Atividade: Números triangulares

Habilidades

LAF1 Compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.

Para o professor

Objetivos específicos

OE1 Reconhecer a relação de dependência entre a ordem e os termos de uma sequência.

OE2 Reconhecer, a partir de um padrão geométrico, os primeiros termos de uma sequência e ser capaz de, a partir do padrão identificado, inferir os próximos termos da sequência.

OE3 Generalizar, ainda que em palavras, a determinação de um termo qualquer da sequência a partir da sua ordem segundo um padrão identificado.

Observações e recomendações

- Nível de abstração: **Ação**.

- Muito provavelmente os estudantes descreverão a sequência de formas diferentes, mas obtendo o mesmo resultado para o sexto, o sétimo e o oitavo números triangulares. Por exemplo, um estudante poderá dizer que, para identificar os números triangulares solicitados, "constrói" os triângulos "de cima para baixo". Já ouro pode argumentar que o faz "de baixo para cima". Outro ainda pode agumentar a partir da observação do padrão recursivo: "basta acrescentar uma linha ao último triângulo construído". Assim, como a resposta ao ítem (b) não é única, procure aproveitar e explorar as diferentes respostas na discussão com a turma: os resultados são os mesmos para essas diferentes formas de descrever a sequência? Por que? Por exemplo, "somar de cima para baixo" produz o mesmo resultado que "somar de baixo para cima", pois a adição é comutativa.

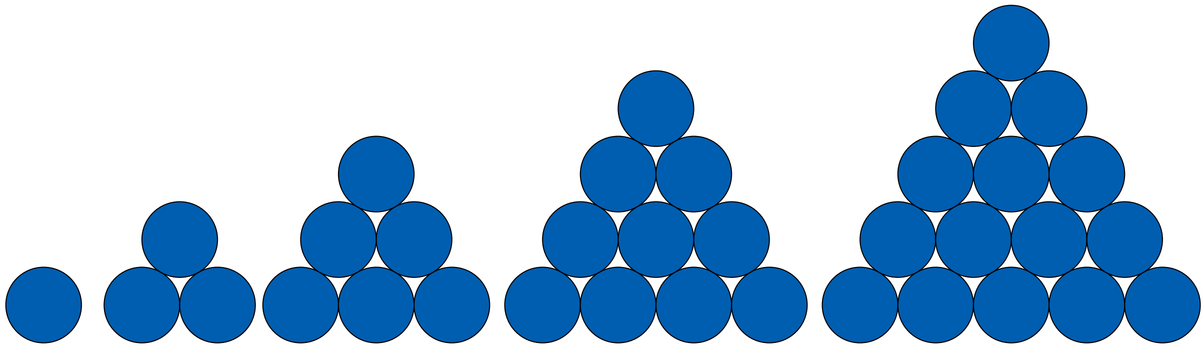
- Pela mesma razão apontada no ítem (b), a resposta do item (d) não é única.

- Não é objetivo, neste momento, que o estudante expresse a relação por meio da linguagem simbólica matemática, escrevendo, por exemplo, $T_n = T_n{-}1 + n$, mas que seja matematicamente preciso em suas palavras, dizendo, por exemplo, que "o n-ésimo termo da sequência é obtido a partir do termo anterior acrescido de mais uma fileira com n" ou que "o n-ésimo triângulo da sequência é obtido a partir do triângulo anterior acrescido de mais uma fileira com n círculos", portanto, "o n-ésimo número triangular é obtido a partir do termo anterior acrescido de n".

- É possível que algum estudante descreva o n-ésimo número triangular como a soma dos primeiros n números naturais. Nesse caso, você pode mostrar que essa maneira de descrever o procedimento é equivalente à recursiva. Não apenas testando exemplos, mas sim fazendo uso da propriedade associativa da adição: seja qual for o n tem-se

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ &= [1 + 2 + \ldots + (n-1)] + n \\ &= T_{n-1} + n \end{aligned}$$

Atividade



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$ $T_5 = 15$

Considere a sequência de números ilustrada acima. Ela é conhecida como a sequência dos *números triangulares*. O n-ésimo número triangular, T_n, é igual a quantidade total de círculos congruentes necessários para formar um triângulo equilátero cujo lado tem n círculos. Por exemplo, o quarto número triangular é $T_4 = 10$, porque são necessários 10 círculos congruentes para formar um triângulo cujo lado tem 4 desses círculos.

a) Determine o 6°, o 7° e o 8° números triangulares.

b) Descreva o procedimento que você usou para determinar T_6, T_7 e T_8 no item anterior.

c) Determine o milésimo número triangular, T_{1000}.

d) Descreva um procedimento que permita determinar qualquer número triangular a partir da sua ordem na sequência? Explique.

e) Quais são as variáveis relacionadas?

Solução:

a) 21, 28 e 36

b) Uma resposta possível seria a partir de um raciocínio aditivo baseado em contagem: T_6 é obtido adicionando 6 círculos a um dos lados do triângulo equilátero que corresponde a T_5 e efetuando a soma dos círculos presentes nesse novo triângulo equilátero: $T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Outra maneira é a partir do raciocínio recursivo. Assim T_6 é obrido adicionando 6 círculos ao total de círculos do triângulo equilátero que corresponde a T_5: $T_6 = T_5 + 6 = 15 + 6 = 21$. Os números triangulares T_7 e T_8 podem ser obtidos de formas análogas.

c) $T_1000 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 1000 = 500500$.

d) Uma resposta possível é: o número triangular T_n é obtido somando n ao número triangular anterior

e) n e T_n.