Atividade: Independência e complementariedade

Habilidades

a

Para o professor

Objetivos específicos

OE1 Aplicar o conceito de independência entre dois eventos para entender que o respectivos eventos complementares herdam essa a condição de eventos independentes.

Observações e recomendações

Essa atividade é um exercício teórico de dedução muito simples que revela uma propriedade importante entre eventos independentes: dada uma coleção de eventos independentes, se para alguns eventos (ou todos) considerarmos os seus complementares em vez do próprio, a coleção continua independente. Com fins de simplificação e não tornar o processo complicado, consideraremos nesta atividade apenas o caso para dois eventos independentes. Mas, de fato, o resultado vale para quaisquer coleções de eventos independentes.

Atividade

Sejam A e B dois eventos independentes. Mostre que os pares de eventos a seguir também são independentes:

a) $\overline{A}$ e $\overline{B}$;

b) A e $\overline{B}$; e

c) $\overline{A}$ e B.

Solução:

a) Por hipótese temos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pois A e B são independentes. Queremos provar que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes, ou equivalentemente, que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$. Pelas Leis de De Morgan trabalhadas em atividade anterior, sabemos que $\overline{A} \cap \overline{B} = (\overline{A \cup B})$. Portanto, usando a propriedade do evento complementar, podemos escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$.

Mas,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

ela independência entre A e B. Assim,

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) \cdot (1-P(A)) \\ &= (1-P(A)) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

. Portanto, se A e B são independentes, então $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes.

b) Por hipótese temos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pois A e B são independentes. Queremos provar que A e $\overline{B}$ também são independentes, ou equivalentemente, que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$. Observe que podemos escrever $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ com os dois eventos do lado direito sendo disjuntos. Assim, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ implicando que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B)$ pela independedência de A e B. Logo, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot (1-P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ e, portanto, se A e B são independentes, então A e $\overline{B}$ também são.

c) Idem ao item anterior, bastando trocar de posição as letras A e B.