Atividade: O gráfico e a forma canônica

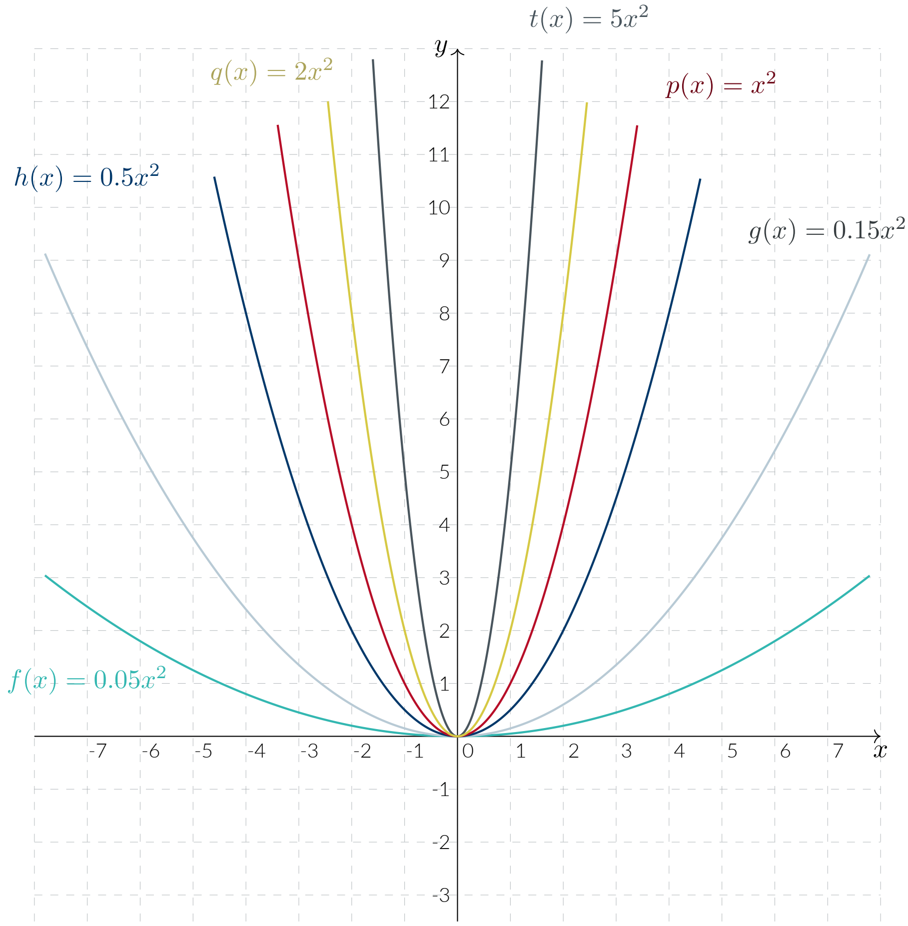
Para melhor explorarmos essa atividade sugerimos a versão online, disponível nos links a seguir:

- Parte 1: Forma Canônica e o parâmetro 'a'
- Parte 2: Forma Canônica e o parâmetro 'p'
- Parte 3: Forma Canônica e o parâmetro 'q'
- Parte 4: Forma Canônica

Caso não seja possível, segue a atividade que corresponde à apresentada nos "links":

Na *Em busca de padrões em* $f(x) = x^2$, você teve a oportunidade de explorar as propriedades do gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, já na atividade 3, você foi apresentado à um processo que o levou a transformar a relação quadrática dada na forma polinomial: $f(x) = ax^2 + bx + c$ para forma canônica $f(x) = a(x-p)^2 + q$. O objetivo desta atividade é que você consiga perceber as mudanças ocorridas no gráfico da função f (dada em sua forma canônica) acarretadas pelas variações dos coeficientes a, p e q. Esperamos que além de você ter contato com novos conceitos, comprove e consolide os conceitos abordados nas atividades anteriores deste capítulo.

Parte 1 Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $f(x) = a(x-p)^2 + q$, ao assumirmos $p = q = 0$ temos que $f(x) = ax^2$, onde analisaremos as variações dos valores de $a > 0$, observando a figura a seguir:



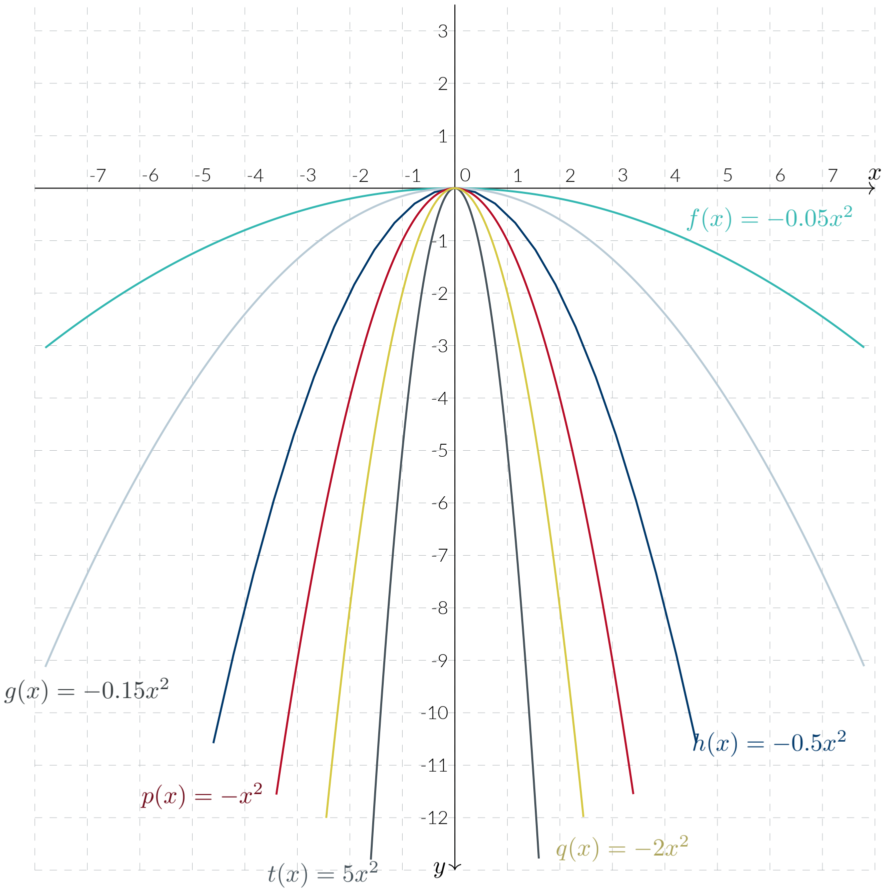
Note que os gráficos apresentados na figura acima apresentam apenas valores de a maiores que zero, e que a curva em questão é côncava, com base nessa afirmação responda:

a) Quando o valor de a aumenta, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?

b) Quando o valor de a se aproxima de zero, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?

c) Tente explicar com suas palavras uma justificativa para as respostas dadas no item anterior.

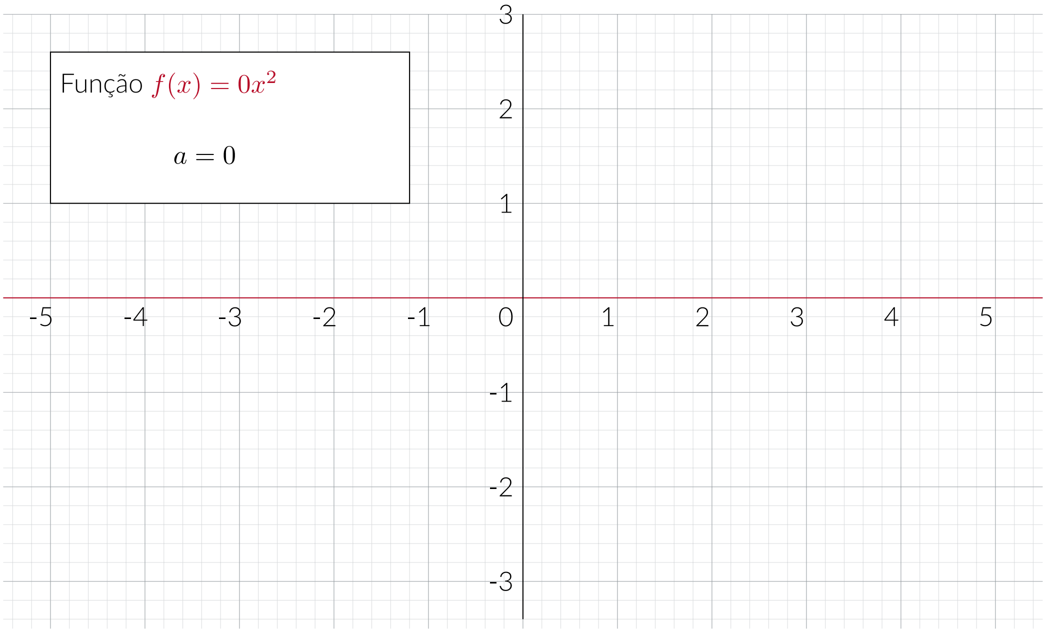
Observe as novas figuras a seguir que apresentam novos valores de $a < 0$.



d) Quando o valor de a diminui (fica "mais negativo"), a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?

e) Quando o valor de a se aproxima de zero, a concavidade da curva fica mais aberta ou mais fechada?

A figura a seguir apresenta o gráfico da função f definida anteriormente para $a = 0$.



f) Com base no gráfico acima, comente cada uma das alternativas a seguir, que indicam o comportamento do gráfico quando $a = 0$.

i) A curva some, pois não é mais função.

ii) Não existe mais curva, o gráfico apresentado é uma reta representada pela função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 0$

iii) A curva ainda existe mais fica invisível, pois a abertura de sua concavidade tende ao infinito.

A curva se transforma numa reta que está sobreposta ao eixo das abscissas.

g) Você deve ter notado que quando o valor de $a > 0$ a concavidade da curva aponta para cima, e quando $a < 0$ a concavidade aponta para baixo. Com base neste fato, reescreva as falsas afirmações a seguir, tornando-as verdadeiras:

i) Quando $a > 0$ a, da esquerda para direita, a curva é decrescente e ao assumir o seu valor máximo passa a ser crescente.

ii) Quando $a > 0$ a, da esquerda para direita, a curva é crescente e ao assumir o seu valor mínimo passa a ser decrescente.

iii) Quando $a < 0$ a, da esquerda para direita, a curva é decrescente e ao assumir o seu valor máximo passa a ser crescente.

iv) Quando $a < 0$ a, da esquerda para direita, a curva é crescente e ao assumir o seu valor mínimo passa a ser decrescente.

Parte 2 Dada a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $g(x) = a(x-p)^2 + q$, tomemos $a = 1$ e $q = 0$ e analisaremos os valores de p na função $f(x) = (x-p)^2$ observando a figura a seguir:

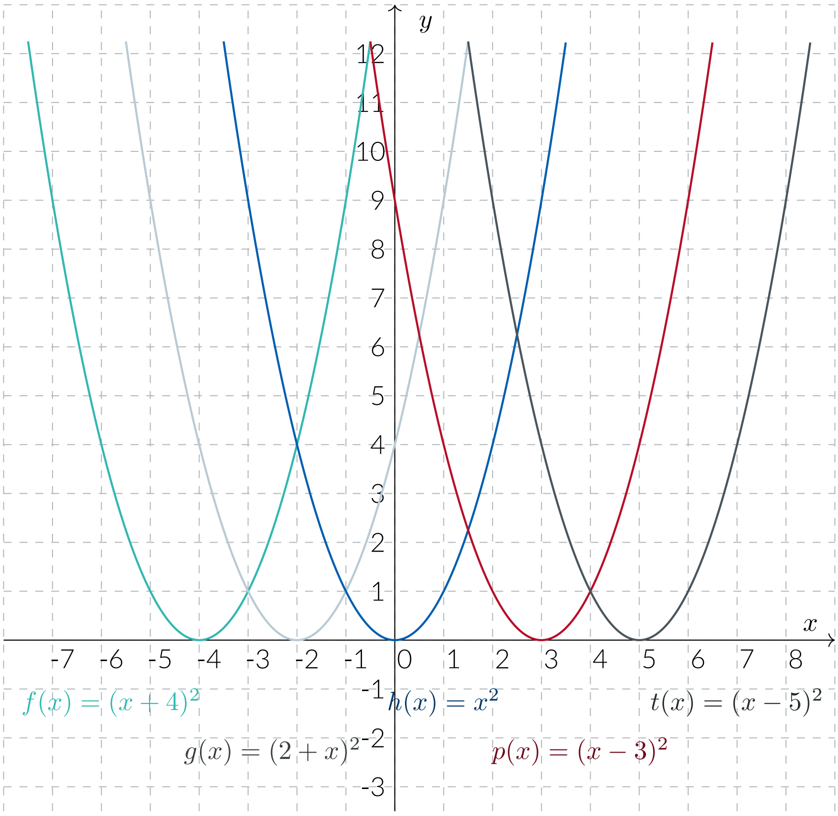


Figura 1: Variações de p.

Variações de p.
Em cada um dos itens a seguir destaque as alternativas verdadeiras.

a) Quando os valores de p aumentam a curva se desloca para

( ) direita.

( ) cima.

( ) esquerda.

( ) baixo.

b) Quando os valores de p diminuem a curva se desloca para

( ) direita.

( ) cima.

( ) esquerda.

( ) baixo.

c) Você deve ter notado que a curva tangencia o eixo das abscissas em um ponto, que é justamente o ponto em que a curva deixa de ser decrescente e passa a ser crescente. Qual é a relação dos valores de p com este ponto?

( ) O ponto de tangência em questão é $(-p, 0)$.

( ) O ponto de tangência em questão é $(0, -p)$.

( ) O ponto de tangência em questão é $(0, p)$.

( ) O ponto de tangência em questão é $(p, 0)$.

d) O movimento que a curva faz quando p varia, é uma

( ) translação vertical.

( ) translação horizontal.

( ) rotação em $360°$.

( ) rotação em $180°$.

Parte 3 Dada a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $g(x) = a(x-p)^2 + q$, tomemos $a = 1$ e $p = 0$ e analisaremos os valores de q na função $f(x) = x^2 + q$ observando a figura a seguir:

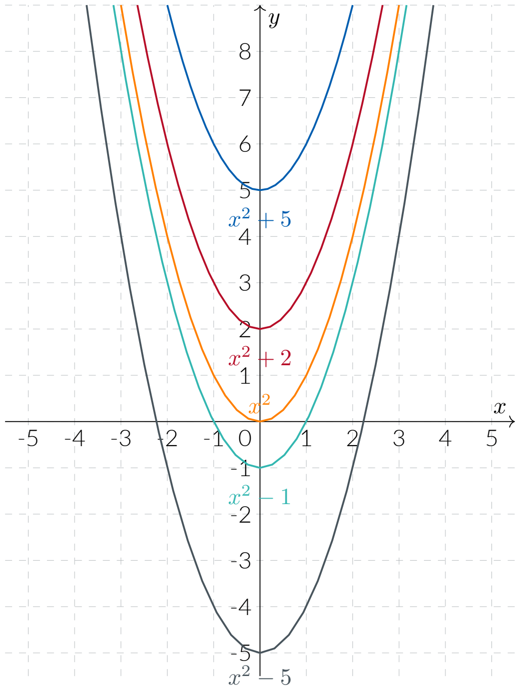


Figura 2: Variação de q

Em cada um dos itens a seguir destaque as alternativas verdadeiras.

a) Quando os valores de q aumentam a curva se desloca para

( ) direita.

( ) cima.

( ) esquerda.

( ) baixo.

b) Quando os valores de q diminuem a curva se desloca para

( ) direita.

( ) cima.

( ) esquerda.

( ) baixo.

c) Você deve ter notado que a curva intersecta o eixo das ordenadas em um ponto, que é justamente o ponto em que a curva deixa de ser decrescente e passa a ser crescente. Quais são relações dos valores de q com esse ponto?

( ) O ponto de intersecção é $(-q, 0)$.

( ) O ponto de intersecção é $(q, 0)$.

( ) O ponto de intersecção é $(0, -q)$.

( ) O ponto de intersecção é $(0, q)$.

( ) Na figura, q representa o maior valor que essa função atinge.

( ) Na figura, q representa o menor valor que essa função atinge.

d) O movimento que a curva faz quando q varia, é uma

( ) translação vertical.

( ) translação horizontal.

( ) rotação em $360°$.

( ) rotação em $180°$.

Parte 4 Em cada uma das partes anteriores, estudamos as variações gráficas que cada um dos valores de a, p e q fazem na curva. Para elucidarmos essas ideias, convidamos a variar esses valores juntos na função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida na sua forma canônica: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

a) Observe as figuras a seguir, e note que em todas os valores de a são sempre iguais a 1, já os valores de p e q variam.

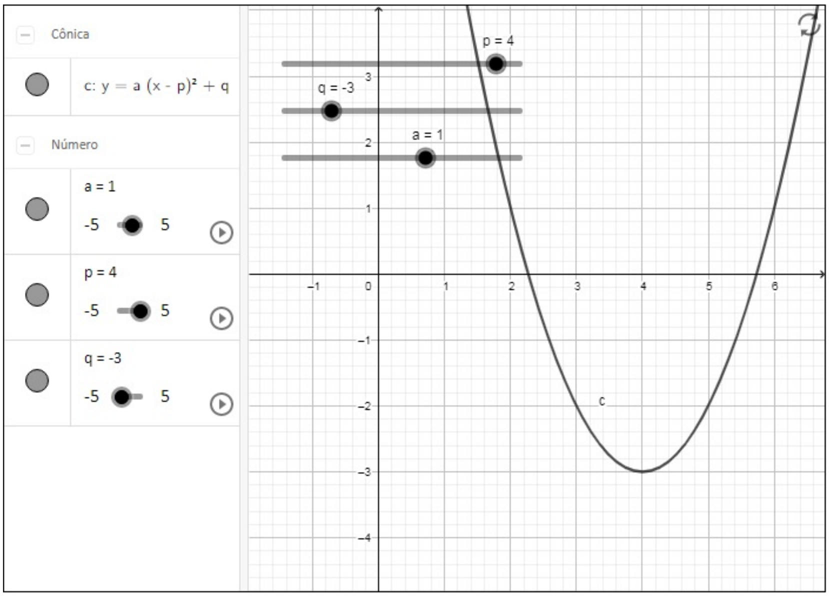


Figura 3: ($p = 4$ e $q = -3$)

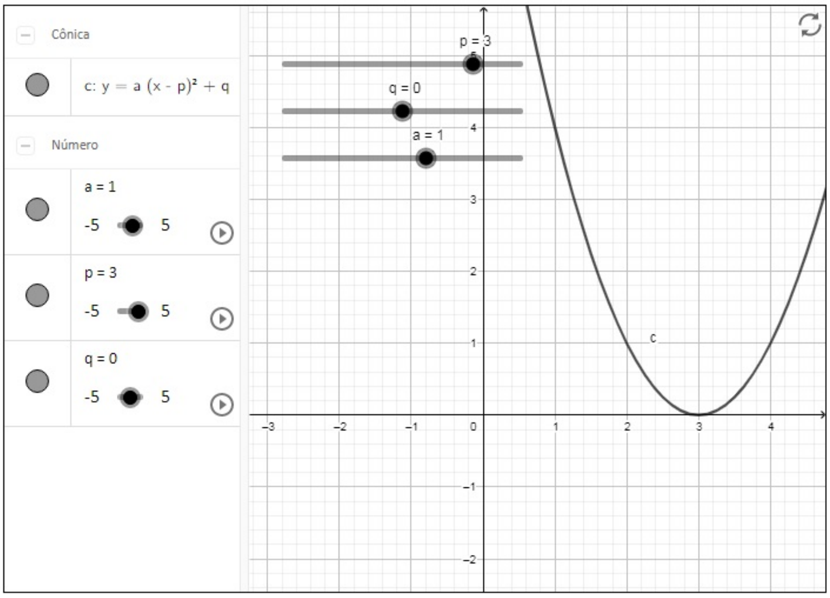


Figura 4: ($p = 3$ e $q = 0$)

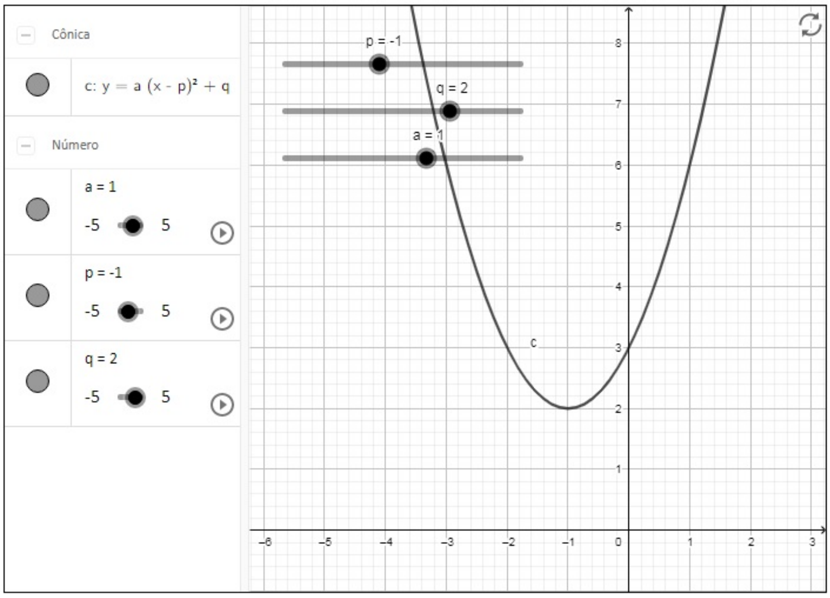


Figura 5: ($p = -1$ e $q = 2$)

i) A variação de p faz com que o gráfico sofra que tipo de translação (vertical ou horizontal?

ii) A variação de q faz com que o gráfico sofra que tipo de translação (vertical ou horizontal?

b) As figuras a seguir mostram as variações obtidas no gráfico para os valores de $a = 1$, ($p = 5$ e $q = 5$); ($p = -5$ e $q = 5$); em seguida ($p = 5$ e $q = -5$) e por último ($p = -5$ e $q = -5$). Já vimos anteriormente que existe um ponto no gráfico em que a função deixa de ser decrescente e passa a ser crescente, este ponto chamamos de **vértice** da curva.

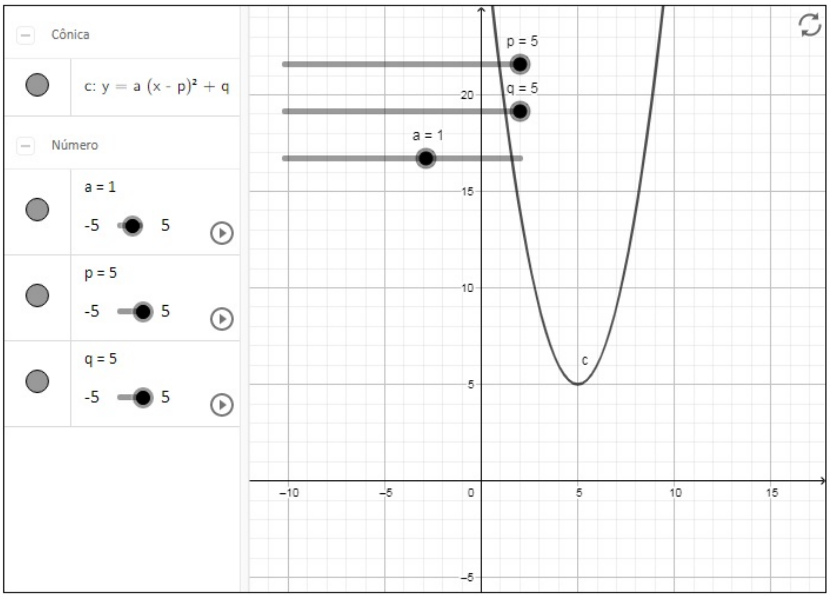


Figura 6: ($p = 5$ e $q = 5$)

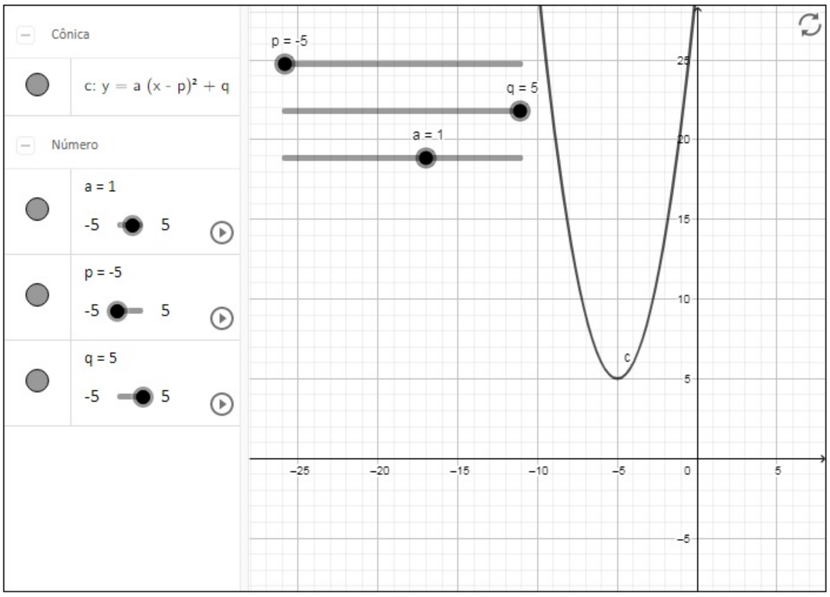


Figura 7: ($p = -5$ e $q = 5$)

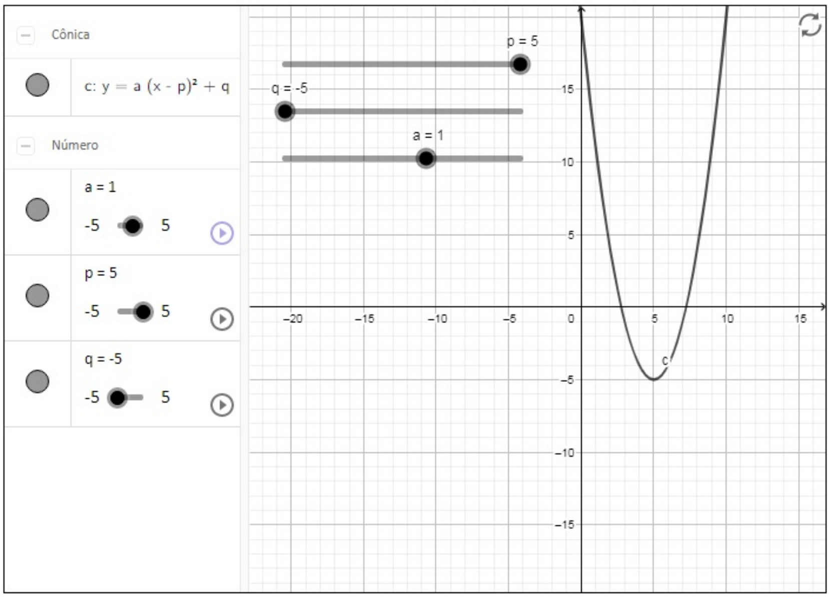


Figura 8: ($p = 5$ e $q = -5$)

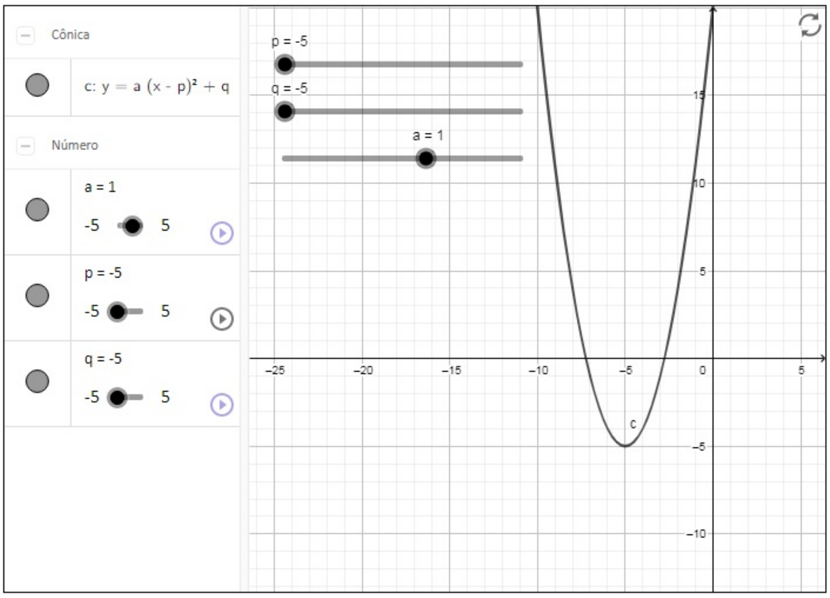


Figura 9: ($p = -5$ e $q = -5$)

Exiba as coordenadas do vértice em função de p e q.

c) Observe que ao mantermos os valores de $a = 1$, $p = 0$ e $q = 0$, temos a curva $y = x^2$. Considerando uma função f de Domínio D e imagem I dada por $f(x) = y$, utilize a figura a seguir, e em seguida escolha a alternativa na qual os conjuntos D e I estão definidos na atividade.

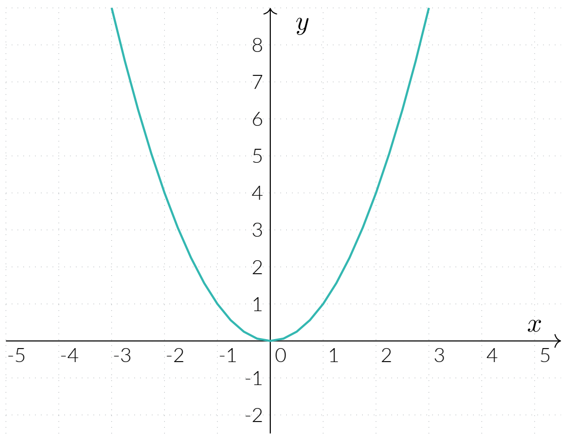


Figura 10: $(a = 1; p = q = 0)$

( ) $D = [-5, 5]$ e $I = [0, 5]$

( ) $D = [0, +\infty[$ e $I = [0, +\infty[$

( ) $D = [0, 5]$ e $I = [-5, 5]$

( ) $D = \mathbb{R}$ e $I = [0, +\infty[$

( ) $D = \mathbb{R}$ e $I = \mathbb{R}$

d) Observe que ao mantermos os valores de $a = -2$, $p = 3$ e $q = -4$, temos que $y = -2(x-3)^2 - 4$. Considerando uma função f de Domínio D e imagem I dada por $f(x) = y$, utilize a figura a seguir, e em seguida escolha a alternativa na qual os conjuntos D e I estão definidos na atividade.

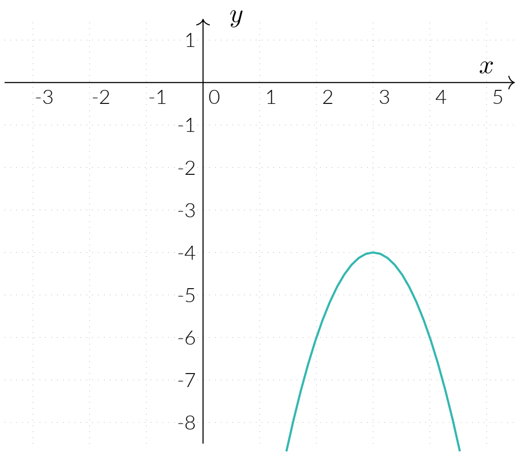


Figura 11: $(a = -2, p = 3, q = -4)$

( ) $D = [-4, 3]$ e $I = [-4, 3]$

( ) $D = \mathbb{R}$ e $I =]-\infty, -4]$

( ) $D = [-5, 5]$ e $I = [-5, 5]$

( ) $D = [-4, 3]$ e $I = [-4, +\infty[$

( ) $D = \mathbb{R}$ e $I = \mathbb{R}$

e) Em relação à função real f definida por $f(x) = a(x-p)^2+q$, caso a assuma apenas valores **positivos**, assinale quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

( ) O valor de p representa o maior valor que f pode assumir.

( ) O valor de p representa o menor valor que f pode assumir.

( ) O valor de q representa o maior valor que f pode assumir.

( ) O valor de q representa o menor valor que f pode assumir.

( ) A função f, não tem valor máximo, mas tem valor mínimo.

( ) A função f, não tem valor mínimo, mas tem valor máximo.

( ) A função f, tem valores de máximo e mínimo.

f) Em relação à função real f definida por $f(x) = a(x-p)^2+q$, caso a assuma apenas valores **negativos**, assinale quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

( ) O valor de p representa o maior valor que f pode assumir.

( ) O valor de p representa o menor valor que f pode assumir.

( ) O valor de q representa o maior valor que f pode assumir.

( ) O valor de q representa o menor valor que f pode assumir.

( ) A função f, não tem valor máximo, mas tem valor mínimo.

( ) A função f, não tem valor mínimo, mas tem valor máximo.

( ) A função f, tem valores de máximo e mínimo.

g) Ainda na função f ao assumirmos os valores de $a = 3$; $p = 1$ e $q = -2$, Assinale quais afirmações a seguir são verdadeiras.

( ) O vértice da curva é $V = (3, 1)$.

( ) O vértice da curva é $V = (3, -2)$.

( ) O vértice da curva é $V = (1, -2)$.

( ) O vértice da curva é $V = (-2, 1)$.

( ) -2, é o maior valor que a função f pode assumir.

( ) 3, é o maior valor que a função f pode assumir.

( ) 1, é o maior valor que a função f pode assumir.

( ) -2, é o menor valor que a função f pode assumir.

( ) 3, é o menor valor que a função f pode assumir.

( ) 1, é o menor valor que a função f pode assumir.

( ) A concavidade da curva está voltada para cima, pois $a > 0$.

( ) A concavidade da curva está voltada para cima, pois $p > 0$.

( ) A concavidade da curva está voltada para cima, pois $q < 0$.