

БЮРО 1440 (Задача 3)

Лаврущев Иван

31 мая 2025 г.

Доказательство периодичности чётности значений $f(n)$

Рассмотрим:

$$f(n) = 5 \cdot f(n-1) + f(n-2),$$

$$f(0) = 1, f(1) = 3$$

Посчитаем первые несколько членов $f_n \% 2$:

$$f_0 \equiv 1,$$

$$f_1 \equiv 1,$$

$$f_2 = f_1 + f_0 \equiv 1 + 1 \equiv 0$$

$$f_3 = f_2 + f_1 \equiv 0 + 1 \equiv 1$$

$$f_4 = f_3 + f_2 \equiv 1 + 0 \equiv 1$$

$$f_5 = f_4 + f_3 \equiv 1 + 1 \equiv 0$$

$$f_6 = f_5 + f_4 \equiv 0 + 1 \equiv 1$$

$$f_7 = f_6 + f_5 \equiv 1 + 0 \equiv 1$$

$$f_8 = f_7 + f_6 \equiv 1 + 1 \equiv 0$$

Заметим, что четные числа появляются на каждом индексе $3n+2$, докажем более формально:

1. Предположение индукции:

$$f_{3n} \equiv 0$$

$$f_{3n+1} \equiv 1$$

$$f_{3n+2} \equiv 1$$

2. База индукции:

Верно для $n = 0, 1, 2$

3. Шаг индукции:

Пусть для некоторого k справедливо предположение индукции, тогда для следующей тройки чисел:

$$f_{3k+3} = f_{3m} = f_{3k+2} + f_{3k+1} \equiv 0 + 1 \equiv 1,$$

$$f_{3k+4} = f_{3m+1} = f_{3k+3} + f_{3k+2} \equiv 1 + 0 \equiv 1,$$

$$f_{3k+5} = f_{3m+2} = f_{3k+4} + f_{3k+3} \equiv 1 + 1 \equiv 0$$

ЧТД. Предположение индукции верно

Вывод: Четные значения встречаются каждый 3-ий индекс

Решение

Таким образом, если мы хотим вычислить 40-й элемент массива A , то нас интересует $\frac{2}{3} \cdot x = 40$, $x = 60$ - номер (индексация с 1) четного числа в нужной нам тройки \rightarrow номер нужного элемента = 59 (индексация с 1)

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3
4  int taskSolution();
5
6  int main() {
7      int result = taskSolution();
8
9      printf("%d\n", result);
10 }
11
12 int taskSolution() {
13     int func_value_n_1 = 3;
14     int func_value_n_2 = 1;
15     int func_value     = 0;
16
17     for (int n = 2; n < 59; n++) {
18         func_value     = (5 * func_value_n_1 + func_value_n_2) % 100;
19         func_value_n_2 = func_value_n_1;
20         func_value_n_1 = func_value;
21     }
22
23     return func_value;
24 }
```

Последние две цифры числа - 11

Значит правильный ответ: **184153577162052268122747461393215875186211**

Ответ: 184153577162052268122747461393215875186211