Atividade: Jogo de dardos

Habilidades

a

Para o professor

Objetivos específicos

OE1 Calcular probabilidades de eventos em situações cujo espaço amostral é uma região do plano, estendendo a noção clássica de probabilidade para um espaço amostral não discreto.

Observações e recomendações

O objetivo desta atividade é estender a noção de probabilidade para uma situação envolvendo um espaço amostral não discreto e induzir à noção de probabilidade geométrica como razão de áreas em que uma região de área bem definida e finita do plano é fixada como o espaço amostral e, os eventos são tomados como sub-regiões de área bem definida do espaço amostral. A situação a ser tratada aqui é bem restrita, pois usará a noção clássica de probabilidade, adotando a suposição de sub-regiões do espaço amostral de áreas iguais têm probabilidades iguais.
Note que a frase "Suponha que você seja suficientemente experiente de modo que sempre atinja o tabuleiro de darodos" especifica que o espaço amostral resume-se ao tabuleiro de dardos.

Atividade

No jogo de dardos o vencedor é quem zera os seus pontos mais rapidamente. Você começa, por exemplo, com um total de 200 pontos. A cada lançamento do dardo, dependendo do local atingido, você ganha uma certa pontuação que é descontada do seu total. Se você for o primeiro a zerar, será o vencedor do jogo.

Quanto mais próximo do centro do tabuleiro de dardos (um tabuleiro circular conforme a figura 1), mais pontos você ganha.

Suponha que você seja suficentemente experiente de modo que todos os seus lançamentos atingem o tabuleiro de dardos.

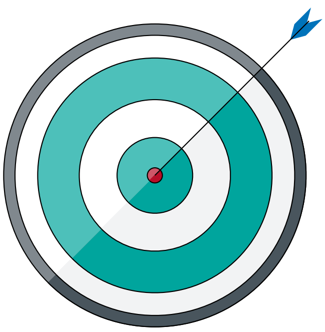

Figura 1: Tabuleiro de jogo de dardos

Suponha que a medida do raio do tabuleiro de dardos seja 20cm e que a medida do menor raio (círculo em verde no centro do tabuleiro) seja 5cm, e que os acréscimos de comprimento do raio nas faixas branca, verde e branca do tabuleiro sejam iguais a 5cm. A moldura em preto não faz parte do alvo. Suponha também que atingindo o

- círculo de raio 5cm (em verde), você ganha 100 pontos;
- o anel cicular mais próximo ao centro (em branco), você ganha 50 pontos;
- o anel circular em verde subsequente, você ganha 20 pontos e
- a anel circular mais externo (em branco), você ganha 10 pontos.

Observe que, neste caso, não é possível usar a interpretação clássica de probabilidade, pois existem infinitos eventos elementares. No entanto, é razoável supor uniformidade de probabilidades se, de fato, o jogador acerte em qualquer ponto do tabuleiro de dardos ao acaso. Neste espaço amostral, o círculo de raio 20cm, se os pontos são obtidos ao acaso, ao considerar regiões de mesma área, contidas no círculo, as probabilidades de se obter pontos nestas regiões devem ser iguais.

Assim, calcula-se a probabilidade do dardo cair numa região dentro do círculo como o quociente entre a medida da área da região sobre a medida da área do círculo (espaço amostral), isto é, se

$$A \subset S, \text{ então } P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}$$

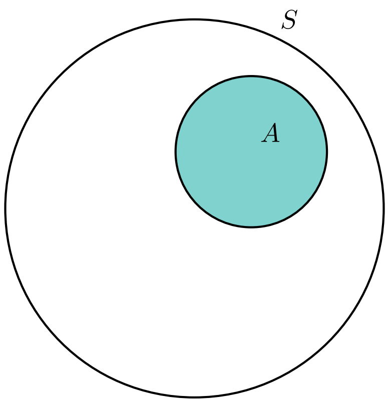

Figura 2: Exemplo de um evento A no tabuleiro de dardos

Observações:

- Nesta situação, a probabilidade do dardo atingir um ponto fixado no círculo será sempre zero, pois a medida de área correspondente a um ponto é nula.
- Esta forma de calcular probabilidades costuma ser denominada como *probabilidade geométrica* e pode ser considerada como uma extensão da interpretação clássica de probabilidade para espaços amostrais representados por uma região do plano com área definida. Esta mesma noção poderá ser usada para espaços amostrais representados por intervalos da reta limitados de comprimento definido, neste caso, calculando-se probabilidades como uma razão de comprimentos de intervalos.

Calcule a probabilidade de que em um lançamento você ganhe

a) exatamente 100 pontos;

b) exatamente 20 pontos;

c) no máximo 50 pontos.

d) Suponha também que pode ser combinado, antes do início do jogo, conceder um bônus adicional de 10% da pontuação, se o dardo atingir o semicírculo, destacado na figura 1. Calcule a probabilidade de que em um lançamento você atinja

i) o semicírculo destacado ou uma faixa de exatamente 50 pontos;

ii) o semicírculo destacado e uma faixa de pelo menos 20 pontos.

Solução:

a) Para ganhar 100 pontos o dardo deve cair no círculo menor de raio 5cm (em verde). Logo,

$$P(A) = \frac{\pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 20^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

.

b) Para ganhar 20 pontos o dardo deve cair no anel circular verde mais externo. Logo, usando a definição

$$P(B) = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } S} = \frac{\pi(15^2 - 10^2)}{\pi \cdot 20^2} = \frac{125}{400} = 0{,}3125$$

c) Para ganhar no máximo 50 pontos, o dardo deve cair em qualquer ponto exceto no círculo menor em verde onde se ganha 100 pontos. Logo, usando a propriedade que explicita a probabilidade do evento complementar,

$$P(C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}0625 \approx 0{,}9375$$

.

d) Considerando o semicírculo destacado na figura 1:

i) A região que determina o evento de interesse é a reunião de duas regiões, a saber, o semicírculo (A) e o anel circular correspondente a faixa de 50 pontos (B). Logo, usando a propriedade da probabilidade da união de dois eventos tem-se

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi \cdot (10^2 - 5^2)}{\pi \cdot 20^2} - \frac{(\pi/2) \cdot (10^2 - 5^2)}{\pi \cdot 20^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{75}{400} - \frac{75}{800} \approx 0{,}59. \end{aligned}$$

ii) A região que determina o evento de interesse (D) corresponde a um semicírculo de raio 15cm. $P(D) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi \cdot 15^2}{\pi \cdot 20^2} = \dfrac{9}{32} \approx 0{,}28.$