



## Atividade: O gráfico e a forma canônica

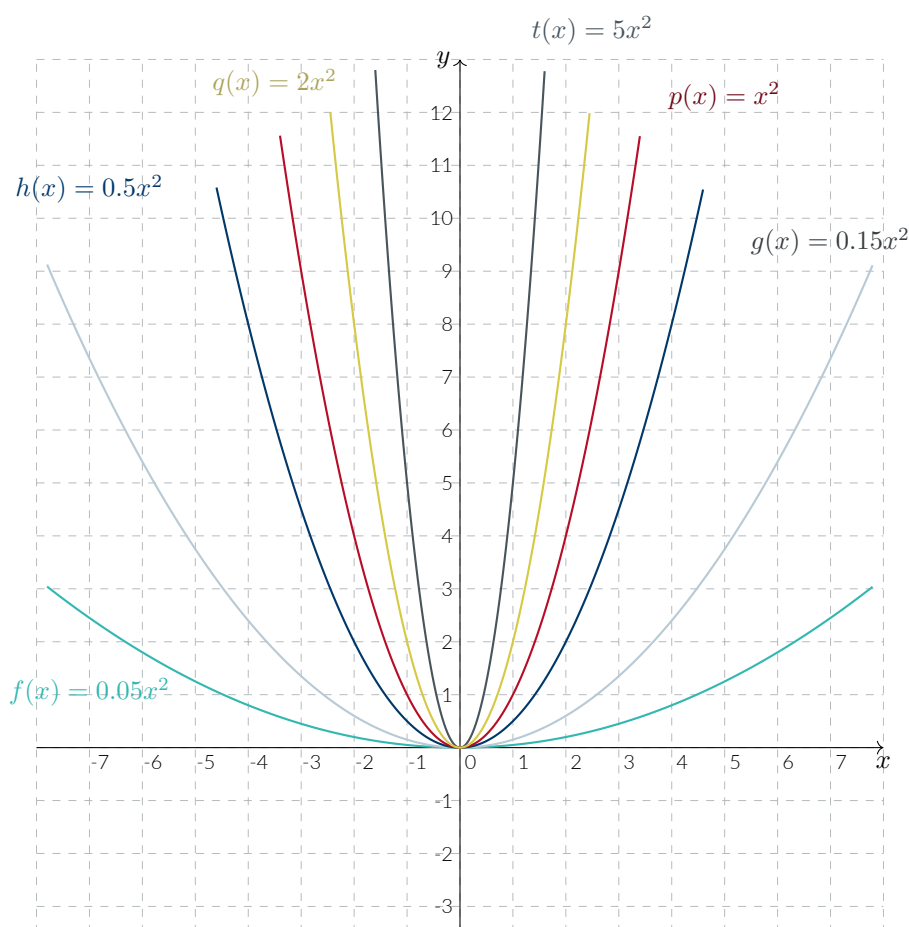
Para melhor explorarmos essa atividade sugerimos a versão online, disponível nos links a seguir:

- Parte 1: [Forma Canônica e o parâmetro 'a'](#)
- Parte 2: [Forma Canônica e o parâmetro 'p'](#)
- Parte 3: [Forma Canônica e o parâmetro 'q'](#)
- Parte 4: [Forma Canônica](#)

Caso não seja possível, segue a atividade que corresponde à apresentada nos “links”:

Na *Em busca de padrões em  $f(x) = x^2$* , você teve a oportunidade de explorar as propriedades do gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ , já na atividade 3, você foi apresentado à um processo que o levou a transformar a relação quadrática dada na forma polinomial:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para forma canônica  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ . O objetivo desta atividade é que você consiga perceber as mudanças ocorridas no gráfico da função  $f$  (dada em sua forma canônica) acarretadas pelas variações dos coeficientes  $a$ ,  $p$  e  $q$ . Esperamos que além de você ter contato com novos conceitos, comprove e consolide os conceitos abordados nas atividades anteriores deste capítulo.

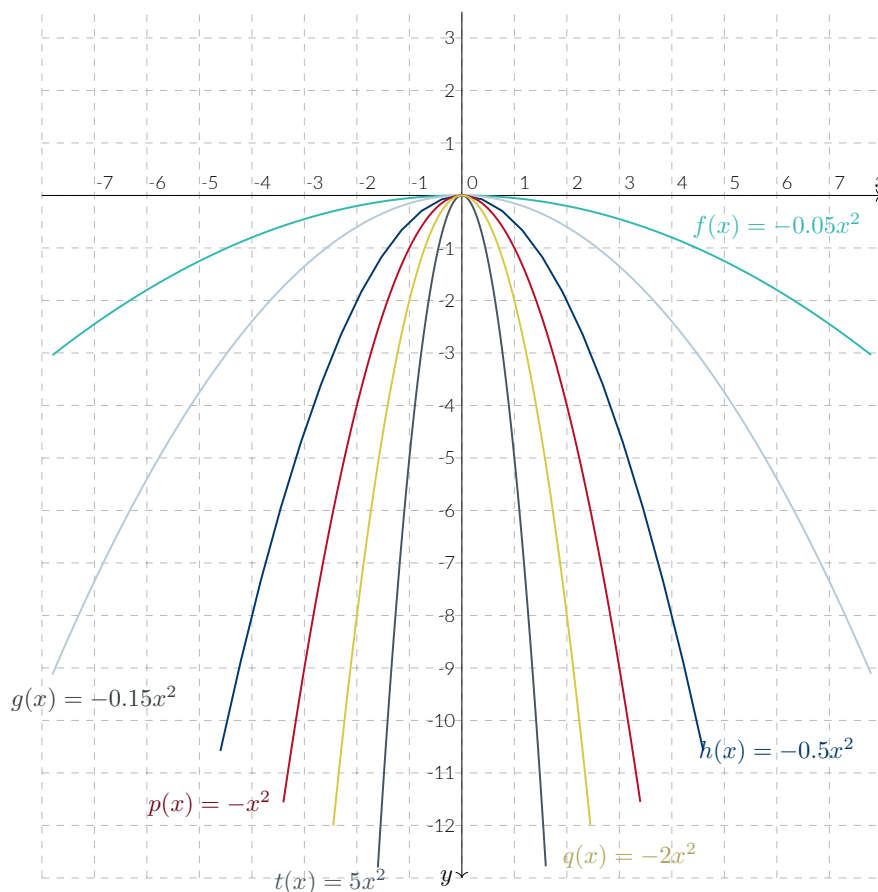
**Parte 1** Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida na sua forma canônica:  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ , ao assumirmos  $p = q = 0$  temos que  $f(x) = ax^2$ , onde analisaremos as variações dos valores de  $a > 0$ , observando a figura a seguir:



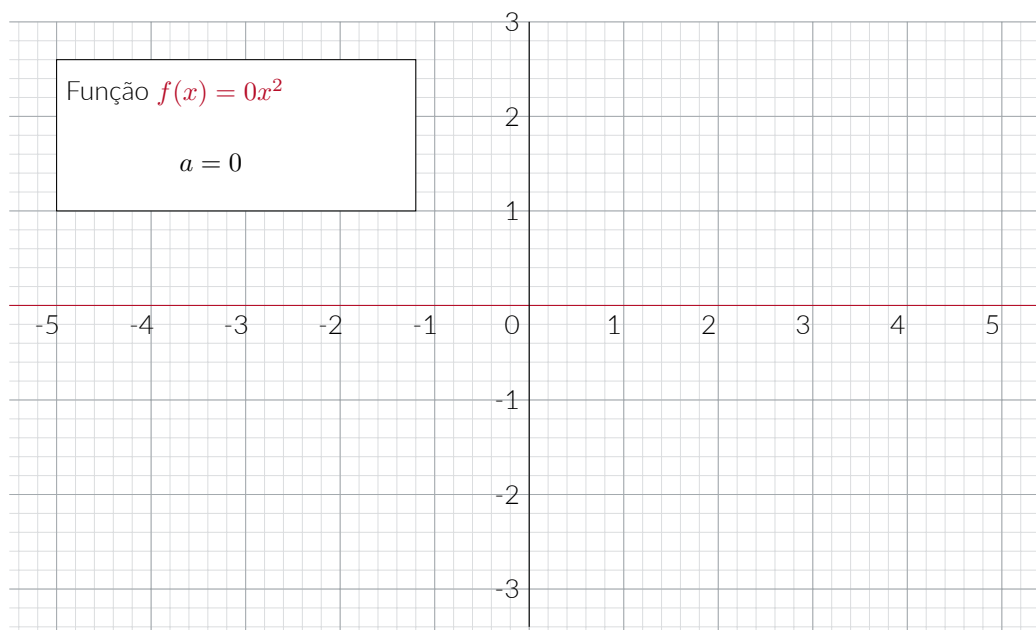
Note que os gráficos apresentados na figura acima apresentam apenas valores de  $a$  maiores que zero, e que a curva em questão é côncava, com base nessa afirmação responda:

- Quando o valor de  $a$  aumenta, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
- Quando o valor de  $a$  se aproxima de zero, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
- Tente explicar com suas palavras uma justificativa para as respostas dadas no item anterior.

Observe as novas figuras a seguir que apresentam novos valores de  $a < 0$ .



- Quando o valor de  $a$  diminui (fica “mais negativo”), a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
  - Quando o valor de  $a$  se aproxima de zero, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?
- A figura a seguir apresenta o gráfico da função  $f$  definida anteriormente para  $a = 0$ .



f) Com base no gráfico acima, comente cada uma das alternativas a seguir, que indicam o comportamento do gráfico quando  $a = 0$ .

- i) A curva some, pois não é mais função.
- ii) Não existe mais curva, o gráfico apresentado é uma reta representada pela função constante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(x) = 0$
- iii) A curva ainda existe mais fica invisível, pois a abertura de sua concavidade tende ao infinito. A curva se transforma numa reta que está sobreposta ao eixo das abscissas.

g) Você deve ter notado que quando o valor de  $a > 0$  a concavidade da curva aponta para cima, e quando  $a < 0$  a concavidade aponta para baixo. Com base neste fato, reescreva as falsas afirmações a seguir, tornando-as verdadeiras:

- i) Quando  $a > 0$  a, da esquerda para direita, a curva é decrescente e ao assumir o seu valor máximo passa a ser crescente.
- ii) Quando  $a > 0$  a, da esquerda para direita, a curva é crescente e ao assumir o seu valor mínimo passa a ser decrescente.
- iii) Quando  $a < 0$  a, da esquerda para direita, a curva é decrescente e ao assumir o seu valor máximo passa a ser crescente.
- iv) Quando  $a < 0$  a, da esquerda para direita, a curva é crescente e ao assumir o seu valor mínimo passa a ser decrescente.

**Parte 2** Dada a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida na sua forma canônica:  $g(x) = a(x - p)^2 + q$ , tomemos  $a = 1$  e  $q = 0$  e analisaremos os valores de  $p$  na função  $f(x) = (x - p)^2$  observando a figura a seguir:

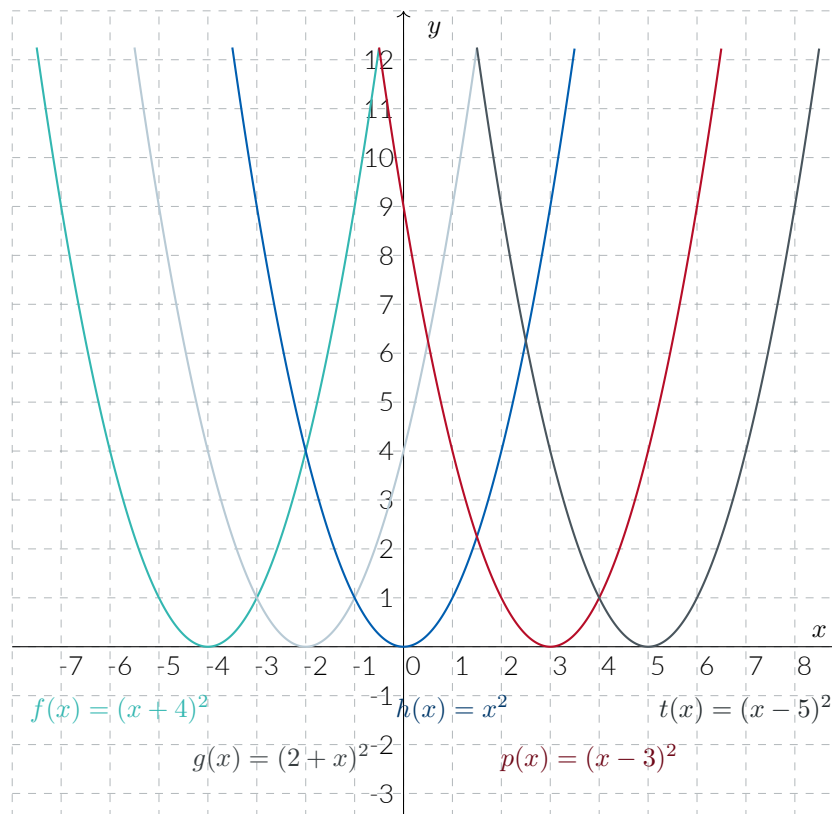


Figura 1: Variações de  $p$ .

Variações de  $p$ .

Em cada um dos itens a seguir destaque as alternativas verdadeiras.

- Quando os valores de  $p$  aumentam a curva se desloca para
  - ☐ direita.
  - ☐ cima.
  - ☐ esquerda.
  - ☐ baixo.
- Quando os valores de  $p$  diminuem a curva se desloca para
  - ☐ direita.
  - ☐ cima.
  - ☐ esquerda.
  - ☐ baixo.
- Você deve ter notado que a curva tangencia o eixo das abscissas em um ponto, que é justamente o ponto em que a curva deixa de ser decrescente e passa a ser crescente. Qual é a relação dos valores de  $p$  com este ponto?
  - ☐ O ponto de tangência em questão é  $(-p, 0)$ .
  - ☐ O ponto de tangência em questão é  $(0, -p)$ .

- ( ) O ponto de tangência em questão é  $(0, p)$ .
- ( ) O ponto de tangência em questão é  $(p, 0)$ .
- d) O movimento que a curva faz quando  $p$  varia, é uma
- ( ) translação vertical.
- ( ) translação horizontal.
- ( ) rotação em  $360^\circ$ .
- ( ) rotação em  $180^\circ$ .

**Parte 3** Dada a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida na sua forma canônica:  $g(x) = a(x - p)^2 + q$ , tomemos  $a = 1$  e  $p = 0$  e analisaremos os valores de  $q$  na função  $f(x) = x^2 + q$  observando a figura a seguir:

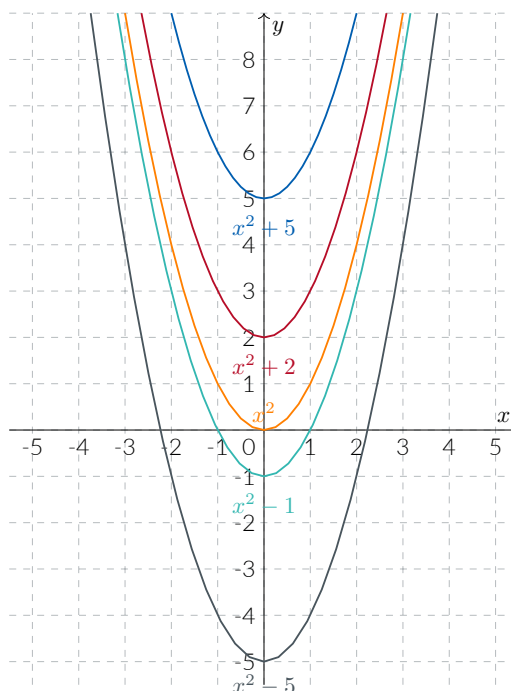


Figura 2: Variação de  $q$

Em cada um dos itens a seguir destaque as alternativas verdadeiras.

- a) Quando os valores de  $q$  aumentam a curva se desloca para
- ☐ ) direita.
  - ☐ ) cima.
  - ☐ ) esquerda.
  - ☐ ) baixo.
- b) Quando os valores de  $q$  diminuem a curva se desloca para
- ☐ ) direita.
  - ☐ ) cima.
  - ☐ ) esquerda.
  - ☐ ) baixo.
- c) Você deve ter notado que a curva intersecta o eixo das ordenadas em um ponto, que é justamente o ponto em que a curva deixa de ser decrescente e passa a ser crescente. Quais são relações dos valores de  $q$  com esse ponto?
- ☐ ) O ponto de intersecção é  $(-q, 0)$ .
  - ☐ ) O ponto de intersecção é  $(q, 0)$ .
  - ☐ ) O ponto de intersecção é  $(0, -q)$ .
  - ☐ ) O ponto de intersecção é  $(0, q)$ .
  - ☐ ) Na figura,  $q$  representa o maior valor que essa função atinge.
  - ☐ ) Na figura,  $q$  representa o menor valor que essa função atinge.

- d) O movimento que a curva faz quando  $q$  varia, é uma
- ( ) translação vertical.
  - ( ) translação horizontal.
  - ( ) rotação em  $360^\circ$ .
  - ( ) rotação em  $180^\circ$ .

**Parte 4** Em cada uma das partes anteriores, estudamos as variações gráficas que cada um dos valores de  $a$ ,  $p$  e  $q$  fazem na curva. Para elucidarmos essas ideias, convidamos a variar esses valores juntos na função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida na sua forma canônica:  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ .

- a) Observe as figuras a seguir, e note que em todas os valores de  $a$  são sempre iguais a 1, já os valores de  $p$  e  $q$  variam.

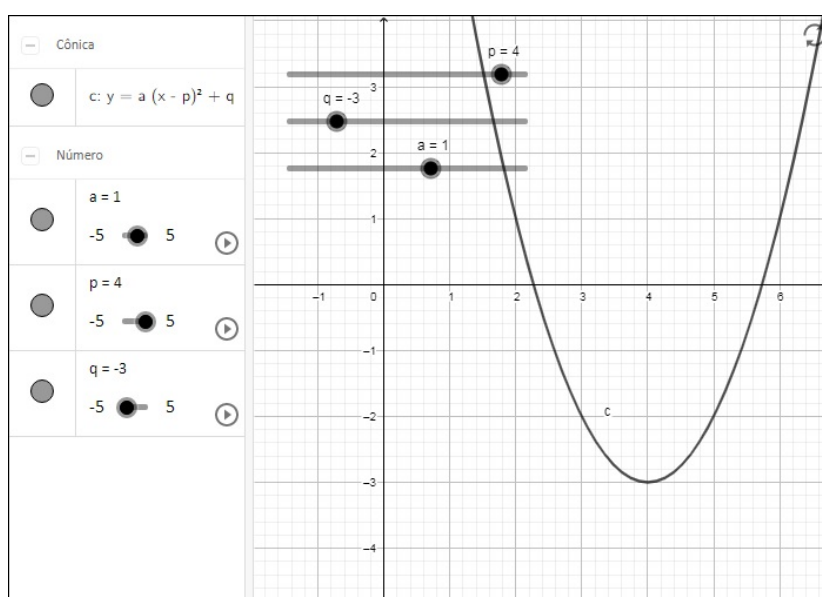
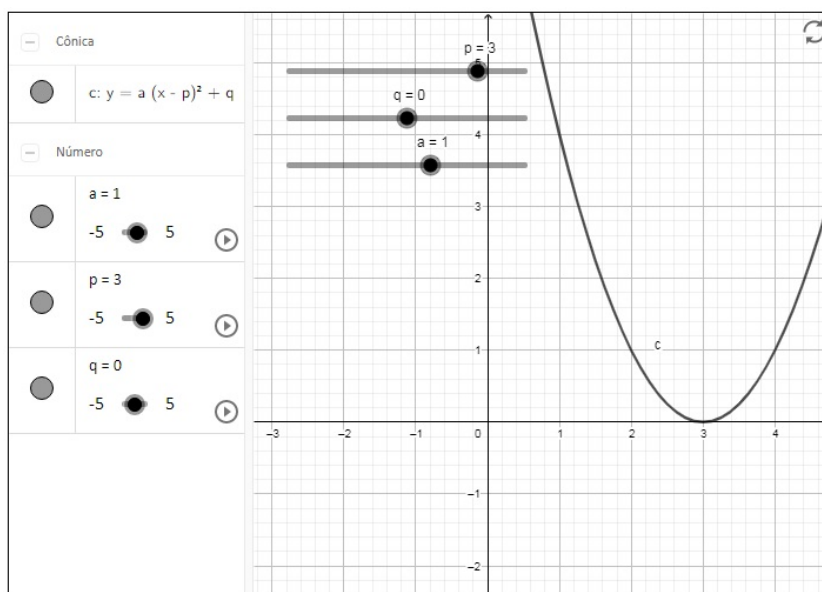
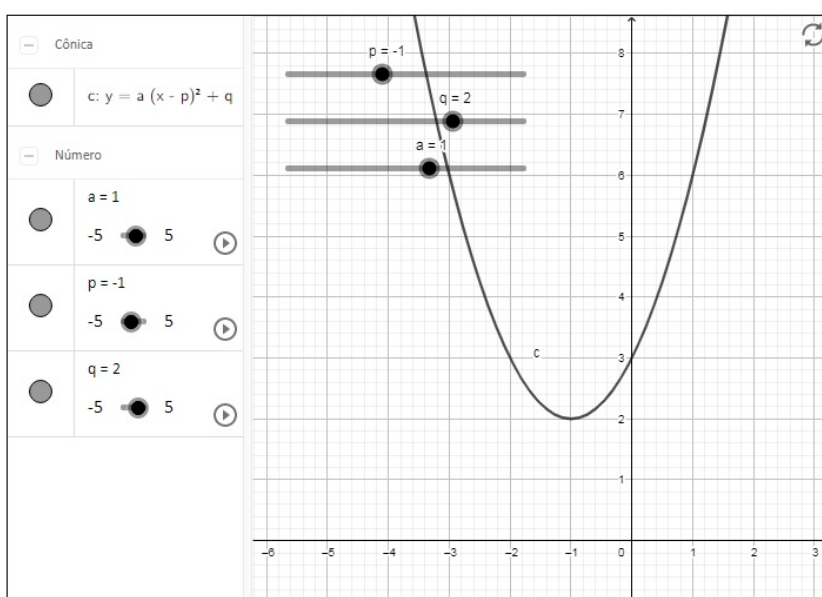


Figura 3: ( $p = 4$  e  $q = -3$ )

Figura 4: ( $p = 3$  e  $q = 0$ )Figura 5: ( $p = -1$  e  $q = 2$ )

- i) A variação de  $p$  faz com que o gráfico sofra que tipo de translação (vertical ou horizontal)?
- ii) A variação de  $q$  faz com que o gráfico sofra que tipo de translação (vertical ou horizontal)?
- b) As figuras a seguir mostram as variações obtidas no gráfico para os valores de  $a = 1$ , ( $p = 5$  e  $q = 5$ ); ( $p = -5$  e  $q = 5$ ); em seguida ( $p = 5$  e  $q = -5$ ) e por último ( $p = -5$  e  $q = -5$ ). Já vimos anteriormente que existe um ponto no gráfico em que a função deixa de ser decrescente e passa a ser crescente, este ponto chamamos de **vértice** da curva.



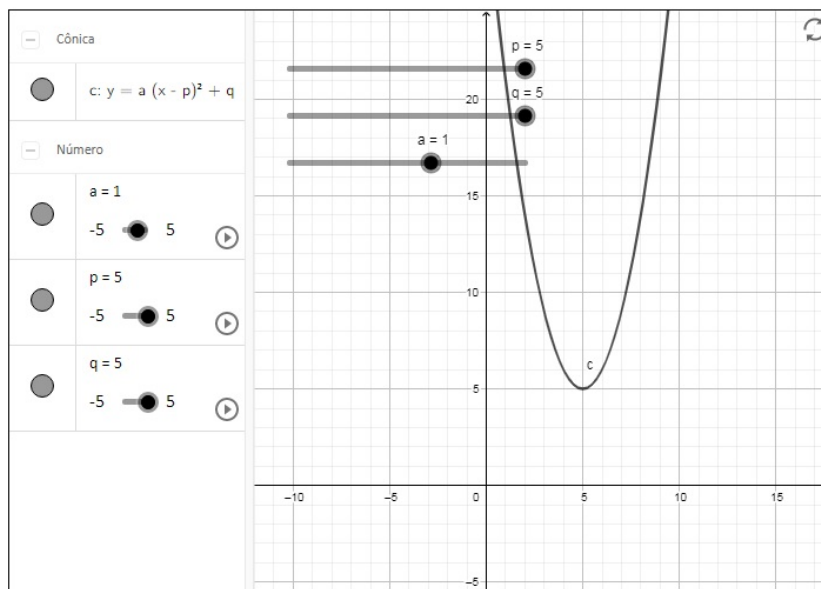


Figura 6: ( $p = 5$  e  $q = 5$ )

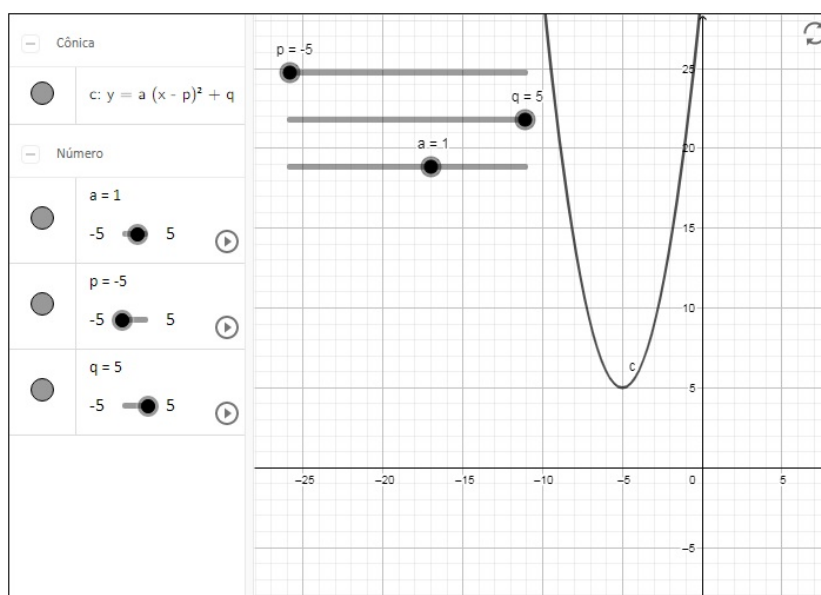
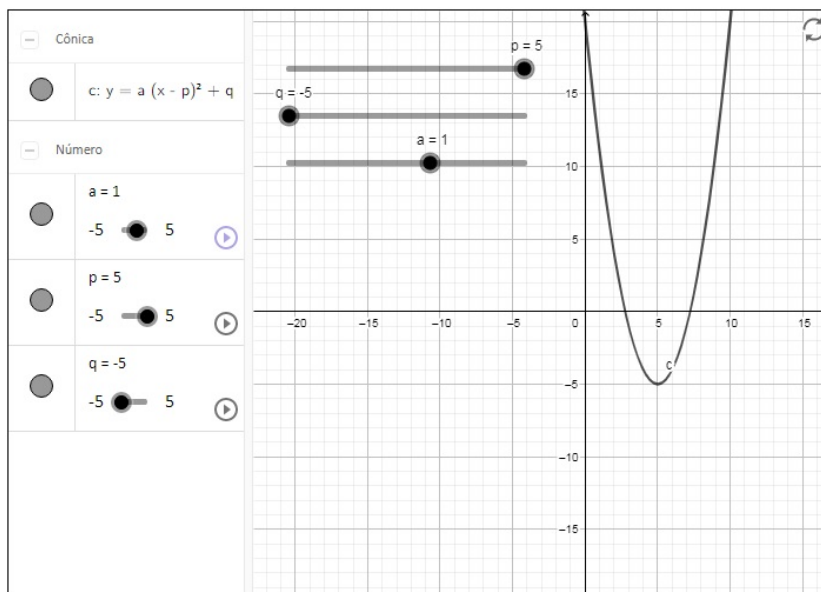
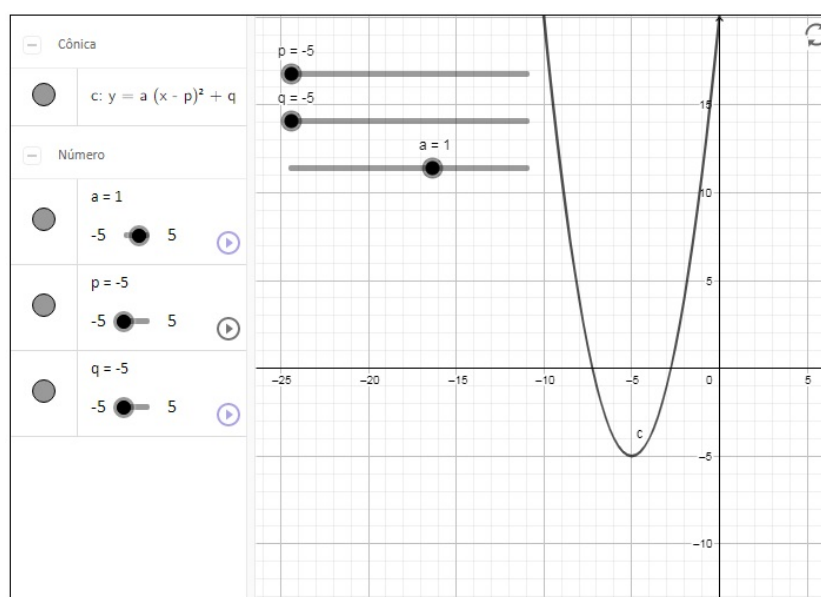
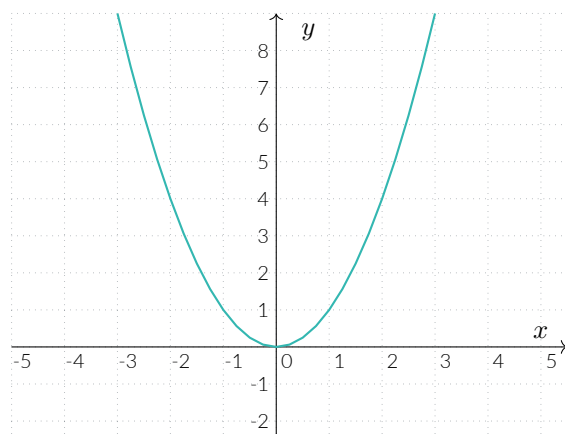


Figura 7: ( $p = -5$  e  $q = 5$ )

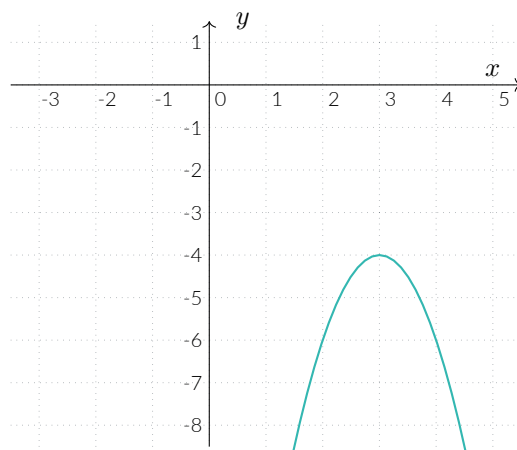
Figura 8: ( $p = 5$  e  $q = -5$ )Figura 9: ( $p = -5$  e  $q = -5$ )

Exiba as coordenadas do vértice em função de  $p$  e  $q$ .

- c) Observe que ao mantermos os valores de  $a = 1$ ,  $p = 0$  e  $q = 0$ , temos a curva  $y = x^2$ . Considerando uma função  $f$  de Domínio  $D$  e imagem  $I$  dada por  $f(x) = y$ , utilize a figura a seguir, e em seguida escolha a alternativa na qual os conjuntos  $D$  e  $I$  estão definidos na atividade.

Figura 10: ( $a = 1; p = q = 0$ )

- ( )  $D = [-5, 5]$  e  $I = [0, 5]$
- ( )  $D = [0, +\infty[$  e  $I = [0, +\infty[$
- ( )  $D = [0, 5]$  e  $I = [-5, 5]$
- ( )  $D = \mathbb{R}$  e  $I = [0, +\infty[$
- ( )  $D = \mathbb{R}$  e  $I = \mathbb{R}$
- d) Observe que ao mantermos os valores de  $a = -2$ ,  $p = 3$  e  $q = -4$ , temos que  $y = -2(x - 3)^2 - 4$ . Considerando uma função  $f$  de Domínio  $D$  e imagem  $I$  dada por  $f(x) = y$ , utilize a figura a seguir, e em seguida escolha a alternativa na qual os conjuntos  $D$  e  $I$  estão definidos na atividade.

Figura 11: ( $a = -2, p = 3, q = -4$ )

- ( )  $D = [-4, 3]$  e  $I = [-4, 3]$
- ( )  $D = \mathbb{R}$  e  $I = ]-\infty, -4]$
- ( )  $D = [-5, 5]$  e  $I = [-5, 5]$
- ( )  $D = [-4, 3]$  e  $I = [-4, +\infty[$
- ( )  $D = \mathbb{R}$  e  $I = \mathbb{R}$

- e) Em relação à função real  $f$  definida por  $f(x) = a(x-p)^2 + q$ , caso  $a$  assumia apenas valores **positivos**, assinale quais das afirmações seguintes são verdadeiras:
- ☐ O valor de  $p$  representa o maior valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ O valor de  $p$  representa o menor valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ O valor de  $q$  representa o maior valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ O valor de  $q$  representa o menor valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ A função  $f$ , não tem valor máximo, mas tem valor mínimo.
  - ☐ A função  $f$ , não tem valor mínimo, mas tem valor máximo.
  - ☐ A função  $f$ , tem valores de máximo e mínimo.
- f) Em relação à função real  $f$  definida por  $f(x) = a(x-p)^2 + q$ , caso  $a$  assumia apenas valores **negativos**, assinale quais das afirmações seguintes são verdadeiras:
- ☐ O valor de  $p$  representa o maior valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ O valor de  $p$  representa o menor valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ O valor de  $q$  representa o maior valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ O valor de  $q$  representa o menor valor que  $f$  pode assumir.
  - ☐ A função  $f$ , não tem valor máximo, mas tem valor mínimo.
  - ☐ A função  $f$ , não tem valor mínimo, mas tem valor máximo.
  - ☐ A função  $f$ , tem valores de máximo e mínimo.
- g) Ainda na função  $f$  ao assumirmos os valores de  $a = 3$ ;  $p = 1$  e  $q = -2$ , Assinale quais afirmações a seguir são verdadeiras.
- ☐ O vértice da curva é  $V = (3, 1)$ .
  - ☐ O vértice da curva é  $V = (3, -2)$ .
  - ☐ O vértice da curva é  $V = (1, -2)$ .
  - ☐ O vértice da curva é  $V = (-2, 1)$ .
  - ☐  $-2$ , é o maior valor que a função  $f$  pode assumir.
  - ☐  $3$ , é o maior valor que a função  $f$  pode assumir.
  - ☐  $1$ , é o maior valor que a função  $f$  pode assumir.
  - ☐  $-2$ , é o menor valor que a função  $f$  pode assumir.
  - ☐  $3$ , é o menor valor que a função  $f$  pode assumir.
  - ☐  $1$ , é o menor valor que a função  $f$  pode assumir.
  - ☐ A concavidade da curva está voltada para cima, pois  $a > 0$ .
  - ☐ A concavidade da curva está voltada para cima, pois  $p > 0$ .
  - ☐ A concavidade da curva está voltada para cima, pois  $q < 0$ .