Atividade: Inequações produto ou quociente de funções de grau 1

Para o professor

Observações e recomendações

Caro professor, nessa atividade, esperamos que o estudante faça uma retomada das atividades introdutórias ao estudo das inequações de 1º e de 2º graus. Não desejamos recorrer apenas e diretamente às manipulações algébricas e memorizações de regras; esperamos que os alunos compreendam que resolver inequações que são obtidas por produtos ou quocientes entre funções afins ou quadráticas são resolvidas a partir da análise do sinal do produto/quociente dos fatores/termos.

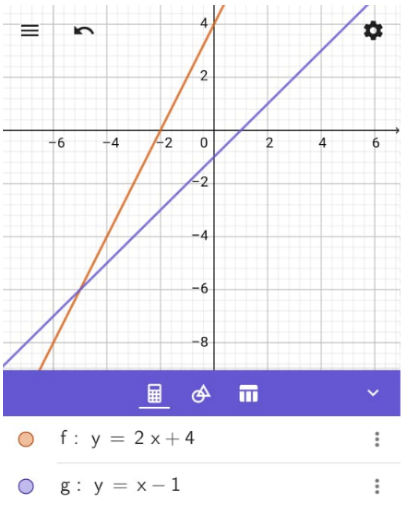
Atividade

Usando o GeoGebra, vamos plotar o gráfico das seguintes funções:

i) $y = 2x + 4$

ii) $y = x - 1$

O GeoGebra denominará automaticamente essas duas funções por f e g, respectivamente.

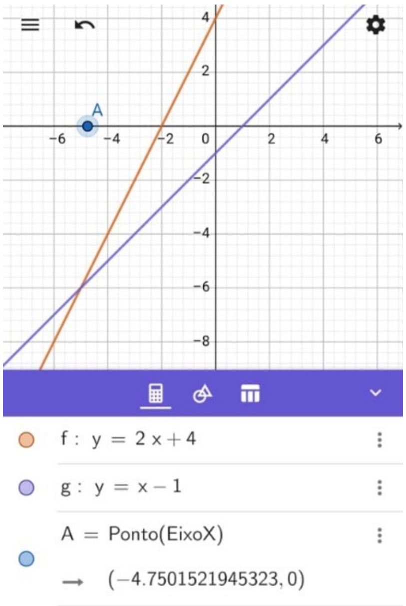


a) Quais são as raízes de f e de g?

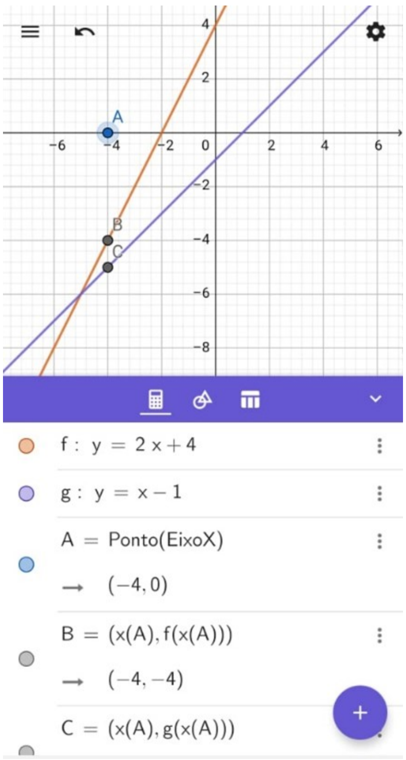
b) Descreva a variação do *sinal* dessas duas funções.

Toque em  e em seguida em . Toque no eixo x, assim, você criou um ponto (A) que se movimenta livremente sobre o eixo x.

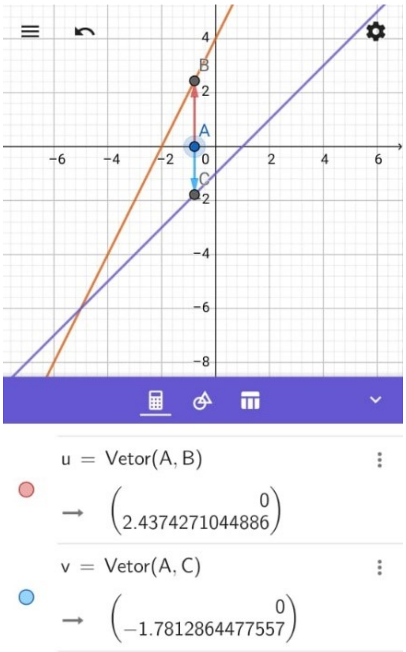
Digite no campo entrada $(x(A), f(x(A)))$ e $(x(A), g(x(A)))$. O GeoGebra nomeará, automaticamente, esses pontos como B e C.



Toque novamente em , e, em seguida, em Vetor. Toque sequencialmente em A e B e, em seguida, em A e C, criando os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Em seguida, ainda no menu , toque em Raízes e, em seguida, em cada uma das duas retas que representam as funções f e g, nessa ordem. Na tela você verá os pontos E e F, raízes das funções f e g, respectivamente.



c) Movimente o ponto A e descreva as possíveis posições relativas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$

d) Em que intervalos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão ambos abaixo do eixo x (ou seja, para que valores de x as funções f e g são negativas)?

e) Em que intervalos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão ambos acima do eixo x (ou seja, para que valores de x as funções f e g são negativas)?

f) Em que intervalos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão em sentidos opostos (ou seja, uma é positiva e outra é negativa)?

g) Vamos considerar agora a função $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Qual será o sinal de $h(x)$ quando $x < -2$? E quando $x > 1$? E quando $-2 < x < 1$? E quando $x = -2$ ou $x = 1$?

h) Faça o mesmo tipo de análise conduzida no item anterior para a função $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

i) A partir do que você percebeu acima (e sem desenvolver o produto), responda: qual a solução da inequação $f(x) \cdot g(x) < 0$?

j) E qual a solução da inequação $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$? Os valores $x = -2$ e $x = 1$ estão no conjunto solução dessa inequação? Justifique sua resposta.

Solução:

a) A raiz de f é -2 e de g é 1.

b) O sinal da função f é negativo para valores menores que $x = -2$, positivo valores maiores que $x = -2$ e nulo em $x = -2$; a função g é negativa para valores de x menores que 1; positiva para valores de x maiores que 1 e nula em $x = 1$.

c) Podem ambos estar abaixo do eixo x, ambos acima do eixo x ou um abaixo e outro acima do eixo x.

d) Estão ambos abaixo do eixo x para valores de x menores que -2, raiz de f.

e) Estão ambos acima do eixo x para valores de x maiores que 1, raiz de g.

f) Estão em sentidos opostos quando x está entre -2 e 1; aqui, AB está acima do eixo x (positivo) e AC está abaixo do eixo x (negativo).

g) Nesse caso, temos que o sinal de h será positivo para valores de x menores que -2 e para valores de x maiores que 1, pois nesse caso, o sinal das duas funções é o mesmo. Já quando x é um valor entre -2 e 1, o sinal de h será negativo, pois nesse caso temos f negativa e g positiva. Em $x = -2$ ou em $x = 1$, como um dos fatores seria nulo, então temos que h é nula.

h) Nesse caso, a situação é análoga ao item anterior, exceto pelo caso em que temos $x = 1$ pois, nessa situação, $g(x) = 0$, o que inviabiliza o quociente. Portanto, temos que q é negativa quando x está entre -2 e 1 e positiva para valores de x menores que -2 ou maiores que 1. Em $x = -2, q$ será nula, pois teremos o quociente entre zero e um número negativo, o que resulta em zero.

i) Conforme vimos no item (g), a função h é negativa, estritamente, quando x está entre -2 e 1; logo, o conjunto solução dessa inequação é $]-2, 1[$.

j) Conforme vimos no item (h) a função q é positiva quando x é menor que -2 ou quando x é maior que 1. No entanto, note que aqui a desigualdade está incluindo o zero; mas como precisaremos excluir o valor 1 do domínio de q, então a solução será $]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$