Atividade: Bolinha na roda da bibicleta

Para o professor

Objetivos específicos

OE1 Familiarizar o estudante com os arcos e ângulos mais comumente encontrados no estudo de trigonometria na circunferência.

OE2 Introduzir a ideia do seno e do cosseno como “distâncias orientadas” de pontos no círculo aos eixos coordenados.

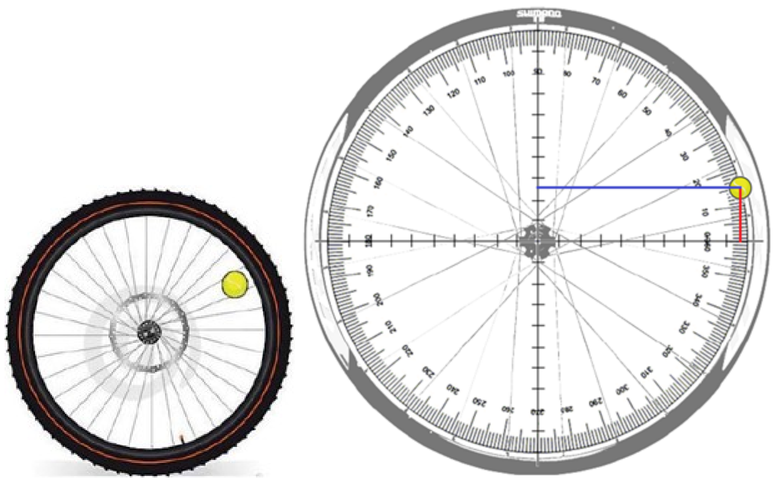
Observações e recomendações

Professor, procure ajudar os alunos a associar os valores encontrados nessa atividade às coordenadas do ponto sobre o qual está a extremidade do arco em estudo, ou a bolinha amarela.

Atividade

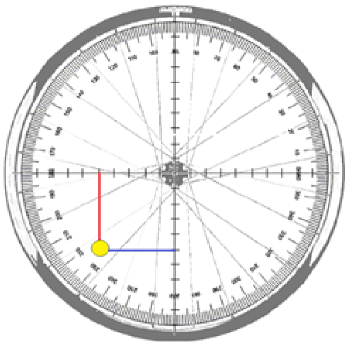
(Adaptado de Costa (2017))

Mateus gosta muito de andar de bicicleta e para enfeitar suas rodas, costuma prender bolinhas de tênis nelas (vide figura). Suponha que ele virou a bicicleta de cabeça para baixo, prendeu a bolinha e começou a girar a roda. Na figura a seguir, a imagem à direita ilustra uma representação da roda destacando eixos coordenados e ângulos em graus.



A roda da direita tem um transferidor de volta inteira sobreposto a sua imagem, de forma que é possível verificar a medida do ângulo entre o eixo horizontal e o raio da roda que passa pela bolinha.

Considere que r é o raio da roda, c é o comprimento do segmento horizontal azul (distância da bolinha amarela ao eixo y) e s é o comprimento do segmento vertical vermelho (distância da bolinha amarela ao eixo x). A razão $\frac{c}{r}$ indica a distância horizontal relativa entre a bolinha amarela e o eixo y, assim como a razão $\frac{s}{r}$ indica a distância vertical relativa entre a bolinha amarela e o eixo x. Por exemplo, se a roda tem raio de 30 cm e a bolinha estiver localizada a 27 cm do eixo vertical, então $\frac{c}{r}$ é $\frac{27}{30}$, ou seja, $\frac{9}{10}$. Dessa forma, para quaisquer outras rodas de bicicleta com outros raios, quando o ângulo entre o eixo horizontal e o raio que passa pela bolinha amarela for o mesmo em que é nessa situação, estamos aptos a determinar essa distância, fundamentados na semelhança de triângulos: em uma roda com 20 cm de raio, essa distância seria $\frac{9}{10}$ de 20, ou seja, 18 cm. Da mesma forma se dá para a distância relativa vertical. Observe ainda que essa "distância relativa" pode ser ainda negativa ou positiva, de acordo com a orientação dos eixos coordenados.



Por exemplo, na figura ao lado, tanto c quanto s valem 5, mas estão no sentido negativo de seus respectivos eixos, portanto, ao calcularmos as distâncias relativas teremos $\frac{c}{r} = \frac{s}{r} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$.

Nas tabelas a seguir, temos algumas possíveis posições para a bolinha e os ângulos associados a elas, medidos em graus. Para completar essa tabela, você precisará informar, a cada ângulo dado:

- A medida do arco, em radianos, associado ao ângulo dado;
- A razão $\frac{c}{r}$ e o seu sinal, de acordo com a orientação no eixo x;
- A razão $\frac{s}{r}$ e o seu sinal, de acordo com a orientação no eixo y.

Vamos lá?

a)

Ângulo (grau)	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
Arco (radiano)	$\frac{\pi}{12}$					
$\frac{c}{r}$	0,96					
$\frac{s}{r}$	0,26					

b)

Ângulo (grau)	$105°$	$120°$	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$
Arco (radiano)						
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

c)

Ângulo (grau)	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$
Arco (radiano)						
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

d)

Ângulo (grau)	$285°$	$300°$	$315°$	$330°$	$345°$	$360°$
Arco (radiano)						2π
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

Solução:

a)

Ângulo (grau)	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
Arco (radiano)	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{c}{r}$	$0{,}96$	$0{,}86$	$0{,}7$	$0{,}5$	$0{,}26$	0
$\frac{s}{r}$	$0{,}26$	$0{,}5$	$0{,}7$	$0{,}86$	$0{,}96$	1

b)

Ângulo (grau)	$105°$	$120°$	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$
Arco (radiano)	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$\frac{c}{r}$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	$-0{,}7$	$-0{,}86$	$-0{,}96$	-1
$\frac{s}{r}$	$0{,}96$	$0{,}86$	$0{,}7$	$0{,}5$	$0{,}26$	0

c)

Ângulo (grau)	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$
Arco (radiano)	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	2π
$\frac{c}{r}$	$-0{,}96$	$-0{,}86$	$-0{,}7$	$-0{,}5$	$-0{,}26$	0
$\frac{s}{r}$	$-0{,}26$	$-0{,}5$	$-0{,}7$	$-0{,}86$	$-0{,}96$	-1

d)

Ângulo (grau)	$285°$	$300°$	$315°$	$330°$	$345°$	$360°$
Arco (radiano)	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
$\frac{s}{r}$	$0{,}26$	$0{,}5$	$0{,}7$	$0{,}86$	$0{,}96$	1
$\frac{c}{r}$	$-0{,}96$	$-0{,}86$	$-0{,}7$	$-0{,}5$	$-0{,}26$	0