

Tema nr. 1

1. Să se găsească cel mai mic număr pozitiv $u > 0$, de forma $u = 10^{-m}$ (sau $u = 2^{-p}$), astfel ca:

$$1.0 +_c u \neq 1.0$$

unde prin $+_c$ am notat operația de adunare efectuată de calculator. Numărul u poartă numele de *precizia mașină*.

2. Operația $+_c$ este *neasociativă*: fie numerele reale $a = 1.0$, $b = u/10$, $c = u/10$, unde u este precizia mașină calculată anterior. Să se verifice că operația de adunare efectuată de calculator nu este asociativă, i.e.:

$$(a +_c b) +_c c \neq a +_c (b +_c c).$$

Găsiți un exemplu pentru care operația \times_c este neasociativă.

3. Aproximarea unor funcții elementare ¹

Implementați următoarele metode de aproximare a valorilor funcțiilor sinus, cosinus și logaritm natural.

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \approx x \frac{P_4(x^2)}{Q_4(x^2)} \quad , \quad \text{pentru } -1 \leq x \leq 1$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \approx \frac{P_4(x^2)}{Q_4(x^2)} \quad , \quad \text{pentru } -1 \leq x \leq 1$$

$$\ln(x) \approx z \frac{P_4(z^2)}{Q_4(z^2)} \quad , \quad \text{unde } z = \frac{x-1}{x+1} \text{ și } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Polinoamele din formulele de mai sus se calculează folosind următoarele relații:

$$P_4(y) = a_0 + y(a_1 + y(a_2 + y(a_3 + ya_4))),$$

$$Q_4(y) = b_0 + y(b_1 + y(b_2 + y(b_3 + yb_4))).$$

Pentru fiecare din funcțiile sinus, cosinus și logaritm natural, mulțimea coeficienților $\{a_i; i = 0, \dots, 4\}$, $\{b_i; i = 0, \dots, 4\}$ este diferită.

¹I. Koren and O. Zinaty, "Evaluating elementary functions in a numerical coprocessor based on rational approximations," in IEEE Transactions on Computers, vol. 39, no. 8, pp. 1030-1037, Aug. 1990, doi: 10.1109/12.57042.

Pentru funcția *sinus*:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1805490264.690988571178600370234394843221 \\a_1 &= -164384678.227499837726129612587952660511 \\a_2 &= 3664210.647581261810227924465160827365 \\a_3 &= -28904.140246461781357223741935980097 \\a_4 &= 76.568981088717405810132543523682\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_0 &= 2298821602.638922662086487520330827251172 \\b_1 &= 27037050.118894436776624866648235591988 \\b_2 &= 155791.388546947693206469423979505671 \\b_3 &= 540.567501261284024767779280700089 \\b_4 &= 1.0\end{aligned}$$

Pentru funcția *cosinus*:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1090157078.174871420428849017262549038606 \\a_1 &= -321324810.993150712401352959397648541681 \\a_2 &= 12787876.849523878944051885325593878177 \\a_3 &= -150026.206045948110568310887166405972 \\a_4 &= 538.333564203182661664319151379451\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_0 &= 1090157078.174871420428867295670039506886 \\b_1 &= 14907035.776643879767410969509628406502 \\b_2 &= 101855.811943661368302608146695082218 \\b_3 &= 429.772865107391823245671264489311 \\b_4 &= 1.0\end{aligned}$$

Pentru funcția *ln*:

$$\begin{aligned}a_0 &= 75.151856149910794642732375452928 \\a_1 &= -134.730399688659339844586721162914 \\a_2 &= 74.201101420634257326499008275515 \\a_3 &= -12.777143401490740103758406454323 \\a_4 &= 0.332579601824389206151063529971\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_0 &= 37.575928074955397321366156007781 \\b_1 &= -79.890509202648135695909995521310 \\b_2 &= 56.215534829542094277143417404711 \\b_3 &= -14.516971195056682948719125661717 \\b_4 &= 1.0\end{aligned}$$

Pentru a evita împărțirile cu valori apropiate de 0 în calculele de mai sus, numitorii care au modulul mai mic decât 10^{-12} vor fi înlocuiți cu 10^{-12} .

Pentru fiecare funcție, afișați argumentul funcției, valoarea calculată cu formulele de mai sus, valoarea funcției corespunzătoare din biblioteca matematică (pentru același argument) și modulul diferenței dintre valoarea calculată de voi și cea cu biblioteca matematică.

Bonus 10 pt. : Pentru funcțiile sinus și cosinus, folosind periodicitatea lor și alte relații ale funcțiilor trigonometrice, calculați valorile lor pentru orice argument real, nu doar pentru cele din intervalul $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.