a_N=0\ ;\ S_P=2\frac{A}{\Delta y} \tag{1.54}$$

e

$$a_P = a_S + a_N + S_P. \tag{1.55}$$

Sabendo que $U_x(y=h)=V$, a equação fica:

$$0(U_x)_1+0(U_x)_2+0(U_x)_3-\left(\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_4+\left(\frac{A}{\Delta y}+2\frac{A}{\Delta y}\right)(U_x)_5=\left(2\frac{A}{\Delta y}\right)V \tag{1.56}$$

1.5 Solução do sistema algébrico

Podemos agora montar um sistema algébrico com as equações para P = 1 a 5. Sabendo que $A = 1\ m^2$, $d = 0.01\ m$ e $\Delta y = d/5$, temos:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1500(U_x)_1 & -500(U_x)_2 & +0(U_x)_3 & +0(U_x)_4 & +0(U_x)_5 & = & 0 \\
-500(U_x)_1 & +1000(U_x)_2 & -500(U_x)_3 & +0(U_x)_4 & +0(U_x)_5 & = & 0 \\
0(U_x)_1 & -500(U_x)_2 & +1000(U_x)_3 & -500(U_x)_4 & +0(U_x)_5 & = & 0 \\
0(U_x)_1 & +0(U_x)_2 & -500(U_x)_3 & +1000(U_x)_4 & -500(U_x)_5 & = & 0 \\
0(U_x)_1 & +0(U_x)_2 & +0(U_x)_3 & -500(U_x)_4 & +1500(U_x)_5 & = & 1000
\end{array}
$$

Este conjunto de equações pode ser escrito na forma do seguinte sistema algébrico.

$$
\begin{pmatrix}
1500 & -500 & 0 & 0 & 0 \\
-500 & 1000 & -500 & +0 & 0 \\
0 & -500 & 1000 & -500 & 0 \\
0 & 0 & -500 & 1000 & -500 \\
0 & 0 & 0 & -500 & 1500
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
(U_x)_1 \\ (U_x)_2 \\ (U_x)_3 \\ (U_x)_4 \\ (U_x)_5
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000
\end{pmatrix}
\tag{1.57}
$$

O sistema algébrico pode formado tem matriz de coeficiente tridiagonal e pode ser resolvido por:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U_x} = \mathbf{S} \tag{1.58}$$

$$\mathbf{U_x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} \tag{1.59}$$

A solução para os valores da componente x das velocidades é:

$$
\begin{pmatrix}
0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9
\end{pmatrix}
\tag{1.60}
$$

O gráfico da Figura 1.3 mostra a comparação da solução analítica da Equação 1.13 com a solução numérica encontrada. Note que, como o perfil de velocidade é linear, uma malha de apenas cinco volumes reproduz a solução analítica.

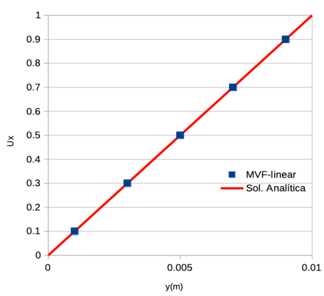

Figura 1.3 Gráfico da comparação analítica com a numérica.

Referências Bibliográficas

[1] Patankar, Suhas V., Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

[2] Versteeg, H. K., Malalasekera, W., An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method, Pearson Education Limited, 2007.

[3] Donald F. Young, Bruce R. Munson,Theodore H. Okiishi, A Brief Introduction to Fluid Mechanics, Fifth Edition, John Wiley Sons, Inc.,pg 225, 2011.