Computation of Kronecker's Canonical Form in a Computer Algebra System

Giacomo Trapani

Università di Pisa

7/10/2022

Università di Pisa

Contenuti

1. Forma canonica di Jordan: definizione, proprietà.
2. Calcolo simbolico, esempio.
3. Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti.
4. Forma canonica di Kronecker.
5. Pencil regolari di matrici.
6. Pencil singolari di matrici.

Per il codice sorgente e un'analisi approfondita, si rimanda a
`https://github.com/liviusi/kronecker-canonical-form`

Forma canonica di Jordan

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ogni matrice è simile a una matrice di Jordan.

Forma canonica di Jordan

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ogni matrice è simile a una matrice di Jordan.

UNIVERSITÀ DI PISA

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Calcoliamo il determinante della matrice A, con

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

```
sage: A = matrix(SR, [[sqrt(3), 1], [3, sqrt(3)]])
sage: A.det().is_zero()
True
sage: A.change_ring(CDF).det().is_zero()
False
```

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.

- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad\qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali algebriche lineari a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali algebriche lineari a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali algebriche lineari a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali algebriche lineari a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali algebriche lineari a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Forma canonica di Kronecker

Teorema (Forma canonica di Kronecker)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ *un pencil di matrici arbitrarie con* A, B *di dimensione* $m \times n$. *Esistono* P, Q *matrici quadrate costanti invertibili delle dimensioni appropriate tali che*

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} O^{(h,g)} & & & & \\ & L & & & \\ & & L^T & & \\ & & & N & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \qquad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = diag\{L_{\epsilon_{g+1}}, L_{\epsilon_{g+2}}, ..., L_{\epsilon_p}\}, \quad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \qquad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = diag\{L_{\epsilon_{g+1}}, L_{\epsilon_{g+2}}, \ldots, L_{\epsilon_p}\}, \quad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^T = diag\{L^T_{\eta_{h+1}}, L^T_{\eta_{h+2}}, ..., L^T_{\eta_q}\}, \quad N = diag\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)} ..., N^{(u_s)}\}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}, \qquad H^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- G è una matrice di Jordan.

$$L^T = diag\{L^T_{\eta_{h+1}}, L^T_{\eta_{h+2}}, ..., L^T_{\eta_q}\}, \quad N = diag\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)} ..., N^{(u_s)}\}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}, \qquad H^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- G è una matrice di Jordan.

$$L^T = diag\{L^T_{\eta_{h+1}}, L^T_{\eta_{h+2}}, ..., L^T_{\eta_q}\}, \quad N = diag\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)} ..., N^{(u_s)}\}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}, \qquad H^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- G è una matrice di Jordan.

Pencil di matrici

Distinguiamo due tipi di pencil di matrici:

Definizione (Pencil lineare regolare)

Un pencil di matrici (A, B) viene definito *regolare* se e solo se A e B sono matrici quadrate della stessa dimensione e il determinante $det(A + \lambda B)$ non è identicamente zero.

Definizione (Pencil lineare singolare)

Un pencil di matrici non regolare viene definito *singolare*.

Assumiamo che il pencil $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ abbia rango r.
Sia $D_j(\lambda)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine j di $\Gamma(\lambda)$ (con $j = 1, ..., r$). Assumiamo senza perdita di generalità $D_r(\lambda)$ abbia coefficiente 1 e $D_0(\lambda) = 1$. Definiamo *polinomi invarianti* del pencil $\Gamma(\lambda)$ le frazioni

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)},\ i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)},\ ...,\ i_r(\lambda) = D_1(\lambda).$$

Siano p_i polinomi irriducibili. Possiamo scrivere l'espansione dei polinomi invarianti in fattori irriducibili come

$$i_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{1,i}},\ i_2(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{2,i}},\ ...$$

$$i_r(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{r,i}}.$$

Assumiamo che il pencil $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ abbia rango r.
Sia $D_j(\lambda)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine j di $\Gamma(\lambda)$ (con $j = 1, \ldots, r$). Assumiamo senza perdita di generalità $D_r(\lambda)$ abbia coefficiente 1 e $D_0(\lambda) = 1$. Definiamo *polinomi invarianti* del pencil $\Gamma(\lambda)$ le frazioni

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \; i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \; \ldots, \; i_r(\lambda) = D_1(\lambda).$$

Siano p_i polinomi irriducibili. Possiamo scrivere l'espansione dei polinomi invarianti in fattori irriducibili come

$$i_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{1,i}}, \; i_2(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{2,i}}, \; \ldots$$

$$i_r(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{r,i}}.$$

Definizione (Divisori elementari finiti)

Definiamo *divisori elementari finiti* di $\Gamma(\lambda)$ tutti i polinomi $p_i(\lambda)$ diversi da 1.

Definizione (Divisori elementari infiniti)

Definiamo *divisori elementari infiniti* di $\Gamma(\lambda)$ i divisori elementari nulli del pencil $\lambda A + B$.

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil regolare. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

I blocchi $N^{(u)}$ sono unicamente determinati dai divisori elementari infiniti del pencil, l'ultimo blocco dai divisori elementari finiti.

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil regolare. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

I blocchi $N^{(u)}$ sono unicamente determinati dai divisori elementari infiniti del pencil, l'ultimo blocco dai divisori elementari finiti.

Pencil singolari

Determinare un polinomio di grado minimo nel kernel destro

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil singolare di matrici.
Iterando sul valore di $k = 0$ con passo 1, consideriamo la famiglia di matrici $M_k^{(A,B)}$ di dimensione $(k+2) \times (k+1)$

$$M_0^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad M_1^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

$$M_k^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

Ogni vettore nel kernel destro di M_k identifica un polinomio di grado k nel kernel (destro) di $\Gamma(\lambda)$.

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil singolare di matrici.
Iterando sul valore di $k = 0$ con passo 1, consideriamo la famiglia di matrici $M_k^{(A,B)}$ di dimensione $(k+2) \times (k+1)$

$$M_0^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \; M_1^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

$$M_k^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

Ogni vettore nel kernel destro di M_k identifica un polinomio di grado k nel kernel (destro) di $\Gamma(\lambda)$.

Assumiamo che il suo rango r sia minore del numero di colonne n. Allora, esistono soluzioni non banali $\mathbf{x_1}(\lambda), ..., \mathbf{x_r}(\lambda)$ dell'equazione

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0.$$

Il numero massimo di soluzioni linearmente indipendenti è $n - r$. Scegliamo sempre il polinomio di grado minimo e, iterando, otteniamo la sequenza

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq ... \leq \epsilon_p.$$

Definiamo i termini ϵ_i *indici minimi per le colonne.*

Assumiamo che il suo rango r sia minore del numero di colonne n. Allora, esistono soluzioni non banali $\mathbf{x_1}(\lambda), \ldots, \mathbf{x_r}(\lambda)$ dell'equazione

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0.$$

Il numero massimo di soluzioni linearmente indipendenti è $n - r$. Scegliamo sempre il polinomio di grado minimo e, iterando, otteniamo la sequenza

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \ldots \leq \epsilon_p.$$

Definiamo i termini ϵ_i *indici minimi per le colonne*.

Teorema (Teorema di riduzione)

Se il polinomio di grado minimo nel kernel destro ha grado $\epsilon > 0$, allora esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} L_\epsilon & 0 \\ 0 & \widehat{A} + \lambda\widehat{B} \end{bmatrix}.$$

Il pencil ottenuto $\widehat{\Gamma}(\lambda) = \widehat{A} + \lambda\widehat{B}$ non ha polinomi di grado inferiore a ϵ nel proprio kernel destro.

Teorema (Teorema di riduzione)

Se il polinomio di grado minimo nel kernel destro ha grado $\epsilon > 0$, allora esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} L_\epsilon & 0 \\ 0 & \widehat{A} + \lambda\widehat{B} \end{bmatrix}.$$

Il pencil ottenuto $\widehat{\Gamma}(\lambda) = \widehat{A} + \lambda\widehat{B}$ non ha polinomi di grado inferiore a ϵ nel proprio kernel destro.

Assumiamo di aver definito la coppia di matrici in forma di Kronecker (A, B) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 42 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Importiamo i moduli necessari.

```
import sage.all as sa
from kcf import kcf_sage as kcf
```

Definiamo un metodo per calcolare una matrice casuale invertibile.

```
def random_invertible_matrix(n: int):
        while True:
                M = sa.random_matrix(sa.ZZ, n, n)
                if not (M.is_singular()):
                        return M.change_ring(sa.SR)

D = random_invertible_matrix(A.nrows())
C = random_invertible_matrix(A.ncols())
```

Calcoliamo la forma canonica di Kronecker della coppia di matrici (A, B) dopo aver cambiato la loro base.

```
A = D.inverse() * A * C
B = D.inverse() * B * C

(L, R), (KCF_A, KCF_B) = kcf.kronecker_canonical_form(
        A, B, transformation=True)
assert ((L*A*R - KCF_A).is_zero()
                and (L*B*R - KCF_B).is_zero()
                and not L.is_singular()
                and not R.is_singular())
print(f'{kcf.stringify_pencil(KCF_A, KCF_B)}')
```

I risultati ottenuti da questa tesi sono:

1. aver esteso la letteratura riguardo al calcolo della forma canonica di Kronecker,
2. descritto e dimostrato un algoritmo che la calcola esattamente,
3. implementato e testato tale algoritmo.