Atividade: Arremesso

Habilidades

LAF2 Compreender a taxa de variação como uma medida de covariação entre grandezas e utilizá-la para interpretar situações reais.

Para o professor

Objetivos específicos

OE1 Construir, a partir de uma situação real de lançamento oblíquo, a ideia de taxa de variação instantânea.

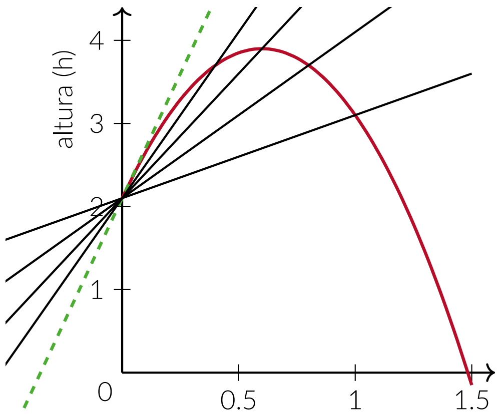
OE2 Usar a intuição sobre velocidade inicial instantânea e velocidade nula (ausência de movimento) para comparar com o limite das taxas de variação média.

Observações e recomendações

- Nessa atividade a ideia informal de limite é explorada através de cálculos de taxas de variação em intervalos sucessivos de comprimento cada vez menor.

- Caso seja possível utilizar recursos computacionais, é interessante fazer os cálculos em uma planilha eletrônica com intervalos ainda menores para ilustrar a convergência.

- Discuta a ideia da aproximação geometricamente: retas secantes que se aproximam da reta tangente. A intenção aqui é apenas construir modelos para formar algum tipo de intuição sobre o assunto, não pretendemos tratar as coisas de maneira formal.

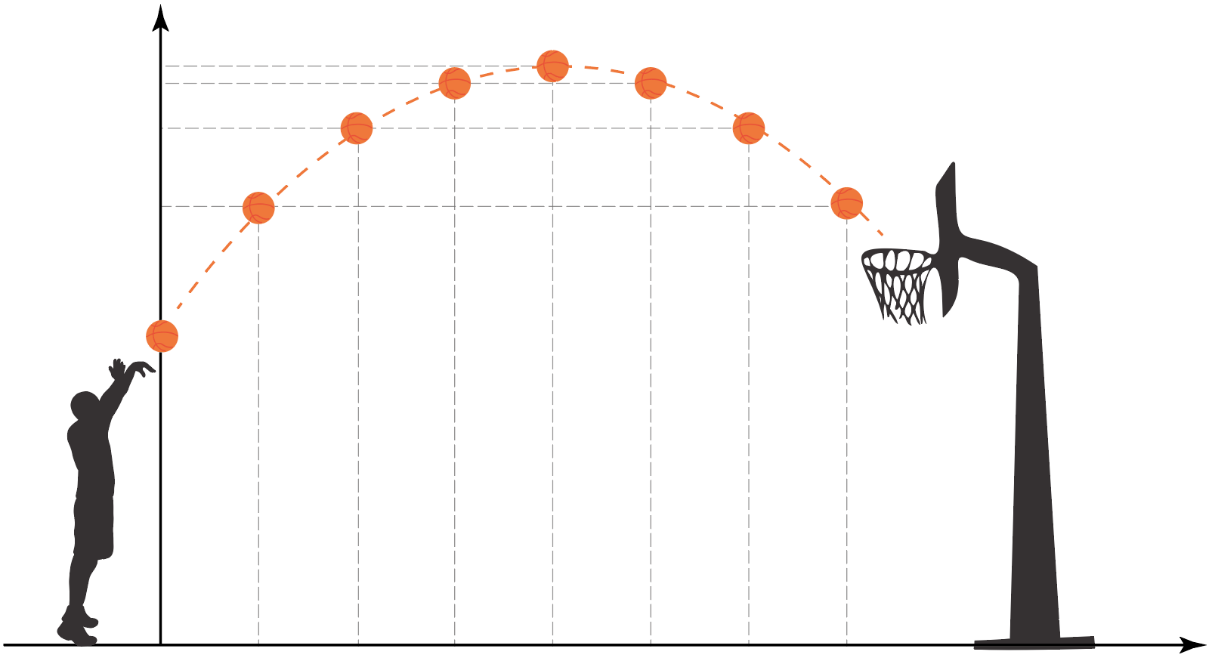


- Após o término da atividade discuta com os estudantes um pouco mais sobre o conceito de taxa de variação (velocidade) instantânea. Utilize outros exemplos: o velocímetro do carro (o que significa quando o ponteiro marca 50km/h?); o custo marginal de produção de um determinado produto, dentre outros.

- Essa atividade está disponível em uma versão digital no link: `https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5de193196148282ac346889a`

Atividade

Um jogador de basquete ao lançar a bola em direção à cesta a vê descrever uma curva no ar chamada *parábola*. Essa curva é resultado da combinação de dois movimentos: um na direção horizontal, responsável por fazer a bola "ir para frente"e outro na direção vertical que faz a bola "subir e descer".



Admitindo que o jogador lançou a bola de uma altura de $2{,}10m$ com velocidade inicial de $v_0 m/s$ (na direção vertical), a função que fornece a variação da altura da bola em função do tempo é dada pela expressão

$$h(t) = 2,10 + v_0 t - 5t^2$$

, cujo gráfico também é uma parábola (representado a seguir apenas para $t \geq 0$):

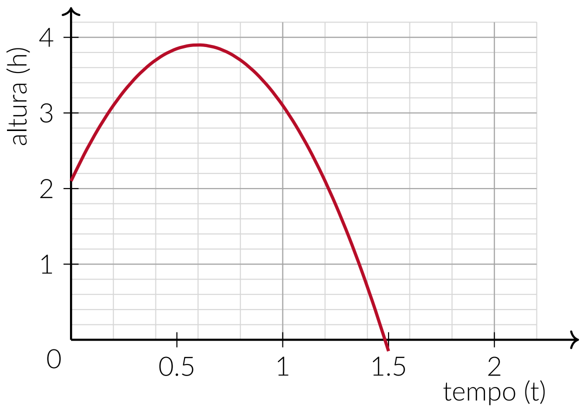


Figura 1: Gráfico de $h(t)$ para $v_0 = 6m/s$.

Com a ajuda de uma calculadora, calcule as taxas de variação médias da altura nos seguintes intervalos de tempo para $v_0 = 6m/s$ e $v_0 = 7m/s$:

	$v_0 = 6m/s$	$v_0 = 7m/s$
Entre $t = 0$ e $t = 1$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,1$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,01$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,001$		
Entre $t = 0$ e $t = 0,0001$		

a) Olhando para as sequências de valores obtidos acima, o que se pode conjecturar sobre a tendência que eles apresentam?

Considerando a velocidade inicial igual a $6m/s$, a bola atinge sua altura máxima de $3{,}9m$ depois de $0{,}6s$ do lançamento. Ou seja, o ponto mais alto do gráfico é o par ordenado $(0{,}6; 3{,}9)$. Neste ponto a velocidade na direção vertical é igual a zero (uma vez que aí a bola deixa de subir e passa a descer). Observe, agora, as taxas de variação médias da altura nos seguintes intervalos de tempo:

	$v_0 = 6m/s$
Entre $t = 0{,}5$ e $t = 0{,}6$	0,5
Entre $t = 0{,}59$ e $t = 0{,}6$	0,05
Entre $t = 0{,}599$ e $t = 0{,}6$	0,005
Entre $t = 0{,}5999$ e $t = 0{,}6$	0,0005

	$v_0 = 6m/s$
Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}7$	-0,5
Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}65$	-0,25
Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}605$	-0,025
Entre $t = 0{,}6$ e $t = 0{,}6005$	-0,0025

b) A tendência observada nos valores obtidos acima corrobora a sua conjectura do item anterior? Explique.

c) Calcule a taxa de variação média da função $h(t) = 2{,}1 + 6t - 5t^2$ entre os tempos $t = 1$ e $t = 1 + \alpha$, onde a variável α representa um número real próximo de zero. (A resposta ficará em função de α).

d) À medida que o valor de α se aproxima de zero, o que se observa com o valor da taxa de variação média calculada no item anterior? O que esse valor significa no contexto do problema?

Solução:

	$v_0 = 6m/s$	$v_0 = 7m/s$
Entre $t = 0$ e $= 1$	1	2
Entre $t = 0$ e $= 0,1$	$5,5$	$6,5$
Entre $t = 0$ e $= 0,01$	$5,95$	$6,95$
Entre $t = 0$ e $= 0,001$	$5,995$	$6,995$
Entre $t = 0$ e $= 0,0001$	$5,9995$	$6,9995$

a) Os valores parecem aproximar-se do valor da velocidade inicial, 6 no primeiro caso e 7 no segundo caso.

b) Sim, pois os valores t estão próximos de $0{,}6$ e as taxas de variação médias dessa vez aproximam-se de zero que é a velocidade no ponto mais alto da trajetória.

c) $\dfrac{h(1+\alpha) - h(1)}{(1+\alpha) - 1} = \dfrac{2,1 + 6(1+\alpha) - 5(1+\alpha)^2 = 3{,}1}{\alpha} = \dfrac{-4\alpha - 5\alpha^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha(-4 - 5\alpha)}{\alpha} = 4 - 5\alpha$

d) À medida que α se aproxima de zero, o valor calculado se aproxima de -4, que, de acordo com o observado anteriormente, deve ser a velocidade vertical instantânea no tempo $t = 1$. O sinal negativo indica que o movimento é para baixo (sentido contrário ao adotado como positivo).

α	0,1	0,01	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$-4-5\alpha$	$-4{,}5$	$-4{,}05$	$-4{,}005$	$-4{,}0005$	$-4{,}00005$	$-4{,}000005$

α	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}
$-4-5\alpha$	$-3{,}5$	$-3{,}95$	$-3{,}995$	$-3{,}9995$	$-3{,}99995$	$-3{,}999995$