Atividade: Em busca de padrões em $f(x) = x^2$

No capítulo anterior foi estudado o modelo matemático para funções afins. Lá, constatou-se que as funções afins são do tipo $f(x) = ax + b$. Contudo, no Explorando: movimentos com velocidade variável aparece o termo $\alpha \cdot x^2$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$. Isso revela uma situação nova em relação à função afim. A atividade que segue tem a finalidade de destacar algumas das características de funções como estas que apareceram na seção anterior. Para isso, passaremos a investigar a função real definida por $f(x) = x^2$.

Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, faça o que se pede:

a) Complete a tabela a seguir com os valores que faltam.

x	-5	-3		-1		1	2	3		$\frac{10}{3}$	$\sqrt{123}$
$f(x)$			4		0				25		

b) Em uma folha de papel ou similar, faça a figura do plano cartesiano conforme a indicada a seguir.

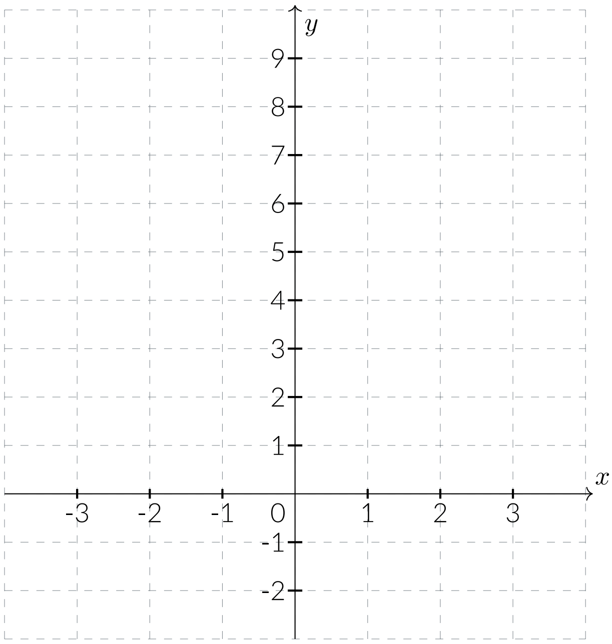

Figura 1: Gráfico 1

Represente os pontos da tabela do item 'a' nesse plano cartesiano, desprezando as coordenadas cujo valor de x não aparece destacado no que você fez no papel.

c) Destaque os pares de pontos que estão a mesma distância do eixo y.

d) Caso seja possível, forneça o ponto da função f que está a mesma distância do eixo y que cada um dos pontos de f já listados a seguir. [Mesma distância = equidistante]

$(x, y) \in f$	$(7, 49)$	$(-5, 25)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{25}\right)$	$\left(-\frac{6}{7}, \frac{36}{49}\right)$	$(\sqrt{3}, 3)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$	$(-\pi, \pi^2)$
Ponto equidistante do eixo y							

e) De todos os pontos que podemos obter com a função f, existe um que não tem correspondente equidistante do eixo y. Que ponto é esse? Tente descrever as características que esse ponto tem em relação aos outros da função f ou em relação aos eixos coordenados.

f) Existe algum ponto da imagem de f que seja menor do que zero?

g) Considerando os pontos do domínio de f entre -4 e 0, a melhor classificação para esta função é crescente ou decrescente? E entre 0 e 4?

h) Considerando os elementos $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ do domínio de f, pode-se afirmar que a razão em que as imagens variam é a mesma para cada unidade de variação do domínio?

i) Agora serão apresentados alguns gráficos e, para cada um deles, você deve afirmar com alguma justificativa, se é ou não o gráfico de f. Para isso, use o que você experimentou nos itens da atividade até aqui.

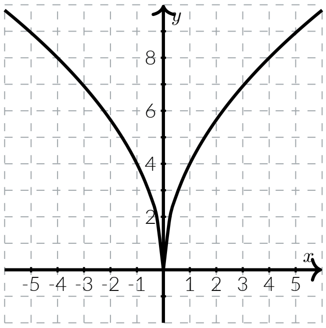

Figura 2: Gráfico 1

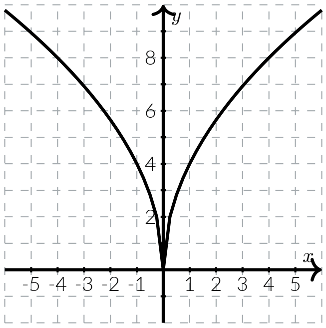

Figura 3: Gráfico 2

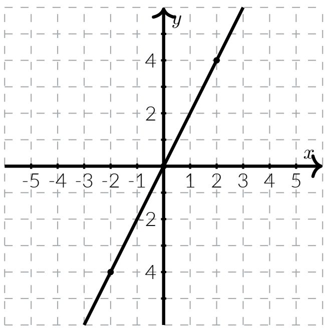

Figura 4: Gráfico 3

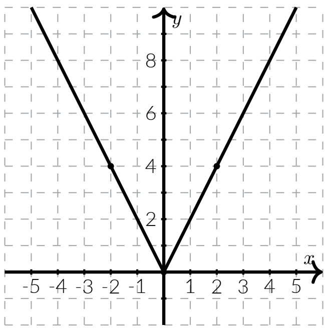

Figura 5: Gráfico 4

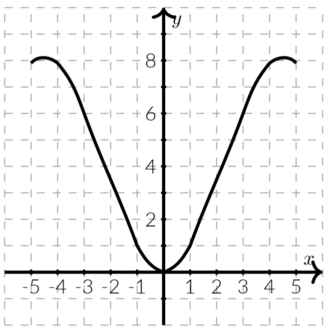

Figura 6: Gráfico 5

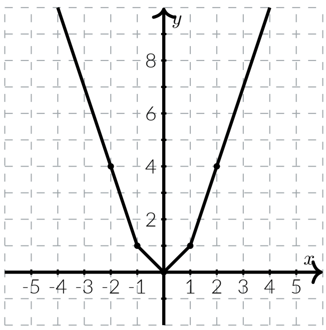

Figura 7: Gráfico 6

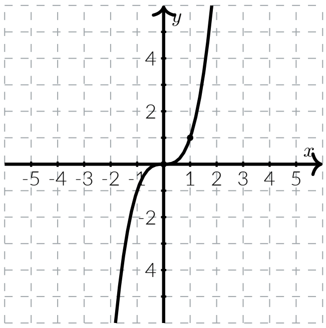

Figura 8: Gráfico 7

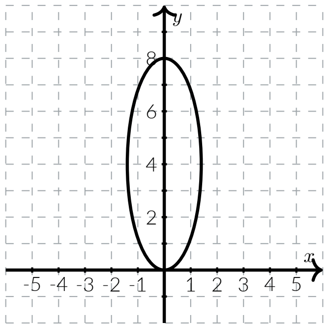

Figura 9: Gráfico 8

j) No mesmo papel em que você marcou alguns dos pontos da função f, lá no item b), construa o gráfico que você acha que representa a função f e compare com o de seus colegas. Se houver discondâncias, tentem argumentar e aprimorar os gráficos uns dos outros com base nas argumentações.

Realização: OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Patrocínio: Itaú Social