



Atividade: Menino Gauss

Habilidades

EM12MT09 Reconhecer função quadrática e suas representações algébrica e gráfica, compreendendo o modelo de variação determinando domínio, imagem, máximo e mínimo, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas como os de movimento uniformemente variado.

Para o professor

Objetivos específicos

OE1 Reconhecer a função quadrática na expressão que dá a soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética.

OE2 Resolver o problema de somar os primeiros termos de uma progressão aritmética com as ferramentas da função quadrática.

Atividade

No livro *Antologia Matemática* de Malba Tahan, conta um episódio cuja personagem principal seria o “príncipe da matemática” Carl Frederick **Gauss** (★1777 – †1855). Não se sabe se o episódio é real, mas conta-se que aos sete anos de idade, chegando para mais um dia de aula, *Gauss* e seus colegas teriam encontrado o professor com pouca paciência. Assim, o professor, com o intuito de entreter seus alunos por longo tempo e não precisar dar-lhes qualquer atenção, pediu para que todos somassem os números naturais desde 1 até 100. Contudo, o jovem *Gauss* em pouco tempo levou o resultado do exercício para o professor e este, incrédulo do feito, teria mandado *Gauss* para a direção. Mais tarde, tudo se esclareceu e o professor reconheceu o acerto no método e no resultado dado pelo jovem e desculpou-se.

Como o jovem *Gauss* teria obtido este resultado por um método aparentemente desconhecido do enfurecido professor e com tanta rapidez?

Com a finalidade de responder a essa pergunta sugerimos uma atividade. Ela necessitará de uma fita métrica.



Figura 1: Imagem de [Pastorius](#) CC-BY

Como as fitas métricas comercializadas tem um tamanho padrão, em nossa atividade vamos entender como o jovem *Gauss* fez a soma começando por somar os números da fita métrica, ou seja, vamos começar resolvendo a expressão

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 147 + 148 + 149 + 150$$

- De posse da fita métrica, perceba que ela tem os dois lados numerados. Cada um desses lados tem todos os números que queremos somar?
- Qual o número que corresponde ao verso (outro lado da fita) do número 1? E quais são os números dos versos correspondentes de 18 e 75?
- Agora, vamos fazer algumas somas de um número com o seu correspondente no verso da fita. Faça:
 - 1+ seu correspondente;
 - 15+ seu correspondente;
 - 31+ seu correspondente;
 - 49+ seu correspondente;
 - 75+ seu correspondente.
- Qual o resultado obtido sempre que se soma um número com o seu correspondente no verso desta fita?
- Com base na resposta do item anterior, qual o resultado da soma de todos os números dos dois lados dessa fita?
- A soma de todos os números em ambos os lados da fita é o resultado que queríamos obter?
- Que operação devemos fazer com a soma de todos os números da fita para que ele seja o resultado da expressão

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 147 + 148 + 149 + 150 ?$$

Qual é o valor dessa expressão?

- Imagine agora uma outra fita que tenha em cada lado, todos os números de 1 até 100.

Um dos lados

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

O outro lado

100	99	98	97	96	95	94	93
-----	----	----	----	----	----	----	----

Utilizando o mesmo raciocínio, tente responder a mesma pergunta feita para a turma do jovem *Gauss*, ou seja, quanto dá $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$?

- E se a fita fosse até o número natural n ?

Um dos lados

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

O outro lado

n	n-1	n-2	n-3	n-4	n-5	n-6	n-7
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Com o que foi aprendido, obtenha uma expressão para o resultado da soma dos n primeiros números naturais. Ou seja, tente expressar em função de n , o resultado de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n$.

Solução:

- a) Sim.
- b) 150; 133 e 76.
- c) I) $1 + 150 = 151$;
II) $15 + 136 = 151$;
III) $31 + 120 = 151$;
IV) $49 + 102 = 151$;
V) $75 + 76 = 151$.
- d) 151.
- e) $150 \cdot 151 = 22650$.
- f) Não.
- g) Devemos dividir a soma obtida por 2; $22650 \div 2 = 11325$.
- h) As somas de cada número com seu correspondente no verso dá, agora, 101. Com isso, a soma de todos os números de ambos os lados dessa fita será $100 \cdot 101$ e $(100 \cdot 101) \div 2 = 10100 \div 2 = 5050$.
- i) As somas de cada número com seu correspondente no verso dá, agora, $n + 1$. Com isso, a soma de todos os números de ambos os lados dessa fita será $n \cdot (n + 1)$ e

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$