Atividade: ”Abraçando” um círculo com uma reta

Para o professor

Objetivos específicos

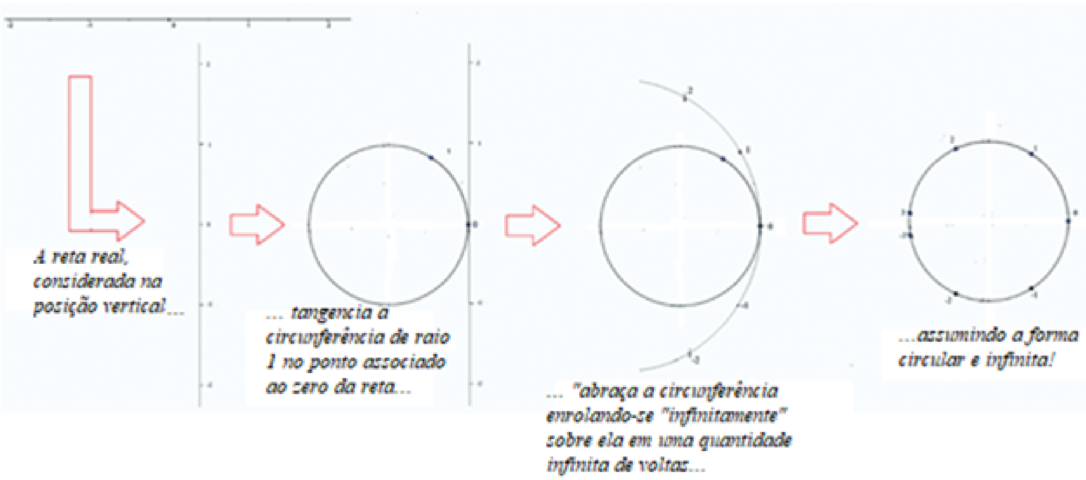
OE1 Construir, mais abstratamente em relação à atividade anterior, a sobrejeção da reta sobre a circunferência unitária dada pela função de Euler.

Observações e recomendações

Repare que, por enquanto, não estamos preocupados com o sistema de coordenadas do plano que contém a circunferência. Estas coordenadas serão consideradas na próxima seção para formalizar o conceito de seno e cosseno de um número real. Neste momento, o importante é o aluno perceber como fica a posição dos números reais sobre a circunferência unitária após o “enrolar” da reta sobre a circunferência.

Atividade

Observe a imagem a seguir e responda às perguntas:



a) Quantos pontos da circunferência estarão “cobertos” pelo número real 1?

b) A cada ponto da circunferência, quantos números reais ficam associados?

c) Considerando o ponto A na circunferência sobre o qual encontra-se o número real 1. Qual o próximo número real positivo que também estará localizado em A? E qual será o primeiro número negativo associado a A?

d) Se reproduzimos a construção exibida acima usando, em lugar da reta real, o intervalo $[-5, 5]$ em uma circunferência de raio 2, tangenciando esta circunferência no ponto 0 do intervalo, qual será a medida do menor arco encontrado entre os pontos da circunferência associados a -5 e 5?

Solução:

a) Apenas um ponto ficará coberto por cada número real.

b) A cada ponto da circunferência estarão associados infinitos números reais.

c) A cada arco de volta inteira descrito a partir do ponto A teremos outros pontos da reta que irão se sobrepor em A, logo, esses pontos correspondem aos números reais $1 + 2k\pi$, onde que k é um inteiro qualquer. Portanto, o primeiro número positivo após o 1 cuja posição após o enrolar da reta será o mesmo ponto A é $1 + 2\pi$, enquanto o primeiro número negativo a ser associado a A será $1 - 2\pi$.

d) O ponto em que o número real 5 está alocado encontra-se no 4° quadrante, visto que está entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π; analogamente, o real -5 está no 1^{o} quadrante. O menor arco tem comprimento igual a $2 \cdot |2\pi - 5|$ o que equivale a, aproximadamente, $2{,}5$ unidades de comprimento. Outra maneira de se chegar ao resultado é percebendo que o comprimento do intervalo $[-5, 5]$ é 10, portanto, menor que o comprimento da circunferência de raio 2, que é 4π . Portanto, a transformação que enrola o intervalo na circunferência determinará um arco de 10 unidades e o arco complementar medirá $4\pi{-}10$