Tema nr. 4

În fişierele (a_i.txt, b_i.txt, $i=1,\ldots,5$) postate pe pagina laboratorului, sunt memorate pentru 5 sisteme liniare cu matrice rară (cu '*puține*' elemente $a_{ij} \neq 0$) şi simetrică ($A=A^T$), $Ax = b$, următoarele elemente:

- n dimensiunea sistemului,
- $a_{ij} \neq 0,\ i,\ j\ (j \le i)$ - elementele nenule din partea inferior triunghiulară a matricei rare şi simetrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, indicii de linie și de coloană ai respectivului element,
- $b_i\ ,\ i=1,2,\ \ldots\ ,\ n$ elementele vectorului termenilor liberi $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Folosind fișierele atașate, să se citească dimensiunea sistemului, vectorul termenilor liberi și să se genereze vectorii necesari pentru memorarea economică a matricei rare (se va folosi schema de memorare rară descrisă în Tema 3). Se presupune că elementele nenule ale matricei sunt plasate aleator în fișier (nu sunt ordonate după indicii de linie sau de coloană, sau altfel). Să se verifice că elementele de pe diagonala matricei sunt nenule.
   Se consideră dată precizia calculelor $\varepsilon = 10^{-p}$.

2. Cu această memorare rară a matricei A să se aproximeze soluția sistemului liniar:
$$Ax=b \tag{1}$$
   folosind metoda Jacobi. Afişaţi numărul de iteraţii efectuate, în caz de convergenţă.

3. Să se verifice soluția calculată afișând norma:
$$\left\| Ax_J - b \right\|_\infty$$
   unde x_J este aproximarea soluției exacte obținută cu algoritmul Jacobi.

4. În toate calculele care includ matricea $\boldsymbol{A}$, se cere să se utilizeze memorarea rară a matricei (să nu se aloce în program nici o matrice clasică).

5. Calcularea vectorului de la pasul $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$, să se facă cu o singură parcurgere a structurii rare asociate matricei $\boldsymbol{A}$. Ar fi util ca la citirea matricei din fişier şi construcţia structurii rare, să alocaţi un vector suplimentar $\boldsymbol{d}$ care să memoreze elementele de pe diagonala matricei $\boldsymbol{A}$.

Bonus 40 pt. : calculul soluţiei unui sistem liniar rar folosind metoda Jacobi cu altă schemă de memorare rară.

Metode iterative de rezolvare a sistemelor liniare

Pp. că $\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, vom nota soluția exactă a sistemului (1) cu $\boldsymbol{x}^*$:

$$\boldsymbol{x}^* := \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare au fost deduse pentru sistemele de dimensiune '*mare*' ($\boldsymbol{n}$ '*mare*'), cu matricea sistemului $\boldsymbol{A}$, matrice rară (cu '*puține*' elemente $\boldsymbol{a_{ij}}$ nenule). În cazul metodelor iterative matricea $\boldsymbol{A}$ nu se transformă (ca în cazul algoritmului de eliminare Gauss sau a descompunerilor $\boldsymbol{LU}$ sau a factorizărilor $\boldsymbol{QR}$) ci sunt folosite doar elementele nenule ale matricei pentru aproximarea soluției exacte $\boldsymbol{x}^*$. Pentru matricele rare se folosesc scheme de memorare economice specifice.

Pentru a aproxima soluția $\boldsymbol{x}^*$ se construiește un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ care, în anumite condiții, converge la soluția exactă $\boldsymbol{x}^*$ a sistemului (1):

$$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}^* \ , \ \textbf{pentru } \boldsymbol{k} \to \infty$$

Vectorul $x^{(0)}$ se inițializează, de obicei, cu 0:

$$x_i^{(0)} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

Atunci când converge, limita șirului este chiar x^* soluția sistemului (1).

Metoda Jacobi

Vom presupune că toate elementele diagonale ale matricei A sunt nenule:

$$a_{ii} \neq 0 \ , \ i=1,\ldots,n$$

Când se citește matricea din fișier, se cere să se verifice dacă elementele diagonale ale matricei sunt nenule ($|a_{ii}| > \varepsilon, \ \forall i$). Dacă există un element diagonal nul, nu se poate rezolva sistemul liniar folosind metoda iterativă Jacobi.

Șirul de vectori generat de metoda Jacobi este următorul:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} \ , \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Formula de calcul de mai sus trebuie adaptată noului tip de memorare a matricei A. În sumele de mai sus sunt necesare doar elementele a_{ij} nenule.

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} = \sum_{a_{ij} \neq 0, \, j<i} a_{ij} x_j^{(k)} \qquad (4)$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} = \sum_{a_{ji} \neq 0,\, j>i} a_{ji} x_j^{(k)} \tag{5}$$

Suma din relația (4) se va calcula la parcurgerea elementelor nenule (din partea inferior triunghiulară a matricei) de pe linia $\boldsymbol{i}$. Elementele din suma (5) vor fi adăugate la citirea liniilor $\boldsymbol{j}$ care conțin elemente nenule cu indicele $\boldsymbol{i}$. Prin urmare, la citirea elementelor nenule de pe o linie $\boldsymbol{i}$ oarecare, (***val ≠0, p***), vom calcula suma (4) şi vom adăuga elemente ale sumelor (5) pentru componentele $x_p^{(k+1)}$, elemente de forma $\boldsymbol{val * x_i^{(k)}}$.

Se știe că dacă matricea $\boldsymbol{A}$ are diagonala dominantă în raport cu liniile (sau coloanele) matricei, adică:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \textbf{pentru toţi } i = 1, \ldots, n$$

șirul $\boldsymbol{\{x^{(k)}\}}$ construit cu metoda Jacobi converge la soluția $\boldsymbol{x^*}$. Pentru metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare convergența sau divergența șirului $\boldsymbol{\{x^{(k)}\}}$ nu depinde de alegerea iterației inițiale $\boldsymbol{x^{(0)}}$.

Pentru a aproxima soluția $\boldsymbol{x^*}$ trebuie să calculăm un termen al șirului $\boldsymbol{x^{(k)}}$ pentru $\boldsymbol{k}$ suficient de mare. Se știe că, dacă diferența dintre doi termeni consecutivi ai șirului $\boldsymbol{\{x^{(k)}\}}$ devine suficient de *‚mică'*, atunci ultimul vector calculat este *‚aproape'* de soluția căutată:

$$\begin{gathered} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq \varepsilon \Rightarrow \| x^{(k)} - x^* \| \leq c\varepsilon \;,\; c \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \\ x^{(k)} \approx x^*,\; x_J = x^{(k)} \end{gathered} \tag{6}$$

Nu este nevoie să memorăm toți vectorii calculați ai șirului $\boldsymbol{\{x^{(k)}\}}$ ci avem nevoie doar de ultimul vector, cel care satisface prima inegalitate din relația (6) ($\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq \varepsilon$). În program s-ar putea utiliza doar doi vectori:

$\boldsymbol{x^c}$ pentru vectorul $\boldsymbol{x^{(k+1)}}$ şi $\boldsymbol{x^p}$ pentru vectorul $\boldsymbol{x^{(k)}}$.

Schemă de implementare a unei metode iterative

$x^c = x^p = 0;$

$k=0;$

do

{

$x^p = x^c;$

calculează noul x^c folosind x^p (cu formula (3));

calculează $\Delta x = || x^c - x^p||;$

$k=k+1;$

}

while ($\Delta x \geq \varepsilon$ **şi** $k \leq k_{max}$ **şi** $\Delta x \leq 10^8$) //($k_{max} = 10000$)

if ($\Delta x < \varepsilon$) $x^c \approx x^*$; // x^c este aproximarea căutată a soluției

else *‚divergență’;*

Exemplu:

Matricea:

$$A=\begin{pmatrix} 102.5 & 0.0 & 2.5 & 0.0 & 0.73 \\ 0.0 & 104.88 & 1.05 & 0.0 & 0.33 \\ 2.5 & 1.05 & 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 101.3 & 1.5 \\ 0.73 & 0.33 & 0.0 & 1.5 & 102.23 \end{pmatrix} \quad , \quad b=\begin{pmatrix} 6.0 \\ 7.0 \\ 8.0 \\ 9.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Presupunem că:

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 5.0 \end{pmatrix}$$

$x_0^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_0 - a_{01}x_1^{(0)} - a_{02}x_2^{(0)} - a_{03}x_3^{(0)} - a_{04}x_4^{(0)}) / a_{00} =$$

$$= (6.0 - 0.0 * 2.0 - 2.5 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.73 * 5.0) / 102.5$$

(varianta economică folosește doar elementele nenule de pe prima linie)

$$= (6.0 - 2.5 * 3.0 - 0.73 * 5.0) / 102.5 = -0.0502...$$

Calculul componentei $x_0^{(1)}$ în cazul memorării rare şi simetrice:

- Elementul ***2.5*3.0*** va fi calculat la citirea celei de a 3-a linii
- Elementul ***0.73*5.0*** va fi calculat la citirea ultimei linii
- Împărţirea la elementul diagonal $\boldsymbol{a_{00}=102.5}$ se va face la final, după ce a fost parcursă toată matricea

$x_1^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_1 - a_{10} x_0^{(0)} - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)} - a_{14} x_4^{(0)}) / a_{11} =$$

$$= (7.0 - 0.0 * 1.0 - 1.05 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.33 * 5.0) / 104.88$$

(varianta economică folosește elementele nenule de pe a 2-a linie)

$$= (7.0 - 1.05 * 3.0 - 0.33 * 5.0) / 104.88 = 0.021$$

Calculul componentei $x_1^{(1)}$ în cazul memorării rare şi simetrice:

- Elementul ***1.05*3.0*** va fi calculat la citirea celei de a 3-a linii
- Elementul ***0.33*5.0*** va fi calculat la citirea ultimei linii
- Împărţirea la elementul diagonal ***a₁₁=104.88*** se va face la final, după ce a fost parcursă toată matricea

$x_2^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_2 - a_{20} x_0^{(0)} - a_{21} x_1^{(0)} - a_{23} x_3^{(0)} - a_{24} x_4^{(0)}) / a_{22} =$$

$$= (8.0 - 2.5 * 1.0 - 1.05 * 2.0 - 0.0 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 100.0$$

(varianta economică folosește elementele nenule de pe linia a 3-a)

$$= (8.0 - 2.5 * 1.0 - 1.05 * 2.0) / 100.00 = 0.034$$

Calculul componentei $x_2^{(1)}$ în cazul memorării rare și simetrice:

- Elementul ***2.5*1.0*** va fi calculat la citirea celei de a 3-a linii
- Elementul ***1.05*2.0*** va fi calculat la citirea ultimei linii
- Împărțirea la elementul diagonal ***a₂₂=100.0*** se va face la final, după ce a fost parcursă toată matricea

$x_3^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_3 - a_{30} x_0^{(0)} - a_{31} x_1^{(0)} - a_{32} x_2^{(0)} - a_{34} x_4^{(0)}) / a_{33} =$$

$$= (9.0 - 0.0 * 1.0 - 0.0 * 2.0 - 0.0 * 3.0 - 1.5 * 5.0) / 101.3$$

(varianta economică folosește elementele nenule de pe linia a 4-a)

$$= (9.0 - 1.5 * 5.0) / 101.3 = 0.0148$$

Calculul componentei $\boldsymbol{x_3^{(1)}}$ în cazul memorării rare şi simetrice:

- Elementul ***1.5*5.0*** va fi calculat la citirea ultimei linii
- Împărțirea la elementul diagonal ***a₃₃=101.3*** se va face la final, după ce a fost parcursă toată matricea

$\boldsymbol{x_4^{(1)}}$ **(**varianta clasică)

$$= (\boldsymbol{b_4 - a_{40}x_0^{(0)} - a_{41}x_1^{(0)} - a_{42}x_2^{(0)} - a_{43}x_3^{(0)}) / a_{44}} =$$

$$\mathbf{= (1.0 - 0.73 * 1.0 - 0.33 * 2.0 - 0.0 * 3.0 - 1.5 * 4.0) / 102.23}$$

(varianta economică folosește elementele nenule de pe utlima linie)

$$= \mathbf{(1.0 - 0.73 * 1.0 - 0.33 * 2.0 - 1.5 * 4.0) / 102.23 = -0.0625}$$

Calculul componentei $\boldsymbol{x_4^{(1)}}$ în cazul memorării rare şi simetrice:

- Elementele ***0.73*1.0, 0.33*2.0, 1.5*4.0*** va fi calculate la citirea ultimei linii
- Împărțirea la elementul diagonal ***a₄₄=102.23*** se va face la final, după ce a fost parcursă toată matricea

Sistemele memorate în fișierele postate pe pagina cursului au următoarele soluții:

- (a_1.txt, b_1.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 1, \forall i = 0,\dots,n-1}$,
- (a_2.txt, b_2.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 1.0/3.0, \forall i = 0,\dots,n-1}$
- (a_3.txt, b_3.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 2.0 * i / 5.0 , \forall i = 0,\dots,n-1}$
- (a_4.txt, b_4.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = n - i - 1, \forall i = 0,\dots,n-1}$
- (a_5.txt, b_5.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 2.0 , \forall i = 0,\dots,n-1}$. (?!?)