

Tema nr. 8

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcție reală. Să se aproximeze un punct de minim (local sau global) al funcției F folosind metoda Steffensen. Să se verifice dacă soluția obținută este punct de minim prin verificarea semnului celei de-a doua derivate în punctul găsit. Să se compare soluțiile obținute folosind cele două moduri de aproximare a derivatei funcției F , din punctul de vedere al numărului de iterații efectuate pentru obținerea soluțiilor (pentru aceeași precizie $\epsilon > 0$).

Minimizarea funcțiilor de o variabilă

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcție reală de două ori derivabilă, $F \in C^2(\mathbf{R})$, pentru care vrem să aproximăm soluția x^* a problemei de minimizare:

$$\min\{F(x); x \in V\} \iff F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in V \quad (1)$$

unde $V = \mathbf{R}$ (x^* este punct de minim global) sau $V = [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ (punct de minim local). Se numește *punct critic* pentru funcția F , un punct \tilde{x} care este rădăcină a primei derivate a lui F :

$$F'(\tilde{x}) = 0. \quad (2)$$

Se știe că pentru funcțiile de două ori derivabile, punctele de minim ale funcției F se găsesc printre punctele critice. Un punct critic este punct de minim dacă:

$$F''(x^*) > 0.$$

Vom căuta punctele de minim ale lui F printre soluțiile ecuației (2). Mai jos este descrisă metoda Steffensen de aproximare a unei rădăcini a ecuației neliniare:

$$g(x) = 0 \quad (g(x) = F'(x)).$$

Metoda Steffensen

Rădăcina x^* se aproximează construind un șir $\{x_k\}$ care, în anumite condiții, converge la soluția x^* căutată. Convergența șirului depinde de alegerea primului element al șirului.

Elementul $k + 1$ al șirului, x_{k+1} , se construiește folosind elementul precedent din șir, x_k , astfel:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \frac{g(x_k)^2}{g(x_k + g(x_k)) - g(x_k)} = x_k - \Delta x_k, \\ \Delta x_k &= \frac{g(x_k)^2}{g(x_k + g(x_k)) - g(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, x_0 - \text{dat.}\end{aligned}\tag{3}$$

Convergența șirului $\{x_k\}$ la x^* depinde de alegerea primului element al șirului, x_0 . Dacă în relația de mai sus, numitorul din calculul lui Δx_k este 0, atunci $\Delta x_k = 0$, algoritmul se oprește, iterația la care s-a ajuns poate fi considerată o aproximare a soluției căutate.

La calculul lui x_{k+1} , să se calculeze o singură dată valoarea $g(x_k)$ și să se folosească valoarea obținută în formulele (3).

Observație importantă: Alegerea elementului inițial, x_0 , poate determina convergența sau divergența șirului x_k la x^* . De obicei, o alegere a datelor inițiale în vecinătatea lui x^* asigură convergența $x_k \rightarrow x^*$ pentru $k \rightarrow \infty$.

Nu este necesară memorarea întregului șir $\{x_k\}$ ci avem nevoie doar de 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare x_{k_0} aproximează rădăcina căutată, x^* , $x_{k_0} \approx x^*$ (x_{k_0} este ultimul element al șirului care se calculează) atunci când diferența dintre două iterații succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon \tag{4}$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluția x^* . Un alt test de oprire a algoritmului, care ar putea înlocui relația (4) este $|g(x_{k_0})| < \epsilon$. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluției x^* este următoarea:

Schema de calcul

```
se alege random  $x_0$  (sau se citește de la tastatură) ;  
//(pentru convergența șirului  $\{x_k\}$  este bine de ales  
//  $x_0$  în vecinătatea soluției căutate)  
 $x = x_0$  ;  
 $k = 0$  ;  
do  
  {  
    - if (  $|g(x + g(x)) - g(x)| \leq \epsilon$  ) return  $x$ ;  
    - calculează  $\Delta x$  cu formula (3) ;  
    -  $x = x - \Delta x$  ;  
    -  $k = k + 1$ ;  
  }  
while ( $|\Delta x| \geq \epsilon$  și  $k \leq k_{\max}$  și  $|\Delta x| \leq 10^8$ )  
if (  $|\Delta x| < \epsilon$  ) return  $x$ ; //  $x_k \approx x^*$  ;  
else "divergență" ; //(de încercat schimbarea lui  $x_0$ )
```

Pentru a calcula valoarea derivatei funcției F într-un punct oarecare se vor folosi următoarele două formule de aproximare:

$$F'(x) \approx G_i(x, h) \quad , \quad i = 1, 2$$

unde

$$G_1(x, h) = \frac{3F(x) - 4F(x - h) + F(x - 2h)}{2h}$$

$$G_2(x, h) = \frac{-F(x + 2h) + 8F(x + h) - 8F(x - h) + F(x - 2h)}{12h}$$

cu $h = 10^{-5}$ sau 10^{-6} (poate fi considerat ca parametru de intrare). Se va verifica dacă punctul critic calculat cu metoda Steffensen este punct de minim pentru funcția F , verificând relația:

$$F''(x^*) > 0.$$

Pentru a aproxima F'' , derivata de ordinul 2 a funcției F , se va folosi formula:

$$F''(x) \approx \frac{-F(x + 2h) + 16F(x + h) - 30F(x) + 16F(x - h) - F(x - 2h)}{12h^2}$$

Exemple

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 3 \quad , \quad x^* = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41421356237$$

$$F(x) = x^2 + \sin(x) \quad , \quad x^* \approx -0.4501836112948$$

$$F(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \quad , \quad x^* \in \{1, 2\}$$