Atividade: Escada Infinita

Habilidades

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Para o professor

Objetivos específicos

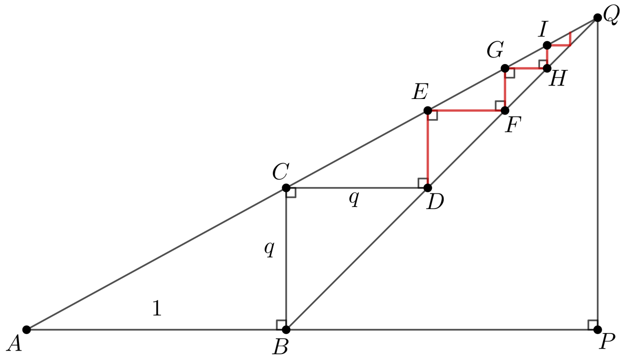
OE1 Deduzir uma expressão para a soma dos termos de uma PG infinita.

Observações e recomendações

- O item f) envolve uma demonstração. Caso os estudantes encontrem alguma dificuldade, considere fazer a discussão dos itens anteriores e resolva este último item juntamente com eles, conectando com ideias que eles desenvolveram.

Atividade

Na figura abaixo, os ângulos indicados são retos, AB mede 1, $BC = CD = q < 1$.



a) Calcule, em função de q, os comprimentos de DE, EF, FG, GH e HI.

b) Quais são as sequências de segmentos cujas medidas formam progressões geométricas?

c) Se a construção continuasse indefinidamente, quais seriam as medidas dos novos segmentos horizontais (paralelos a AP)? Que segmento da figura tem comprimento igual à soma de todos os (infinitos) segmentos horizontais?

d) Por que podemos afirmar que $AP = PQ + 1$?

e) Por que podemos afirmar que $PQ = q.AP$?

f) Conclua que a soma de todos os infinitos segmentos horizontais é igual a $\dfrac{1}{1-q}$.

Solução:

a) $DE = EF = q^2$, $FG = GH = q^3$, $HI = q^4$

b) (AB, CD, EF, GH), (BC, DE, FG, HI)

c) $q^4, q^5, q^6, \ldots$ a soma de todos seria igual ao comprimento de AP.

d) $AP = AB + BP = 1 + BP$ e $BP = PQ$, pois o triângulo BPQ é isósceles.

e) Pois APQ é semelhante a ABC, assim $\dfrac{PQ}{AP} = \dfrac{BC}{AB} = q$.
$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = AP$ e $AP = PQ + 1 = q \cdot AP + 1$, logo $AP - q \cdot AP = 1$, o que nos leva a $AP(1 - q) = 1 \iff AP = \dfrac{1}{1-q}$.