# Atividade: Arremesso

## Habilidades

**LAF2** Compreender a taxa de variação como uma medida de covariação entre grandezas e utilizá-la para interpretar situações reais.

## Para o professor

### Objetivos específicos

OE1 Construir, a partir de uma situação real de lançamento oblíquo, a ideia de taxa de variação instantânea.

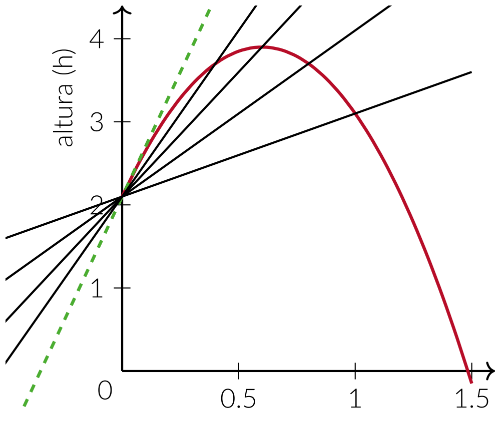
OE2 Usar a intuição sobre velocidade inicial instantânea e velocidade nula (ausência de movimento) para comparar com o limite das taxas de variação média.

### Observações e recomendações

- Nessa atividade a ideia informal de limite é explorada através de cálculos de taxas de variação em intervalos sucessivos de comprimento cada vez menor.

- Caso seja possível utilizar recursos computacionais, é interessante fazer os cálculos em uma planilha eletrônica com intervalos ainda menores para ilustrar a convergência.

- Discuta a ideia da aproximação geometricamente: retas secantes que se aproximam da reta tangente. A intenção aqui é apenas construir modelos para formar algum tipo de intuição sobre o assunto, não pretendemos tratar as coisas de maneira formal.

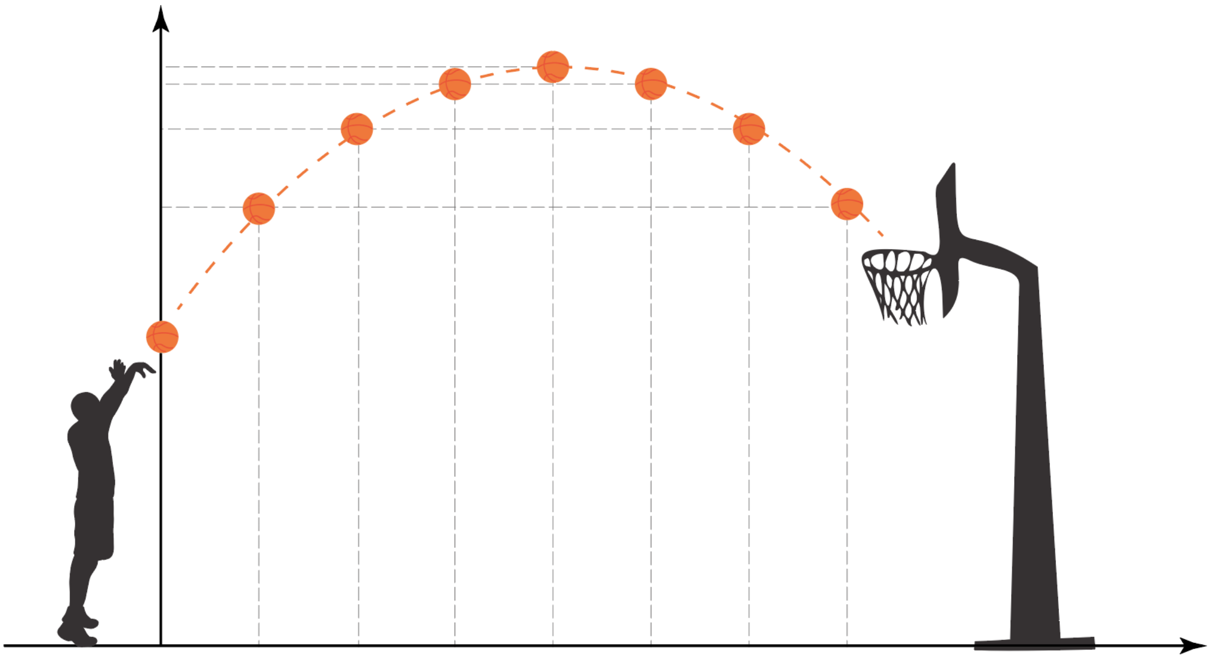



- Após o término da atividade discuta com os estudantes um pouco mais sobre o conceito de taxa de variação (velocidade) instantânea. Utilize outros exemplos: o velocímetro do carro (o que significa quando o ponteiro marca 50km/h?); o custo marginal de produção de um determinado produto, dentre outros.

■ Essa atividade está disponível em uma versão digital no link: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5de193196148282ac346889a

## Atividade

Um jogador de basquete ao lançar a bola em direção à cesta a vê descrever uma curva no ar chamada *parábola*. Essa curva é resultado da combinação de dois movimentos: um na direção horizontal, responsável por fazer a bola "ir para frente"e outro na direção vertical que faz a bola "subir e descer".



Admitindo que o jogador lançou a bola de uma altura de $2{,}10m$ com velocidade inicial de $v_0 m/s$ (na direção vertical), a função que fornece a variação da altura da bola em função do tempo é dada pela expressão

$$h(t) = 2,10 + v_0 t - 5t^2$$

, cujo gráfico também é uma parábola (representado a seguir apenas para $t \geq 0$):

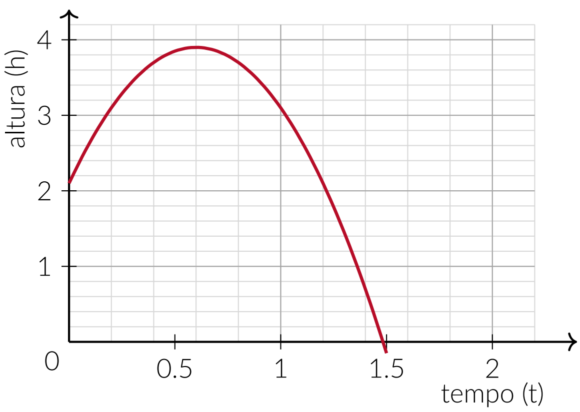



Figura 1: Gráfico de $h(t)$ para $v_0 = 6m/s$.

Com a ajuda de uma calculadora, calcule as taxas de variação médias da altura nos seguintes intervalos de tempo para $v_0 = 6m/s$ e $v_0 = 7m/s$:

| | $v_0 = 6m/s$ | $v_0 = 7m/s$ |
|---|---|---|
| Entre $t = 0$ e $t = 1$ | | |
| Entre $t = 0$ e $t = 0,1$ | | |
| Entre $t = 0$ e $t = 0,01$ | | |
| Entre $t = 0$ e $t = 0,001$ | | |
| Entre $t = 0$ e $t = 0,0001$ | | |

a) Olhando para as sequências de valores obtidos acima, o que se pode conjecturar sobre a tendência que eles apresentam?

Considerando a velocidade inicial igual a $6m/s$, a bola atinge sua altura máxima de $3{,}9m$ depois de $0{,}6s$ do lançamento. Ou seja, o ponto mais alto do gráfico é o par ordenado $(0{,}6; 3{,}9)$. Neste ponto a velocidade na direção vertical é igual a zero (uma vez que aí a bola deixa de subir e passa a descer). Observe, agora, as taxas de variação médias da altura nos seguintes intervalos de tempo:

| | $v_0 = 6m/s$ |
|---|---|
| Entre $t = 0{,}5$ e $t = 0{,}6$ | 0,5 |
| Entre $t = 0{,}59$ e $t = 0{,}6$ | 0,05 |
| Entre $t = 0{,}599$ e $t = 0{,}6$ | 0,005 |
| Entre $t = 0{,}5999$ e $t = 0{,}6$ | 0,0005 |

| | $v_0 = 6m/s$ |
|---|---|
| Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}7$ | -0,5 |
| Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}65$ | -0,25 |
| Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}605$ | -0,025 |
| Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}6005$ | -0,0025 |

b) A tendência observada nos valores obtidos acima corrobora a sua conjectura do item anterior? Explique.

c) Calcule a taxa de variação média da função $h(t) = 2{,}1 + 6t - 5t^2$ entre os tempos $t = 1$ e $t = 1 + \alpha$, onde a variável $\alpha$ representa um número real próximo de zero. (A resposta ficará em função de $\alpha$).

d) À medida que o valor de $\alpha$ se aproxima de zero, o que se observa com o valor da taxa de variação média calculada no item anterior? O que esse valor significa no contexto do problema?

**Solução:**

| | $v_0 = 6m/s$ | $v_0 = 7m/s$ |
|---|---|---|
| Entre $t = 0$ e $= 1$ | $1$ | $2$ |
| Entre $t = 0$ e $= 0,1$ | $5,5$ | $6,5$ |
| Entre $t = 0$ e $= 0,01$ | $5,95$ | $6,95$ |
| Entre $t = 0$ e $= 0,001$ | $5,995$ | $6,995$ |
| Entre $t = 0$ e $= 0,0001$ | $5,9995$ | $6,9995$ |

a) Os valores parecem aproximar-se do valor da velocidade inicial, 6 no primeiro caso e 7 no segundo caso.

b) Sim, pois os valores $t$ estão próximos de $0{,}6$ e as taxas de variação médias dessa vez aproximam-se de zero que é a velocidade no ponto mais alto da trajetória.

c) $\dfrac{h(1+\alpha) - h(1)}{(1+\alpha) - 1} = \dfrac{2,1 + 6(1+\alpha) - 5(1+\alpha)^2 = 3{,}1}{\alpha} = \dfrac{-4\alpha - 5\alpha^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha(-4 - 5\alpha)}{\alpha} = 4 - 5\alpha$

d) À medida que $\alpha$ se aproxima de zero, o valor calculado se aproxima de $-4$, que, de acordo com o observado anteriormente, deve ser a velocidade vertical instantânea no tempo $t = 1$. O sinal negativo indica que o movimento é para baixo (sentido contrário ao adotado como positivo).

| $\alpha$ | $0{,}1$ | $0{,}01$ | $0{,}001$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4-5\alpha$ | $-4{,}5$ | $-4{,}05$ | $-4{,}005$ | $-4{,}0005$ | $-4{,}00005$ | $-4{,}000005$ |

| $\alpha$ | $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-10^{-4}$ | $-10^{-5}$ | $-10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4-5\alpha$ | $-3{,}5$ | $-3{,}95$ | $-3{,}995$ | $-3{,}9995$ | $-3{,}99995$ | $-3{,}999995$ |