

# Computation of Kronecker's Canonical Form in a Computer Algebra System

Giacomo Trapani

Università di Pisa

7/10/2022



UNIVERSITÀ DI PISA

# Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione



# Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione



# Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione



# Forma canonica di Jordan

## Definizione

### Definizione

Una matrice  $J$  diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$



# Forma canonica di Jordan

Proprietà

## Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di  $J$ , il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.



# Forma canonica di Jordan

Proprietà

## Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di  $J$ , il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.



# Forma canonica di Jordan

Proprietà

## Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di  $J$ , il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.





# Forma canonica di Jordan

## Stabilità della trasformazione

Data una matrice quadrata  $A$ , la matrice di trasformazione  $P$  in

$$A = P^{-1}JP$$

è malcondizionata se  $A$  ha un autovalore difettivo o quasi difettivo.



- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.



- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.



# Esempio: calcolo del determinante

Calcoliamo il determinante della matrice  $A$ , con

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Confrontiamo i risultati ottenuti definendola inizialmente sull'anello CDF (*Complex Double Field*) e, in seguito, sull'anello simbolico SR (*Symbolic Ring*).



# Esempio: calcolo del determinante

---

```
sage: A = matrix(SR, [[sqrt(3), 1], [3, sqrt(3)]])
sage: A.det().is_zero()
True
sage: A.change_ring(CDF).det().is_zero()
False
```

---



- Useremo l'anello simbolico SR per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.



- Useremo l'anello simbolico SR per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.



# Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico SR per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.





# Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico SR per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.



# Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice  $A$ .
- Generalizziamo.  
Introduciamo una matrice  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$



# Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice  $A$ .

- Generalizziamo.

Introduciamo una matrice  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$



# Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice  $A$ .
- Generalizziamo.  
Introduciamo una matrice  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$



# Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

**1**  $B$  non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice  $-B^{-1}A$ .

**2**  $B$  è singolare.

- Essendo  $B$  una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici  $(A, B)$  (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



# Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

**1**  $B$  non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice  $-B^{-1}A$ .

**2**  $B$  è singolare.

- Essendo  $B$  una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici  $(A, B)$  (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



# Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

**1**  $B$  non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice  $-B^{-1}A$ .

**2**  $B$  è singolare.

- Essendo  $B$  una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici  $(A, B)$  (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



# Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

**1**  $B$  non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice  $-B^{-1}A$ .

**2**  $B$  è singolare.

- Essendo  $B$  una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici  $(A, B)$  (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).





# Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

**1**  $B$  non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice  $-B^{-1}A$ .

**2**  $B$  è singolare.

- Essendo  $B$  una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici  $(A, B)$  (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



# Forma canonica di Kronecker

## Teorema (Forma canonica di Kronecker)

*Un pencil arbitrario di matrici  $(A, B)$  è strettamente equivalente alla matrice diagonale a blocchi*

$$\begin{bmatrix} O^{(h,g)} & & & & \\ & L & & & \\ & & L^T & & \\ & & & N & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$



# Forma canonica di Kronecker

- $h, g$  sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \quad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \begin{bmatrix} L_{\epsilon_{h+1}} & & & \\ & L_{\epsilon_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\epsilon_p} \end{bmatrix}, \quad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$



# Forma canonica di Kronecker

- $h, g$  sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \quad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \begin{bmatrix} L_{\epsilon_{h+1}} & & & & \\ & L_{\epsilon_{h+2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & L_{\epsilon_p} \end{bmatrix}, \quad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$



# Forma canonica di Kronecker

$$L^T = \begin{bmatrix} L_{\eta_{h+1}}^T & & & \\ & L_{\eta_{h+2}}^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q}^T \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)} \end{bmatrix}$$

- I blocchi  $N^u$  sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- $G$  è una matrice di Jordan.



# Forma canonica di Kronecker

$$L^T = \begin{bmatrix} L_{\eta_{h+1}}^T & & & \\ & L_{\eta_{h+2}}^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q}^T \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)} \end{bmatrix}$$

- I blocchi  $N^u$  sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- $G$  è una matrice di Jordan.



# Forma canonica di Kronecker

$$L^T = \begin{bmatrix} L_{\eta_{h+1}}^T & & & \\ & L_{\eta_{h+2}}^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q}^T \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)} \end{bmatrix}$$

- I blocchi  $N^u$  sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- $G$  è una matrice di Jordan.



# Pencil di matrici

Distinguiamo due tipi di pencil di matrici:

## Definizione (Pencil lineare regolare)

Un pencil di matrici  $(A, B)$  viene definito regolare se e solo se  $A$  e  $B$  sono matrici quadrate della stessa dimensione e il determinante  $\det(A + \lambda B)$  non è identicamente zero.

## Definizione (Pencil lineare singolare)

Un pencil di matrici non regolare viene definito singolare.

