



## Atividade: Aumento na Passagem

### Habilidades

**EM12MT09** Reconhecer função quadrática e suas representações algébrica e gráfica, compreendendo o modelo de variação determinando domínio, imagem, máximo e mínimo, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas como os de movimento uniformemente variado.

### Para o professor

#### Objetivos específicos

OE1 Reconhecer outras possibilidades de escala nos eixos cartesianos para a representação gráfica de funções.

OE2 Exercitar a modelagem algébrica problemas.

OE3 Reconhecer função quadrática e seu gráfico.

OE4 Inferir domínio e imagem própria da situação problema.

OE5 Reconhecer as vantagens do uso da forma do vértice para a determinação dos valores de máximo ou mínimo.

OE6 Inferir sobre outros pontos notáveis na função quadrática: zeros da função.

#### Observações e recomendações

Prezado colega esta atividade tem como objetivo aplicar o conceito de otimização em função quadrática num contexto econômico, chamando atenção para o aluno de:

- As vantagens e desvantagens de se trabalhar num plano cartesiano cujos eixos estão em escalas distintas.
- Guiá-lo para uma modelagem algébrica da situação. Identificar se a relação encontrada é uma função quadrática e se o gráfico apresentado é de uma parábola.
- Fazer uma discussão a respeito do domínio e da imagem da função levando em consideração a modelagem da situação.
- Reforçar a utilização da passagem da forma polinomial para a forma canônica, apontando assim de maneira direta o faturamento máximo e o aumento que irá gerar o faturamento máximo.
- Apresentar em que pontos a parábola intersecta os eixos coordenados, levando-os a fazer inferências sobre a utilização das coordenadas desses pontos no contexto do problema.

Sugerimos que o professor além de fazer a atividade antes de aplicá-la, leia com atenção as respostas das atividades, nela o colega encontrará sugestões que o auxiliarão na condução dessa atividade na sua sala de aula.

## Atividade

Uma empresa de transporte rodoviário, faz o trajeto entre duas cidades brasileiras diariamente, e transporta mensalmente, uma média de 1200 passageiros. O custo individual da passagem cobrado pela empresa, é atualmente de R\$40,00, porém seus diretores estudam um aumento desse valor. Para isso contratam uma outra empresa para realizar uma pesquisa de mercado, a pesquisa realizada por essa empresa, estima que a cada R\$1,00 de aumento no preço da passagem, 10 passageiros deixarão de viajar pela transportadora. De posse desta informação, os diretores desejam saber qual é o preço de passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento dessa transportadora. Para isso vamos responder os itens a seguir:

- Se aumentarmos em R\$2,00 a passagem qual será seu novo preço? Qual a nova quantidade de passageiros? Qual será o novo faturamento em reais? E se o aumento fosse de R\$12,00?
- Preencha a tabela a seguir, seguindo o padrão que modela a situação.

| Aumento em reais | Novo preço       | Nova quantidade de passageiros | Faturamento em reais |
|------------------|------------------|--------------------------------|----------------------|
| 0                | $40 + 1.0 = 40$  | $1200 - 10.0 = 1200$           | $40.1200 = 48000$    |
| 10               | $40 + 1.10 = 50$ | $1200 - 10.10 = 1100$          | $50.1100 = 55000$    |
| 20               | $40 + 1.20 = 60$ | $1200 - 10.20 = 1000$          | $60.1000 = 60000$    |
| 30               |                  |                                |                      |
| 40               |                  |                                |                      |
| 50               |                  |                                |                      |
| 60               |                  |                                |                      |
| 70               |                  |                                |                      |
| 80               |                  |                                |                      |
| 90               |                  |                                |                      |
| 100              |                  |                                |                      |
| 110              |                  |                                |                      |
| 130              |                  |                                |                      |

- Escolha um dos planos cartesianos a seguir, para representar os pontos da tabela acima e os represente no plano escolhido.

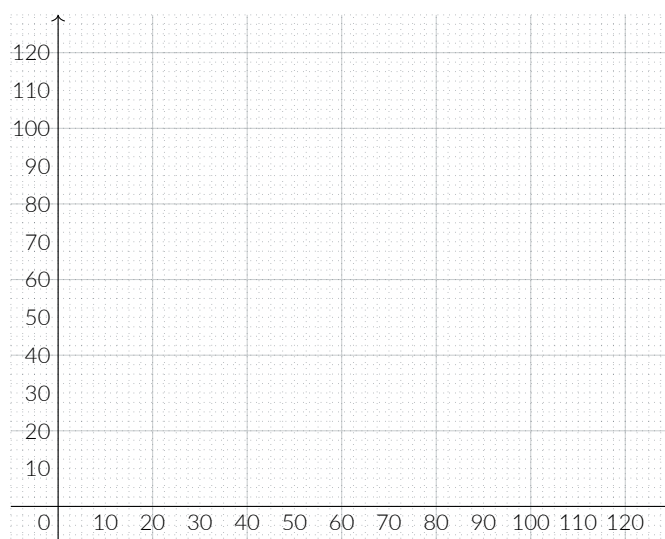


Figura 1: Gráfico A

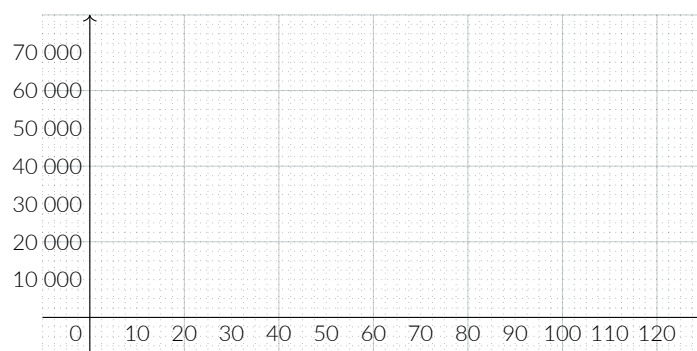


Figura 2: Gráfico B

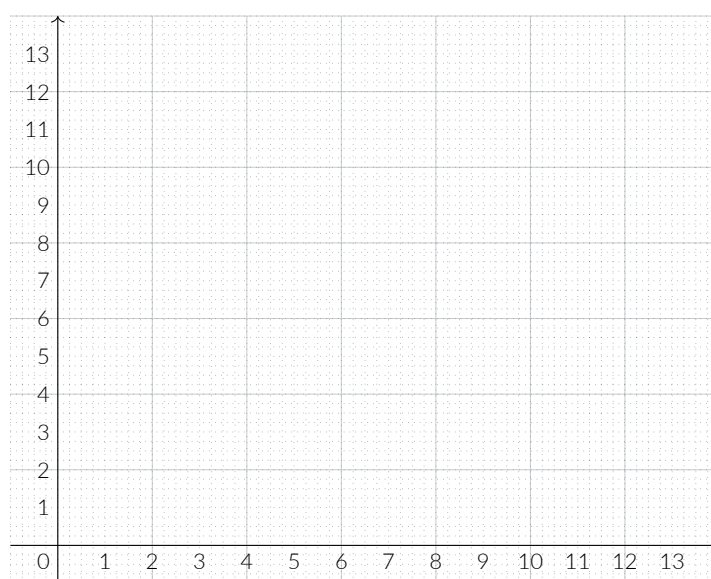


Figura 3: Gráfico C

- d) Qual “gráfico” você escolheu? Justifique sua escolha.
- e) A escala no “gráfico” escolhido é a mesma nos dois eixos? Quais os “gráficos” do item “b” possuem a mesma escala nos dois eixos?
- f) Quais as vantagens e desvantagens em ambos os casos (eixos em escalas distintas e eixos em mesma escala)?
- g) Explique o motivo do valor 130 estar na tabela e não estar no gráfico. Justifique levando em consideração o valor de sua imagem dentro do conceito da atividade.
- h) Podemos afirmar que os pontos obtidos, são pontos de uma parábola? Justifique sua resposta.
- i) Ao representarmos por  $x$  o aumento, em reais pretendido, exiba uma expressão algébrica que represente o novo preço da passagem (já com o aumento de  $x$  reais).
- j) Ao representarmos por  $x$  o aumento, em reais pretendido, exiba uma expressão algébrica que represente a nova quantidade mensal de passageiros (já com o aumento de  $x$  reais).
- k) Ao representarmos por  $x$  o aumento, em reais pretendido, exiba uma expressão algébrica que represente o faturamento da empresa em função de  $x$ , dado por  $F(x)$ .

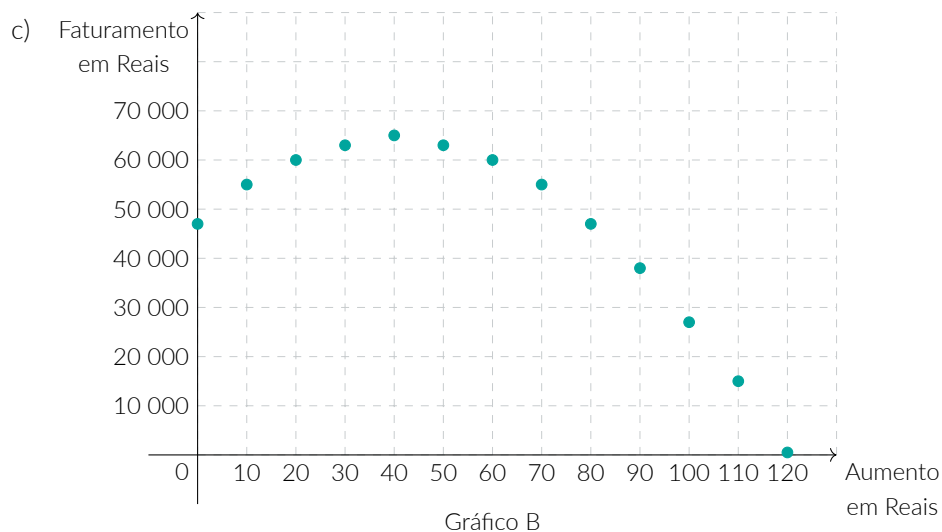
- l) Se representarmos expressão obtida no item anterior por uma função  $F : A \rightarrow B$ , onde  $A$  é seu domínio e  $B$  é sua imagem, podemos afirmar que  $F$  é uma função quadrática? Justifique sua resposta
- m) Apresente os conjuntos  $A$  (domínio de  $F$ ) e  $B$  (imagem  $F$ ) que satisfazem os valores possíveis na situação apresentada.
- n) Em que ponto o gráfico corta o eixo das ordenadas? E o que esse valor representa na situação?
- o) Em que ponto o gráfico corta o eixo das abscissas? O que esse ponto representa na situação?
- p) E se o domínio fosse o  $\mathbb{R}$ , qual seria o outro ponto de intersecção com o eixo das abscissas? Por que ele não é considerado na situação?
- q) Utilize o processo de completar quadrados e apresente a função  $F$  em sua forma canônica.
- r) Enfim, qual é o aumento no preço de passagem, em reais, que vai maximizar o faturamento dessa transportadora?
- s) Qual é o valor desse faturamento máximo? Este valor aparece tabela e no gráfico?

### Solução:

- a) Novo preço será de  $40 + 2 = 42$  reais; A nova quantidade de passageiros será de  $1.200 - 10 \times 2 = 1.200 - 20 = 1.180$  passageiros; O novo faturamento será de  $42 \times 1180 = 49.560$  reais. No caso do aumento ser de doze reais teremos na ordem: R\$ 52,00 de novo preço; 1080 passageiros; E R\$ 56.160,00 de faturamento.

b)

| Aumento em reais | Novo preço | Nova quantidade de passageiros | Faturamento em reais |
|------------------|------------|--------------------------------|----------------------|
| 0                | 40         | 1.200                          | 48.000               |
| 10               | 50         | 1.100                          | 55.000               |
| 20               | 60         | 1.000                          | 60.000               |
| 30               | 70         | 900                            | 63.000               |
| 40               | 80         | 800                            | 64.000               |
| 50               | 90         | 700                            | 63.000               |
| 60               | 100        | 600                            | 60.000               |
| 70               | 110        | 500                            | 55.000               |
| 80               | 120        | 400                            | 48.000               |
| 90               | 130        | 300                            | 39.000               |
| 100              | 140        | 200                            | 28.000               |
| 110              | 150        | 100                            | 15.000               |
| 120              | 160        | 0                              | 0                    |
| 130              | 170        | -100                           | -17.000              |



d) O gráfico B, pois nos outros, os valores do eixo das ordenadas não atendiam.

e) Não. Gráfico A e gráfico C.

f) **Escala distintas:** (*Vantagens*) Podemos visualizar melhor o comportamento do gráfico pois ele passa a ficar visível num espaço menor, além de traçá-lo com mais facilidade.

**Escala distintas:** (*Desvantagens*) Não podemos analisá-lo geometricamente de maneira satisfatória, as variações entre os eixos são muito discrepantes, e isso pode levar a interpretações equivocadas.

**Escala iguais:** (*Vantagens*) Podemos analisá-lo tanto numericamente quanto geometricamente, inferindo com mais precisão.

**Escala iguais:** (*Desvantagens*) Precisaríamos de muito espaço e/ou bastante compactação para desenharmos fielmente este gráfico. Note como ficaria:

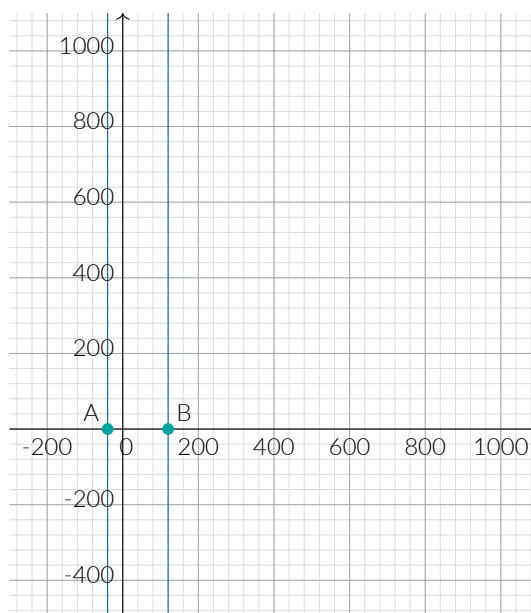


Figura 4: Escala real

- g) A imagem de **130** é negativa, logo se a nova passagem for de **130** reais “haveria” um faturamento negativo, o que não é condizente para os dados apresentados no contexto.
- h) Sim, por vários motivos: já vimos que o gráfico de toda função quadrática é uma parábola, e que as função quadráticas são as únicas funções em que as diferenças das imagens, geram uma Progressão aritmética:

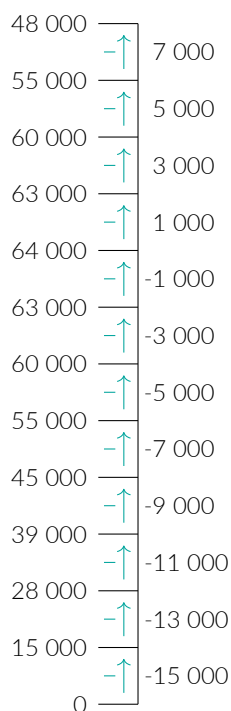


Figura 5: Progressão aritmética

- i)  $40 + x$ .
- j)  $1200 - 10x$ .
- k)  $F(x) = (40 + x) \cdot (1200 - 10x)$  ou  $F(x) = -10x^2 + 800x + 48.000$ .
- l) Sim. Ou pela justificativa dada no item ‘f’ ou pelo fato da função quadrática ser uma função do polinômio de grau 2, e a função em questão, apresenta  $a = -10$  ;  $b = 800$  e  $c = 48.000$  coeficientes do polinômio do segundo grau.
- m)  $A$  é o conjunto dos números naturais de **0** a **120**;  $B$  é o conjunto dos números naturais contidos no intervalo:  $[0, 64.000]$  que são imagens dos elementos do conjunto  $A$ .
- n) R\$ 48.000,00 que representa o faturamento atual, inicial ou seja, o faturamento sem aumento no valor da passagem.
- o) No ponto  $(120, 0)$ , representa que se o aumento for de R\$ 120,00, não haverá faturamento, ou seja, a empresa faturaria zero reais.
- p) O ponto seria  $(-40, 0)$ , ele é desconsiderado pois sua abscissa é negativa, e não cabe na situação utilizar “aumentos negativos”.

$$\begin{aligned} \text{q) } F(x) = -10x^2 + 800x + 48.000 &\iff F(x) = -10(x^2 - 80x) + 48.000 \iff F(x) = -10(x^2 - 80x + 1.600 - 1.600) + 48.000 \\ &\iff F(x) = -10(x - 40)^2 + 16.000 + 48.000 \iff F(x) = -10(x - 40)^2 + 64.000. \end{aligned}$$

r) R\$ 40,00.

s) R\$ 6400,00. Sim, em ambos.