Computation of Kronecker's Canonical Form in a Computer Algebra System

Giacomo Trapani

Università di Pisa

7/10/2022

Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione

Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione

Forma canonica di Jordan

- Definizione
- Proprietà
- Stabilità della trasformazione

Definizione

Una matrice J diagonale a blocchi viene detta *matrice di Jordan* se e solo se ogni blocco lungo la diagonale è quadrato ed è del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di J, il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.

Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di J, il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.

Proprietà:

- I valori sulla diagonale sono gli *autovalori* di J, il numero di volte in cui occorre è la sua *molteplicità algebrica*.
- A meno di permutazioni di blocchi, due matrici *simili* hanno la stessa forma di Jordan.

Data una matrice quadrata A, la matrice di trasformazione P in

$$A = P^{-1}JP$$

è malcondizionata se A ha un autovalore difettivo o quasi difettivo.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Calcolo simbolico

- Il *calcolo simbolico* (o *computer algebra*) - utilizzando sia *variabili* sia *valori numerici* - permette il calcolo esatto di espressioni matematiche.
- Il sistema per il calcolo simbolico scelto è *SageMath*.

Esempio: calcolo del determinante

Calcoliamo il determinante della matrice A, con

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Confrontiamo i risultati ottenuti definendola inizialmente sull'anello `CDF` (*Complex Double Field*) e, in seguito, sull'anello simbolico `SR` (*Symbolic Ring*).

Esempio: calcolo del determinante

```
sage: A = matrix(SR, [[sqrt(3), 1], [3, sqrt(3)]])
sage: A.det().is_zero()
True
sage: A.change_ring(CDF).det().is_zero()
False
```

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Modello di calcolo

- Useremo l'anello simbolico `SR` per il calcolo esatto.
- SageMath mette a disposizione due metodi che, per il nostro caso d'uso, sono particolarmente utili:
  - `is_zero` per verificare che una espressione sia esattamente uguale a zero;
  - `jordan_form` per calcolare esattamente la forma canonica di Jordan di una matrice.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

- Consideriamo le equazioni differenziali del tipo

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

- Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma canonica di Jordan della matrice A.
- Generalizziamo.
  Introduciamo una matrice $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dunque, consideriamo le equazioni del tipo

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t).$$

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Equazioni differenziali lineari algebriche a coefficienti costanti

Distinguiamo due casi.

1. B non è singolare.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla forma di Jordan della matrice $-B^{-1}A$.
2. B è singolare.
   - Essendo B una matrice singolare, alcune equazioni nel sistema lineare potrebbero essere algebriche o, in altre parole, non contenere derivate.
   - Le soluzioni sono caratterizzate dalla *forma canonica di Kronecker* della coppia di matrici (A, B) (detta anche *linear pencil* o, per brevità, *pencil*).

Forma canonica di Kronecker

Teorema (Forma canonica di Kronecker)

Un pencil arbitrario di matrici (A, B) è strettamente equivalente alla matrice diagonale a blocchi

$$\begin{bmatrix} O^{(h,g)} & & & & \\ & L & & & \\ & & L^T & & \\ & & & N & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

Forma canonica di Kronecker

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \qquad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \begin{bmatrix} L_{\epsilon_{h+1}} & & & \\ & L_{\epsilon_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\epsilon_p} \end{bmatrix}, \qquad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kronecker

- h, g sono il numero massimo di soluzioni costanti e indipendenti delle equazioni

$$(A + \lambda B)\mathbf{x} = 0, \qquad (A^T + \lambda B^T)\mathbf{y} = 0.$$

- I blocchi sono del tipo:

$$L = \begin{bmatrix} L_{\epsilon_{h+1}} & & & \\ & L_{\epsilon_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\epsilon_p} \end{bmatrix}, \qquad L_i^{(i,i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kronecker

$$L^T = \begin{bmatrix} L^T_{\eta_{h+1}} & & & \\ & L^T_{\eta_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q^T} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)}. \end{bmatrix}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- G è una matrice di Jordan.

Forma canonica di Kronecker

$$L^T = \begin{bmatrix} L^T_{\eta_{h+1}} & & & \\ & L^T_{\eta_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q^T} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)}. \end{bmatrix}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- G è una matrice di Jordan.

Forma canonica di Kronecker

$$L^T = \begin{bmatrix} L^T_{\eta_{h+1}} & & & \\ & L^T_{\eta_{h+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\eta_q^T} \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & \\ & N^{(u_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{(u_s)}. \end{bmatrix}$$

- I blocchi N^u sono del tipo

$$N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}.$$

- G è una matrice di Jordan.

Pencil di matrici

Distinguiamo due tipi di pencil di matrici:

Definizione (Pencil lineare regolare)

Un pencil di matrici (A, B) viene definito regolare se e solo se A e B sono matrici quadrate della stessa dimensione e il determinante $det(A + \lambda B)$ non è identicamente zero.

Definizione (Pencil lineare singolare)

Un pencil di matrici non regolare viene definito singolare.

Pencil lineari regolari

Teorema (Forma canonica di Kronecker - pencil regolari)

Ogni pencil regolare può essere ridotto a una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & & & \\ & N^{(u_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(u_s)} & \\ & & & & G + \lambda I \end{bmatrix}.$$

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ pencil regolare, A, B definite in uno spazio vettoriale su un campo F.

1. Cerchiamo un valore $c \in F$ tale che la matrice $A_1 = A + cB$ non è singolare.
2. Riscriviamo $\Gamma(\lambda)$ in funzione di A_1, moltiplichiamo a sinistra per A_1^{-1} ottenendo

$$A_1^{-1}\Gamma(\lambda) = I + (\lambda - c)A_1^{-1}B.$$

3. Sia J la forma canonica di Jordan della matrice $A_1^{-1}B$, P_1 la matrice di trasformazione usata per calcolarla.

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ pencil regolare, A, B definite in uno spazio vettoriale su un campo F.

1. Cerchiamo un valore $c \in F$ tale che la matrice $A_1 = A + cB$ non è singolare.
2. Riscriviamo $\Gamma(\lambda)$ in funzione di A_1, moltiplichiamo a sinistra per A_1^{-1} ottenendo

$$A_1^{-1}\Gamma(\lambda) = I + (\lambda - c)A_1^{-1}B.$$

3. Sia J la forma canonica di Jordan della matrice $A_1^{-1}B$, P_1 la matrice di trasformazione usata per calcolarla.

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ pencil regolare, A, B definite in uno spazio vettoriale su un campo F.

1. Cerchiamo un valore $c \in F$ tale che la matrice $A_1 = A + cB$ non è singolare.
2. Riscriviamo $\Gamma(\lambda)$ in funzione di A_1, moltiplichiamo a sinistra per A_1^{-1} ottenendo

$$A_1^{-1}\Gamma(\lambda) = I + (\lambda - c)A_1^{-1}B.$$

3. Sia J la forma canonica di Jordan della matrice $A_1^{-1}B$, P_1 la matrice di trasformazione usata per calcolarla.

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

Sia $\Gamma(\lambda) = A + \lambda B$ pencil regolare, A, B definite in uno spazio vettoriale su un campo F.

1. Cerchiamo un valore $c \in F$ tale che la matrice $A_1 = A + cB$ non è singolare.
2. Riscriviamo $\Gamma(\lambda)$ in funzione di A_1, moltiplichiamo a sinistra per A_1^{-1} ottenendo
$$A_1^{-1}\Gamma(\lambda) = I + (\lambda - c)A_1^{-1}B.$$
3. Sia J la forma canonica di Jordan della matrice $A_1^{-1}B$, P_1 la matrice di trasformazione usata per calcolarla.

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

Sia J_0 un blocco quadrato nilpotente di dimensione j, J_1 un blocco quadrato nonsingolare di dimensione k, allora J è del tipo

$$\begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_0 \end{bmatrix}.$$

A questo punto, possiamo scrivere

$$P_\pi = \begin{bmatrix} & I^{(k)} \\ I^{(j)} & \end{bmatrix}, \qquad P_\pi^T J P_\pi = J' = \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}$$

4. Riscriviamo il membro destro dell'equazione in funzione della forma canonica di Jordan appena calcolata

$$A_1^{-1}\Gamma(\lambda) = I + (\lambda - c) P_1 P_\pi^{-T} J' P_\pi^{-1} P_1^{-1}.$$

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

Sia J_0 un blocco quadrato nilpotente di dimensione j, J_1 un blocco quadrato nonsingolare di dimensione k, allora J è del tipo

$$\begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_0 \end{bmatrix}.$$

A questo punto, possiamo scrivere

$$P_\pi = \begin{bmatrix} & I^{(k)} \\ I^{(j)} & \end{bmatrix}, \qquad P_\pi^T J P_\pi = J' = \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}$$

4. Riscriviamo il membro destro dell'equazione in funzione della forma canonica di Jordan appena calcolata

$$A_1^{-1}\Gamma(\lambda) = I + (\lambda - c) P_1 P_\pi^{-T} J' P_\pi^{-1} P_1^{-1}.$$

Università di Pisa

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

5. Riscriviamo la matrice identità come $I = P_1 P_1^{-1}$.
   Moltiplichiamo a sinistra per P_1^{-1}, a destra per P_1 e otteniamo

$$P_1^{-1} A_1^{-1} \Gamma(\lambda) P_1 = I + (\lambda - c) P_\pi^{-T} J' P_\pi^{-1}.$$

6. Seguiamo gli stessi passaggi per le matrici P_π^{-T}, P_π^{-1}.
   Otteniamo

$$P_\pi^T P_1^{-1} A_1^{-1} \Gamma(\lambda) P_1 P_\pi = I + (\lambda - c) J'.$$

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari

5. Riscriviamo la matrice identità come $I = P_1 P_1^{-1}$.
   Moltiplichiamo a sinistra per P_1^{-1}, a destra per P_1 e otteniamo

$$P_1^{-1} A_1^{-1} \Gamma(\lambda) P_1 = I + (\lambda - c) P_\pi^{-T} J' P_\pi^{-1}.$$

6. Seguiamo gli stessi passaggi per le matrici P_π^{-T}, P_π^{-1}.
   Otteniamo

$$P_\pi^T P_1^{-1} A_1^{-1} \Gamma(\lambda) P_1 P_\pi = I + (\lambda - c) J'.$$

Procedura per il calcolo della forma canonica di Kronecker di pencil regolari