Computation of Kronecker's Canonical Form in a Computer Algebra System

Giacomo Trapani

Università di Pisa

7/10/2022

Forma canonica di Jordan

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ogni matrice è simile a una matrice di Jordan.

Forma canonica di Jordan

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ogni matrice è simile a una matrice di Jordan.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Calcoliamo il determinante della matrice A, con

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

```
sage: A = matrix(SR, [[sqrt(3), 1], [3, sqrt(3)]])
sage: A.det().is_zero()
True
sage: A.change_ring(CDF).det().is_zero()
False
```

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad\qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad\qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Forma canonica di Kronecker

Teorema (Forma canonica di Kronecker)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil di matrici arbitrarie con A, B di dimensione $m \times n$. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili delle dimensioni appropriate tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} O^{(h,g)} & & & & \\ & L & & & \\ & & L^T & & \\ & & & N & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

Forma canonica di Kronecker
Descrizione dei blocchi

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \qquad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \begin{bmatrix} L_{\epsilon_{h+1}} & & & \\ & L_{\epsilon_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\epsilon_p} \end{bmatrix}, \qquad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \qquad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \begin{bmatrix} L_{\epsilon_{h+1}} & & & \\ & L_{\epsilon_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\epsilon_p} \end{bmatrix}, \qquad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} L^T_{\eta_{h+1}} & & & \\ & L^T_{\eta_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q^T} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)}. \end{bmatrix}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- G è una matrice di Jordan.

Forma canonica di Kronecker

Descrizione dei blocchi

$$L^T = \begin{bmatrix} L^T_{\eta_{h+1}} & & & \\ & L^T_{\eta_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q^T} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)}. \end{bmatrix}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- G è una matrice di Jordan.

Università di Pisa

Forma canonica di Kronecker
Descrizione dei blocchi

$$L^T = \begin{bmatrix} L^T_{\eta_{h+1}} & & & \\ & L^T_{\eta_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q^T} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)}. \end{bmatrix}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- G è una matrice di Jordan.

Pencil di matrici

Distinguiamo due tipi di pencil di matrici:

Definizione (Pencil lineare regolare)

Un pencil di matrici (A, B) viene definito *regolare* se e solo se A e B sono matrici quadrate della stessa dimensione e il determinante $det(A + \lambda B)$ non è identicamente zero.

Definizione (Pencil lineare singolare)

Un pencil di matrici non regolare viene definito *singolare*.

Assumiamo che il pencil $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ abbia rango r.
Sia $D_j(\lambda)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine j di $\Gamma(\lambda)$ (con $j = 1, \ldots, r$). Assumiamo senza perdita di generalità $D_r(\lambda)$ abbia coefficiente 1 e $D_0(\lambda) = 1$. Definiamo *polinomi invarianti* del pencil $\Gamma(\lambda)$ le frazioni

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \; i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \; \ldots, \; i_r(\lambda) = D_1(\lambda).$$

Siano p_i polinomi irriducibili. Possiamo scrivere l'espansione dei polinomi invarianti in fattori irriducibili come

$$i_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{1,i}}, \; i_2(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{2,i}}, \; \ldots$$

$$i_r(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{r,i}}.$$

Assumiamo che il pencil $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ abbia rango r.
Sia $D_j(\lambda)$ il massimo comun divisore dei minori di ordine j di $\Gamma(\lambda)$ (con $j = 1, \ldots, r$). Assumiamo senza perdita di generalità $D_r(\lambda)$ abbia coefficiente 1 e $D_0(\lambda) = 1$. Definiamo *polinomi invarianti* del pencil $\Gamma(\lambda)$ le frazioni

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)},\ i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)},\ \ldots,\ i_r(\lambda) = D_1(\lambda).$$

Siano p_i polinomi irriducibili. Possiamo scrivere l'espansione dei polinomi invarianti in fattori irriducibili come

$$i_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{1,i}},\ i_2(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{2,i}},\ \ldots$$

$$i_r(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} p_i(\lambda)^{\alpha_{r,i}}.$$

Definizione (Divisori elementari finiti)

Definiamo *divisori elementari finiti* di $\Gamma(\lambda)$ tutti i polinomi $p_i(\lambda)$ diversi da 1.

Definizione (Divisori elementari infiniti)

Definiamo *divisori elementari infiniti* di $\Gamma(\lambda)$ i divisori elementari finiti del pencil $\lambda A + B$.

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil regolare. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

I blocchi $N^{(u)}$ sono unicamente determinati dai divisori elementari infiniti del pencil, l'ultimo blocco dai divisori elementari finiti.

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil regolare. Esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

I blocchi $N^{(u)}$ sono unicamente determinati dai divisori elementari infiniti del pencil, l'ultimo blocco dai divisori elementari finiti.

Pencil singolari

Determinare un polinomio di grado minimo nel kernel destro

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil singolare di matrici.
Iterando sul valore di $k = 0$ con passo 1, consideriamo la famiglia di matrici $M_k^{(A,B)}$ di dimensione $(k+2) \times (k+1)$

$$M_0^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad M_1^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad M_k^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

La matrice di base del kernel destro di M_k, divisa in blocchi di dimensione $k+1$, identifica un polinomio di grado k nel kernel destro di $\Gamma(\lambda)$.

Pencil singolari

Determinare un polinomio di grado minimo nel kernel destro

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ un pencil singolare di matrici.
Iterando sul valore di $k = 0$ con passo 1, consideriamo la famiglia di matrici $M_k^{(A,B)}$ di dimensione $(k+2) \times (k+1)$

$$M_0^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad M_1^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad M_k^{(A,B)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ B & A & & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}.$$

La matrice di base del kernel destro di M_k, divisa in blocchi di dimensione $k+1$, identifica un polinomio di grado k nel kernel destro di $\Gamma(\lambda)$.

Assumiamo che il suo rango r sia minore del numero di colonne n. Allora, esistono soluzioni non banali $\mathbf{x_1}(\lambda), ..., \mathbf{x_r}(\lambda)$ dell'equazione

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0.$$

Il numero massimo di soluzioni linearmente indipendenti è $n - r$. Scegliamo sempre il polinomio di grado minimo e, iterando, otteniamo la sequenza

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq ... \leq \epsilon_p.$$

Definiamo i termini ϵ_i *indici minimi per le colonne.*

Assumiamo che il suo rango r sia minore del numero di colonne n. Allora, esistono soluzioni non banali $\mathbf{x_1}(\lambda), ..., \mathbf{x_r}(\lambda)$ dell'equazione

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0.$$

Il numero massimo di soluzioni linearmente indipendenti è $n - r$. Scegliamo sempre il polinomio di grado minimo e, iterando, otteniamo la sequenza

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq ... \leq \epsilon_p.$$

Definiamo i termini ϵ_i *indici minimi per le colonne*.

Teorema (Teorema di riduzione)

Se il polinomio di grado minimo nel kernel destro ha grado $\epsilon > 0$, allora esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} L_\epsilon & 0 \\ 0 & \widehat{A} + \lambda\widehat{B} \end{bmatrix}.$$

Il pencil ottenuto $\widehat{\Gamma}(\lambda) = \widehat{A} + \lambda\widehat{B}$ non ha polinomi di grado inferiore a ϵ nel proprio kernel destro.

Teorema (Teorema di riduzione)

Se il polinomio di grado minimo nel kernel destro ha grado $\epsilon > 0$, allora esistono P, Q matrici quadrate costanti invertibili tali che

$$P\Gamma(\lambda)Q = \begin{bmatrix} L_\epsilon & 0 \\ 0 & \widehat{A} + \lambda\widehat{B} \end{bmatrix}.$$

Il pencil ottenuto $\widehat{\Gamma}(\lambda) = \widehat{A} + \lambda\widehat{B}$ non ha polinomi di grado inferiore a ϵ nel proprio kernel destro.