Computation of Kronecker's Canonical Form in a Computer Algebra System

Giacomo Trapani

Università di Pisa

7/10/2022

Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione

Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione

Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di J, il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.

Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di J, il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.

Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di J, il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.

Data una matrice quadrata A, la matrice di trasformazione P in

$$A = P^{-1}JP$$

è malcondizionata se A ha un autovalore difettivo o quasi difettivo.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Esempio: calcolo del determinante

Calcoliamo il determinante della matrice A, con

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Confrontiamo i risultati ottenuti definendola inizialmente sull'anello `CDF` (*Complex Double Field*) e, in seguito, sull'anello simbolico `SR` (*Symbolic Ring*).

Esempio: calcolo del determinante

```
sage: A = matrix(SR, [[sqrt(3), 1], [3, sqrt(3)]])
sage: A.det().is_zero()
True
sage: A.change_ring(CDF).det().is_zero()
False
```

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad\qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).