

Computation of Kronecker's Canonical Form in a Computer Algebra System

Giacomo Trapani

Università di Pisa

7/10/2022



UNIVERSITÀ DI PISA

Contenuti

- 1 Forma canonica di Jordan: definizione, proprietà.
- 2 Calcolo simbolico, esempio.
- 3 Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti.
- 4 Forma canonica di Kronecker: definizione.
- 5 Pencil regolari di matrici: polinomi invarianti, divisori elementari, forma canonica di Kronecker per pencil regolari.
- 6 Pencil singolari di matrici: determinare polinomi nel kernel di un pencil singolare, indice minimo per le colonne, indice minimo per le righe, teorema di riduzione.

Per il codice sorgente e un'analisi approfondita, si rimanda a <https://github.com/liviusi/kronecker-canonical-form>



Forma canonica di Jordan

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ogni matrice è simile a una matrice di Jordan.



Forma canonica di Jordan

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ogni matrice è simile a una matrice di Jordan.



- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.



- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.



Calcolo simbolico

Esempio: calcolo del determinante di una matrice

Calcoliamo il determinante della matrice A , con

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

```
sage: A = matrix(SR, [[sqrt(3), 1], [3, sqrt(3)]])
sage: A.det().is_zero()
True
sage: A.change_ring(CDF).det().is_zero()
False
```



Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A .
- Generalizziamo.
Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$



Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A .

- Generalizziamo.

Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$



Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A .
- Generalizziamo.
Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$



Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1 B non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.

2 B è singolare.

- Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1 B non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.

2 B è singolare.

- Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1 B non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.

2 B è singolare.

- Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1 B non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.

2 B è singolare.

- Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1 B non è singolare.

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.

2 B è singolare.

- Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
- Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).



Forma canonica di Kronecker

Teorema (Forma canonica di Kronecker)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil di matrici arbitrarie con A, B di dimensione $m \times n$. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili delle dimensioni appropriate tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} O^{(h,g)} & & & & \\ & L & & & \\ & & L^T & & \\ & & & N & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$



Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \quad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \text{diag}\{L_{\epsilon_{h+1}}, L_{\epsilon_{h+2}}, \dots, L_{\epsilon_p}\}, \quad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$



Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \quad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \text{diag}\{L_{\epsilon_{h+1}}, L_{\epsilon_{h+2}}, \dots, L_{\epsilon_p}\}, \quad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$



Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

$$L^T = \text{diag}\{L_{\eta_{h+1}}^T, L_{\eta_{h+2}}^T, \dots, L_{\eta_q}^T\}, \quad N = \text{diag}\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \dots, N^{(u_s)}\}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}, \quad H^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- G è una matrice di Jordan.



Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

$$L^T = \text{diag}\{L_{\eta_{h+1}}^T, L_{\eta_{h+2}}^T, \dots, L_{\eta_q}^T\}, \quad N = \text{diag}\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \dots, N^{(u_s)}\}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}, \quad H^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- G è una matrice di Jordan.



Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

$$L^T = \text{diag}\{L_{\eta_{h+1}}^T, L_{\eta_{h+2}}^T, \dots, L_{\eta_q}^T\}, \quad N = \text{diag}\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \dots, N^{(u_s)}\}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}, \quad H^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- G è una matrice di Jordan.



Pencil di matrici

Distinguiamo due tipi di pencil di matrici:

Definizione (Pencil lineare regolare)

Un pencil di matrici (A, B) viene definito *regolare* se e solo se A e B sono matrici quadrate della stessa dimensione e il determinante $\det(A + \lambda B)$ non è identicamente zero.

Definizione (Pencil lineare singolare)

Un pencil di matrici non regolare viene definito *singolare*.



Pencil regolari

Polinomi invarianti

Assumiamo che il pencil $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ abbia rango r .

Sia $D_j(\lambda)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine j di $\Gamma(\lambda)$ (con $j = 1, \dots, r$). Assumiamo senza perdita di generalità $D_r(\lambda)$ abbia coefficiente 1 e $D_0(\lambda) = 1$. Definiamo *polinomi invarianti* del pencil $\Gamma(\lambda)$ le frazioni

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \quad \dots, \quad i_r(\lambda) = D_1(\lambda).$$

Siano p_i polinomi irriducibili. Possiamo scrivere l'espansione dei polinomi invarianti in fattori irriducibili come

$$i_1(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)^{\alpha_{1,i}}, \quad i_2(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)^{\alpha_{2,i}}, \quad \dots$$

$$i_r(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)^{\alpha_{r,i}}.$$



Pencil regolari

Polinomi invarianti

Assumiamo che il pencil $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ abbia rango r .

Sia $D_j(\lambda)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine j di $\Gamma(\lambda)$ (con $j = 1, \dots, r$). Assumiamo senza perdita di generalità $D_r(\lambda)$ abbia coefficiente 1 e $D_0(\lambda) = 1$. Definiamo *polinomi invarianti* del pencil $\Gamma(\lambda)$ le frazioni

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \quad \dots, \quad i_r(\lambda) = D_1(\lambda).$$

Siano p_i polinomi irriducibili. Possiamo scrivere l'espansione dei polinomi invarianti in fattori irriducibili come

$$i_1(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)^{\alpha_{1,i}}, \quad i_2(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)^{\alpha_{2,i}}, \quad \dots$$

$$i_r(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)^{\alpha_{r,i}}.$$



Pencil regolari

Divisori elementari finiti, divisori elementari infiniti

Definizione (Divisori elementari finiti)

Definiamo *divisori elementari finiti* di $\Gamma(\lambda)$ tutti i polinomi $p_i(\lambda)$ diversi da 1.

Definizione (Divisori elementari infiniti)

Definiamo *divisori elementari infiniti* di $\Gamma(\lambda)$ i divisori elementari finiti del pencil $\lambda A + B$.



Pencil regolari

Forma canonica di Kronecker

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil regolare. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

I blocchi $N^{(u)}$ sono unicamente determinati dai divisori elementari infiniti del pencil, l'ultimo blocco dai divisori elementari finiti.



Pencil regolari

Forma canonica di Kronecker

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil regolare. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

I blocchi $N^{(u)}$ sono unicamente determinati dai divisori elementari infiniti del pencil, l'ultimo blocco dai divisori elementari finiti.



Pencil singolari

Determinare un polinomio di grado minimo nel kernel destro

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil singolare di matrici.

Iterando sul valore di $k = 0$ con passo 1, consideriamo la famiglia di matrici $M_k^{(A,B)}$ di dimensione $(k+2) \times (k+1)$

$$M_0^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad M_1^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$
$$M_k^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

Ogni vettore nel kernel destro di M_k identifica un polinomio di grado k nel kernel (destro) di $\Gamma(\lambda)$.



Pencil singolari

Determinare un polinomio di grado minimo nel kernel destro

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil singolare di matrici.

Iterando sul valore di $k = 0$ con passo 1, consideriamo la famiglia di matrici $M_k^{(A,B)}$ di dimensione $(k+2) \times (k+1)$

$$M_0^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad M_1^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$
$$M_k^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

Ogni vettore nel kernel destro di M_k identifica un polinomio di grado k nel kernel (destro) di $\Gamma(\lambda)$.



Pencil singolari

Indice minimo per le colonne

Assumiamo che il suo rango r sia minore del numero di colonne n . Allora, esistono soluzioni non banali $\mathbf{x}_1(\lambda), \dots, \mathbf{x}_r(\lambda)$ dell'equazione

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0.$$

Il numero massimo di soluzioni linearmente indipendenti è $n - r$. Scegliamo sempre il polinomio di grado minimo e, iterando, otteniamo la sequenza

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots \leq \epsilon_p.$$

Definiamo i termini ϵ_j *indici minimi per le colonne*.



Pencil singolari

Indice minimo per le colonne

Assumiamo che il suo rango r sia minore del numero di colonne n . Allora, esistono soluzioni non banali $\mathbf{x}_1(\lambda), \dots, \mathbf{x}_r(\lambda)$ dell'equazione

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0.$$

Il numero massimo di soluzioni linearmente indipendenti è $n - r$. Scegliamo sempre il polinomio di grado minimo e, iterando, otteniamo la sequenza

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots \leq \epsilon_p.$$

Definiamo i termini ϵ_i *indici minimi per le colonne*.



Pencil singolari

Teorema di riduzione

Teorema (Teorema di riduzione)

Se il polinomio di grado minimo nel kernel destro ha grado $\epsilon > 0$, allora esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} L_\epsilon & 0 \\ 0 & \hat{A} + \lambda\hat{B} \end{bmatrix}.$$

Il pencil ottenuto $\hat{\Gamma}(\lambda) = \hat{A} + \lambda\hat{B}$ non ha polinomi di grado inferiore a ϵ nel proprio kernel destro.



Pencil singolari

Teorema di riduzione

Teorema (Teorema di riduzione)

Se il polinomio di grado minimo nel kernel destro ha grado $\epsilon > 0$, allora esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} L_\epsilon & 0 \\ 0 & \hat{A} + \lambda\hat{B} \end{bmatrix}.$$

Il pencil ottenuto $\hat{\Gamma}(\lambda) = \hat{A} + \lambda\hat{B}$ non ha polinomi di grado inferiore a ϵ nel proprio kernel destro.



Calcolo esatto della forma canonica di Kronecker

Risultati

I risultati ottenuti da questa tesi sono:

- 1 aver esteso la letteratura riguardo al calcolo della forma canonica di Kronecker,
- 2 descritto e dimostrato un algoritmo che la calcola esattamente,
- 3 implementato e testato tale algoritmo.



Calcolo esatto della forma canonica di Kronecker

Snippet di codice

Assumiamo di aver definito la coppia di matrici in forma di Kronecker (A, B) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 42 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Importiamo i moduli necessari.

```
import sage.all as sa
from kcf import kcf_sage as kcf
```



Calcolo esatto della forma canonica di Kronecker

Snippet di codice

Definiamo un metodo per calcolare una matrice casuale invertibile.

```
def random_invertible_matrix(n: int):  
    while True:  
        M = sa.random_matrix(sa.ZZ, n, n)  
        if not (M.is_singular()):  
            return M.change_ring(sa.SR)
```

```
D = random_invertible_matrix(A.nrows())  
C = random_invertible_matrix(A.ncols())
```



Calcolo esatto della forma canonica di Kronecker

Snippet di codice

Calcoliamo la forma canonica di Kronecker della coppia di matrici (A, B) dopo aver cambiato la loro base.

```
A = D.inverse() * A * C
B = D.inverse() * B * C

(L, R), (KCF_A, KCF_B) = kcf.kronecker_canonical_form(
    A, B, transformation=True)
assert ((L*A*R - KCF_A).is_zero()
        and (L*B*R - KCF_B).is_zero()
        and not L.is_singular()
        and not R.is_singular())
print(f'{kcf.stringify_pencil(KCF_A, KCF_B)}')
```

