LIÇÃO 1 - Para o professor

Esta lição tem por objetivo introduzir frações unitárias a partir de modelos contínuos, tais como círculos, retângulos, hexágonos e segmentos, fazendo uso de expressões verbais como, por exemplo, metade de, um terço de, a terça parte de, um quarto de, para indicar essas frações. Uma vez estabelecida a unidade, a expressão “fração unitária” nomeia cada uma das partes da divisão da unidade em partes iguais.

As atividades visam à equipartição de uma unidade. Equipartição entendida como partição em partes iguais, sem que as partes tenham necessariamente a mesma forma. Assim, por exemplo, na equipartição de um retângulo está implícito que as partes têm a mesma área, e não necessariamente a mesma forma nem o mesmo perímetro. O objetivo é levar o aluno a reconhecer diferentes modos de dividir e recompor a unidade. No senso comum, as expressões repartir, partir e dividir são sinônimas e não pressupõem a equipartição. No entanto, é importante lembrar que, no caso da operação de divisão, espera-se que o resultado registre uma equipartição. No futuro, o estudante deverá entender um terço como o resultado da divisão de um por três. Este é o caso da operação, em que a palavra “divisão” abrevia “divisão em partes iguais”.

Espera-se que, ao final da lição, os alunos saibam identificar e representar frações unitárias a partir de modelos diversos, fazendo o uso adequado de expressões verbais para nomeá-las. No entanto, o professor não deve apresentar o termo “fração unitária” ao estudante, uma vez que é desnecessário para a aprendizagem pretendida. Fazê-lo pode, inclusive, comprometer o que se pretende com a lição. Não se pretende apresentar aos alunos a linguagem simbólica de frações, que será tratada nos capítulos seguintes.

De maneira geral, as atividades envolvem a abordagem das frações unitárias com objetivos diversos. Por exemplo, diferenciar a divisão da unidade em partes “quaisquer” da divisão da unidade em partes “iguais” (equipartição); reconhecer a necessidade de uma expressão verbal que identifique uma das partes iguais em uma equipartição da unidade; perceber que a unidade pode ser subdividida em uma quantidade igual de partes sem que essa divisão represente uma equipartição; reconhecer que em modelos contínuos, as partes de uma equipartição podem não ter a mesma forma; distinguir uma equipartição específica dentre partições diversas ou reconhecer a quarta parte como a metade da metade.

A participação do aluno, criando representações próprias e fazendo uso da linguagem verbal para explicar o seu raciocínio diante da realização das atividades, será fundamental na condução desta seção.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 1:

O aluno deve ser capaz de:

⋆ Diferenciar uma partição qualquer de uma unidade de uma equipartição (partição em partes iguais) de uma mesma unidade.

⋆ Reconhecer a necessidade de uma expressão verbal que identifique uma das partes iguais em uma equipartição da unidade.

⋆ Reconhecer que em modelos contínuos, as partes de uma equipartição podem não ter a mesma forma.

⋆ Identificar, a partir de representações visuais diversas, frações unitárias de denominador variando de 2 a 10.

⋆ Utilizar a linguagem verbal que caracteriza as frações unitárias de denominador variando de 2 a 10. (Isto é, “metade de”, “um meio”, “um terço”, “terça parte de”, ..., “um décimo”, “décima parte de”).

⋆ Comparar frações unitárias em exemplos concretos simples (por exemplo, reconhecer que um terço de uma pizza é maior do que um quarto da mesma pizza).

⋆ Recompor a unidade a partir de uma fração unitária dada em modelos contínuos.

⋆ Relacionar uma fração da unidade à quantidade necessária dessas partes para compor a unidade. Assim, por exemplo, é necessário reunir cinco *q*uintas partes para recompor a unidade.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Diferenciar a partição da unidade em partes “quaisquer” da partição da unidade em partes “iguais”.

⋆ Reconhecer a necessidade de uma expressão verbal que identifique uma das partes iguais em uma equipartição da unidade.

⋆ Diferenciar “a partição da unidade em três partes quaisquer” da “partição da unidade em três partes iguais”.

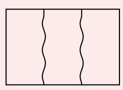
⋆ Compreender as expressões “um terço de” e “terça parte de” como formas de identificar uma das partes da equipartição da unidade em três partes.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ No final deste volume estão disponíveis materiais para reprodução. Mas o professor pode usar folhas de papel para o mesmo fim.

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.

⋆ A partição em partes iguais será chamada neste texto de “equipartição”, mas consideramos desnecessário o uso desta palavra pelo professor com os estudantes. O objetivo é fazer a equipartição livremente de forma coerente. Assim, por exemplo, podem ser aceitas como respostas:



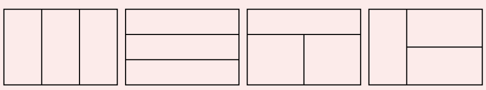
⋆ Não se espera que, nesta atividade, os alunos usem a medida para fazer a equipartição de maneira precisa.

⋆ Busque conduzir a discussão nos grupos de modo que os estudantes percebam que, para que os amigos recebam a mesma quantidade de chocolate, a partição proposta para a barra de chocolate deve ser em “partes iguais”, no sentido de ganharem todos a mesma quantidade de chocolate, não necessariamente pedaços de mesma forma.
⋆ Na discussão, procure destacar que a referência à “partição em três partes iguais” se dá a partir das expressões “um terço” da barra de chocolate ou “a terça parte” da barra de chocolate.
⋆ O item c) admite diversas soluções, algumas estão apresentadas como resposta. No entanto, algumas dessas respostas podem não aparecer naturalmente em sala de aula. Avalie a possibilidade de apresentar e explorar algumas dessas soluções (ou outras que queira) em sala de aula. Por exemplo, apresente uma dessas divisões aos alunos e peça-lhes que avaliem a equipartição, explicando sua decisão.
⋆ O item d), provavelmente, pode não ser respondido corretamente pelos alunos. Se for o caso, as expressões “um terço de” e “a terça parte de” devem ser apresentadas.
⋆ Fique atento às falas dos alunos. Observe que os alunos podem representar e verbalizar as respostas de diferentes modos e que não há uma resposta única para a atividade. Por exemplo, alguns alunos podem precisar de mais tempo do que outros para usar a expressão “um terço” no lugar de “partição em três partes iguais” ou “divisão em três partes iguais”. Ou ainda, observarem que há diferentes representações para a equipartição.
⋆ Pode ser aproveitada a oportunidade para questionar os estudantes se no lugar de três amigos fossem 5 amigos, cada um receberia mais ou menos chocolate após a divisão em cinco partes iguais?

⋆ Esta atividade pode ser adaptada visando a inclusão de alunos com deficiência de visão. Para isso, sugere-se confeccionar os modelos da barra de chocolate inteira e repartida, que estão disponíveis para reprodução no final do livro, em três materiais diferentes. Por exemplo, papel comum e papéis com texturas diferentes, tecido ou material emborrachado.

Solução da Atividade 1

a) Este item não possui resposta correta, apenas respostas coerentes com a explicação do aluno. Por exemplo, um estudante pode dizer que sim e explicar que o amigo mais velho deve ficar com uma parte maior porque precisa de mais energia. Mas a resposta esperada é que a divisão não parece justa porque as quantidades de chocolate são diferentes. Discuta com os alunos para que entendam a divisão correspondente à resposta esperada.
b) Não, eles receberão quantidades diferentes de chocolate, embora cada um receba um único pedaço do chocolate.
c) Respostas possíveis:



d) Cada parte é *um terço* da barra ou a *terça parte* da barra.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber que uma unidade (no caso, uma pizza) pode ser subdividida em um mesmo número de partes sem que cada divisão represente uma equipartição.
⋆ Distinguir uma equipartição dentre partições diversas.
⋆ Diferenciar “a divisão da unidade em quatro partes quaisquer” da “divisão da unidade em quatro partes iguais”.
⋆ Compreender as expressões “um quarto de” e “quarta parte de” como forma de identificar uma das partes da equipartição em 4 partes.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ No final deste volume estão disponíveis materiais para reprodução.
⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
⋆ É importante que a discussão conduza os alunos ao entendimento de que apenas as partes da equipartição podem ser chamadas de “quartos” da pizza, as demais são simplesmente fatias ou pedaços, por exemplo.
⋆ Os alunos devem reconhecer que, apesar de todas as pizzas estarem repartidas em quatro fatias, apenas uma das repartições propostas sugere a equipartição, respondendo assim a último item desta atividade.
⋆ Essa atividade pode ser adaptada visando à inclusão de alunos com deficiência visual. Para isso, sugere-se confeccionar os modelos das três pizzas repartidas, que estão disponíveis para reprodução no final do livro, em três materiais diferentes. Por exemplo, papel comum e papéis com texturas diferentes, tecido ou material emborrachado.

Solução da Atividade 2

a) Sim. Cada grupo repartiu sua pizza em quatro fatias.
b) Não, pois algumas fatias têm quantidades de pizza diferentes das outras.
c) Apenas no grupo 1 as 4 crianças receberam a mesma quantidade de pizza. Cada fatia da pizza do grupo 1 é *um quarto* da pizza ou *a quarta parte* da pizza.

Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer a equipartição em um modelo linear.
⋆ Reconhecer a quarta parte como a metade da metade.

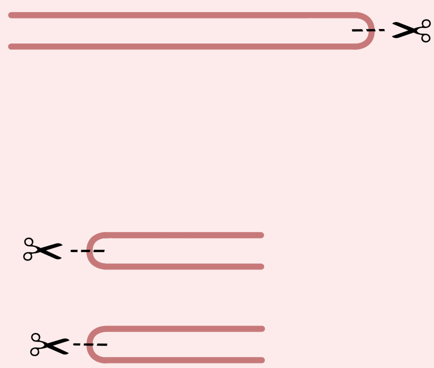
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ No final deste volume estão disponíveis materiais para reprodução. Esta atividade necessita deste material.

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de quatro alunos.
⋆ Cada grupo deve receber um pedaço de barbante de, aproximadamente, 1m e quatro enfeites (todos iguais).
⋆ Os quatro enfeites precisam ser confeccionados antes da realização da tarefa. Sugerem-se estrelas, cujos modelos estão disponíveis para reprodução no final do livro. No entanto, segundo a avaliação do professor, os enfeites podem ser outros, desde que sejam os 4 congruentes.
⋆ Como sugestão, se possível, solicitar aos alunos que confeccionem os enfeites, por exemplo, associando esta atividade com geometria, com a abordagem de grandezas e medidas, com a disciplina de artes ou envolvendo culturas artesanais populares.
⋆ A equipartição do barbante não deve ser obtida a partir da medida do barbante, mas por sucessivas dobras do barbante sobre ele mesmo, como ilustrado na resposta da atividade. Tal discussão também será útil na abordagem de frações equivalentes na Lição 4.
⋆ A manipulação e a dobra do barbante devem sustentar a discussão para a identificação da "metade da metade" com a "quarta parte" do barbante. Nesse caso, a identificação se dará pela sobreposição das partes.
⋆ Nossa experiência aplicando esta atividade tem mostrado um efeito emocional positivo em permitir que os estudantes realmente confeccionem os enfeites.

Solução da Atividade 3

Uma maneira de se cortar o barbante é dobrar ao meio, cortar. Depois dobrar novamente cada uma das partes e cortar, obtendo quatro partes iguais, como ilustrado na figura a seguir.



Sobre o Organizando as Ideias

Nesta etapa, espera-se que os alunos compreendam as frações como forma de expressar quantidades. O objetivo é que percebam seu papel para expressar quantidades em situações de equipartição da unidade. Assim, as frações podem ser utilizadas no dia a dia para identificar quantidades do mesmo modo que os números naturais, já conhecidos dos alunos. Por exemplo, como nas expressões: "dois ovos", "duas xícaras de farinha", "um terço de xícara de cacau" e "meio litro de leite".

Objetiva-se a expressão verbal e não a representação simbólica. Espera-se, assim, que os alunos apropriem-se das expressões verbais que identificam as frações unitárias (um meio, um terço, um quarto, ... , um nono e um décimo) antes de serem apresentados formalmente à simbologia matemática (que será objetivo da próxima lição). A referência às frações unitárias com a expressão "um" antes da identificação da parte, como, por exemplo, em "um terço" e em "um sétimo", é uma decisão pedagógica. Claro que é possível referir-se a essas frações simplesmente por "terço" e "sétimo", respectivamente. No entanto, nas próximas seções, pretende-se que as frações não unitárias, como "dois terços" e "nove sétimos", por exemplo, sejam entendidas a partir da justaposição das frações unitárias correspondentes, o que é naturalmente amparado pela contagem. Nas expressões verbais relativas às frações unitárias, o "um" antes da identificação da parte está associado à contagem. Dessa forma, a compreensão das frações "um terço" e "dois terços" ou das frações "um sétimo" e "nove sétimos", por exemplo, seguem a mesma construção lógica.

Notas de Aula

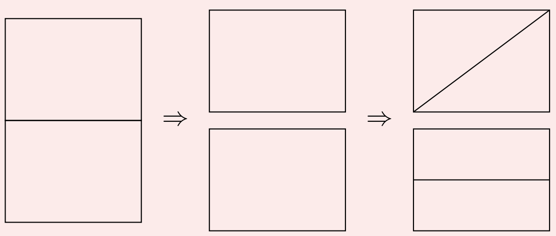
Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que, em uma equipartição, as partes podem não ter a mesma forma.
⋆ Identificar a equivalência entre as partes de uma equipartição a partir de sobreposição ou da comparação pelo reconhecimento da associação a uma mesma fração unitária (no caso,um quarto).
⋆ Reconhecer a quarta parte como a metade da metade.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

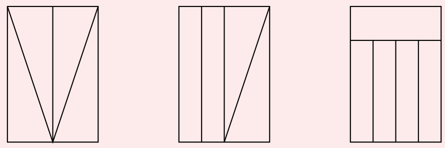
⋆ No final deste volume estão disponíveis materiais para reprodução. Cada estudante deve receber os oito retângulos coloridos
⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ Caso não seja possível imprimir os retângulos em cores, use a versão em preto e branco, também disponível no final do livro, e peça para os estudantes colorirem. O objetivo das cores é facilitar a identificação dos retângulos na discussão em sala.
⋆ É importante observar que todos os retângulos estão divididos em quartos. Conduza a discussão de modo a levar os alunos a reconhecer que, em uma equipartição, as partes não precisam ter a mesma forma.
⋆ Nesta atividade, espera-se que os alunos consigam lidar com a figura de um retângulo como representativa de uma unidade genérica. No entanto, se necessário, o professor pode associar cada retângulo a um objeto concreto (por exemplo, uma barra de chocolate ou a um pedaço de bolo).
⋆ É esperado que não seja imediato o reconhecimento de que as partes dos retângulos da segunda linha representam quartos. Nesse caso, uma alternativa possível é solicitar que eles recortem as partes de cada um dos retângulos da primeira linha para realizar a comparação por sobreposição com as partes dos retângulos da segunda linha.
⋆ Recomenda-se ressaltar para os estudantes ao término da atividade que um quarto é a metade da metade.
⋆ Em alguns casos, a comparação se dará pela identificação da fração unitária correspondente a cada parte. Nesses casos, o aluno deve reconhecer que a quarta parte é equivalente à metade da metade. Por exemplo, como no caso seguir.



Metade do retângulo maior

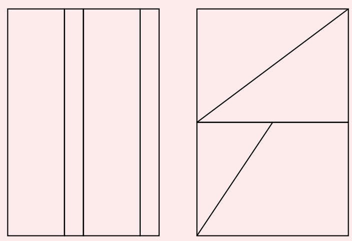
Cada uma das 4 partes é metade da metade

⋆ Segundo a avaliação do professor, a atividade pode ser realizada em duas etapas. Em um primeiro momento, os alunos recebem as primeiras quatro das oito imagens e realizam a atividade com essas imagens - cuja comparação se dá apenas pela sobreposição. Em seguida, recebem as outras quatro, para concluir a atividade.
⋆ Da experiência dos autores com a implementação desta atividade em sala de aula, constatou-se uma empolgação dos estudantes quando, ao percebem que formas diferentes podem representar a mesma fração da unidade, foram convidados a gerarem outras equipartições dessa unidade. Seguem outras possíveis equipartições:



Solução da Atividade 4

a) Todos os retângulos estão divididos em quartos.
b) Dois desenhos possíveis são:



Notas de Aula

Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

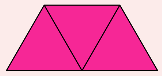
⋆ Aplicar o conceito de fração unitária para compor a unidade a partir de uma fração unitária dada. Por exemplo, reconhecer que é necessário reunir cinco quintas partes para recompor a unidade.
⋆ Reconhecer que uma unidade pode ter diversas representações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

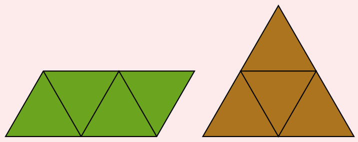
⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ No final deste volume estão disponíveis materiais para reprodução para esta atividade. Recomenda-se que eles sejam distribuídos a todos os estudantes e não um por grupo. Observe que há mais do que um triângulo cinza, para que possam experimentar.
⋆ Os itens b) e c) visam levar os alunos a reconhecer que há mais do que uma representação possível para a unidade. Observe que o paralelogramo e o triângulo são soluções do item b). No item c), os alunos comporão a unidade. Aproveite as diversas respostas na correção. Estimule os alunos a darem mais do que uma resposta para o item c). Eles poderão fazer composições diversas com 5 triângulos cinzas (sem sobreposição).
⋆ Observe que para responder o item e), seu aluno pode ter a necessidade de recortar ou dobrar o triângulo cinza. É esperado que a identificação não seja imediata para os estudante.
⋆ Embora possa parecer, o retângulo laranja não é um quadrado. De fato, um de seus lado coincide com o lado do triângulo cinza e o outro coincide com a altura do triângulo cinza.

Solução da Atividade 5

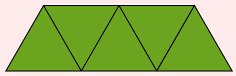
a) O triângulo dado é um terço da figura a seguir porque ela pode ser expressa pela reunião, sem sobreposição, de 3 desses triângulos como indicado na figura.



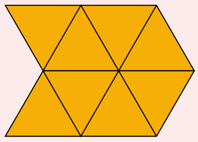
b) O triângulo dado é um quarto das figuras a seguir. A justificativa é que elas podem ser decompostas como a justaposição de 4 desses triângulos como indicado na figura.



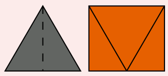
c) O triângulo dado é um quinto da figura a seguir.



d) O triângulo cinza é um oitavo da figura amarela, veja:



e) O triângulo cinza é metade do retângulo porque cortando um triângulo ao meio como indicado na figura, pode-se justapor o triângulo cinza com duas de suas metades para compor o retângulo laranja.



Atividade 6

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Identificar uma mesma fração unitária (no caso, a terça parte) em representações diversas.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ Durante a discussão, os alunos devem ser estimulados a explicar as suas escolhas. A discussão sobre os motivos da identificação, ou não, de cada uma das representações à terça parte da unidade correspondente será fundamental para atingir o objetivo da atividade.
⋆ Os alunos devem reconhecer que, seja qual for a unidade considerada, em uma equipartição em 3 partes, cada uma das partes é um terço (ou a terça parte) da unidade.
⋆ Aproveite as próprias palavras e os argumentos dos alunos para conduzi-los às conclusões esperadas.
⋆ Fique atento aos alunos que selecionarem as figuras que simplesmente possuem alguma associação com o número 3, não correspondendo a terços. Por exemplo, um aluno que associe a **Figura f)** a terços pode ainda não ter compreendido a necessidade da equipartição para a identificação de um terço. Já o aluno que associa **Figura g)** a terços pode estar simplesmente contando as partes em vermelho, sem que tenha reconhecido que a figura deveria estar dividida em 3 partes iguais e não em 5.

Solução da Atividade 6

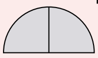
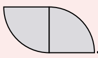
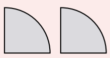
A parte em vermelho representa um terço da figura nos itens b), c), e), h) e j).

Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a

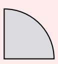
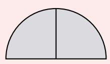
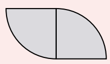
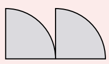
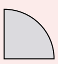
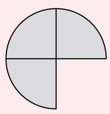
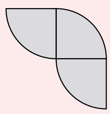
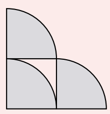
⋆ Recompor a unidade a partir de uma fração unitária dada em modelos contínuos.
⋆ Relacionar uma fração da unidade à quantidade necessária dessas partes para compor a unidade. Assim, por exemplo, é necessário reunir cinco *quintas partes* para recompor a unidade.

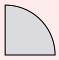
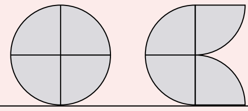
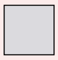
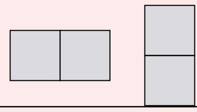
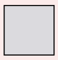
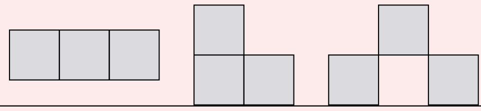
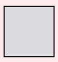
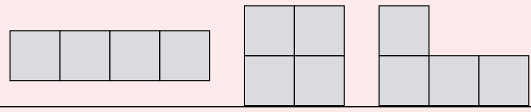
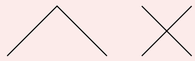
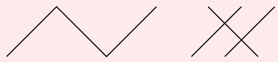
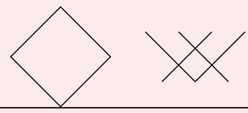
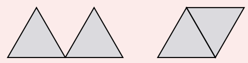
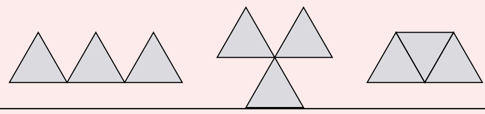
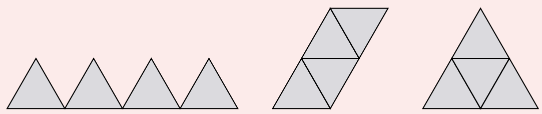
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ No final deste volume estão disponíveis materiais para reprodução para esta atividade.
⋆ É importante ter em mente que existem várias soluções para cada item. Por exemplo, o primeiro item pode ser corretamente respondido por  ou por .
⋆ O primeiro item pode ser corretamente respondido com  No entanto, para isso, espera-se que o estudante reconheça que essas duas partes separadas compõem uma só unidade. Sugerimos que o professor apenas discuta esse tipo de resposta, caso algum estudante a apresente.
⋆ Estimule os alunos a reconhecer (e a fazer) mais do que uma representação para a unidade em cada item.
⋆ Estimule os alunos a, a partir da identificação da fração unitária, determinar a quantidade de partes necessárias para recompor a unidade.

Solução da Atividade 7

Algumas possibilidades de respostas:

Fração da unidade	Nome da fração da unidade	Unidade
	metade	  
	um terço	  

	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	

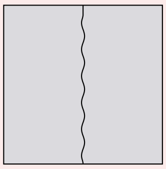
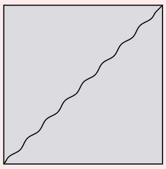
Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a

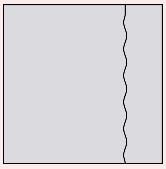
⋆ Representar uma fração unitária a partir de uma unidade dada.
⋆ Reconhecer (e obter) um quarto como a metade da metade e um oitavo como a metade de um quarto.
⋆ Comparar as frações unitárias metade, um quarto e um oitavo de um mesmo quadrado.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

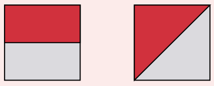
⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ Não se espera que, nesta atividade, os alunos usem a medida para fazer a equipartição de maneira mais precisa. O objetivo é fazer a equipartição livremente e de forma coerente. Assim, por exemplo, podem ser aceitas como respostas:


e


Já as representações a seguir sugerem que os alunos precisam revisar os conceitos exigidos para a solução da atividade:



⋆ A representação da unidade se dá de forma genérica por um quadrado.
⋆ Espera-se que os alunos reconheçam que, para obter um quarto da unidade, basta tomar a metade da metade. E que, para determinar um oitavo, pode-se dividir um quarto ao meio.
⋆ Recomenda-se que os alunos tenham em mãos três quadrados de papel iguais e que sejam orientados a fazer uso de dobradura para identificar as frações pedidas. Assim, por exemplo, a fração um quarto pode ser obtida por duas dobras do papel.
⋆ Discuta com os estudantes que, quanto maior o número de partes iguais em que se particiona o quadrado, menor fica cada uma das partes.
⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.
⋆ **As diferentes soluções apresentadas pelos alunos podem enriquecer a discussão**. A comparação entre, por exemplo, a metade do quadrado proveniente da dobradura pela diagonal e o quarto do quadrado proveniente da dobradura a partir de linhas paralelas aos lados (como um sinal de "+") pode não ser tão natural. Dificuldade semelhante pode ser observada na comparação entre esse mesmo quarto do quadrado e o oitavo do quadrado proveniente de uma sequência de dobraduras paralelas a um dos lados, determinando "faixas paralelas". Nesses casos, para executar a comparação, é necessário que os alunos reconheçam partes de formatos diferentes que correspondem a uma mesma fração do quadrado como iguais em quantidade (no caso, área). Assim, a comparação entre a metade do quadrado, obtida pela dobradura na diagonal, e o quarto do quadrado, obtido pela dobradura "em sinal de +", pode ser amparada pelo reconhecimento de que a metade em questão é igual em quantidade (área) à metade do quadrado obtida por uma única dobra paralela a um dos lados, que é o dobro do quarto do quadrado.

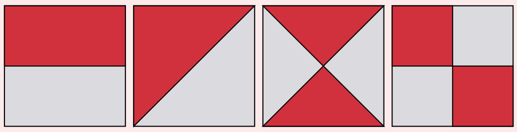


⋆ Nossa experiência na implementação desta atividade com estudantes do 6° ano mostrou que, após os alunos entenderem que se espera mesma quantidade e não mesmo formato, passaram a se divertir indo ao quadro para exibir equipartições diferentes daquelas já exibidas pelos colegas.

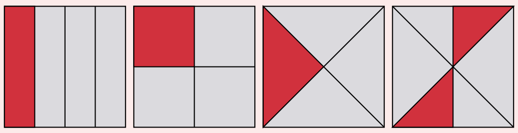
Solução da Atividade 8

Algumas soluções possíveis, convencionais e outras menos convencionais são:

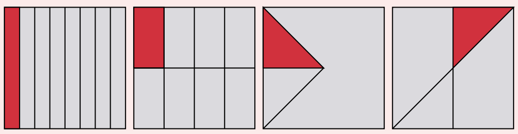
a) Metade:



b) Um quarto:



c) Um oitavo:



d) Dentre as opções apresentadas, a maior fração do quadrado é metade.

Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a

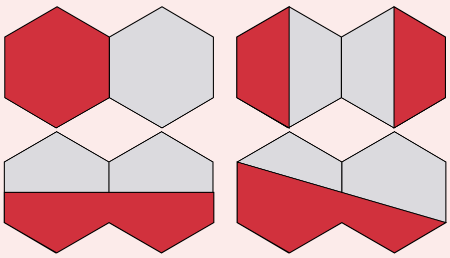
⋆ Representar uma fração unitária (no caso, um meio ou metade) a partir de uma unidade não usual dada.
⋆ Estabelecer representações diferentes para a mesma fração unitária de uma mesma unidade.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente. Mas caso os estudantes tenham dificuldades em encontrar três representações distintas, sugere-se que sejam socializadas suas respostas, quando provavelmente aparecerão mais do que três soluções distintas.
⋆ Observe que a representação da unidade se dá de forma genérica, ainda em modelo contínuo, por uma figura não tradicional como retângulos e círculos, que é determinada pela justaposição de dois hexágonos regulares.
⋆ Como na atividade anterior, não se espera que, nesta atividade, o aluno use a medida para fazer a equipartição de maneira mais precisa. O objetivo é que o aluno faça a equipartição livremente e de forma coerente, mesmo porque aqui não se recomenda o uso de material concreto para a realização da atividade. É esperado que o material concreto utilizado como apoio para as atividades anteriores já seja suficiente para que o estudante abstraia a ideia de equipartição e faça uso de sua imaginação apenas.
⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.

Solução da Atividade 9

Algumas das respostas possíveis para este problema são:



Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer a metade de uma unidade pela reunião de partes menores e em partições diversas.
⋆ Estabelecer representações diferentes para a mesma fração unitária para uma mesma unidade.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ Cada aluno deve receber as imagens das figuras, disponíveis para reprodução no final do livro para que possa manipular como achar melhor e conduzir a sua decisão.
⋆ Esta atividade pretende levar o aluno a perceber que a metade de uma unidade pode ser considerada e identificada mesmo sem que se tenha uma divisão em duas partes iguais.
⋆ Como nas atividades anteriores, não se espera que o aluno use a medida para confirmar a metade da unidade. O objetivo é que o aluno identifique a representação da metade (ou não) por sobreposição e justaposição das partes, decompondo e recompondo a figura.
⋆ Incentive os alunos a argumentar, justificando a sua decisão. Para isso, podem, por exemplo, se apoiar em dobraduras ou em recortes das partes da figura.
⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.

Solução da Atividade 10

As figuras que correspondem à metade da unidade são as de números 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11 e 12.

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Distinguir e nomear frações unitárias a partir de suas representações em modelos circulares.
⋆ Comparar frações unitárias a partir de suas representações em modelos circulares.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade é planejada para ser desenvolvida a partir de material concreto baseado em modelos circulares. Mais especificamente com um material conhecido como "Círculos de Frações". Para aplicá-la, é necessário reproduzir esse material, que está disponível nas páginas para reprodução.
⋆ Sendo um material concreto, os círculos de frações têm o papel de auxiliar na visualização da representação das frações, mais especificamente, das frações unitárias.
⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos. No entanto, cada aluno deve ter o seu próprio material (Círculos de Frações) para realizar a atividade.
⋆ Durante a discussão, os alunos devem ser estimulados a explicar as suas escolhas. O uso de cores vai fazer parte da comunicação, no entanto a justificativa e raciocínio devem estar apoiados no conceito de fração.
⋆ Na versão utilizada nesta atividade, o círculo corresponde à unidade, ou seja, ao 1 e os setores circulares, diferenciados por cores, correspondem às frações unitárias um meio, um terço, um quarto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo.
⋆ Refira-se ao círculo na cor preta como círculo ou unidade, e não como todo ou inteiro. Refira-se a cada setor circular como fração do círculo, parte do círculo ou, simplesmente, peça da cor x.
⋆ Antes de solicitar aos alunos que realizem a atividade, explore o material ressaltando especialmente o fato de que, reunidas, as peças de uma mesma cor determinam um círculo congruente ao preto.

⋆ Ainda antes de solicitar aos alunos que realizem a atividade, explore também o material com perguntas dirigidas a toda a turma como as seguintes: "Quantas peças azuis cobrem o círculo preto?" ou "Quantas peças verdes cobrem o círculo preto?", sugerindo que as peças coloridas podem ser consideradas frações do círculo preto.
⋆ Faça uso do material concreto para ilustrar e explicar a resposta de cada item e incentive os seus alunos a fazerem o mesmo.
⋆ Espera-se que a explicação para as respostas, nos oito primeiros itens desta questão, seja a partir da contagem dos setores circulares correspondentes às frações envolvidas. Assim, por exemplo, a resposta do item b) pode ser justificada pelo fato de que são necessários 4 partes de círculo na cor vermelha para compor um círculo preto.
⋆ Já para os cinco itens que tratam da comparação, espera-se que os alunos identifiquem os setores que representam as frações envolvidas e procedam a comparação pela sobreposição das peças correspondentes. Assim, por exemplo, a resposta do item l) pode ser justificada pela sobreposição das peças das cores verde e amarelo.
⋆ Aproveite a correção desses últimos itens para explorar, a partir dos Círculos de Frações, a relação entre a quantidade de peças de cada cor e o tamanho das peças, ou seja, a relação inversa entre a quantidade de partes em que círculo (unidade) está dividido e o tamanho de cada parte.
⋆ Os Círculos de Frações podem ser utilizados para trabalhar outros conceitos e assuntos além de frações unitárias, tais como: frações em geral, comparação de frações e operações com frações (adição e subtração).

Solução da Atividade 11

a) Uma peça da cor AZUL é igual a um terço do círculo preto.
b) Uma peça da cor VERMELHA é igual a um quarto do círculo preto.
c) Uma peça da cor AMARELA é igual a um sétimo do círculo preto.
d) Uma peça da cor LARANJA é igual a um nono do círculo preto.
e) Uma peça da cor roxa é igual a UM SEXTO do círculo preto.
f) Uma peça da cor cinza é igual a UM OITAVO do círculo preto.
g) Uma peça da cor branca é igual a UM DÉCIMO do círculo preto.
h) Uma peça da cor rosa é igual à METADE do círculo preto.
i) Um terço do círculo preto é maior do que um sétimo do círculo preto.
j) Um nono do círculo preto é menor do que um quarto do círculo preto.
k) Um sétimo do círculo preto é menor do que um quinto do círculo preto.
l) Um quarto do círculo preto é maior do que um oitavo do círculo preto.
m) Um sexto do círculo preto é maior do que um sétimo do círculo preto

Atividade 12

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Conhecer e compreender as expressões correspondentes às frações unitárias com denominadores de 5 a 10.
⋆ Comparar frações da unidade por meio da representação visual de frações do círculo.
⋆ Reconhecer a relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade pode ser resolvida individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ É provável que nem todos os alunos conheçam ou intuam as expressões correspondentes às frações propostas. Nesse caso, cabe ao professor apresentá-las e diferenciá-las.
⋆ Aproveite esta atividade para revisar e discutir o vocabulário que é objetivo nesta seção: *unidade*, *metade*, *um meio*, *um terço*, *terça parte*, *um quarto*, *quarta parte*, *um quinto*, *quinta parte*, *um sexto*, *sexta parte*, *um sétimo*, *sétima parte*, *um oitavo*, *oitava parte*, *um nono*, *nona parte*, *um décimo* e *décima parte* .

Solução da Atividade 12

a) A correspondência adequada é:

I) A esta afirmação corresponde à figura G).
II) A esta afirmação corresponde à figura D).
III) A esta afirmação corresponde à figura I).
IV) A esta afirmação corresponde à figura B).
V) A esta afirmação corresponde à figura A).
VI) A esta afirmação corresponde à figura F).

b) As frações um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo do círculo são menores que um sexto do círculo. Qualquer uma delas está correta. Portanto qualquer uma delas serve como resposta.
c) As frações um meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo e um oitavo do círculo são maiores que um nono do círculo. Qualquer uma delas está correta.
d) As frações um sétimo e um oitavo do círculo são menores que um sexto e maiores que um nono do círculo.

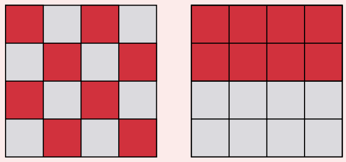
Atividade 13

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer e diferenciar a representação das frações "um meio", "um quarto" e "um décimo" em modelos diversos, baseados ou não em equipartição.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ Esta atividade pode ser desenvolvida com o uso do material para reprodução disponível no final do livro caso se entenda que seus estudantes ainda precisam deste recurso.
⋆ Como nas atividades anteriores, não se espera que os alunos usem a medida para confirmar a metade. O objetivo é que identifiquem a representação da metade (ou não) por sobreposição e justaposição dessas partes, decompondo e recompondo a figura.
⋆ No item m), pretende-se que o estudante considere o quadrado maior como unidade e perceba que a parte em vermelho corresponde à metade desse quadrado. Isso pode ser feito observando que todos os quadradinhos vermelhos podem ser agrupados para formar a metade superior do quadrado maior e os azuis agrupados para formar a parte de baixo, por exemplo.



Neste item m), é prematuro e, portanto, inadequado usar o argumento de que a fração é um meio argumentando que dos 16 quadradinhos, existem 8 pintados de vermelho. Isso porque, nessa linha de raciocínio, a unidade seria o quadradinho e não o quadrado maior e, consequentemente, não se estaria fazendo uma divisão de uma unidade mas, sim, uma contagem em um modelo discreto de frações, abordagem essa que escolhemos evitar nesse momento.
⋆ Incentive os alunos a argumentar, justificando a sua decisão. Para isso, podem, por exemplo, se apoiar em dobraduras ou no recorte das partes da figura.
⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.

Solução da Atividade 13

a) Um meio,	b) Um décimo,	c) Um quarto,
d) Um quarto,	e) Um quarto,	f) Um meio,
g) Um quarto,	h) Um décimo,	i) Um quarto,
j) Um décimo,	l) Um quarto,	m) Um meio

LIÇÃO 2 - Para o professor

Na Lição anterior, as frações unitárias permitiram reconhecer e registrar quantidades menores que a unidade: meio, um terço, um quarto, etc. Nesta, serão abordadas as frações em geral: as que representam quantidades menores do que a unidade, quantidades maiores do que a unidade ou quantidades inteiras. Também serão introduzidas a notação simbólica de frações e a comparação entre frações de mesmo denominador.

As frações com numerador diferente de 1 são apresentadas **reunindo-se (por contagem ou por justaposição) cópias de uma mesma fração unitária.** Cabe ressaltar que reunir aqui não tem como objetivo tratar da operação de adição, ou seja, não se espera que o aluno compreenda, nem que seja apresentado a ele, $2/3$ como $1/3 + 1/3$. Espera-se no entanto que o raciocínio aditivo, elementar na contagem, ampare a compreensão do aluno.

Para isso, tem-se a representação pictórica como um apoio importante. Na Atividade 1, as imagens das pizzas amparam a compreensão das frações três quartos, cinco sextos e cinco oitavos como a reunião de cópias de frações unitárias correspondentes à quarta parte, à sexta parte e à oitava parte de uma pizza, respectivamente. Nesse sentido, nas primeiras atividades, há um esforço deliberado para que o estudante faça uso da linguagem de frações apresentada na Lição 1 para expressar frações não unitárias. Na Atividade 2, as imagens da barra de chocolate amparam a compreensão da fração dois terços como a reunião de duas partes correspondentes à terça parte (ou à fração um terço) de uma barra de chocolate. Na Atividade 3, sabendo que uma das cinco fatias iguais em que foi repartida uma torta é um quinto da torta, espera-se que o aluno use a linguagem "dois quintos" ou "dois um quintos" da torta para se referir às outras duas fatias. Dessa forma, "dois quintos" da torta são obtidos pela reunião de duas partes correspondentes a "um quinto" da torta. O objetivo é que esse processo se estenda para a compreensão das frações não unitárias. Assim, as frações "quatro quintos" e "seis quintos" são entendidas como a reunião de "quatro um quintos" e "seis um quintos" da mesma unidade, respectivamente. O processo de reunir frações unitárias pode ser observado como uma contagem (com justaposição ou não) em que a fração unitária tem o papel de unidade na contagem. A fração unitária é uma subunidade da unidade considerada.

Um cuidado especial recomendado ao professor é com as frações que representam uma quantidade maior que a unidade, introduzidas logo nas primeiras atividades ainda sem notação simbólica. Não é indicado atrasar muito a introdução deste tipo de fração porque o estudante pode fixar-se na ideia de que não há fração maior do que a unidade (por exemplo, a fração quatro terços pode não fazer sentido para o estudante porque, para ele, não faz sentido dividir uma torta em 3 pedaços e tomar 4). Decidiu-se omitir as terminologias "fração própria", "fração imprópria" e "fração aparente" por se acreditar que esta linguagem não só é desnecessária para a aprendizagem do assunto como também por poder desviar a atenção dos conceitos que realmente importam. A representação de frações maiores que a unidade na forma de número misto também não é adotada neste texto. Esse tipo de representação não tem um uso que justifique a abordagem nesta etapa da aprendizagem.

Apesar de esta lição introduzir a linguagem simbólica de frações, o estudante talvez ainda precise de uma unidade concreta explícita para dar um significado para a fração $\frac{a}{b}$: por exemplo, "$\frac{a}{b}$ de uma pizza" ou "$\frac{a}{b}$ de uma barra de chocolate". Apenas na próxima lição, a fração $\frac{a}{b}$ será tratada como número, requerendo a abstração que o conceito de número exige.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 2:

O aluno deve ser capaz de:

⋆ Reconhecer a necessidade de apresentar uma expressão verbal que identifique a quantidade correspondente à junção de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
⋆ Reconhecer frações não unitárias como a reunião de cópias de frações unitárias de uma mesma unidade.
⋆ Utilizar as linguagens verbal e simbólica para referir-se a uma fração $\frac{a}{b}$.
⋆ Reconhecer e nomear os termos de uma fração (numerador e denominador).
⋆ Comparar frações de mesmo denominador.
⋆ Reconhecer o papel da unidade na identificação da fração, tanto em situações em que uma mesma fração pode representar quantidades diferentes como em situações em que frações diferentes podem representar uma mesma quantidade.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Estender o conceito de frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária, a partir da junção de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
⋆ Reconhecer a necessidade de apresentar uma expressão verbal que identifique a quantidade correspondente à junção de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja realizada individualmente e que os alunos compartilhem suas respostas.
⋆ É possível que os alunos utilizem expressões variadas para nomear as quantidades de pizza que cada amigo comeu. Por exemplo, "três de quatro fatias", "três fatias de um quarto de pizza", "três quartos de pizza", dentre outras. É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de quartos, sextos e oitavos: "três quartos", "cinco sextos", "cinco oitavos", etc.

Solução da Atividade 1

a) Da esquerda para a direita as pizzas são de João, Mariele e Luiza.
b) Na pizza de João uma fatia representa um sexto da pizza.
Na pizza de Mariele uma fatia representa um oitavo da pizza.
Na pizza de Luiza uma fatia representa um quarto da pizza.
c) João comeu quatro sextos de sua pizza; Mariele, seis oitavos; e Luiza comeu três quartos de sua pizza.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer a necessidade de apresentar uma expressão verbal que identifique a quantidade correspondente à junção de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
⋆ Compreender e usar as expressões "dois terços", "três terços" e "quatro terços" como forma de registrar as duas, três ou quatro partes de uma equipartição da unidade em três partes.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ Nesta atividade, é importante que os alunos possam ter cópias de figuras ilustrativas das barras de chocolate para dividir e poder avaliar e decidir as suas respostas. Faça cópias das páginas para reprodução.
⋆ A opção por um problema de divisão em partes iguais (dois terços corresponde ao resultado da divisão de 2 unidades em 3 partes iguais) no lugar da abordagem "parte-todo" (dois terços corresponde a duas partes da equipartição da unidade em três partes) que, no Brasil, costuma ser o mais tradicional, tem duas justificativas: (1) manter a abordagem que marca a lição anterior: equipartição (agora com múltiplas cópias da unidade); (2) amparar a compreensão de frações cujo numerador é maior do que o denominador pela reunião de cópias de partes da unidade (uma vez que pode não parecer coerente nomear uma parte "maior do que o todo").
⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
⋆ É possível que os alunos utilizem expressões variadas para nomear as partes dos chocolates em cada divisão e para a quantidade de chocolate que cada irmão recebeu. Por exemplo, "dois dos seis pedaços", "dois pedaços de um terço de chocolate". É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de terços: "dois terços", "quatro terços", "seis terços", etc. Observa-se que o uso de "sextos" muito provavelmente indica uma confusão do aluno em relação ao reconhecimento da unidade.

Solução da Atividade 2

a) Um terço.
b) Sim, pois a divisão foi justa no sentido de cada irmã ter recebido a mesma quantidade de chocolate.
c) Sim, pois cada irmã recebeu dois pedaços que equivalem, cada um, a um terço de uma barra de chocolate.
d) Dois terços de uma barra.
e) Três terços de uma barra, ou seja, uma barra inteira de chocolate.
f) Quatro terços de uma barra, ou seja, uma barra inteira e um terço de chocolate.

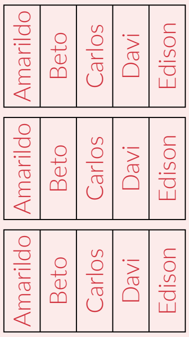
Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer a necessidade de apresentar uma expressão verbal que identifique a quantidades correspondentes a n quintos.
⋆ Compreender e usar a expressão "n quintos de" como uma forma de identificar a quantidade equivalente a n partes da equipartição da unidade em quintos, incluindo os casos em que n é maior do que cinco.
⋆ Comparar frações de mesmo denominador em uma situação.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

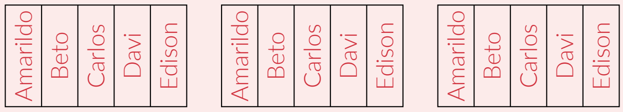
⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ Nesta atividade, é importante que os alunos possam ter cópias de figuras ilustrativas da torta para dividir e poder avaliar e decidir suas respostas. Faça cópias das páginas para reprodução e entregue uma para cada grupo.
⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
⋆ Em particular, no Item a), não se espera, nem se recomenda, que a representação feita pelos alunos seja amparada por medida. O objetivo é que façam a equipartição livremente e de forma coerente. Assim, por exemplo, pode ser aceita como resposta a solução indicada na figura a seguir.



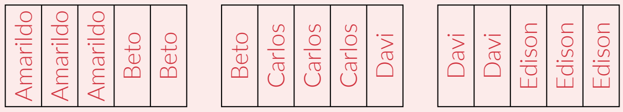
⋆ Em suas respostas, é possível que os alunos utilizem expressões variadas para nomear as partes das tortas em cada divisão e para as quantidades de torta que cada irmão recebe. Por exemplo, "três dos quinze pedaços", "três pedaços de um quinto de torta", dentre outras. É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de quintos: "três quintos", "seis quintos", "quinze quintos", etc.
⋆ Espera-se que, ao final da atividade, o aluno reconheça o significado das expressões dois quintos e três quintos, mesmo que não o faça espontaneamente (usando, por exemplo, especificações como "dois pedaços" ou "duas fatias") e seja necessária a intervenção do professor. **O professor deve fazer e incentivar o uso da terminologia de frações que se quer estabelecer nesta lição.**
⋆ Nos Itens c) e d), não basta uma resposta "Sim" ou "Não". É importante estimular os seus alunos a darem uma justificativa.

Solução da Atividade 3

a) Uma resposta possível: dividir cada uma das três tortas em 5 partes iguais e, então, com as 15 partes disponíveis, distribuir 3 partes para cada amigo, como mostra a figura a seguir



Outra resposta possível: dividir cada uma das três tortas em cinco partes iguais e distribuir três partes *consecutivas* para cada amigo.



b) I) Três quintos.
II) Seis quintos (ou uma torta inteira e um quinto de torta).
III) Nove quintos (ou uma torta inteira e quatro quintos de torta).
IV) Doze quintos (ou duas tortas inteiras e dois quintos de torta).
V) Quinze quintos (ou três tortas inteiras).
c) A quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser menor do que um quinto de torta pois, se isto acontecesse, a quantidade total de torta recebida pelos cinco amigos seria menor do que cinco quintos de torta, isto é, seria menor do que uma torta inteira, o que não é o caso. Um argumento análogo mostra que a quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser menor do que dois quintos de torta.
d) A quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser maior do que três quintos de torta pois, se isto acontecesse, a quantidade total de torta recebida pelos cinco amigos seria maior do que quinze quintos de torta, isto é, seria maior do que três tortas inteiras, o que não é o caso. Um argumento análogo mostra que a quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser maior do que quatro quintos de torta.

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Compreender e usar a expressão "n oitavos de" como forma de identificar a quantidade equivalente a n cópias de um oitavo da unidade, incluindo os casos em que n é maior do que oito.
⋆ Reconhecer que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações equivalentes de uma mesma unidade (por exemplo, "meia torta" e "quatro oitavos de torta" representam a mesma quantidade de torta).

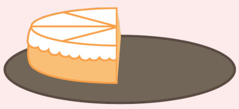
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.

⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
⋆ É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de oitavos: "quatro oitavos", "dez oitavos" e "uma torta e dois oitavos".
⋆ As respostas esperadas para o Item c) podem surgir na resolução do Item b). Caso isso aconteça, recomenda-se que as frações corretas correspondentes a 4 fatias de uma torta (metade de uma torta, dois quartos de uma torta, quatro oitavos de uma torta, etc.) sejam reconhecidas como tal, mas que, conforme solicitado pelo enunciado, a resposta deve ser dada em termos de oitavos.
⋆ No Item c), é importante estimular o aluno a dar uma explicação para sua resposta: "por que você pensou em metade de uma torta?", "Por que você pensou em dois quartos de uma torta?" etc. Espera-se que os alunos expressem que estas frações expressam a mesma quantidade da unidade torta. Não se pretende usar a nomenclatura "frações equivalentes".

Solução da Atividade 4

a) Cada fatia é um oitavo de torta, pois cada torta está dividida em oito partes iguais.
b) Havia para a sobremesa quatro oitavos de torta.
c) Meia torta, pois quatro fatias de torta têm a mesma quantidade de torta que meia torta.



d) Algumas respostas possíveis: dez oitavos de torta; uma torta inteira e dois oitavos de torta; uma torta inteira e um quarto de torta.

Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

Compreender frações não unitárias ("m meios", "m terços", etc.) em diferentes modelos visuais de frações como forma de identificar a quantidade equivalente a m cópias da fração $\frac{1}{n}$ (incluindo casos em que $m \geq n$).

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade pode ser resolvida individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ Observe que, enquanto que nas atividades anteriores cópias múltiplas da unidade já estavam naturalmente disponíveis (as duas barras de chocolate na Atividade 1, as três tortas salgadas na Atividade 2, as várias tortas divididas em oito partes na confeitaria da Atividade 3), nesta atividade, o aluno deve identificar frações a partir de uma única cópia da unidade, sem qualquer subdivisão registrada. Por exemplo, no item d), o aluno deve registrar nove meios de uma estrelinha, sem a subdivisão explicitada. Assim, a atividade oferece uma oportunidade para reforçar a compreensão de frações em um contexto diferente daquele em que a parte correspondente à fração é identificada e totalmente inserida em uma unidade, frequentemente já subdividida. Esse tipo de representação, muito associada ao significado parte/todo, pode limitar a compreensão de frações maiores que a unidade.
⋆ Nesta atividade, espera-se que o aluno identifique uma equipartição adequada da unidade que defina a fração unitária $\frac{1}{m}$ da unidade para compor a parte colorida e que, então, tome a quantidade n correta desta fração unitária, mesmo no caso em que $n > m$.

Solução da Atividade 5

a) Dois terços.
b) Dois meios.
c) Dois quintos.
d) Nove meios.
e) Oito sextos.

Sobre o Organizando as Ideias

Neste Organizando as Ideias, conceitos são sistematizados mas também são introduzidas novas ideias. Espera-se que os alunos compreendam as frações não unitárias ($\frac{a}{b}$) como a identificação de uma quantidade igual à junção (por contagem ou por justaposição) de uma mesma fração unitária da unidade ($\frac{1}{b}$).

Observe que esse entendimento é construído a partir de modelos contínuos e amparado por situações concretas. Assim, como explicado na introdução deste Organizando as Ideias, por exemplo, "dois terços" de uma unidade são obtidos pela reunião de duas partes correspondentes a "um terço" da mesma unidade. Espera-se ainda que os alunos compreendam a notação simbólica matemática, tanto de fração unitária como de fração não unitária, bem como a nomenclatura numerador e denominador.

A leitura das frações a partir do símbolo deve respeitar a proposta de abordagem. Assim, recomenda-se que $\frac{3}{5}$ seja lido como "três quintos". Nessa etapa de construção do conceito não cabe a leitura "3 dividido por 5", por ainda não termos como objetivo tal construto. Também não deve ser feita a leitura "abreviada" e muito comum "três sobre cinco". Assim, de maneira geral, não se recomenda a leitura de $\frac{a}{b}$ como "a sobre b" nem como "a dividido por b". Recomendamos que para a escrita $\frac{n}{d}$ utilizada ao final deste Organizando as Ideias, a leitura seja na forma "fração de numerador n e denominador d".

Nesse contexto, surgiram frações que representam números naturais. Por exemplo, na Atividade 2, os alunos devem ter compreendido que a fração $\frac{3}{3}$ da barra de chocolate é uma barra inteira e a fração $\frac{6}{3}$ da barra de chocolate são duas barras.

Não é recomendado, no entanto, que se utilize a nomenclatura "fração aparente", por considerarmos que o importante é o entendimento do seu significado e não do nome que damos a ela.

Também surgiram frações que representam quantidades maiores do que a unidade (evitando, pelo mesmo motivo acima, a nomenclatura "frações impróprias" ou "frações mistas"). Por exemplo, $\frac{4}{3}$ de torta deve ser compreendido como "uma torta e um terço de torta". Reiteramos a recomendação de o professor evitar a escrita mais complexa $1\frac{1}{3}$ de torta.

Observamos que as nomenclaturas "fração imprópria", "fração aparente" e "fração mista" - tradicionais nos livros didáticos brasileiros - aparecem para acomodar o pressuposto de que as únicas frações legítimas são aquelas em que o numerador é menor do que o denominador (um pressuposto que tem origem nas raízes históricas da construção do próprio conceito de fração). A abordagem utilizada aqui, que estabelece frações gerais como a identificação de uma quantidade igual à junção de uma mesma fração unitária da unidade, rompe com essa tradição histórica ao dispensar esse pressuposto, com a grande vantagem de dar um tratamento geral e unificador às frações, sem a necessidade de nomear casos particulares. Aliás, é essa abordagem que sobrevive: os termos "fração imprópria", "fração aparente" e "fração mista" nunca mais são usados no Ensino Médio nem no Ensino Superior.

Por fim, cabe ressaltar que a notação de fração pode não parecer natural para os alunos, porque é um símbolo composto por dois números de significados diferentes, além de estarem, um sobre o outro e separados por um traço. Isso contraria a escrita usual dos números naturais. Contudo, é importante lembrar que hoje essa é a notação mundialmente aceita, devendo, portanto, ser bem compreendida.

Notas de Aula

Atividade 6

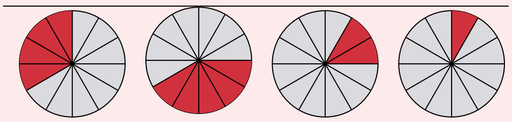
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Aplicar a simbologia matemática de frações.
⋆ Analisar criticamente diferentes formas de representação de frações: modelo visual, expressão verbal e símbolos matemáticos.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, as frações $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$ descrevem corretamente a quantidade de pizza consumida por Pedro. Nestes casos, dê oportunidade para que cada aluno explique como chegou à sua resposta pois, procedendo desta maneira, mesmo de forma pontual, os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com nomes diferentes, o que vai motivar o assunto “frações equivalentes” que será tratado na Lição 4.
⋆ Esta atividade procura mostrar uma das qualidades da notação simbólica matemática: expressar um conceito com economia de escrita. Ela permite encapsular detalhes, simplificar procedimentos, abstrair e generalizar conceitos. Assim, é muito importante fazer com que seus alunos se familiarizem com a notação simbólica matemática para frações: ela será fundamental nas lições sobre operações com frações, por exemplo.
⋆ Antes de prosseguir para a próxima atividade é importante garantir que os estudantes estejam familiarizados com o uso dos símbolos matemáticos para representar frações.

Solução da Atividade 6

Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
			
quatro doze avos	cinco doze avos	dois doze avos	um doze avos
$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) A que usa a notação simbólica matemática.
b) As respostas podem variar de pessoa para pessoa. No entanto, a justificativa deve ser coerente com a resposta. Discuta com a turma as diferentes respostas.

Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a

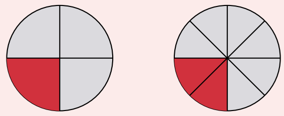
⋆ Expressar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ em símbolos matemáticos.
⋆ Comparar as frações um quarto e um oitavo a partir de modelos visuais.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade pode ser resolvida individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ Os estudantes compararam as frações um quarto e um oitavo em modelos retangulares na Atividade 8 da Lição 1, isso justifica a opção por um modelo circular nesta atividade.
⋆ Em particular, incentive os alunos a argumentar, justificando a sua resposta.
⋆ Conduza a discussão de modo a conseguirem reconhecer a relação inversa entre denominador (número de partes) e o tamanho de cada parte: quanto maior o denominador, maior é o número de partes em que foi repartida a pizza, logo menor o tamanho da parte.
⋆ Embora não seja o objetivo da atividade, algum estudante pode reconhecer que uma fatia da primeira pizza tem o dobro da quantidade de uma fatia da segunda pizza, ou seja, são necessárias duas fatias da segunda pizza para ter-se a mesma quantidade de pizza que uma fatia da primeira pizza.

Solução da Atividade 7

a) $\frac{1}{4}$.
b) $\frac{1}{8}$.
c) Uma fatia da primeira pizza é maior do que uma fatia da segunda pizza: como partimos a segunda pizza em mais partes, cada fatia tem menos pizza.



Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações com relação a uma fração de referência (no caso, a fração $\frac{1}{2}$) usando modelos contínuos (área).

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ Incentive seus alunos a darem justificativas para suas respostas, mesmo que informais.

Solução da Atividade 8

a) A parte pintada é igual a $\frac{5}{10}$ da figura, ou seja, metade da figura.
b) A parte pintada é igual a $\frac{4}{10}$, que é menor do que $\frac{5}{10}$ da figura, metade da figura.
c) A parte pintada é igual a $\frac{6}{10}$ e é maior do que $\frac{5}{10}$ da figura, que é a metade da figura.

Atividade 9

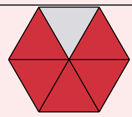
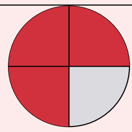
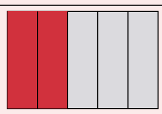
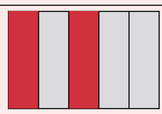
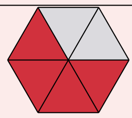
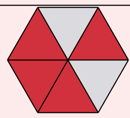
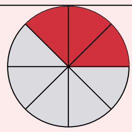
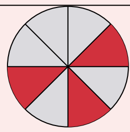
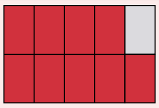
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Representar frações não unitárias descritas com símbolos matemáticos em diversos modelos de área, incluindo casos em que as subdivisões apresentadas não coincidem com o denominador da fração dada.
⋆ Identificar a fração complementar de uma fração da unidade usando símbolos matemáticos.
⋆ Reconhecer (e gerar) oitavos como metades de quartos, sextos como metades de terços e décimos como metades de quintos, preparando-se assim para a discussão sobre equivalência de frações que será feita na Lição 4.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ Observe que os três últimos itens constituem uma extensão natural da Atividade 8 da Lição 1. Isto é, aplicam o fato de que, para uma mesma unidade, sexto é metade de terço, oitavo é metade de quarto e décimo é metade de quinto.
⋆ Não se espera, nem se recomenda, que, para os três últimos itens desta atividade, os alunos usem alguma medida para fazer, de forma precisa, a partição de quartos e quintos em oitavos e décimos, respectivamente. O objetivo é que façam a partição livremente e de forma coerente.
⋆ Os alunos podem pintar as partes de formas diferentes: estas, por exemplo, não precisam ser justapostas.
⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item, reforçando assim a ideia proposta na Atividade 9 da Lição 1.

Solução da Atividade 9

A pintar	figura	sem ser pintada
$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}$	 ou 	$\frac{3}{5}$
$\frac{2}{3}$	 ou 	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{8}$	 ou 	$\frac{5}{8}$
$\frac{9}{10}$		$\frac{1}{10}$

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Analisar e resolver um problema no contexto da reunião de partes correspondentes a frações unitárias com mesmo denominador.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
⋆ As diversas soluções apresentadas devem ser discutidas com a turma inteira.
⋆ Caso os estudantes se refiram a cada uma das oito partes em que foi dividido cada um dos três copos de maneira diferente de "oitavos", pergunte a eles "*a que fração do copo essa parte corresponde?*" e então peça que se esforcem para usar "oitavos" ao invés da expressão que estavam usando.
⋆ Avalie a necessidade de apresentar os seguintes problemas preliminares:

a) Indique a fração da capacidade do copo que está com

água em cada um dos três copos.
b) Qual é a fração da capacidade do copo que corresponde a toda água que está nos três copos?

⋆ É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, para o copo (3), as frações $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são respostas corretas. Nesses casos, dê a oportunidade para que cada aluno explique como chegou à sua resposta. Procedendo desta maneira, mesmo que de forma pontual, os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes, um preparo para o assunto “frações equivalentes” que será tratado na Lição 4.

Solução da Atividade 10

Não é possível armazenar a água dos três copos em um único copo sem que o mesmo transborde, pois a água do primeiro copo ocupa 3 oitavos de sua capacidade, a água do segundo copo ocupa 2 oitavos de sua capacidade e a água do terceiro copo ocupa 4 oitavos de sua capacidade, a água dos três copos, juntos, ocupa $3 + 2 + 4 = 9$ oitavos da capacidade do copo e qualquer copo só consegue armazenar no máximo 8 oitavos de sua capacidade.
Caso tenha decidido aceitar a sugestão das perguntas preliminares, as respostas são:

a) (1): $\dfrac{3}{8}$. (2): $\dfrac{2}{8}$. (3): $\dfrac{4}{8}$.
b) $\dfrac{9}{8}$.

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Recompor a unidade a partir de uma fração dada em modelo contínuo e em linguagem simbólica, incluindo o caso de frações maiores que a unidade.
⋆ Relacionar a fração correspondente à parte apresentada à quantidade necessária dessas partes para compor a unidade. Assim, por exemplo, para compor a unidade a partir de $\frac{2}{3}$ da unidade, basta repartir esta fração em 2 partes iguais (para recuperar a fração unitária $\frac{1}{3}$) e, então, justapor 3 cópias de uma destas partes.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja discutida em grupos de 3 a 5 alunos e respondida individualmente.
⋆ A exemplo das Atividades 5 e 7 da Lição 1, é importante ter em mente que a forma da unidade pode variar pois a unidade pode ser representada de várias maneiras.
⋆ Estimule os alunos a reconhecer (e a fazer) mais do que uma representação para a unidade em cada item.
⋆ Caso seja necessário fazer alguma partição, não se espera nem se recomenda que os alunos usem alguma medida. Não se espera precisão, uma partição coerente será suficiente.

Solução da Atividade 11

Fração da unidade	Figura correspondente à fração da unidade	Unidade
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		

Atividade 12

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Marcar em uma semirreta pontos cujas distâncias até um ponto de referência são frações do comprimento de um segmento dado.

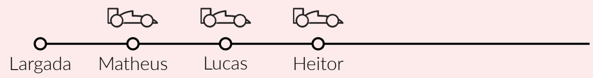
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que pode ser realizada individualmente.
⋆ Esta é uma atividade preparatória para a representação de frações na reta numérica, assunto da próxima lição.
⋆ Observe que, nesta atividade, as distâncias estão associadas aos segmentos determinados pelos percursos dos carrinhos na pista, e correspondem a frações da distância percorrida pelo carrinho de Lucas, que assume papel de unidade.
⋆ Não se espera, nem se recomenda, que as marcações feitas pelos alunos na pista sejam feitas com precisão, marcações coerentes são suficientes. Contudo, é preciso ficar atento para que as marcações dos carrinhos de Heitor e de Lorenzo coincidam. A mesma observação se aplica aos carrinhos de Rafael, Samuel e de Guilherme. De fato, três metades do percurso de Lucas coincide com seis quartos do percurso de Lucas.
⋆ Aqui, a definição de fração não unitária como justaposição de frações unitárias pode ser usada para justificar o porquê, por exemplo, de os carrinhos de Rafael e de Samuel terem parado na mesma posição.
⋆ Assim, espera-se que a distância percorrida pelo carrinho de Matheus (item a) seja associada à metade do segmento que identifica a distância percorrida pelo carrinho de Lucas, que corresponde à unidade e está destacado em vermelho na imagem. Já a distância percorrida pelo carrinho de Heitor (item b) deve ser associada à justaposição de 3 segmentos correspondentes à distância percorrida pelo carrinho de Matheus. Espera-se que as demais distâncias sejam obtidas de forma semelhante. Cabe destacar, no entanto, que para determinar as distâncias percorridas pelos carrinhos de Lorenzo e de Samuel, será necessário determinar $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ da unidade, respectivamente.

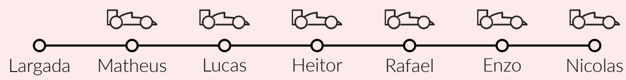
Solução da Atividade 12

Do item a) sabe-se que o carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

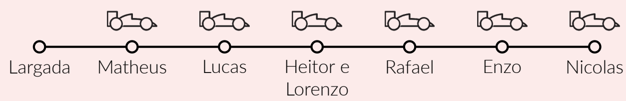
Do item b), o carrinho de Heitor conseguiu ir até $\frac{3}{2}$ da “distância percorrida pelo carrinho de Lucas” (a unidade). Isso permite marcar a posição do carrinho de Heitor justapondo-se 3 metades da unidades a partir do ponto de partida.



Os itens c), d) e e) afirmam que os carrinhos de Rafael, Enzo e Nicolas conseguiram ir até $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{6}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas, respectivamente. Então pode-se marcar as distâncias percorridas pelos carrinhos de Rafael, Enzo e Nicolas justapondo-se, respectivamente, 4, 5 e 6 meios da unidade.

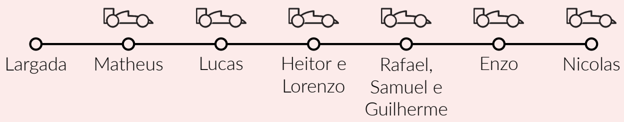


Do item f), o carrinho de Lorenzo percorreu $\frac{6}{4}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas. Para marcar seis quartos dessa unidade, divide-se a distância percorrida por Lucas em quartos e justapõe-se seis partes iguais a essa a partir do ponto de partida.
Agora surge a dúvida das posições relativas de paradas dos carrinhos de Lorenzo e Heitor. Para isso é importante observar que dois quartos corresponde à metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas e, portanto, que seis quartos corresponde à três metades (três meios) dessa distância. Logo os carrinhos de Lorenzo e Heitor pararam na mesma posição.



Do item g), o carrinho de Guilherme percorreu o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas. Para marcar no encarte corretamente é necessário observar que a posição de parada do carrinho de Rafael também corresponde ao dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas. Para isso basta perceber que como duas metades da unidade corresponde à unidade, quatro metades dessa mesma unidade correspondem à duas unidades.

Para se determinar a posição de parada do carrinho de Samuel é necessário identificar a posição que corresponde a $\frac{6}{3}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas. Para fazer isso deve-se dividir essa unidade (distância percorrida pelo carrinho de Lucas) em três partes iguais e justapor 6 dessas partes a partir do ponto de partida. Mas para marcar corretamente essa posição no encarte é necessário comparar essa fração da unidade com as demais. Sabe-se que três terços correspondem a uma unidade, logo seis terços devem corresponder a duas unidades. Portanto, a posição de parada do carrinho de Samuel coincide com a posição de parada dos carrinhos de Guilherme e de Rafael.



Observe que os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar!

Atividade 13

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Uma resposta possível é que dois (ou até os três) estudantes tenham errado em suas afirmações. Muito provavelmente, nesse caso, os estudantes estão considerando a mesma unidade - bolos de mesmo tamanho. Como o objetivo da questão é levar os alunos a concluírem que unidades diferentes podem determinar a identificação de frações diferentes para uma mesma quantidade, cabe ao professor instigar essa discussão com os alunos. Espera-se que leve-os a considerar o caso de os bolos originais terem tamanhos diferentes. Isso pode ser feito com perguntas como, por exemplo: É possível uma tal situação acontecer estando os três amigos certos? Será que os bolos eram iguais? Será que tinham o mesmo tamanho?

Solução da Atividade 13

Se os bolos tivessem tamanhos iguais, um quinto do bolo teria menor quantidade que um terço do bolo, que por sua vez corresponderia a menos bolo que metade. Como todos os estudantes tinham a mesma quantidade, os bolos eram diferentes.

Atividade 14

Objetivos específicos: Levar o aluno a

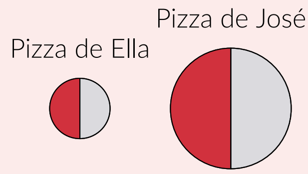
⋆ Perceber que uma mesma fração (no caso, $\frac{1}{2}$) de unidades diferentes pode resultar em quantidades diferentes.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ Como fechamento da atividade, é importante enfatizar que uma mesma fração de unidades diferentes pode resultar em quantidades diferentes. Sugere-se ressaltar aos estudantes que, no contexto “frações de”, é fundamental saber a que o “de” se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Neste sentido, esta atividade está fortemente relacionada com a Atividade 8.

Solução da Atividade 14

José está certo se a pizza da qual comeu metade for maior do que a pizza da qual Ella comeu metade, como ilustra a figura a seguir.



Atividade 15

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida.
⋆ Utilizar linguagem simbólica para referir-se a uma fração $\frac{a}{b}$.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
⋆ Recomenda-se que os itens sejam propostos em blocos (de três em três, por exemplo) intercalados com a correção. Tendo em vista que se o estudante não atingiu os objetivos da atividade nos primeiros itens, ele provavelmente não conseguirá fazê-lo nas seguintes sem a intervenção do professor.
⋆ As diversas soluções apresentadas devem ser discutidas com a turma inteira. É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, no item f), as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ são respostas corretas. Nesses casos, dê a oportunidade para que cada aluno explique como chegou a sua resposta. Os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes. Isso vai prepará-los para o assunto frações equivalentes, que será tratado na Lição 4.
⋆ Observe que, no contexto “frações de”, é fundamental saber a que o “de” se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Assim, no final da atividade, é importante enfatizar para os alunos que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações diferentes com unidades diferentes.

Solução da Atividade 15

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{6}$. d) $\frac{3}{2}$. e) $\frac{3}{4}$. f) $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{6}$.

g) $\frac{5}{2}$. h) $\frac{5}{4}$. i) $\frac{5}{6}$. j) 3 ou $\frac{6}{2}$. k) $\frac{3}{2}$ ou $\frac{6}{4}$. l) 1 ou $\frac{3}{3}$ ou $\frac{6}{6}$.

Atividade 16

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Diferenciar “a divisão da unidade em cinco partes quaisquer” da “divisão da unidade em cinco partes iguais”.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ No final da atividade, é importante salientar que o fato de uma figura estar divida em 5 partes e 3 delas estarem pintadas de vermelho, **não necessariamente implica** que a região pintada é $\frac{3}{5}$ da figura.
⋆ O tipo de situação descrita na atividade é um equívoco comum entre os alunos, isto é, eles equivocadamente contam partes sem o cuidado de verificar se as partes nas quais a unidade está dividida correspondem a uma mesma quantidade.

Solução da Atividade 16

Miguel está equivocado: a região pintada da figura **não** corresponde a $\frac{3}{5}$ da figura porque a figura não está dividida em 5 partes “iguais”, ou seja, a figura não está “dividida em partes iguais” em 5 partes para que as 3 partes pintadas correspondam a $\frac{3}{5}$ da mesma. Outra justificativa possível é: a parte pintada é formada por 3 partes iguais,porém, justapondo-se 5 cópias de uma destas partes, não é possível recompor a figura inteira, logo, a parte pintada não é $\frac{3}{5}$ da figura.

Atividade 17

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber que, se uma unidade foi equiparticionada em $n+m$ partes iguais, das quais n foram pintadas, então $\frac{n}{m}$ **não especifica** a fração da unidade que foi pintada.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ O tipo de situação descrita na atividade destaca um equívoco comum entre os alunos. Assim, esta atividade é uma oportunidade para reforçar os papéis do denominador e do numerador na notação simbólica matemática para frações: o denominador especifica o número de partes iguais em que a unidade foi dividida e o numerador especifica o número de cópias que foram tomadas de uma destas partes.
⋆ Considere perguntar aos alunos que fração a parte vermelha é da parte azul.

Solução da Atividade 17

A parte pintada de vermelho **não** corresponde a $\frac{3}{4}$ da figura. Ela corresponde a $\frac{3}{7}$ da figura, pois a figura foi dividida em 7 partes iguais das quais 3 foram pintadas.

Atividade 18

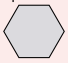
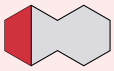
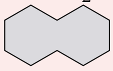
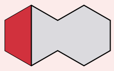
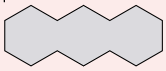
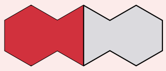
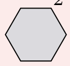
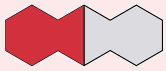
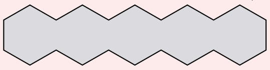
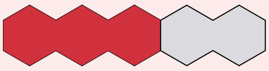
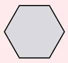
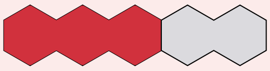
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber a importância da explicitação unidade na representação de quantidades.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ Recomenda-se que os itens da atividade sejam feitos e corrigidos um a um, de forma a permitir que um aluno que tenha errado um item possa acertar o seguinte.
⋆ O fato de a unidade não estar explicitada, torna ambígua a questão. É importante que os alunos percebam que, por exemplo, no item a), se a unidade considerada for um dos hexágonos, a fração correspondente à região em vermelho é $\frac{1}{2}$. No entanto, se forem os dois hexágonos, é $\frac{1}{4}$.
⋆ No final de cada item da atividade, é importante enfatizar para seus alunos que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida. Observe para eles que, no contexto "frações de", é fundamental saber a que o "de" se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Neste sentido, esta atividade está fortemente relacionada com as Atividades 8 e 13. Ela também é uma preparação para a Atividade 18, em que a mesma questão é posta, mas agora com um modelo mais comumente usado e, portanto, mais resistente à reflexão que se deseja estabelecer.

Solução da Atividade 18

a) A região em vermelho pode representar $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ dependendo da unidade, que não foi explicitada no enunciado. Se, por exemplo, a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{1}{2}$ dessa unidade. Por outro lado, se a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{1}{4}$ dessa unidade.
b) A região em vermelho pode representar $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ dependendo da unidade, que não foi explicitada no enunciado. Se, por exemplo, a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{1}{2}$ dessa unidade. Por outro lado, se a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{3}{2}$ dessa unidade.
c) A região em vermelho pode representar $\frac{3}{5}$ ou 3 dependendo da unidade, que não foi explicitada no enunciado. Se, por exemplo, a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{3}{5}$ dessa unidade. Por outro lado, se a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é 3 dessa unidade.

Atividade 19

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber a importância da unidade na representação de quantidades.

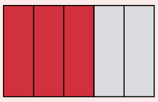
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
⋆ No final da atividade, é importante enfatizar para seus alunos a propriedade matemática que esta atividade quer destacar, ou seja, que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida. Observe para eles que, no contexto "frações de", é fundamental saber a que o "de" se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Neste sentido, esta atividade está fortemente relacionada com as Atividades 8 e 13.

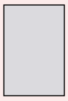
Solução da Atividade 19

As afirmações de Júlia, Davi e Laura estão incompletas, pois eles não informaram a **unidade**. De fato, dependendo da escolha da unidade, cada um deles pode estar certo e os demais errados. Por exemplo, se a unidade for

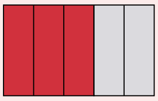
então a parte pintada de vermelho em



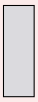
de fato corresponde a $\frac{3}{5}$ desta unidade, de modo que, nesta situação, Júlia está certa e David e Laura estão errados. Contudo, se a unidade for



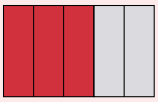
então a parte pintada de vermelho em



corresponde a $\frac{3}{2}$ desta unidade, de modo que, nesta situação, David está certo e Júlia e Laura estão errados. Finalmente, se a unidade for



então a parte pintada de vermelho em



corresponde a 3 desta unidade e, neste caso, Laura está certa e David e Júlia estão errados.

Atividade 20

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Relembrar divisão com resto (ou divisão euclidiana).
⋆ Selecionar, dentro de uma situação plausível do dia a dia, dados relevantes para resolver um problema.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ A atividade deve ser conduzida de forma a chegar-se na divisão euclidiana. Ou seja, o aluno pode começar montando as pizzas. Recomenda-se que os alunos tenham à mão o material concreto: fatias de pizza cortadas em papel ou em E.V.A..
⋆ É possível que os alunos resolvam o item a) a partir da divisão euclidiana, efetuando a divisão de 38 por 8: $38 = 4 \times 8 + 6$. Se esse for o caso, recomenda-se que o professor, destaque a informação associada a cada um dos números na expressão. Em particular, o “resto”, que identifica uma quantidade menor do que uma pizza (resto 6 indica 6 fatias, que é menor do que uma pizza, uma vez que cada pizza tem 8 fatias).
⋆ Para responder ao item b), o aluno deve reconhecer que cada fatia é igual a $\frac{1}{8}$ da pizza. Portanto, a quantidade total de pizza consumida pelos amigos pode ser expressa como $\frac{38}{8}$ de uma pizza. Cabe destacar que essa fração corresponde a 4 pizzas mais $\frac{6}{8}$ de uma pizza.
⋆ Observe que, neste contexto, o resto, que é um número inteiro e indica o número de fatias, também pode ser expresso por meio de uma fração da unidade pizza: $\frac{6}{8}$ de uma pizza.
⋆ Faz parte da atividade a tarefa de selecionar dados relevantes para o problema, o que a torna um tanto complexa, por isso é a última Atividade da Lição 2. Para os itens a) e b), a quantidade de amigos, 7, é irrelevante. No entanto, é relevante para o item c).
⋆ A atividade tem também o objetivo de evidenciar que, no cotidiano, nem toda partição é uma equipartição: 38 fatias de pizza para 7 amigos é um exemplo.

Solução da Atividade 20

a) A solução corresponde ao quociente da divisão euclidiana de 38 por 8, ou seja, 4

b) Compreendendo que cada fatia é $\frac{1}{8}$ de uma pizza: 4 pizzas e $\frac{6}{8}$ ou $\frac{38}{8}$.

c) A divisão euclidiana de 38 por 7 fornece um resto diferente de zero, o que indica que não é possível que todos os amigos tenham comido o mesmo número de fatias de pizza.

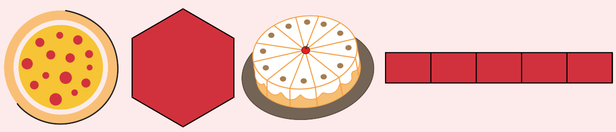
LIÇÃO 3 - Para o professor

Esta lição retoma a reta numérica como uma representação organizada para os números. Objetiva-se a inclusão das frações nessa representação. Assim, espera-se do aluno maior abstração: agora a fração não é mais apenas "fração da unidade" mas também quantidade, um número. Espera-se ainda que os alunos reconheçam a evidência da ordem na reta numérica .

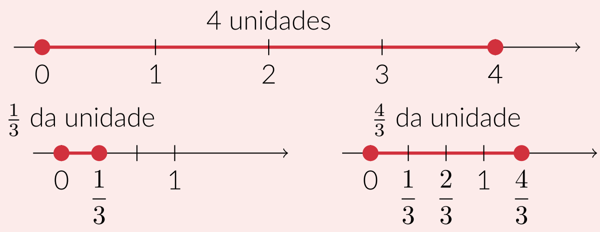
A comparação de frações, já discutida em atividades nas lições anteriores, pode agora ser também observada a partir da reta numérica, embora seja sistematizada apenas na Lição 4. Pretende-se aqui abordar a comparação de frações de mesmo denominador, de mesmo numerador e a partir de um referencial.

Neste livro, o conceito de fração foi construído a partir da equipartição e fortemente amparado por modelos concretos ou de área. Assim, até aqui, faz sentido dizer "dois terços da unidade", sendo a unidade explicitamente identificada: por exemplo, dois terços de pizza, dois terços de uma região ou dois terços de um objeto. Esta lição propõe um avanço no sentido da abstração. Espera-se que $\frac{2}{3}$ seja reconhecido como um número, pressupondo uma unidade abstrata. Poder-se-á falar em "o número dois terços" ou que "dois terços é maior que meio" sem que seja especificada a unidade (pizza, quadrado, círculo etc.). Observa-se que esse caminho é análogo ao já trilhado para os números naturais, que, inicialmente associados à contagem de objetos concretos (2 laranjas, por exemplo), quando munidos da abstração, passam a ser comparados e somados sem que se identifique explicitamente a unidade: Sabemos que 2 é menor do que 3 e $2+3=5$ seja a unidade uma formiga, uma cadeira ou um disco voador. Espera-se que os alunos entendam, façam uso de, comparem e operem com frações como números. A representação na reta numérica é um aporte importante para isso.

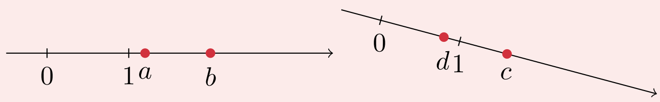
O caminho para a abstração aqui proposto baseia-se na associação da unidade a um segmento denominado segmento unitário, mais especificamente ao segmento de extremidades zero e um. Deste modo, na reta numérica, o segmento unitário é um modelo abstrato contínuo para qualquer unidade considerada.



Assim como feito com as unidades representadas pictórica ou abstratamente até aqui, o segmento unitário será repartido em partes iguais, que determinarão as frações unitárias e essas partes serão reunidas para determinar novas frações da unidade. O registro das frações na reta numérica é feito de forma análoga ao dos números naturais. Por exemplo, para se marcar 4 na reta numérica são justapostas 4 unidades a partir do zero e no final marca-se o ponto correspondente ao número 4. Para se marcar o $\frac{4}{3}$ na reta numérica, são justapostos 4 terços da unidade a partir do zero e no final marca-se o número $\frac{4}{3}$.



A reta numérica é um modelo visual poderoso e universal que suporta a ampliação dos diferentes conjuntos de números (dos naturais aos reais, passando pelas frações, números inteiros e pelos números racionais) ao longo dos anos de escolaridade. Em particular a ordem fica evidente na reta numérica a partir da organização dos números. Obedece-se a ordem crescente no sentido que vai do zero para o um. Se considerados dois números e a organização obedecendo o sentido crescente, o menor será aquele que vier antes. Por exemplo, nas imagens a seguir a é menor do que b e c é maior do que d.



Nesta lição, a comparação de frações é estudada particularmente em três casos:

⋆ *Frações de mesmo denominador*: por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ é menor do que a fração $\frac{7}{4}$ uma vez que a primeira fração corresponde à justaposição de 3 segmentos iguais a $\frac{1}{4}$ da unidade e a segunda à justaposição de 7 desses segmentos. Dessa forma, $\frac{3}{4}$ é menor do que $\frac{7}{4}$ e pelo mesmo motivo, na reta numérica, o $\frac{7}{4}$ está mais à direita do zero do que $\frac{3}{4}$.

⋆ *Frações com mesmo numerador*: por exemplo, a fração $\frac{5}{7}$ é menor do que $\frac{5}{3}$ porque nos dois casos considera-se a justaposição de 5 segmentos, no entanto, no primeiro caso, são 5 segmentos de $\frac{1}{7}$ da unidade e, no segundo, de $\frac{1}{3}$ da unidade. Como $\frac{1}{7}$ da unidade é menor do que $\frac{1}{3}$ da unidade, tem-se que $\frac{5}{7}$ é menor do que $\frac{5}{3}$.

⋆ *A partir de um referencial*: por exemplo, a fração $\frac{7}{8}$ é menor do que a fração $\frac{8}{9}$ porque, apesar de ambos estarem associados a pontos à esquerda do 1, o ponto correspondente à fração $\frac{7}{8}$ está mais distante do 1 (a $\frac{1}{8}$ de distância) do que o correspondente à fração $\frac{8}{9}$ (que está a $\frac{1}{9}$ de distância do 1).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 3. O aluno deve ser capaz de:

⋆ Representar e identificar a representação de uma fração na reta numérica (Atividades 1 a 13, 15, 17 e 18).

⋆ Reconhecer a organização das frações na reta numérica segundo a ordem (Atividades 8, 9, 17 e 18).

⋆ Comparar frações com mesmo numerador ou mesmo denominador (Atividades 7, 8, 13 a 16).

⋆ Comparar frações a partir de um referencial adequado, amparado pela representação na reta numérica (Atividades 12, 16 e 17).

⋆ Compreender frações como números (Atividades 5, 10 a 16 e 18).

Recomendação: Nas atividades desta lição, salvo orientação específica, recomenda-se que os alunos trabalhem individualmente ou em duplas e que as diferentes soluções sejam discutidas com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer a representação de frações na reta numérica a partir da graduação em uma escala linear.
⋆ Associar, na reta numérica, o segmento unitário à unidade.
⋆ Reconhecer a representação de frações do segmento unitário na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Espera-se que os alunos (i) associem o 0 (zero) à caixa d'água vazia e o 1 (um) à caixa cheia; (ii) Descartem as faixas (c) e (d) porque não respeitam a equipartição e que (iii) reconheçam que as faixas a), b) e e) são marcações possíveis. Discuta com os alunos as vantagens e as desvantagens dessas marcações. A faixa a) traz a marcação da fração $\frac{1}{2}$ associada ao segmento e não ao ponto, o que dificulta a indicação de alturas intermediárias, como $\frac{1}{4}$, por exemplo. A faixa (e) tem poucas marcações, limitando a medição.
⋆ A atividade aborda a medição de volume a partir de uma escala linear. Os alunos precisam reconhecer que a quantidade de água no recipiente está associada à altura do líquido no recipiente. Para garantir que os alunos compreendam o processo, considere mostrar a eles um recipiente transparente na forma de um paralelepípedo ou de um cilindro e fazer perguntas como "até onde eu preciso encher para alcançar metade da capacidade? E um quinto?".
⋆ Observe que o formato da caixa, um paralelepípedo, possibilita uma escala linear para a medida do volume (o mesmo valeria para um cilindro, por exemplo). No entanto, para outros formatos de caixa, esse mesmo tipo de escala não seria adequado. É o caso, por exemplo, de um cone. Uma tal discussão foge aos objetivos do estudo de frações.

Solução da Atividade 1

A faixa graduada b) é a mais indicada para registrar as quantidades de todos os momentos porque possui marcações com mesmo espaçamento, na ordem adequada e com informações claras para os quatro momentos. A graduação e), ainda que correta, só permite a leitura da quantidade de água nos momentos 2 e 4. Já a graduação a) tem a marcação $\frac{1}{2}$ associada ao segmento e não à um ponto, o que dificulta leituras intermediárias. A graduação c) não respeita a equipartição porque possui a marca $\frac{1}{2}$ em um ponto acima da metade da altura da caixa. Já na faixa graduada d) as marcações não respeitam a ordem, a marca $\frac{1}{2}$ é alcançada antes da marca $\frac{1}{3}$.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a Objetivos específicos: Levar o aluno a:

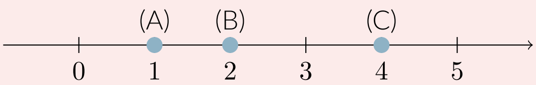
⋆ Recordar a reta numérica, associando quantidades inteiras aos números naturais. Em particular, objetiva-se que a unidade seja associada ao número 1.
⋆ Representar frações na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

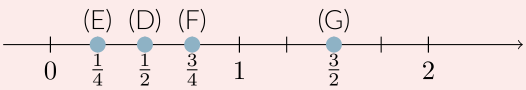
⋆ Recomenda-se que o professor inicie a atividade relembrando com os alunos como é construída a reta numérica e como se posicionam os números naturais nela, enfatizando que uma vez escolhidos os pontos que vão representar 0 e 1 (tipicamente, com o ponto que representa 1 à direita do ponto que representa 0), todos os demais números naturais têm suas posições estabelecidas por meio de justaposições de segmentos iguais ao segmento cujas extremidades são os pontos que representam 0 e 1.
⋆ Espera-se que os alunos, a partir de tal revisão, não tenham dificuldade para resolver o item a). A novidade está no item b), no qual os alunos são solicitados a representar frações na reta numérica. Nesse item, o objetivo é que os alunos concluam que, na reta numérica, assim como o ponto correspondente ao 2 fica determinado pela justaposição de dois segmentos unitários e que o ponto correspondente ao 3 fica determinado pela justaposição de três segmentos unitários, o ponto correspondente a $\frac{1}{2}$ é o ponto médio do segmento unitário. De forma análoga, considerando equipartições do segmento unitário e a justaposição dessas partes, são determinados, por exemplo, os pontos correpondentes às fraçoes $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

Solução da Atividade 2

a)



b)



Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

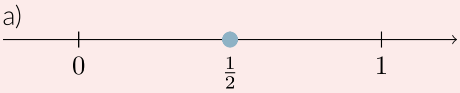
⋆ Associar frações representadas em modelos contínuos, com unidades variadas, à representação dessas frações na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

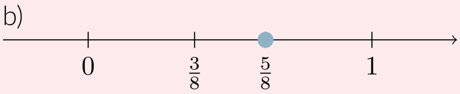
⋆ Aproveite as imagens e faça perguntas à turma que explorem conteúdos já tratados anteriormente, tais como: a) Que fração da pizza foi comida? b) Essa quantidade de chocolate é maior, menor ou igual a meia barra de chocolate? c) Se a maçã estivesse inteira, que ponto da reta representaria tal quantidade?

Solução da Atividade 3

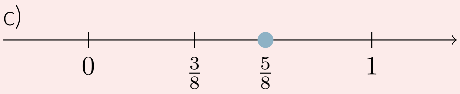
a)



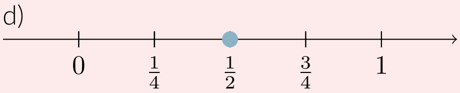
b)



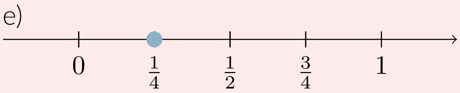
c)



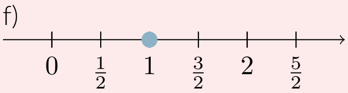
d)



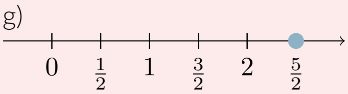
e)



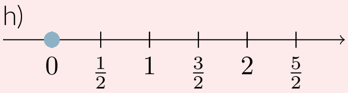
f)



g)



h)



Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

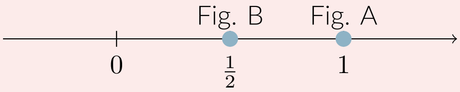
- ⋆ Representar frações na reta numérica.
- ⋆ Associar, na reta numérica e a partir de modelos contínuos, a unidade ao número 1.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

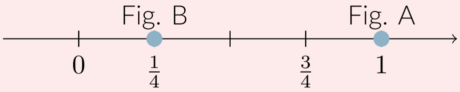
⋆ Esta atividade propõe, a partir de modelos contínuos, a associação de quantidades a pontos da reta numérica. Para isso, em cada item estão destacados na reta, além do 0 e do 1, frações e marcações apropriadas às subdivisões correspondentes. Por exemplo, para o quadrado que está dividido em nonos, o segmento unitário traz uma marcação que destaca a subdivisão em nove partes iguais e destaca as frações $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{9}$.
⋆ Para responder, o aluno pode simplesmente ligar com uma linha a representação em imagem ao ponto da reta correspondente à fração identificada.
⋆ Observe que o enunciado não determina a unidade. É provável que o aluno escolha as regiões totalmente coloridas em vermelho como unidade. A solução considera esse caso. No entanto, a região colorida em vermelho de qualquer uma das figuras pode ser considerada unidade. Essa escolha torna a solução mais complexa nos itens c) e f). Por exemplo, no item c), se a região em vermelho da Figura A for a unidade, a Figura B, todo o quadrado em vermelho, corresponderia a $\frac{9}{5}$. Fique atento às respostas dos seus alunos e avalie explorar essa discussão em sala.

Solução da Atividade 4

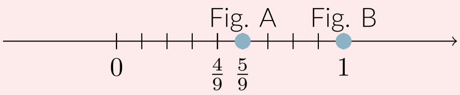
a)



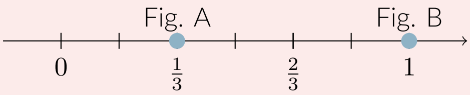
b)



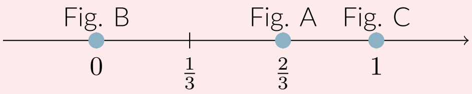
c)



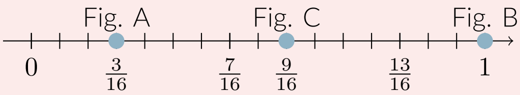
d)



e)



f)

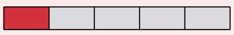
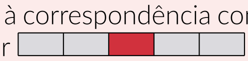


Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

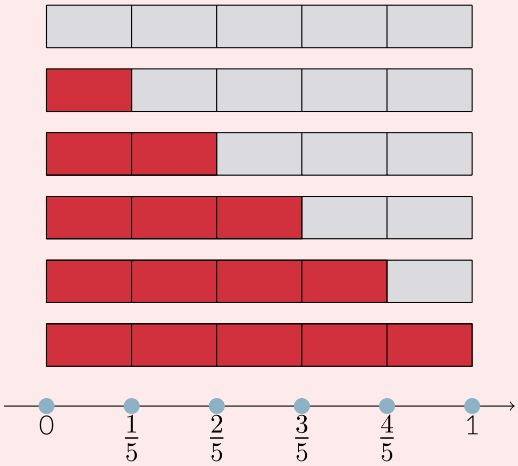
⋆ Identificar na reta numérica pontos correspondentes a frações apresentadas em modelos contínuo. Especificamente $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{5}$.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ A atividade evidencia a diferença entre representar uma fração a partir de um modelo contínuo de área (no caso, uma faixa retangular) e na reta numérica. No primeiro caso, a fração é identificada por uma região colorida. Na reta, a fração é associada a um único ponto, um número.
⋆ Observe que as frações destacadas nas faixas foram alinhadas e ordenadas visando à correspondência com a representação na reta. Assim, por exemplo, $\frac{1}{5}$ é representado por  e não por  O alinhamento à esquerda faz a associação ao zero e atende à ordem estabelecida na reta.
⋆ No item b) espera-se que os alunos identifiquem a faixa sem pintar à fração $\frac{0}{5}$, ou seja, a zero, e a faixa inteiramente pintada à fração $\frac{0}{5}$, ou seja, à unidade, portanto, igual a 1. Cabe aqui registrar as igualdades $\frac{0}{5} = 0$ e $\frac{5}{5} = 1$.

Solução da Atividade 5

a)



b) A faixa sem pintar é igual a fração $\frac{0}{5}$, ou seja, é igual a zero. A faixa inteiramente pintada é igual a fração $\frac{5}{5}$, ou seja, é igual à unidade, ou igual a 1. Portanto, $\frac{0}{5} = 0$ e $\frac{5}{5} = 1$.

Atividade 6

Objetivos específicos: Levar o aluno a

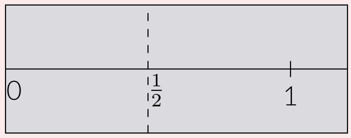
⋆ Associar na reta numérica, a partir de modelos contínuos, a unidade ao número 1.
⋆ Associar as frações $\frac{n}{d}$ a pontos da reta numérica a partir da equipartição da unidade em d partes e da justaposição, a partir do 0 de n segmentos correspondentes à fração $\frac{1}{d}$ da unidade. Mais especificamente, identificar as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{5}{4}$ da unidade a pontos da reta numérica, reconhecendo que $\frac{4}{4} = 1$ e que $\frac{5}{4} > 1$.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Faça, para cada aluno, uma cópia da fita que está disponível nas folhas para reprodução.
⋆ É possível que alguns estudantes considerem a faixa inteira como unidade. Já outros, observando a indicação da reta numérica na faixa, identificarão o segmento unitário como unidade. O objetivo é que eles discutam essa questão e reconheçam, ao final, que o entendimento da unidade como a fita inteira é incompatível com as marcações pré-existentes na fita. Objetiva-se a representação das frações na reta numérica e não a identificação de partes de um modelo contínuo.
⋆ Recomenda-se que os alunos usem dobradura para realizar essa atividade. Instrua-os nesse sentido. Não se espera, nem se recomenda, que a atividade seja realizada a partir da medida do comprimento da faixa.
⋆ Espera-se que os alunos, a partir da observação do modelo, façam traços para representar os pontos correspondentes às frações. Este é um processo importante, em que a fração é representada por um ponto na reta e não por uma região, por exemplo.
⋆ Observe que a marcação de $\frac{3}{4}$ pode se dar pela justaposição, a partir do 0, de "pedaços" da fita correspondentes a $\frac{1}{4}$ da unidade ou, reconhecendo que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, pela identificação do ponto médio do "pedaço" de fita de extremos $\frac{1}{2}$ e 1.
⋆ A discussão sobre esta atividade deve levar os alunos a refletirem sobre a marcação do $\frac{4}{4}$ e a sua coincidência com a marcação do número 1, reconhecendo que $\frac{4}{4} = 1$.
⋆ Na discussão sobre o item d), observe se os alunos compreenderam que $\frac{5}{4} > 1$. Espera-se que os alunos saibam ler e escrever essa desigualdade fazendo uso de símbolos matemáticos.

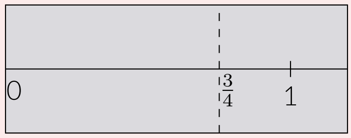
Solução da Atividade 6

a) Miguel marcou $\frac{1}{2}$ considerando como unidade o segmento de extremos 0 e 1, enquanto Pedro marcou $\frac{1}{2}$ considerando a fita inteira como unidade. Assim, não podem estar os dois corretos. Como a resposta de Pedro não leva em consideração as marcações do 0 e do 1 na fita, esta solução não está correta.



b) A marcação de $\frac{1}{4}$ pode ser feita dobrando-se a fita de modo a fazer coincidir as marcações do 0 e do $\frac{1}{2}$. Já a marcação de $\frac{3}{4}$ pode ser obtida dobrando-se a fita de modo a fazer coincidir as marcações do $\frac{1}{2}$ e do 1.

c) As marcações de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ dividem o segmento unitário em quatro partes iguais, portanto, em quartos. A justaposição de quatro quartos a partir do 0, que corresponde a $\frac{4}{4}$, é igual a 1. Portanto, as marcas de $\frac{4}{4}$ e de 1 são a mesma.



d) A marcação de $\frac{5}{4}$ é obtida sobrepondo-se as marcas do zero e do $\frac{4}{4}$, ou seja, à marcação do 1.

Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a

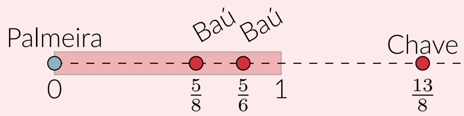
- ⋆ Marcar frações na reta numérica.
- ⋆ Comparar frações com o mesmo numerador.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Observe que, nesta atividade, a unidade não está destacada na reta a partir dos pontos 0 e 1, como nas atividades anteriores. Oriente seu aluno a identificar o zero como o ponto correspondente à palmeira imperial.
⋆ Esclareça aos seus alunos que o caminho todo, da palmeira à pedra, não é a unidade. Peça-os que estimem quantas unidades tem esse caminho.
⋆ Reproduza a faixa que indica a unidade e distribua uma para cada estudante. Oriente-os a dobrá-la para resolver o item a).
⋆ Observe que o aluno pode responder o item b), comparando as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{5}{8}$, sem considerar a marcação feita no item a). De fato, como $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$, sabe-se que $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$ e, portanto, o tesouro está no baú que está a $\frac{5}{6}$ da unidade da palmeira. Explore essa discussão com a turma.

Solução da Atividade 7

a)



b) O baú com o tesouro é o que está a $\frac{5}{6}$ da unidade da palmeira, uma vez que $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$.

Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a

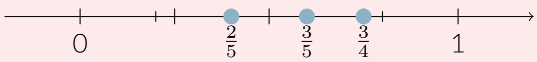
⋆ Comparar duas frações nos casos que têm o mesmo denominador e que têm o mesmo numerador.
⋆ Comparar frações da unidade a partir da sua representação na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ No item a), espera-se que os alunos façam a comparação baseando-se no fato de que as frações envolvidas têm o mesmo denominador; no item b), espera-se que os alunos façam a comparação baseando-se no fato de que as frações envolvidas têm o mesmo numerador. Já no item c), espera-se que os alunos façam uso intuitivamente da propriedade transitiva da relação de ordem, a partir de suas respostas aos itens a) e b). Recomenda-se ressaltar que, na segunda parte do item d), a resposta ao item c) seja conferida pela representação das frações na reta numérica, uma vez que a reta numérica explicita a ordem entre as frações.

Solução da Atividade 8

a) João comeu mais que Maria porque se as duas pizzas estão divididas em 4 fatias iguais, ele comeu 3 quartos enquanto Maria comeu apenas 2.
b) Como a pizza do Miguel está dividida em 5 fatias iguais, cada fatia da pizza do Miguel é menor do que as fatias da pizza da Maria, uma vez que a pizza da Maria foi repartida em quartos. Como cada um comeu duas fatias de sua própria pizza e as fatias de Maria eram maiores do que as de Miguel, Maria comeu mais pizza do que Miguel.
c) João comeu mais do que Maria e Maria comeu mais do que Miguel. Logo João foi o que comeu mais pizza.
d)



Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a

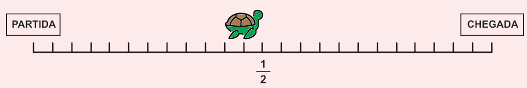
⋆ Representar na reta numérica uma fração dada.
⋆ Estabelecer a comparação entre frações a partir da representação na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

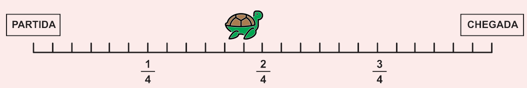
⋆ Para responder à questão, não há necessidade de uma informação precisa da posição da tartaruga. A representação das frações indicadas para serem comparadas com a localização da tartaruga não geram dúvida sobre estarem antes ou após a posição da tartaruga, apesar de essa posição não corresponder claramente a um único ponto na reta numérica.
⋆ É solicitado que os alunos escrevam a justificativa para a avaliação de cada item. Essa decisão tem como objetivo fazer com que o aluno vá além da argumentação oral, mas que consiga organizar as ideias para se expressar por escrito.
⋆ Observe que o caminho está repartido em 24 partes iguais, ainda que não haja frações sugeridas. A ideia é que cada aluno possa, sozinho, decidir sobre os pontos correspondentes à metade, a quartos, a oitavos e a terços. Discuta essas marcações com os alunos.
⋆ Cabe observar que cada item pode ser resolvido de forma independente. Por exemplo, para decidir se a posição da tartaruga corresponde a mais do que $\frac{3}{8}$ do percurso total, o aluno deve identificar oitavos na reta numérica. Já para decidir se a tartaruga já percorreu menos do que $\frac{2}{3}$ do percurso total, deve identificar terços. Assim, não há necessidade de comparar oitavos com terços.
⋆ O item h) envolve termo comparativo diferente de “maior do que” e “menor do que”. A expressão “pelo menos” oferece outra forma de avaliar a comparação. Explore essa diferença, certificando-se de que os alunos compreenderam.
⋆ Os itens i) e j) exigem que os estudantes façam uma “leitura” da reta numérica ainda não experimentada. Precisam observar, em relação ao percurso total (que é a unidade), a fração correspondente ao que falta ser percorrido.
⋆ Há vários raciocínios possíveis para responder aos diversos itens desta atividade. Incentive seus alunos a explicarem como raciocinaram, ressaltando, sempre que possível, as diferentes soluções.

Solução da Atividade 9

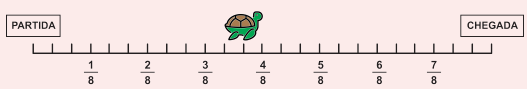
a) Não está correta. Marcando-se o ponto correspondente à metade do percurso, é fácil verificar que a tartaruga ainda não alcançou esse ponto.



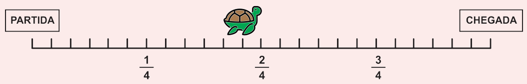
b) Não está correta. Dividindo-se o percurso em quartos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga.



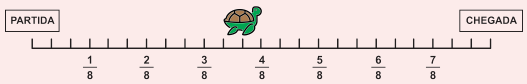
c) Está correta. Dividindo-se o percurso em oitavos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{3}{8}$ do percurso está antes da localização da tartaruga.



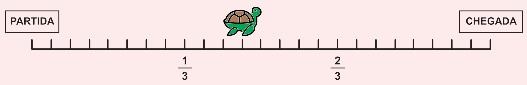
d) Está correta. Dividindo-se o percurso em quartos, como ilustra a figura a seguir, verifica-se que a localização da tartaruga é anterior ao ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ do percurso.



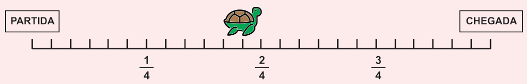
e) Não está correta. Dividindo-se o percurso em oitavos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{2}{8}$ do percurso está antes da localização da tartaruga.



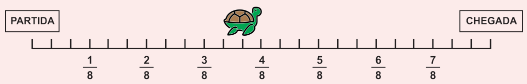
f) Está correta. Dividindo-se o percurso em terços, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{2}{3}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga.



g) Não está correta. Dividindo-se o percurso em quartos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga.



h) Não está correta. Dividindo-se o percurso em oitavos, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{5}{8}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga.



i) Está correta. De acordo com a resposta do item a), a tartaruga não alcançou a metade do percurso. Portanto, para alcançar a chegada, a tartaruga ainda precisa percorrer mais do que a metade do caminho.
j) Não está correta. A tartaruga já percorreu mais do que $\frac{1}{3}$ do percurso e todo o percurso corresponde a $\frac{3}{3}$. Portanto, para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer menos do que $\frac{2}{3}$ do caminho.

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

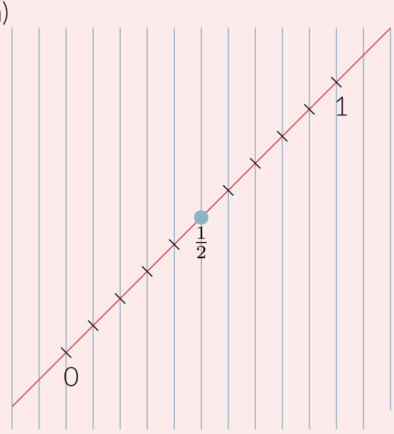
⋆ Representar frações na reta numérica a partir da identificação da unidade.
⋆ Reconhecer a reta numérica em uma representação não usual.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

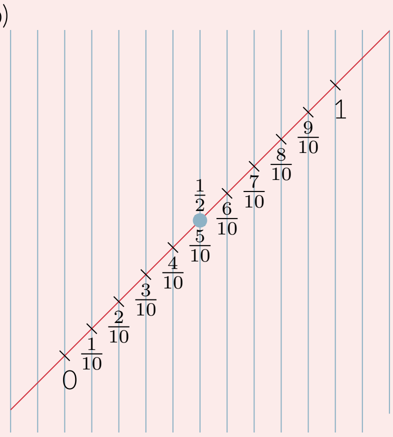
⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ A reta numérica é apresentada num formato pouco usual com o propósito de ampliar e variar o contato com outros modelos de representação.
⋆ Além disso, os pontos que identificam frações da unidade (no caso, décimos) também são determinados de uma forma não tradicional. A divisão é estabelecida a partir de um feixe de retas paralelas igualmente espaçadas e transversal à reta numérica em destaque.
⋆ No item c) , o aluno precisa identificar o segmento unitário. Para isso ele precisa reconhecer que o segmento de extremos $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ corresponde a 1 unidade. Como esse segmento está dividido em quatro partes iguais, cada parte é $\frac{1}{4}$. Assim, o 0 está duas marcações antes de $\frac{1}{2}$ e o 1 está duas marcações após o $\frac{1}{2}$.

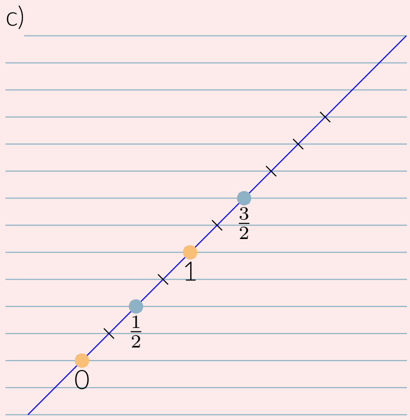
Solução da Atividade 10

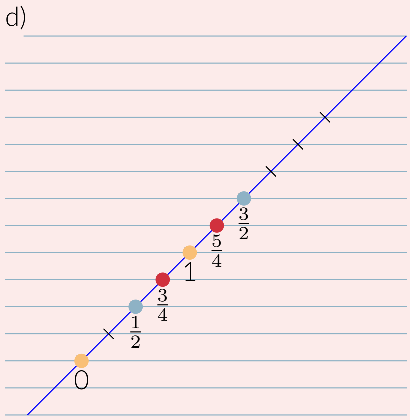
a)



b)







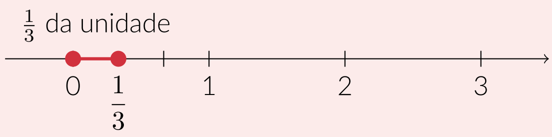
e) A última marcação no sentido que vai do $\frac{1}{2}$ para o $\frac{3}{2}$. Basta seguir contando os quartos desde o zero, por exemplo. A fração é $\frac{9}{4}$.

Sobre o Organizando as Ideias

O Organizando as ideias tem como foco a inclusão das frações na reta numérica e a observação da ordem nessa representação. Espera-se que a reta numérica sustente o processo de abstração levando o aluno a tratar fração como número, sem que a unidade esteja explicitada. Na reta, a unidade está associada ao segmento unitário.

Os pontos correspondentes aos números naturais e às frações são determinados na reta por justaposição de segmentos unitários ou de frações unitárias desse segmento. Assim, o ponto correspondente ao número 3, por exemplo, será o extremo do segmento obtido pela justaposição, a partir do zero, de três segmentos unitários, ou seja, três segmentos de tamanho 1. E, de forma semelhante, o ponto correspondente ao número $\frac{4}{3}$ é obtido pela justaposição, a partir do zero, de quatro segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do segmento unitário. É importante observar que, nesse processo, os pontos que correspondem aos números (frações ou números naturais) são os pontos extremos dos segmentos determinados a partir do 0, cujos tamanhos também são indicados por esses números.

No processo de marcação do $\frac{4}{3}$, o número $\frac{4}{3}$ é registrado no extremo do segmento que corresponde a $\frac{4}{3}$ da unidade a partir do zero. Deste modo, $\frac{4}{3}$ surge tanto como o tamanho do segmento como ao número que é registrado no final deste segmento. É importante que os estudantes entendam que os número são identificados por pontos na reta numérica e não pelo comprimento dos respectivos segmentos.



Nas atividades que seguem será reforçado o entendimento de fração como número, tendo a reta numérica como suporte para isso. Até esta Lição a fração era apresentada quase que exclusivamente como parte de uma unidade concreta (pizza, retângulos, círculos etc.). No que segue, a unidade será observada na reta a partir do segmento unitário. A reta numérica será assim também um recurso para comparar frações.

Notas de Aula

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Representar frações na reta numérica.
⋆ Ordenar frações na reta numérica.

Material necessário:

⋆ Barbante suficiente para cobrir a extensão de uma das paredes da sala de aula (por exemplo, aquela em que está posicionado o quadro).
⋆ Folhas de papel (para confeccionar os cartões numerados).
⋆ 32 prendedores para fixar os cartões no barbante (podem ser pregadores de roupa, clipes ou mesmo fita adesiva).
⋆ Fita adesiva ou equivalente (para fixar o barbante na parede).

Preparação para a atividade:

⋆ Esta atividade deve ser desenvolvida como um jogo, envolvendo todos os alunos da turma, organizados em grupos com 5 ou 6 alunos. Tudo deve ser combinado e esclarecido antes de a atividade começar.
⋆ O professor deve fazer um “varal” com o barbante em um local que seja visível para todos os alunos e não muito alto para que os estudantes possam alcançar com as mãos. Esse barbante representará a reta numérica.
⋆ A proposta da atividade é “pendurar os números” no barbante usando pregadores ou fitas adesivas, visando experimentar, em uma atividade concreta, a associação entre os pontos da reta e os números. Para isso, serão feitos cartões numerados.
⋆ É importante reforçar a fixação das extremidades do barbante para que não solte com o peso dos cartões que serão pendurados.
⋆ Use o papel para produzir os cartões numerados. Garanta que o tamanho dos números permita a visualização por todos os alunos.
⋆ Números a serem escritos nos cartões numerados: $0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{10}{5}, \frac{1}{10}$.
⋆ Garanta que haja pelo menos um cartão numerado para cada aluno. Se necessário, amplie a quantidade de cartões numerados. A sequência com 32 números é básica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ O desenvolvimento da atividade precisa ser mediado pelo professor. O processo e a discussão são importantes.
⋆ Os cartões com o 0 (zero) e como 1 (um) devem ser presos no barbante pelo professor antes do início da atividade. A distância entre o 0 (zero) e o 1 (um) identifica a unidade, que determinará a marcação dos demais números.
⋆ Garanta que haja espaço no barbante para a fixação de todos os cartões numerados. Considerando a sequência de 32 cartões, observe que há 9 números entre o zero e o um e o maior número a ser fixado é o 3.
⋆ Recomenda-se que, para facilitar a comunicação, os grupos sejam identificados, por exemplo, por cores. Cada grupo, na sua vez de jogar, deve fixar um cartão numerado no varal e outro grupo deve avaliar se o cartão foi fixado em uma posição correta ou não.
⋆ Distribua os cartões igualmente entre os grupos.
⋆ A correção da fixação realizada por um grupo pode ser decidida por outro grupo, devendo ser discutida com toda a turma.
⋆ Pontuação: cada cartão numerado posicionado corretamente vale um ponto para o grupo que fixou o cartão. Cada avaliação correta vale meio ponto para o grupo que ficou responsável por ela.
⋆ Vence o jogo o grupo que, após a fixação de todos os cartões numerados no varal, tiver acumulado maior quantidade de pontos.
⋆ Em cada rodada, todos os grupos devem prender um cartão numerado no varal e avaliar a colocação feita por outro grupo. Varie as duplas de grupos que farão as ações de fixação/avaliação de cada cartão preso no varal. Assim, por exemplo, se a turma estiver organizada em 5 grupos (azul, verde, vermelho, amarelo e preto), com 6 alunos cada um, na primeira rodada as duplas que farão a fixação/avaliação podem ser, por exemplo, azul/preto, verde/vermelho, vermelho/azul, amarelo/verde e preto/amarelo. Já na segunda rodada as duplas podem ser azul/amarelo, verde/preto, vermelho/verde, amarelo/azul e preto/vermelho. Planeje previamente essas associações e comunique aos alunos para não gerar discussão durante a realização. Uma forma de determinar as duplas dos grupos é o sorteio.
⋆ Incentive e procure fazer, respeitando as questões pessoais, com que cada aluno fixe um cartão numerado no varal.
⋆ Escolha o grupo com o cartão de número 2 para dar início ao jogo e, em seguida, aquele que tiver o número 3. Quando já presos no varal, esses cartões facilitarão a fixação dos demais, em que há números não inteiros.
⋆ Observe que alguns cartões numerados ocuparão a mesma posição na reta. Por exemplo, os numerados com 2 e $\frac{4}{2}$. Nesses casos, recomenda-se que o segundo cartão a ser fixado seja preso no que já está no varal, sem que um esconda o outro. Sugere-se um abaixo do outro. Aproveite esses casos para discutir com os alunos que um mesmo número pode ter mais do que uma representação.
⋆ Muito provavelmente as frações de denominador 2 serão as mais fáceis de serem fixadas no varal. Em seguida, as de

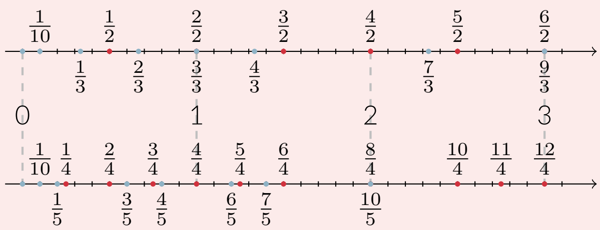
denominador 4. As fixações das frações de denominadores 3, 5 e 10 devem impor um pouco mais de desafio. Garanta que haja equilíbrio de dificuldade na distribuição dos cartões numerados entre os grupos.
⋆ Estimule a discussão interna nos grupos para a decisão da posição de fixação de cada cartão numerado. O aluno eleito pelo grupo para prender o cartão no barbante deve explicar como decidiram por aquela posição.

Sugestões de variação do jogo

⋆ Versão individual: colocam-se os cartões embaralhados sobre a mesa do professor com as faces voltadas para baixo e cada estudante deve pegar um cartão e posicioná-lo no varal.
⋆ Outra versão em grupo: pede-se que cada grupo sugira frações para que outro grupo faça a fixação. Nesse caso, as frações podem ser escolhidas a partir de uma lista previamente estabelecida pelo professor. Recomenda-se que o grupo que escolher a fração faça a leitura e que o grupo que fizer a fixação registre simbolicamente essa fração. Dessa forma, a leitura e a escrita em representação simbólica também podem ser tratadas na atividade.

Solução da Atividade 11

Para facilitar a visualização a solução é apresentada em duas retas.



Atividade 12

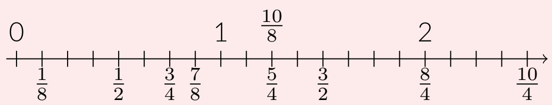
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Representar frações na reta numérica.
⋆ Comparar frações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ A associação das frações aos pontos correspondentes exigirá estratégias e comparações variadas. Procure identificar e discutir as argumentações apresentadas pelos alunos.
⋆ Inicialmente os alunos precisam identificar que as marcações em destaque identificam oitavos. Assim, por exemplo, para identificar quartos, será necessário reunir dois oitavos e para marcar $\frac{3}{2}$ será necessário contar 12 oitavos.
⋆ Esta atividade oferece também, de forma indireta, a oportunidade de os alunos estabelecerem comparações. Por exemplo, reconhecer que $\frac{3}{4}$ é menor do que 1, que $\frac{5}{4}$ é maior do que $\frac{8}{4}$ = 2 e que $\frac{10}{4}$ é menor do que $\frac{10}{8}$. Destaque e discuta essas e outras comparações com os seus alunos.

Solução da Atividade 12



Atividade 13

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Representar frações unitárias na reta numérica.
⋆ Comparar frações unitárias na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Observe e discuta com seus alunos que, no caso das frações de numerador igual a 1 (frações unitárias), quanto maior o denominador, menor a fração. Portanto, sua representação na reta numérica está mais perto do zero.
⋆ Aproveite para propor e discutir com seus alunos algumas reflexões tais como:

(i) Alguma fração com numerador igual a 1 pode ter sua representação na reta numérica entre $\frac{1}{2}$ e 1?

(ii) Qual fração é maior, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{10}$?
(iii) Que fração tem sua representação na reta numérica mais próxima de 0, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$?

Solução da Atividade 13

As respostas são na ordem I, A, B, H, F, C, E, D e G.

Atividade 14

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações unitárias em sua representação simbólica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Nesta atividade, as frações unitárias são apresentadas apenas em sua representação simbólica. Espera-se que os alunos realizem as comparações mentalmente. Para tal, eles podem se amparar na representação na reta numérica (a exemplo da atividade anterior) ou considerar a relação entre os denominadores, ou seja, reconhecendo que a menor é a que tem maior denominador (como já trabalhado na Lição 2).

Solução da Atividade 14

a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$.
b) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.
c) $\frac{1}{10} > \frac{1}{20}$.
d) $\frac{1}{12} < \frac{1}{2}$.
e) $\frac{1}{35} > \frac{1}{43}$.
f) $\frac{1}{99} > \frac{1}{100}$.
g) $\frac{1}{5} > \frac{1}{50}$.
h) $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$.

Atividade 15

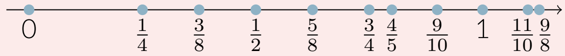
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações com o mesmo numerador ou com o mesmo denominador e a partir de um referencial.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.
⋆ A associação das frações aos pontos correspondentes na reta numérica exigirá que os alunos façam comparações de diferentes tipos: frações com mesmo numerador, frações com mesmo denominador e comparação a partir de um referencial (mais detalhes no Para o Professor do início da Lição). Valorize e discuta as diversas estratégias apresentadas por eles.
⋆ Por exemplo, uma vez que os pontos correspondentes ao 0, ao 1 e ao $\frac{1}{2}$ já estão destacados, é natural que as primeiras frações a serem associadas a pontos na reta numérica sejam $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Em seguida, reconhecendo que $\frac{1}{8}$ corresponde à metade de $\frac{1}{4}$, as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$ podem ser as próximas. Na sequência, o aluno pode reconhecer que $\frac{4}{5}$ e $\frac{9}{10}$ são menores do que a unidade e que $\frac{9}{8}$ e $\frac{11}{10}$ são maiores. Entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{9}{10}$, $\frac{9}{10}$ pode ser identificada como maior por faltar apenas $\frac{1}{10}$ para compor a unidade , enquanto que para $\frac{4}{5}$ falta $\frac{1}{5}$ da unidade. Por fim, por raciocínio análogo, a fração $\frac{9}{8}$ pode ser identificada como maior do que $\frac{11}{10}$: Sabe-se que $\frac{1}{8}$ é maior do que $\frac{1}{10}$ e que $\frac{9}{8}$ é $\frac{1}{8}$ maior do que a unidade, enquanto que $\frac{11}{10}$ é $\frac{1}{10}$ maior. Portanto, $\frac{9}{8}$ é maior do que $\frac{11}{10}$.
⋆ Se achar necessário, discuta a comparação entre alguns pares das frações apresentadas antes de os alunos resolverem a atividade. Por exemplo, peça-lhes que comparem $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$, que são frações com o mesmo denominador. Ou que comparem $\frac{9}{8}$ e $\frac{9}{10}$, frações com o mesmo numerador.
⋆ O aluno pode responder simplesmente "ligando" os cartões com as frações aos pontos correspondentes na reta numérica. No entanto, recomenda-se que o professor oriente-os a escreverm as frações abaixo dos pontos correspondentes na reta numérica, a exemplo do 0, do 1, e do $\frac{1}{2}$.

Solução da Atividade 15



Atividade 16

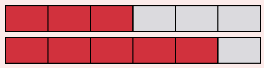
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações.

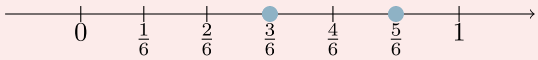
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Nesta atividade, as frações são apresentadas apenas em sua representação simbólica. Espera-se que os alunos consigam compará-las a partir da ideia de quantidade e de estratégias mentais. No entanto, é importante observar que alguns alunos podem precisar do apoio de representações diversas. Portanto, a discussão de cada item deve ser amparada por, pelo menos, uma das três estratégias destacadas: (i) argumentação verbal; (ii) representação em modelo contínuo de área e (iii) representação na reta numérica. Por exemplo, na correção do item a), entre $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{6}$, espera-se que a discussão contemple:

(i) O fato de que, como essas frações indicam quantidades de "sextos", a menor (maior) é aquela que têm menor (maior) numerador. Portanto, $\frac{3}{6} < \frac{5}{6}$.
(ii) A representação em modelos contínuos de área.



(iii) A representação na reta numérica.



Solução da Atividade 16

a) $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$
b) $\frac{3}{6} < \frac{5}{6}$
c) $\frac{27}{10} < \frac{29}{10}$
d) $\frac{3}{12} < \frac{9}{12}$
e) $\frac{139}{100} > \frac{125}{100}$
f) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
g) $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$
h) $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$
i) $\frac{4}{5} < \frac{4}{3}$
j) $\frac{12}{15} < \frac{12}{7}$
k) $\frac{22}{80} > \frac{22}{90}$
l) $\frac{3}{2} > \frac{2}{5}$
m) $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$
n) $\frac{7}{8} < \frac{10}{9}$
o) $\frac{6}{5} > \frac{12}{9}$
p) $\frac{4}{5} < \frac{5}{4}$
q) $\frac{35}{40} < \frac{30}{25}$
r) $\frac{99}{100} < \frac{3}{2}$

Atividade 17

Objetivos específicos: Levar o aluno a

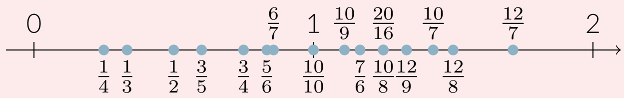
⋆ Relacionar a representação de frações unitárias em modelo de área retangular com a representação dessas frações na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Cada aluno deve receber o material para o desenvolvimento da atividade, que consiste em uma folha, disponível para reprodução no final do livro. Será necessário traçar uma reta. Distribua uma folha para isso ou oriente os alunos a fazê-lo no caderno, usando em ambos os casos a maior dimensão do papel.
⋆ Recomenda-se que os alunos manuseiem o material a ser reproduzido. É importante que reconheçam que todos os retângulos coloridos são iguais (congruentes), o que pode ser constatado pela sobreposição. O retângulo representa a unidade. Além disso, é importante que percebam que cada um dos retângulos coloridos (ou a unidade) tem uma equipartição indicada, representando frações unitárias diferentes. Por exemplo, cada parte do retângulo vermelho representa $\frac{1}{5}$ da unidade.
⋆ Algumas das frações indicadas para serem representadas na reta numérica são maiores que uma unidade. Nesses casos, oriente seus alunos a fazer a justaposição das partes dos retângulos correspondentes. Por exemplo, para representar $\frac{12}{7}$ será necessário justapor um retângulo a cinco partes do retângulo azul.

Solução da Atividade 17

a) Da esquerda para a direita as frações são 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{16}$.
b)



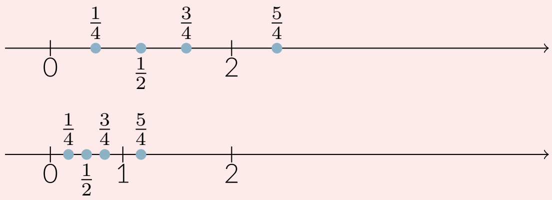
Atividade 18

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Representar frações na reta numérica.
- ⋆ Comparar frações a partir de sua representação na reta numérica.

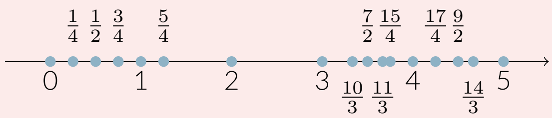
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ A associação das frações aos pontos correspondentes exigirá que os alunos façam comparações de diferentes tipos. Valorize e discuta as diversas estratégias apresentadas pelos alunos.
⋆ Observe que apenas os pontos correspondentes ao 0 e ao 2 estão destacados na reta. Fique atento se seu aluno consegue identificar corretamente a unidade (explícita ou implicitamente). Essa identificação tem papel fundamental na reta numérica. Respostas como as que estão a seguir revelam tal dificuldade.



⋆ O último item desta atividade admite várias respostas. Explore as soluções dadas pelos seus alunos. Aproveite para discutir estratégias variadas de comparação. Por exemplo, decidir que $\frac{7}{2} < \frac{11}{3} < 4$ pode ser justificado da seguinte maneira: como $4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, na reta, os pontos correspondentes aos números $\frac{7}{2}$ e $\frac{11}{3}$ estarão ambos antes do 4 e, como $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, a marcação de $\frac{7}{2}$ estará mais distante de 4 do que a de $\frac{11}{3}$, ou seja, $\frac{7}{2}$ é menor do que $\frac{11}{3}$.

Solução da Atividade 18



a) O número 1 é o ponto que está a mesma distância do 0 e do 2, ou seja, o "ponto médio" entre o 0 e o 2. O número $\frac{1}{2}$ é o ponto médio entre o 0 e o 1.
b) As marcações do $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$ podem ser feitas de maneira semelhante (i) $\frac{1}{4}$ é o ponto médio entre $\frac{1}{2}$ e 1, (ii) $\frac{3}{4}$ é o ponto médio entre $\frac{1}{2}$ e 1, (iii) $\frac{5}{4}$ é o ponto médio entre 1 e $\frac{3}{2}$.
c) $\frac{1}{4}$ é menor do que $\frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{4}$ está antes na reta numérica.
d) $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{1}{2}$ porque $\frac{3}{4}$ está mais adiante na reta numérica.
e) $\frac{5}{4}$ é menor do que 1 porque $\frac{5}{4}$ está mais adiante na reta numérica.
f)

$$0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{5}{4} < 2.$$

g)

A) Há várias respostas possíveis. Por exemplo, $3 < \frac{7}{2} < 4$, $3 < \frac{15}{4} < 4$ ou $3 < \frac{10}{3} < 4$.
B) Há várias respostas possíveis. Por exemplo, $\frac{7}{2} < \frac{15}{4} < 4$ ou $\frac{7}{2} < \frac{11}{3} < 4$.
C) Há várias respostas possíveis. Por exemplo, $\frac{17}{4} < \frac{9}{2} < 5$, $\frac{17}{4} < \frac{19}{4} < 5$ ou $\frac{17}{4} < \frac{14}{3} < 5$.

LIÇÃO 4 - Para o professor

Reconhecer quando duas frações são iguais, saber gerar frações iguais a uma dada fração e obter duas frações de mesmo denominador que são iguais a duas frações quaisquer dadas são habilidades fundamentais que permitem resolver vários problemas no estudo de frações. Por exemplo, com essas habilidades, é possível criar procedimentos que permitem comparar duas frações com denominadores diferentes e obter uma fração que está entre duas frações diferentes (propriedade de densidade das frações). São esses tópicos que compõem a presente lição.

O processo de comparação de frações com denominadores distintos é apresentado como motivação, em uma situação problema, em formato de história em quadrinho, logo no início da lição. Contudo sua solução é retomada na seção *Organizando as ideias* , após a apresentação das oito primeiras atividades que compõem a seção *Explorando o Assunto* . Estas atividades iniciais abordam basicamente a igualdade de frações. Todas elas encontram-se organizadas em ordem crescente de dificuldade. O conceito de igualdade é abordado utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares (atividades 2 , 3 e 6), ou em modelos de área circulares (atividade 5) ou na reta numérica (atividade 8). A inclusão de modelos diferentes é proposital pois, com isso, o aluno tem a oportunidade de perceber as mesmas propriedades em contextos diferentes aumentando assim o seu arsenal de modelos que ele pode lançar mão ao justificar uma resposta ou estudar uma situação.

Cabe destacar aqui um detalhe sutil, mas que permeia toda a lição: trata-se do uso das expressões "frações equivalentes" e "frações iguais" . Nesta lição, a expressão "frações equivalentes" é usada se as frações em questão estiverem associadas a divisões de algum objeto físico (bolo, torta, pizza, chocolate, etc.), de forma a poder exprimir o fato de que processos de partições diferentes podem gerar quantidades iguais. Por exemplo, o processo de dividir um bolo ao meio e pegar uma das partes é diferente daquele em que o bolo é dividido quatro partes iguais e se toma duas dessas partes. No entanto, em termos de quantidades, tem-se, em ambos os casos a metade do bolo. Já a expressão "frações iguais" será usada se as frações se referem a números, sem um contexto específico. Por exemplo, $\frac{2}{4}$ é a única fração de denominador 4 que é igual a $\frac{1}{2}$. No entanto, cabe ressaltar que não se espera que os alunos sejam capazes de registrar este tipo de diferença. Assim, recomenda-se que os usos, por parte dos alunos, das expressões frações equivalentes e frações iguais nos contextos destacados sejam considerados igualmente válidos e indistinguíveis.

As sistematizações dos procedimentos de **comparação** (atividades 12 , 13 , 14 , 15 e 18) e do conceito de **igualdade** de frações (atividades 9 , 10 , 11 , 16 , 17 , 19 e 20) são então realizadas na seção *Mão na Massa* . O processo de determinação da fração irredutível igual à fração dada é, por exemplo, trabalhado nas atividades 16 e 17 . Uma condição suficiente para verificação da igualdade de frações é apresentada na atividade 19 . O jogo **Trilha dos doze avos** (atividade 20) é uma boa estratégia para que se possa consolidar de forma prazerosa a igualdade de frações.

Na parte final da lição, na seção *Quebrando a Cuca* , apresentam-se atividades que sugerem uma avaliação crítica pelos alunos de afirmações que generalizam situações de igualdade e de comparação entre frações. Cabe destacar que todas as atividades desta última seção, em especial, deverão ser conduzidas sem pressa, por meio de debates intensos entre os alunos para que os argumentos equivocados apareçam e possam ser descontruídos por eles próprios.

Tanto a comparação de frações arbitrárias como o estudo da propriedade de densidade apresenta como procedimento base a procura por representações equivalentes de frações dadas. Nesse sentido, destaca-se a técnica utilizada nas atividades 23 e 24 para determinar uma fração intermediária entre duas frações arbitrárias dadas. A técnica, que consiste simplesmente em procurar frações intermediárias por meio de representações equivalentes das frações dadas com denominadores iguais e suficientemente grandes, além de original, supera o procedimento usual (que utiliza a adição de frações e a divisão de uma fração por um número natural), por sua simplicidade e naturalidade. Este resultado, conhecido no âmbito pedagógico como "propriedade de densidade dos números racionais" , não se verifica para os conjuntos de números naturais e de números inteiros, e é, sem dúvida, um dos fatos mais notáveis na extensão que se faz do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais. É a responsável, por exemplo, pelo fato de um número racional não ter elemento sucessor.

Cabe lembrar que as habilidades desenvolvidas nessa lição são fundamentais para as lições seguintes que tratam das operações com frações.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 4: O aluno deve ser capaz de:

- ⋆ Reconhecer a igualdade de frações, seja por representações geométricas ou por representações numéricas equivalentes;
- ⋆ Determinar frações equivalentes por subdivisões de uma fração dada;
- ⋆ Identificar a representação de frações iguais (equivalentes) na reta numérica;
- ⋆ Reconhecer a igualdade de duas frações por processo matemático suficiente (se $a \times d = b \times c$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$);
- ⋆ Simplificar frações;
- ⋆ Comparar duas ou mais frações com denominadores diferentes;
- ⋆ Reconhecer a fração (o número racional não negativo) como uma classe de equivalência;
- ⋆ Determinar, dada uma fração arbitrária, sua fração irredutível;
- ⋆ Reconhecer a propriedade de densidade do conjunto de frações (números racionais não negativos);
- ⋆ Determinar uma fração, entre duas frações dadas, com base em representações equivalentes dessas frações com denominadores suficientemente grandes.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que existem frações de denominadores diferentes que representam uma mesma quantidade da unidade.
⋆ Reconhecer que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares.
⋆ Reconhecer que, em uma equipartição de uma região retangular, só é possível escolher uma quantidade de partes que corresponda à metade desta região se a quantidade total de partes for um número par.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Reforce para seus alunos que o item b) deve ser respondido com a partição apresentada, isto é, sem gerar novas partições.
⋆ Observe que o item c) pode ser respondido apenas pela fração $\frac{1}{2}$. No entanto, é importante estimular os alunos a pereceberem que a metade do sanduíche pode ser obtida por $\frac{2}{4}$ do sanduíche.
⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (metade do retângulo) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) que, por expressarem uma mesma quantidade, são frações iguais. Assim, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, etc. são respostas válidas para o item b) desta atividade.

Solução da Atividade 1

a) Em a): $\frac{1}{2}$. Em b): $\frac{1}{3}$. Em c): $\frac{1}{4}$. Em d): $\frac{1}{4}$.
b) É possível comer metade do sanduíche apenas nas repartições a), c) e d) pois, para elas, a quantidade de partes iguais em que o sanduíche foi dividido é um número par.
c) Em a): $\frac{1}{2}$. Em c): $\frac{2}{4}$. Em d): $\frac{2}{4}$.

Atividade 2

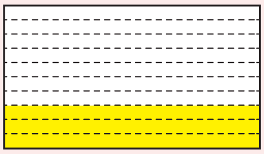
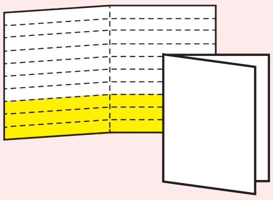
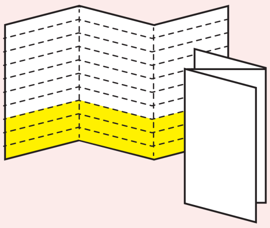
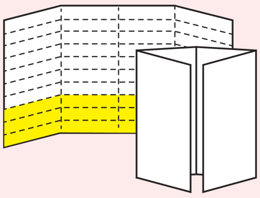
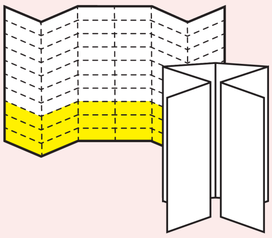
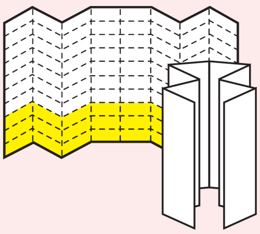
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que as frações $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{9}{30}$, $\frac{18}{60}$ e $\frac{24}{80}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares e dobraduras.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos e que, neste caso, cada grupo receba uma quantidade suficiente de cópias das folhas para reprodução. Podem ser necessárias mais do que uma dessas folhas por aluno. Uma vez que a folha já tenha sido dobrada para a realização de um dos itens, a marca deixada pode atrapalhar a realização do item seguinte.
⋆ É importante deixar claro para os alunos que, para decidir sobre a quantidade de retângulos pintados e a quantidade total de retângulos menores, se devem considerar as divisões feitas pelos vincos das dobras. Neste sentido, você pode, junto com a turma, a título de exemplo e de orientação, preencher a segunda linha da tabela, deixando as demais para sejam preenchidas pelos grupos.
⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a área da região pintada de amarelo) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais.

Solução da Atividade 2

Como dobrar	Quantidade total de retângulos menores	Quantidade de retângulos menores pintados	Fração do retângulo do encarte que está pintada
	10	3	$\frac{3}{10}$
	20	6	$\frac{6}{20}$
	30	9	$\frac{9}{30}$
	40	12	$\frac{12}{40}$
	60	18	$\frac{18}{60}$
	80	24	$\frac{24}{80}$

Notas de Aula

Notas de Aula

Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{12\times3}{12\times4}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área sem a contagem um a um das partes que compõem as subdivisões destas representações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ O propósito de encobrir as divisões do retângulo é para evitar que os alunos façam a contagem das partes uma a uma e que, assim, sejam estimulados a perceber a estrutura multiplicativa 12×3 e 12×4 na divisão do retângulo.
⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a área da região pintada de azul) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais.

Solução da Atividade 3

a) $\frac{3}{4}$.
b) Com a nova divisão, o retângulo inicial ficou dividido em $12 \times 4 = 48$ retângulos menores, dos quais $12 \times 3 = 36$ estão pintados de azul. Assim, a fração do retângulo inicial que está pintada de azul é $\frac{12\times3}{12\times4} = \frac{36}{48}$.

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Comparar frações em que os denominadores são múltiplos a partir de modelos contínuos.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Para amparar a reflexão dos alunos, recomenda-se que sejam feitas cópias das folhas para reprodução disponíveis no final do livro.
⋆ Esta atividade introduz a expressão "subdividir" com o significado de "dividir novamente". Esse vocabulário será importante no decorrer da lição.
⋆ Esta atividade pode desencadear uma discussão com os alunos que os leve a perceberem que se multiplicamos numerador e denominador de uma fração pelo mesmo número então é gerada uma fração igual à fração original.

Solução da Atividade 4

a) Na hora do lanche Mário comeu $\frac{4}{12}$ do bolo.
b) Na hora do lanche João comeu $\frac{2}{12}$ do bolo.
c) Se os amigos atrasados não tivessem aparecido antes do lanche, João e Mário teriam comido, cada um, $\frac{1}{3}$ do bolo.
d) Como $\frac{1}{3}$ do bolo corresponde a 4 fatias do bolo cortado em 12 partes iguais, vê-se que João teria comido mais bolo e Mário teria comido a mesma quantidade de bolo se seus amigos não tivessem aparecido antes do lanche.

Atividade 5

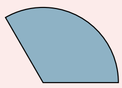
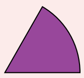
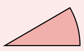
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos circulares.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos para que eles possam discutir as soluções apresentadas.
⋆ A conclusão da atividade é que uma mesma parte do círculo (a área da região pintada de cinza) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes. E que, por expressarem uma mesma quantidade, essas frações são iguais. De fato, se cada terço do círculo for subdividido em duas ou em quatro partes iguais então, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, respectivamente.
⋆ Além disso, observação análoga cabe para as frações que completam a terceira coluna da tabela: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Solução da Atividade 5

Peça	Quantas cabem na região cinza?	Juntas, são que fração do círculo?	Fração do círculo não colorida de cinza?
$\frac{1}{3}$ 	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$ 	4	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{12}$ 	8	$\frac{8}{12}$	$\frac{4}{12}$

Notas de Aula

Atividade 6

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{8}{16}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares.

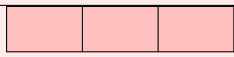
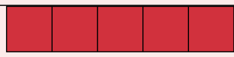
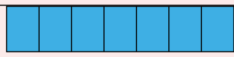
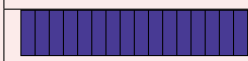
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos para que eles possam discutir as soluções apresentadas, dentro do grupo, durante a condução da atividade.
⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a região colorida de cinza) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, são frações iguais.

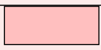
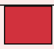
Esta atividade possui folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

Solução da Atividade 6

PARTE 1

Retângulo	Número de partes em se encontra dividido	Cada parte é que fração do retângulo?
	2	$\frac{1}{2}$
	3	$\frac{1}{3}$
	4	$\frac{1}{4}$
	5	$\frac{1}{5}$
	6	$\frac{1}{6}$
	7	$\frac{1}{7}$
	8	$\frac{1}{8}$
	9	$\frac{1}{9}$
	10	$\frac{1}{10}$
	16	$\frac{1}{16}$

PARTE 2

Tipo da peça	Quantas cabem na região cinza?	Juntas, são que fração do retângulo do encarte?	Fração do encarte não colorida de cinza?
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
	3	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
	4	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$
	5	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$
	8	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$

Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a

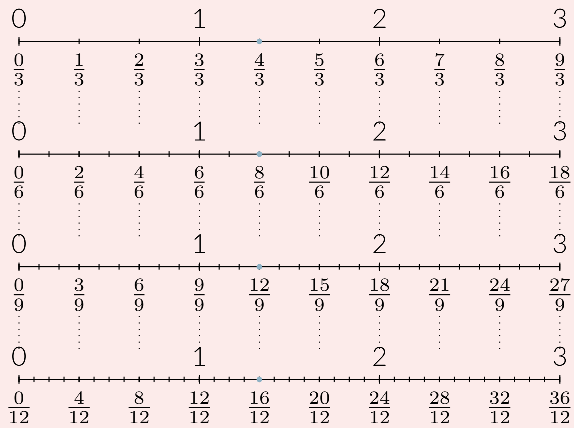
⋆ Reconhecer que, para cada $0 \leq i \leq 3$, as frações $\frac{i}{3}$, $\frac{2\times i}{2\times 3}$, $\frac{3\times i}{3\times 3}$ e $\frac{4\times i}{4\times 3}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações na reta numérica.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

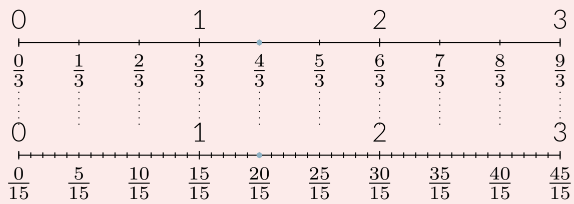
⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Nas retas numéricas apresentadas, as origens estão alinhadas e as unidades correspondem a segmentos unitários congruentes, o que garante que uma fração associada a um determinado ponto em uma reta seja a mesma fração nos pontos correspondentes nas demais retas.
⋆ Caso seus alunos não percebam, aponte para o fato de que as segunda, terceira e quarta retas numéricas são obtidas por meio de subdivisões dos terços da primeira reta numérica em duas, três e quatro partes iguais, respectivamente. Para resolver o item c) desta atividade, se faz necessário dividir cada terço em cinco partes iguais.
⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que, nesta atividade, cada ponto marcado na reta numérica está sendo descrito por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por corresponderem ao mesmo ponto da reta numérica, estas frações são iguais.

Solução da Atividade 7

a)



b) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$.
c) No item b) foi estabelecido que o ponto azul corresponde a fração $\frac{4}{3}$ pois, ao se justapor 4 segmentos que são $\frac{1}{3}$ do segmento unitário (que está, aqui, servindo como unidade) a partir da origem 0, este ponto é a outra extremidade desta justaposição. Agora, ao se subdividir estes 4 segmentos que são $\frac{1}{3}$ do segmento unitário em 5 partes iguais, obtêm-se 20 segmentos justapostos que são $\frac{1}{15}$ do segmento unitário. Sendo o ponto azul extremo desta justaposição, segue-se que ele corresponde a fração $\frac{20}{15}$.



Notas de Aula

Notas de Aula

Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração com denominador especificado a partir da observação das representações destas frações em diversos modelos de frações, incluindo a reta numérica.

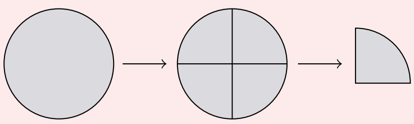
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 alunos (cada aluno do grupo poderá usar um modelo diferente para obter a fração solicitada).
⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte em cada modelo de área e um mesmo ponto na reta numérica estão sendo descritos por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, estas frações são iguais por expressarem uma mesma quantidade ou por serem representadas por um mesmo ponto na reta numérica.

Solução da Atividade 8

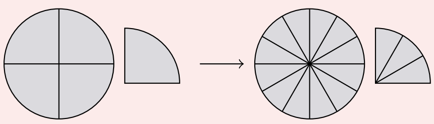
a) Tomando um círculo como unidade, o dividimos em 4 partes iguais e tomamos 5 cópias de uma parte para obter $\frac{5}{4}$ da unidade. Dividindo cada uma das 5 cópias em 3 partes iguais, obtemos então 15 cópias de $\frac{1}{12}$ da unidade. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$.

Unidade



Divide-se a unidade em 4 partes iguais.

Uma parte corresponde a um quarto.

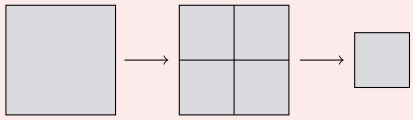


Junta-se 5 cópias de uma parte para obter cinco quartos.

Divide-se cada cópia em 3 partes iguais obtendo 15 cópias de um doze avos.

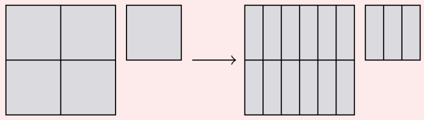
b) Tomando um quadrado como unidade, o dividimos em 4 partes iguais e tomamos 5 cópias de uma parte para obter $\frac{5}{4}$ da unidade. Dividindo cada uma das 5 cópias em 3 partes iguais, obtemos então 15 cópias de $\frac{1}{12}$ da unidade. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$.

Unidade



Divide-se a unidade em 4 partes iguais.

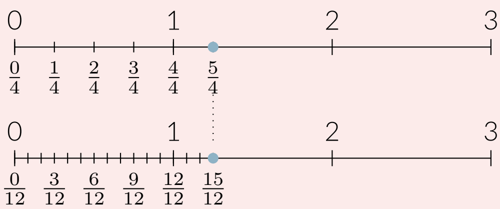
Uma parte corresponde a um quarto.



Junta-se 5 cópias de uma parte para obter cinco quartos.

Divide-se cada cópia em 3 partes iguais obtendo 15 cópias de um doze avos.

c) Após marcar os números 0 e 1 na reta numérica, dividimos o segmento unitário (aquele de extremidades em 0 e 1) em 4 partes iguais. Cada parte é um segmento que corresponde a $\frac{1}{4}$ da unidade. Ao se justapor 5 segmentos que são $\frac{1}{4}$ da unidade a partir da origem 0, a fração $\frac{5}{4}$ corresponde ao ponto que é a outra extremidade desta justaposição. Agora, ao se subdividir estes 5 segmentos que são $\frac{1}{4}$ da unidade em 5 partes iguais, obtêm-se 15 segmentos justapostos que são $\frac{1}{12}$ da unidade. O ponto que corresponde a $\frac{5}{4}$ é ainda extremo desta justaposição e, portanto, que ele corresponde também a fração $\frac{15}{12}$.



Notas de Aula

Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração irredutível com denominador especificado.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Espera-se, principalmente nos Itens c e d, que os alunos consigam obter a fração solicitada usando a propriedade que $\frac{m\times a}{m\times b}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$ e sem recorrer a desenhos de modelos de área de frações.

Solução da Atividade 9

a) Como $6 = 2 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{2\times 7}{2\times 3} = \frac{14}{6}$.
b) Como $21 = 7 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{7\times 7}{7\times 3} = \frac{49}{21}$.
c) Como $123 = 41 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{41\times 7}{41\times 3} = \frac{287}{123}$.
d) Como $210 = 70 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{70\times 7}{70\times 3} = \frac{490}{210}$.

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração com numerador ou denominador especificados.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Espera-se que, neste estágio, os alunos consigam obter as respostas usando a propriedade que $\frac{m\times a}{m\times b}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$ e sem recorrer a desenhos de modelos de área de frações.
⋆ Observe que, no item (e), não existe um número natural n tal que $6\times n = 9$. Para resolver o item, o aluno pode usar o resultado do item (d) e substituir $\frac{9}{12}$ por $\frac{3}{4}$ e proceder com o exercício. A mesma observação aplica-se ao item (f).
⋆ Observe para seus alunos que os Itens (e) e (f) são exemplos de frações iguais para os quais não é possível obter uma fração multiplicando-se o numerador e o denominador da outra por um mesmo número natural.

Solução da Atividade 10

a) Uma vez que $6 = 2\times 3$, então $\frac{5}{3} = \frac{2\times 5}{2\times 3} = \frac{10}{6}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 10.
b) Uma vez que $6 = 3\times 2$, então $\frac{2}{3} = \frac{3\times 2}{3\times 3} = \frac{6}{9}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 9.
c) Uma vez que $12 = 4 \times 3$ e $8 = 4 \times 2$, então $\frac{8}{12} = \frac{4\times 2}{4\times 3} = \frac{2}{3}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 2.
d) Uma vez que $9 = 3 \times 3$ e $12 = 3 \times 4$, então $\frac{9}{12} = \frac{3\times 3}{3\times 4} = \frac{3}{4}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 4.
e) Pelo item d, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Uma vez que $6 = 2\times 3$, então $\frac{3}{4} = \frac{2\times 3}{2\times 4} = \frac{6}{8}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 8.
f) Pela solução do item e, $\square$ deve ser preenchido com 9.

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

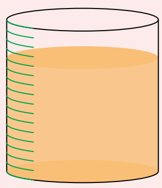
⋆ Usar igualdade de frações para calcular o numerador de uma das frações em uma situação contextualizada.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

Solução da Atividade 11

As 17 marcações no copo do seu colega divide a capacidade do copo em 16 partes iguais. Quantas destas partes correspondem a $\frac{3}{4}$ da capacidade do copo (que é fração da capacidade do copo que está preenchida com suco)? Para responder a esta pergunta, devemos calcular o numerador de uma fração de denominador 16 que seja igual a $\frac{3}{4}$, isto é, devemos preencher $\square$ com um número tal que
$\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$.
Como $16 = 4 \times 4$, segue-se que
$\frac{3}{4} = \frac{4\times 3}{4\times 4} = \frac{12}{16}$.
Assim, não necessárias 12 partes de $\frac{1}{16}$ da capacidade do copo. Consequentemente, 13 níveis do copo do seu colega devem ser preenchidos com suco de laranja para que ele fique com a mesma quantidade suco de laranja que você.



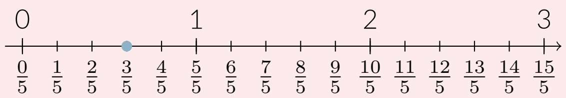
Atividade 12

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que, dada uma fração $p = \frac{n}{d}$, existe um quantidade finita de frações da forma $\frac{k}{d}$ que são menores do que p e uma quantidade infinita de frações da forma $\frac{k}{d}$ que são maiores do que p.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Alguns alunos podem ainda necessitar de apoio de material concreto para responder à questão.
⋆ Recomenda-se que, na discussão da atividade, uma reta numérica com quintos marcados seja usada como uma contrapartida visual para as respostas das perguntas.



Solução da Atividade 12

a) Três frações: $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$. Justificativa: $\frac{3}{5}$ são três “cópias” de $\frac{1}{5}$. Qualquer outra fração de denominador 5 também é composta por uma quantidade inteira de “cópias” de $\frac{1}{5}$, quantidade esta determinada pelo numerador de fração. Para se ter então uma fração de denominador 5 menor do que $\frac{3}{5}$, devemos ter menos do que 3 “cópias” de $\frac{1}{5}$: 2 “cópias” , 1 “cópia” ou 0 “cópia”. Assim, as frações de denominador 5 menor do que $\frac{3}{5}$ são $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$.

b) Infinitas frações $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, etc. Justificativa: $\frac{3}{5}$ são três “cópias” de $\frac{1}{5}$. Qualquer outra fração de denominador 5 também é composta por uma quantidade inteira de “cópias” de $\frac{1}{5}$, quantidade esta determinada pelo numerador de fração. Para se ter então uma fração de denominador 5 maior do que $\frac{3}{5}$, devemos ter mais do que 3 “cópias” de $\frac{1}{5}$: 4 “cópias” , 5 “cópias” , 6 “cópias” , 7 “cópias” , etc. Assim, as frações de denominador 5 maiores do que $\frac{3}{5}$ são $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, etc.

Atividade 13

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações por meio de igualdade de frações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ A discussão da atividade pode incluir o uso de outras estratégias, que não a igualdade de frações, para se estabelecer a comparação das frações apresentadas.

Solução da Atividade 13

item	Fração	“$>$”, “$<$” ou “$=$”	Fração
a)	$\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$	$>$	$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
b)	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$	$>$	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
c)	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$=$	$\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$
d)	$\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$	$<$	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
e)	$\frac{22}{7} = \frac{220}{70}$	$>$	$\frac{217}{70} = \frac{31}{10}$
f)	$\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$	$=$	$\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$
g)	$\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$	$=$	$\frac{50}{100} = \frac{50}{100}$
h)	$\frac{7}{5} = \frac{84}{60}$	$<$	$\frac{85}{60} = \frac{17}{12}$
i)	$\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$	$<$	$\frac{3}{1} = \frac{9}{3}$

Atividade 14

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Existem outros tipos de ferramentas cujas peças componentes também são identificadas por frações: brocas de furadeiras, chaves de boca e aperto, chaves biela, . . .
⋆ Recomenda-se que, caso seja viável, algumas destas ferramentas sejam levadas para sala de aula para conhecimento dos alunos.

Solução da Atividade 14

Uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$, $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ e $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$, os tamanhos dos soquetes são os seguintes:
(A): $\frac{7}{8}$, (B): $\frac{13}{16}$, (C): $\frac{3}{4}$, (D): $\frac{11}{16}$, (E): $\frac{5}{8}$, (F): $\frac{9}{16}$, (G): $\frac{1}{2}$, (H): $\frac{7}{16}$, (I): $\frac{3}{8}$.

Atividade 15

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar uma fração com uma outra fração determinada a partir da alteração dos termos (numerador ou denominador) da primeira fração a partir de somas e multiplicações por números naturais.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Enquanto que esta atividade usa a fração $\frac{4}{7}$ como referência, a discussão da atividade com os alunos pode incluir a questão se as conclusões obtidas para $\frac{4}{7}$ mudam se a fração de referência mudar. Neste contexto, o item (D) é especialmente interessante pois, neste caso, a conclusão (se a fração ficará menor, maior ou igual a fração original) de fato dependerá se a fração original é maior, menor ou igual a 1.

Solução da Atividade 15

a) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{5}{7}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois em cinco sétimos temos um sétimo a mais do que em quatro sétimos.
b) A fração determinada pela adição de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{4}{8}$ que é menor do que $\frac{4}{7}$, pois como um oitavo é menor do um sétimo, quatro oitavos também será menor do que quatro sétimos.
c) A fração determinada pela subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{3}{7}$ que é menor do que $\frac{4}{7}$, pois em três sétimos temos um sétimo a menos do que em quatro sétimos.
d) A fração determinada pela adição de 2 ao numerador e ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{6}{9}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{7\times2}{7\times3} = \frac{14}{21}$, $\frac{4}{7} = \frac{3\times4}{3\times7} = \frac{12}{21}$ e $14 > 12$.
e) A fração determinada pela multiplicação por 2 do numerador e do denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{8}{14}$ que é igual a $\frac{4}{7}$.
f) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador e subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{5}{6}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois $\frac{5}{6} > \frac{4}{6} > \frac{4}{7}$.

Atividade 16

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Obter uma fração irredutível equivalente a uma fração dada e relacionar esta equivalência no contexto de minimização de cortes em uma equipartição.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ A discussão da atividade, além da equipartição dada e aquela associada ao número mínimo de cortes, pode incluir as equipartições associadas a outras frações equivalentes a $\frac{8}{24}$: $\frac{4}{12}$ (divisão de cada panqueca em 12 partes iguais) e $\frac{2}{6}$ (divisão da panqueca em 6 partes iguais).

Solução da Atividade 16

a) Cada amigo vai receber $\frac{8}{24}$ de panqueca.
b) $8 \times 24 = 192$ cortes.
c) Sim! Por exemplo, como $\frac{8}{24} = \frac{8\times 1}{8\times 3} = \frac{1}{3}$, basta dividir cada panqueca 3 partes iguais e dar uma parte ($\frac{1}{3}$ de panqueca para cada amigo. Para esta equipartição, são necessários $8 \times 3 = 24$ cortes apenas.

Atividade 17

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Simplificar frações de modo a obter uma fração igual irredutível.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Um pré-requisito desta atividade é o conceito de máximo divisor comum. Assim, avalie a necessidade de uma revisão deste conceito com seus alunos. Os alunos devem perceber que se dois números são divididos pelo maior divior comum entre eles, os dois novos números obtidos são agora primos entre si, isto é, o máximo divisor comum entre eles é 1. Este fato vai apoiar o "assim" das respostas.
⋆ A discussão desta atividade pode incluir o uso de materiais concretos na linha da proposta da Atividade 16 , isto é, relacionar frações equivalentes com a minimização de cortes em uma equipartição.

Solução da Atividade 17

1. Note que o máximo divisor comum de 2 e 4 é 2. Assim, $\frac{2}{4} = \frac{2\times 1}{2\times 2} = \frac{1}{2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.
2. Note que o máximo divisor comum de 6 e 3 é 3. Assim, $\frac{6}{9} = \frac{3\times 2}{3\times 3} = \frac{2}{3}$. Resposta: $\frac{2}{3}$.
3. Note que o máximo divisor comum de 2 e 4 é 2. Assim, $\frac{4}{2} = \frac{2\times 2}{2\times 1} = \frac{2}{1}$. Resposta: $\frac{2}{1}$.
4. Note que o máximo divisor comum de 5 e 35 é 5. Assim, $\frac{5}{35} = \frac{5\times 1}{5\times 7} = \frac{1}{7}$. Resposta: $\frac{1}{7}$.
5. Note que o máximo divisor comum de 50 e 100 é 50. Assim, $\frac{50}{100} = \frac{50\times 1}{50\times 2} = \frac{1}{2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

Atividade 18

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar mais do que duas frações (no caso, três) usando frações equivalentes.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Sugere-se que seja observado para os alunos que o procedimento descrito nesta atividade para ordenar três frações pode ser aplicado para um número arbitrário de frações.
⋆ Esta atividade foi concebida para ser resolvida usando a notação de fração, sem o uso do recurso de modelos de frações uma vez que, neste estágio, espera-se que o aluno já tenha o domínio desta técnica de manipulação aritmética.
⋆ Observe que a ordenação poderia ser feita comparando-se duas frações por vez. A solução indicada reduz a ordenação à ordenação de números naturais (os numeradores das frações iguais às frações dadas e todas de mesmo denominador).

Solução da Atividade 18

a) 60 é um múltiplo comum de 6, 20 e 15 : $60 = 10\times 6$, $60 = 4 \times 15$ e $60 = 3 \times 20$. Portanto,

$$\frac{11}{6} = \frac{10 \times 11}{10 \times 6} = \frac{110}{60},$$

$$\frac{28}{15} = \frac{4 \times 28}{4 \times 15} = \frac{112}{60} \quad \text{e}$$

$$\frac{37}{20} = \frac{3 \times 37}{3 \times 20} = \frac{111}{60}.$$

b) Tem-se que $\frac{110}{60} < \frac{111}{60} < \frac{112}{60}$. Logo,

$$\frac{11}{6} < \frac{37}{20} < \frac{28}{15}.$$

Atividade 19

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Verificar que se $a \cdot d = b \cdot c$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais (equivalentes).

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Note que para as frações usadas no exemplo e no item a), os numeradores e denominadores de uma fração não são múltiplos inteiros dos numeradores e denominadores da outra fração.

Solução da Atividade 19

a) Para as frações $\frac{2}{8}$ e $\frac{5}{20}$, tem-se que $2 \times 20 = 40 = 8 \times 5$. Agora,

$$\frac{2}{8} = \frac{20 \times 2}{20 \times 8} = \frac{2 \times 20}{20 \times 8} = \frac{8 \times 5}{20 \times 8} = \frac{8 \times 5}{8 \times 20} = \frac{5}{20}.$$

b) A afirmação é verdadeira.
Ao se multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração obtém-se uma fração de igual valor cujo numerador é o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e cujo denominador é o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração.
Do mesmo modo, ao se multiplicar o numerador e o denominador da segunda fração pelo denominador da primeira fração obtém-se uma fração de igual valor cujo numerador é igual ao denominador da primeira fração multiplicado pelo numerador da segunda fração e cujo denominador é o produto do denominadora da primeira fração pelo denominador da segunda fração.
Como as frações iniciais são iguais, estas novas frações também são iguais e têm o mesmo denominador. Portanto, seus numeradores devem ser iguais, isto é, o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração é igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração.

Atividade 20

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer frações iguais por meio de um jogo de trilha.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

Esta atividade possui folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

Solução da Atividade 20

a) 1º) 7 casas. 2º) 10 casas. 3º) 9 casas. 4º) Fica parado e passa a vez. 5º) 16 casas. 6º) Fica parado e passa a vez. 7º) Fica parado e passa a vez. 8º) 12 casas. 9º) 6 casas. 10º) 24 casas.
b) O primeiro jogador andou $7+0+4+18+24=53$ casas. Portanto, o primeiro jogador está na frente e venceu o jogo.

Atividade 21

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber que mesmo se $n<p$ e $m<q$, pode ocorrer que $\frac{n}{m} \geq \frac{p}{q}$.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ O tipo de situação descrita na atividade é um equívoco comum entre os alunos, isto é, eles equivocamente acham que se $n<p$ e $m<q$, então necessariamente $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$.

Solução da Atividade 21

Tem-se que $\frac{2}{3} = \frac{10\times 2}{10\times 3} = \frac{20}{30}$ e $\frac{6}{10} = \frac{3\times 6}{3\times 10} = \frac{18}{30}$. Como $\frac{20}{30} > \frac{18}{30}$, segue-se que $\frac{2}{3} > \frac{6}{10}$.

Atividade 22

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Analisar quando uma fração é igual a uma fração unitária.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ O item c) relaciona-se com a Atividade 1: como não é possível, em uma equipartição de uma região retangular, escolher uma quantidade de partes que corresponda à metade desta região se a quantidade total de partes for um número ímpar, não existe uma fração de denominador ímpar que seja igual à fração $\frac{1}{2}$.
⋆ Observe para seus alunos que as frações estudadas na Lição 1 são justamente as frações unitárias e que, pela Lição 2, toda fração é a justaposição de frações unitárias. Em outras palavras, as frações unitárias constituem a estrutura básica a partir da qual as demais frações são obtidas.

Solução da Atividade 22

a) Pelo item b) da Atividade 19 , se uma dada fração é igual a alguma fração unitária, então o produto do numerador da fração dada pelo denominador da fração unitária tem que ser igual ao denominador da fração dada, isto é, o denominador da fração dada tem que ser um múltiplo inteiro do seu numerador. Isto só acontece para as frações $\frac{4}{20}$ e $\frac{6}{18}$.
b) Não, pois frações unitárias são sempre menores ou iguais a 1, enquanto que uma fração com numerador maior do que o denominador é sempre maior do que 1.
c) Não, pois pelo item b) da Atividade 19 , se existisse uma fração com denominador ímpar que fosse igual à fração $\frac{1}{2}$, então o numerador da fração dada multiplicado por 2, um número par, teria que ser igual ao denominador da fração dada multiplicado por 1, o que dá um número ímpar. Portanto, um número par teria que ser igual a um número ímpar, o que não é possível.

Atividade 23

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Estabelecer criticamente uma avaliação sobre a comparação entre frações a partir da observação dos termos dessas fraçoes, incluindo a questão da recíproca da seguinte propriedade: "se existe número natural n tal que $\frac{a}{b} = \frac{n\times c}{n\times d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$" .

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Note que o item d) é falso porque estamos dando a liberdade de a escolha envolver frações que não são irredutíveis nem unitárias, por isso existem contraexemplos. Avalie a discussão sobre a veracidade da afirmação do item d) quando acrescentamos a informação "uma das frações é irredutível" ou "uma das frações é unitária". Neste caso, as novas afirmações são verdadeiras, e as justificativas para elas são generalizações de questões já propostas.

Solução da Atividade 23

a) A sentença é falsa. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ têm numeradores e denominadores diferentes, mas elas são iguais, uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{3\times1}{3\times2} = \frac{3}{6}$.
b) A sentença é verdadeira: se duas frações têm denominadores iguais, é maior a fração que tem o maior numerador e, em particular, elas são diferentes. De fato: lembrando que o denominador de fração especifica o número de partes em que a unidade foi dividida e o numerador especifica quantas cópias desta parte foram tomadas, para um mesmo denominador, quanto maior o numerador, mais cópias são tomadas e, portanto, maior é a quantidade representada pela fração.
c) A sentença é verdadeira: se duas frações têm numeradores iguais, é maior a fração que tem o menor denominador e, em particular, elas são diferentes. De fato: considerando que o numerador especifica o número de cópias da unidade que está sendo dividida por um número de pessoas, número este especificado pelo denominador da fração, para um mesmo numerador, quanto menor o denominador, maior a porção que cada pessoa vai receber, quantidade esta representada pela fração, pois o mesmo número de cópias da unidade está sendo divivido por um número menor de pessoas.
d) A sentença é falsa. Por exemplo, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são frações iguais, pois $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ também é igual a $\frac{1}{2}$, mas não existe um número natural que multiplicado por 2 dê igual a 3, bem como não existe número natural que multiplicado por 3 dê 2.

Atividade 24

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber a propriedade de densidade das frações ao obter frações arbitrariamente próximas de 0 e arbitrariamente próximas de 1.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, para facilitar a logística de condução desta atividade, que ela seja feita com as perguntas sendo propostas uma a uma por você para a turma, de modo que a resposta de uma pergunta dada por um aluno seja então usada como referência para a pergunta subsequente. Outra possibilidade é dividir a turma em grupos de 3 a 5 alunos. Cada grupo responde a primeira pergunta e então passa sua resposta para um outro grupo que deve então responder a próxima questão tendo como referência a resposta recebida e assim sucessivamente.
⋆ Caso seja viável, recomenda-se, na discussão da atividade, o uso de um software (o GeoGebra, por exemplo) para marcar na reta numérica as sucessivas frações dadas pelos alunos. O recurso de ampliação e redução pode ser usado visualizar as frações quando estas se acumulam em 0 e em 1.

Solução da Atividade 24

a) $\frac{1}{2}$, por exemplo.
b) Sim, $\frac{1}{3}$.
c) Sim, $\frac{1}{4}$.
d) Sim: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$, etc. Mais geralmente, dada uma fração, basta considerar a fração de mesmo numerador e denominador maior do que o denominador da fração dada. Esta segunda fração será sempre menor do que a fração dada.
e) Sim, $\frac{2}{3}$. Enquanto que para $\frac{1}{2}$, é necessário $\frac{1}{2}$ para completar a unidade, para $\frac{2}{3}$ é necessário $\frac{1}{3}$ que é menor que $\frac{1}{2}$, logo $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.
f) Sim, $\frac{3}{4}$. Enquanto que para $\frac{2}{3}$, é necessário $\frac{1}{3}$ para completar a unidade, para $\frac{3}{4}$ é necessário $\frac{1}{4}$ que é menor que $\frac{1}{3}$, logo $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.
g) Sim, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$, $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$, etc.

Mais geralmente, as frações cujo numerador é um número natural e o denominador é o sucessor do numerador formam uma sucessão crescente de frações menores do que 1.

Atividade 25

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber a propriedade de densidade das frações ao obter frações que estão entre duas frações diferentes quaisquer, mesmo no caso de numeradores consecutivos e denominadores iguais. Isto é, que dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes (suponha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$), sempre é possível determinar uma terceira fração $\frac{p}{q}$ tal que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
⋆ Caso seja viável, recomenda-se, na discussão da atividade, o uso de um software (o GeoGebra, por exemplo) para marcar na reta numérica as sucessivas frações dadas pelos alunos.

Solução da Atividade 25

a) Note que $\frac{3}{5} = \frac{2\times3}{2\times5} = \frac{6}{10}$ e $\frac{4}{5} = \frac{2\times4}{2\times5} = \frac{8}{10}$. Portanto, $\frac{7}{10}$ é tal que $\frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5}$.
b) Note que $\frac{11}{10} = \frac{3\times11}{3\times10} = \frac{33}{30}$ e $\frac{12}{10} = \frac{3\times12}{3\times10} = \frac{36}{30}$. Portanto, $\frac{34}{30}$ e $\frac{35}{30}$ são tais que $\frac{11}{10} < \frac{34}{30} < \frac{35}{30} < \frac{36}{30}$.
c) Note que $\frac{19}{20} = \frac{4\times19}{4\times20} = \frac{76}{80}$ e $\frac{20}{20} = \frac{4\times20}{4\times20} = \frac{80}{80}$. Portanto, $\frac{77}{80}$, $\frac{78}{80}$ e $\frac{79}{80}$ são tais que $\frac{19}{20} < \frac{77}{80} < \frac{78}{80} < \frac{79}{80} < \frac{80}{80}$.

Notas de Aula

Notas de Aula

LIÇÃO 5 - Para o professor

As operações de adição e de subtração de frações estão associadas a diversos contextos, nos quais podem ser identificadas as mesmas interpretações já associadas à adição e à subtração de números naturais. Dentre essas interpretações, podem-se destacar:

Adição:

⋆ Juntar. Exemplo: Alice tem 15 figurinhas e Miguel tem 12. Quantas figurinhas os dois têm juntos?

⋆ Acrescentar. Exemplo: Alice tinha 15 figurinhas e ganhou mais 12. Com quantas figurinhas Alice ficou?

Subtração

⋆ Retirar. Exemplo: Miguel tinha 15 figurinhas e deu 12 a Alice. Com quantas figurinhas Miguel ficou?

⋆ Completar. Exemplo: Alice tem 12 figurinhas. Quantas figurinhas faltam para ela completar um total de 15?

⋆ Comparar. Exemplo: Alice tem 15 figurinhas e Miguel tem 12. Quantas figurinha Alice tem a mais que Miguel?

No caso da adição e da subtração de frações, essas mesmas interpretações estão associadas a situações envolvendo grandezas não inteiras, como veremos em diversos exemplos ao longo desta lição.

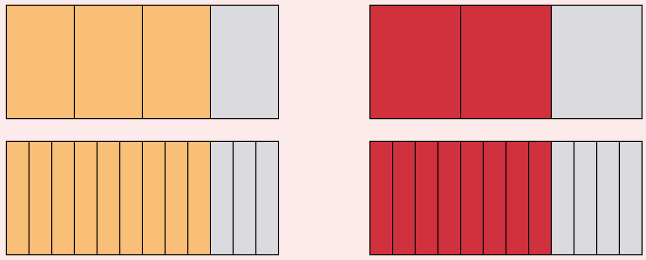
Em muitos casos, a adição e a subtração de frações são abordadas na educação básica simplesmente a partir da apresentação (frequentemente sem justificativa) de um procedimento de cálculo, em que se determina um denominador comum (em geral, obtido pelo mínimo múltiplo comum entre os denominadores originais) e se operam os numeradores. Para que os alunos construam significado para as operações de adição e de subtração de frações, é importante que fique claro que **determinar um denominador comum corresponde a determinar uma subdivisão comum da unidade** entre as quantidades que se deseja operar (no caso, somar ou subtrair).

Neste sentido, para somar, por exemplo $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$, deve-se observar que:

a) A fração $\frac{3}{4}$ expressa a adição por justaposição de 3 frações de $\frac{1}{4}$ da unidade. Da mesma forma, a fração $\frac{2}{3}$ expressa a adição por justaposição de 2 frações de $\frac{1}{3}$ da unidade. Assim, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ estão associadas a diferentes **subdivisões da unidade**, no caso, respectivamente, em 4 partes iguais e em 3 partes iguais, o que determina "quartos" e "terços" como frações da unidade.

b) Para expressar o resultado desta soma como uma fração, é preciso expressar as duas parcelas a partir de **uma mesma subdivisão da unidade**, no caso, por exemplo, em 12 partes iguais, isto é, no caso em "doze avos". Assim, a adição por justaposição de 3 frações de $\frac{1}{4}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{3}{4}$, é equivalente à adição por justaposição de 9 frações de $\frac{1}{12}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{9}{12}$. Da mesma forma, a adição por justaposição de 2 frações de $\frac{1}{3}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{2}{3}$, é **equivalente** à adição por justaposição de 8 frações de $\frac{1}{12}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{8}{12}$.

c) Portanto, o resultado da soma $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ pode ser expresso pela justaposição de 9 frações mais 8 frações de $\frac{1}{12}$ da unidade, que resulta em $\frac{17}{12}$, isto é, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$. A reescrita de uma fração a partir de determinada subdivisão da unidade implicará na escrita de uma fração equivalente.



Uma construção análoga pode ser feita para a subtração. É importante que essas construções sejam feitas com os alunos a partir de diversos exemplos, associados às diferentes interpretações para a adição e para a subtração, e ilustrados por representações geométricas.

Desta forma, para a compreensão de processos de cálculo da adição e da subtração de frações, é fundamental o entendimento da fração $\frac{a}{b}$ como uma expressão da justaposição de a frações de $\frac{1}{b}$ da unidade.

Um dos objetivos desta lição é construir esses procedimentos de soma e de subtração de frações, a partir da **determinação de subdivisões da unidade que sejam comuns entre as parcelas, isto é, de denominadores comuns**. Cabe destacar que essa unidade comum não precisa ser a maior possível. No caso do exemplo apresentado acima, a subdivisão comum encontrada foi $\frac{1}{12}$, porém em uma situação real de sala de aula, os alunos também poderiam ter empregado $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{36}$, etc. – e essas estratégias devem ser igualmente valorizadas. Isto é, a ênfase da abordagem deve estar na ideia conceitual de expressar frações equivalentes a partir da determinação de subdivisões comuns da unidade, e não na memorização de procedimentos com base no cálculo do mínimo múltiplo comum. De fato, você observará que o conceito de MMC não é nem mesmo mencionado nesta lição.

Também é objetivo desta lição construir as ideias de soma e de diferença de frações com base em situações contextualizadas nas mesmas interpretações anteriormente associadas às operações com números naturais - *juntar e acrescentar*, no caso da adição; *retirar, comparar e completar* para a subtração. Desta forma, procura-se construir a adição e a subtração de frações como extensões naturais dessas operações com números naturais. Não é objetivo desta lição tratar formalmente as propriedades da adição e da subtração. Porém, serão ressaltados aspectos substanciais que fundamentam essas propriedades, em especial, a mesma natureza das parcelas. Finalmente, é importante destacar que as estratégias pessoais dos alunos não devem ser desconsideradas em detrimento da apresentação de um procedimento "padronizado". Ao contrário, a construção de estratégias pessoais deve ser encorajada e valorizada. Isso não apenas contribui para o fortalecimento da segurança dos alunos individualmente, como também pode enriquecer a compreensão coletiva da turma, por meio do compartilhamento de diversas estratégias.

OBJETVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 5. o aluno deve ser capaz de:

⋆ Reconhecer a adição e a subtração de frações como uma extensão da adição e da subtração de números naturais. (Atividades 1, 10 e Organizando as Ideias) e com as mesmas interpretações.

⋆ Entender a representação da adição e subtração de frações na reta numérica a partir da justaposição de segmentos. (Atividades 9, 12)

⋆ Entender que, para identificar a fração da unidade correspondente aos resultados dos processos de adição e de subtração de frações, é necessário obter uma subdivisão comum da unidade a partir das subdivisões originais. Isso corresponde a determinar frações equivalentes às originais e que tenham o mesmo denominador. Aqui o estudante não precisa propor a subdivisão (Atividades 2, 3, 4, Organizando as Ideias).

⋆ Aplicar o método de subdivisão comum da unidade para obter frações de mesmo denominador para então somar ou subtrair frações. Aqui o estudante propõe uma subdivisão (Atividades 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13).

⋆ Comparar frações em geral apresentadas tanto em contextos diversos, como a partir de representação pictórica ou mesmo apresentadas por símbolos matemáticos (Atividades 5, 6, 11, 13 e 14).

Densidade das frações nos reais Reconhecer que entre duas frações diferentes sempre é possível encontrar uma outra fração (Atividade 12).

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Perceber o papel de uma unidade comum para comparar, somar ou subtrair duas quantidades;
⋆ Resgatar as interpretações de juntar para a operação de adição, e de retirar e de comparar para a operação de subtração, anteriormente associadas às operações com números naturais;
⋆ Entender as operações de adição e de subtração com frações como extensões das respectivas operações com números naturais a partir do resgate dessas interpretações, isto é, como operações que dão conta de situações associadas às mesmas interpretações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Embora não se trabalhe diretamente com frações, a atividade enfoca processos de contagem a partir de uma unidade de referência, o que será fundamental para as operações de adição e de subtração com frações. Por exemplo, no caso da situação apresentada nesta atividade, a unidade comum empregada.

Solução da Atividade 1

a) O recipiente trazido por Miguel é maior, uma vez que precisou de mais copos para ser enchido ($40 > 26$).
b) Usando o copo como unidade de medida, podemos indicar que a capacidade dos dois recipientes juntos é 66. Ou seja, 66 copos.
c) Deve-se retirar 14 copos, pois $40 - 26 = 14$.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de subdivisão da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtida a partir de um processo geométrico e, a partir desse denominador comum, gerar frações equivalentes às frações dadas e, a partir desse denominador comum, gerar frações equivalentes às frações dadas;
⋆ Determinar a soma de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade e da noção de equivalência de frações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Uma vez estabelecida uma **unidade** (no caso, o tamanho da fita), a determinação de uma subdivisão dá origem a um processo de medida por meio de uma **dupla contagem**, em que estão envolvidas: **a unidade**, associada ao número 1, com base na qual são contadas quantidades inteiras; **subdivisões da unidade em partes iguais** (no caso, os pedaços coloridos das fitas), cuja contagem permite medir quantidades menores que a unidade.
⋆ A atividade envolve a subdivisão de fitas coloridas em pedaços de mesmo tamanho. É recomendável que o professor desenvolva a atividade em sala de aula utilizando materiais concretos. As fitas coloridas podem ser feitas com papel e cartolina, e os alunos podem recortá-las e juntar os pedaços de acordo com o que é pedido nos itens da atividade. Nesta etapa de familiarização inicial com as operações com frações, a manipulação concreta é importante para a construção de significado.
⋆ O item a) visa ao reconhecimento pelo aluno das frações envolvidas na situação apresentada. Assim, espera-se que o aluno responda, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.
⋆ Em seguida, é apresentada uma situação simples em que uma subdivisão comum, no caso o pedaço de fita amarelo, permite a determinação da soma:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

⋆ O item b), embora seja bem parecido com o exemplo dado, demanda que o estudante determine uma subdivisão diferente da usada no item anterior. Nesse caso o estudante deve observar que é necessário utilizar a subdivisão $\frac{1}{4}$ para medir essas partes que foram juntadas.

Solução da Atividade 2

a) Um pedaço vermelho recortado, corresponde a $\frac{1}{3}$ da fita.
Um pedaço azul recortado, corresponde a $\frac{1}{2}$ da fita.
Um pedaço amarelo recortado, corresponde a $\frac{1}{4}$ da fita.

b) Um pedaço amarelo mais um pedaço azul corresponde a $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ da fita. Como $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, temos que a junção dos dois pedaços de fita será $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ da tamanho da fita original.

Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de subdivisão da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtida a partir de um processo geométrico;
⋆ Determinar a soma e a diferença de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Diferentemente da atividade anterior, nesta atividade a subdivisão da unidade já é dada, e sua determinação não é pedida ao aluno, o que voltará a ser objetivo das próximas atividades.
⋆ O item a) visa especificamente à identificação geométrica de subdivisão da unidade que será empregada para efetuar as operações. Espera-se $\frac{1}{16}$ como resposta.
⋆ No item b), procura-se resgatar as atividades sobre frações equivalentes realizadas na lição 4. Observe que aqui há um processo de recontagem a partir da subdivisão "pedaço de chocolate". Aqui a fração equivalente indica a recontagem da fração $\frac{1}{2}$ a partir da subdivisão $\frac{1}{16}$.
⋆ No item c), procure destacar a interpretação de adição como "juntar". Pretende-se que o professor tenha a possibilidade de sistematizar a adição, tendo como apoio a resposta dos alunos dadas a partir de observações visuais. Isto é, o estudante pode dizer que, juntos, Alice e Miguel comeram 11 pedaços e depois identificá-los como $\frac{11}{16}$ da barra de chocolate. A discussão deve ser encaminhada a partir da determinação de frações equivalentes desenvolvida no item anterior (e **sem** o uso do conceito de MMC). O objetivo é que o professor aproveite as soluções intuitivas dos alunos para apresentar, de forma mais sistematizada, a adição por uso de fração equivalentes, obtidas na busca de uma subdivisão comum:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=\frac{8}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}.$$

⋆ O item d) deve ser encaminhado de forma análoga ao anterior. Especificamente, deve-se retomar a ideia de que $1=\frac{n}{n}$, discutida na lição anterior, daí apresentar

$$1-\frac{11}{16}=\frac{16}{16}-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}.$$

Solução da Atividade 3

a) $\frac{1}{16}$.
b) $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, pois a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ com denominador 16 é $\frac{8}{16}$.
c) Observando as quantidades comidas por Alice e Miguel, a partir de um mesmo denominador, temos $\frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$.
d) Recordemos que a barra de chocolate é a unidade de medida, então essa quantidade será entendida como 1 inteiro. Assim a quantidade restante será dada por $\frac{5}{16}$, pois $1 - \frac{11}{16} = \frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$.

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de subdivisão da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtido a partir de um processo geométrico;
⋆ Determinar a soma e a diferença de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade pode ser mais aproveitada pelos alunos se for realizada com apoio de materiais concretos. Sugerimos, caso seja possível, que os estudantes desenvolvam o material. Caso não seja possível, disponibilizamos uma página para reprodução no final dessa lição. Neste caso, o professor poderá disponibilizar aos alunos discos divididos em 12 partes, e pedir que eles marquem as frações $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, colorindo esses discos.
⋆ A atividade tem início com a comparação de frações, o que já foi abordado na lição anterior. Procure retomar a discussão conduzida naquela lição.
⋆ É importante chamar atenção para o fato de que escrever as frações a partir de um mesmo denominador corresponde a expressar as quantidades que elas representam como múltiplos inteiros de uma subdivisão comum da unidade, porque somar e subtrair frações de mesmo denominador os alunos já sabem fazer. Assim, toma-se como estratégia, para a adição e a subtração de frações, reescrevê-las em relação a um mesmo denominador, determinado a partir de uma subdivisão comum da unidade. O item a) visa especificamente ao reconhecimento concreto da fração unitária associada a esse denominador comum.
⋆ No item b), o professor deverá explorar e evidenciar as articulações entre as diferentes estratégias dos alunos, sendo as principais:

a) Multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número (algoritmo discutido na lição anterior).
b) Observar a quantidade de fatias nas imagens acima que apresentam as frações consumidas.

⋆ Os itens d) a g) exploraram diferentes interpretações da adição da subtração, a saber:

a) Subtração – completar;
b) Adição – juntar;
c) Subtração – retirar;
d) Subtração – comparar.

Em cada um desses itens, após as resoluções dos estudantes, recomendamos que o professor faça o registro simbólico no quadro e indique o resultado. Por exemplo, no item d), tem-se:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

⋆ É interessante que o professor encoraje e traga para a discussão com a turma as diferentes estratégias que tiverem sido propostas pelos alunos, inclusive aquelas que não estiverem inteiramente corretas. O objetivo não é destacar soluções "mais eficientes" ou separar as "certas" das "erradas", e sim evidenciar como diferentes estratégias permitem obter os resultados a partir da determinação de uma subdivisão comum. Por exemplo, no caso do item d), um aluno pode sobrepor o desenho das fatias comidas por Bruno no desenho das comidas por Caio, e contar quantas fatias faltam para atingir a quantidade consumida por Caio.
⋆ É importante que o professor apresente o registro das operações em notação de fração, com o objetivo de articular esse registro com as estratégias geométricas, baseadas na contagem direta das subdivisões comuns.
Esta atividade possui folhas para reprodução no final do livro.

Solução da Atividade 4

a) $\frac{1}{12}$ é a fração unitária de pizza comum, pois todas as quantidades consumidas podem ser indicadas as partir de múltiplos dessa fração de pizza.
b) Para cada quantidade é possível simplesmente contar a quantidade de fatias observando as imagens acima, uma vez que cada fatia corresponde a $\frac{1}{12}$ de uma pizza. Assim, obtemos como resposta as frações $\frac{2}{12}$, $\frac{9}{12}$ e $\frac{8}{12}$, que são iguais a $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente.
c) Observando as quantidades indicadas no item anterior quem comeu mais foi Bruno, $\frac{9}{12}$ de pizza. Quem comeu menos foi Amanda, $\frac{2}{12}$ da pizza.
d) $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$.
e) $\frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$.
f) $\frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12}$.
g) $\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$

Notas de Aula

Notas de Aula

Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Encontrar uma subdivisão comum entre as quantidades que permita efetuar as operações;
⋆ Perceber a não unicidade da subdivisão comum.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

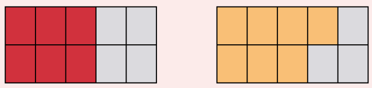
⋆ Como nas atividades anteriores e nas próximas desta lição, o uso obrigatório do MMC não é recomendado. Ao contrário, objetiva-se justamente provocar explicitamente a percepção de que **essa subdivisão não é única**. Assim, devem ser apresentadas diversas frações equivalentes às frações dadas na atividade, como por exemplo, as seguintes:

$$\frac{6}{10} \text{ e } \frac{7}{10}$$
$$\frac{12}{20} \text{ e } \frac{14}{20}$$
$$\frac{24}{40} \text{ e } \frac{28}{40}$$

⋆ A partir dessas diferentes frações equivalentes, o professor deve procurar **articular com os estudantes a relação entre diferentes subdivisões com a sistematização de frações equivalentes.** Deve-se retomar a reflexão iniciada na sessão **Organizando as Ideias** de que escrever quantidades em relação a uma subdivisão comum corresponde a determinar frações equivalentes com um denominador comum.

Solução da Atividade 5

a) Uma possível subdivisão comum é em 10 partes, portanto, igual a fração $\frac{1}{10}$. Com essa subdivisão ambas as quantidades podem ser expressas por frações de denominador 10. Uma forma de observar tal fato é determinar, na primeira imagem, um segmento horizontal, de modo a dividir cada parte da partição já existente em duas partes iguais.



b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. A fração $\frac{7}{10}$ já está escrita a partir de décimos.
c) Sim, existem várias. Por exemplo, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{70}$.
d) Como $\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10} > 1$, juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam um região maior do que a do retângulo dado.

Atividade 6

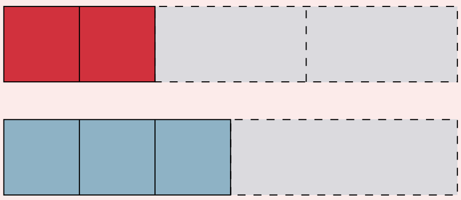
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de equipartição da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtida a partir de um processo geométrico;
⋆ Determinar a soma e a diferença de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade e de frações equivalentes às frações originais.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

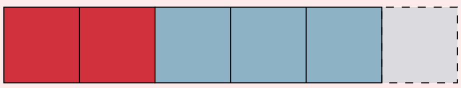
⋆ Esta atividade é continuação da atividade 2. Busca-se aplicar a sistematização das ideias para retomar reflexões ensejadas naquela atividade. Buscar com o estudante a generalização por situações que não são tão imediatas, em que trabalhamos com pedaços de fita que não são múltiplos inteiros de outros pedaços (dobro, como no caso dos pedaços azul e amarelo, presente na atividade 2).
⋆ No item a), em primeiro lugar, os alunos devem perceber que a nova fita vermelha e azul formada é *menor* que a fita original. Para chegar a essa conclusão, diferentes estratégias podem ser empregadas - e a exploração dessas estratégias deve ser estimulada pelo professor. Por exemplo, os alunos podem observar concretamente que como cada pedaço vermelho (correspondente à fração $\frac{1}{3}$) é menor que cada pedaço azul (correspondente à fração $\frac{1}{2}$), então a nova fita vermelha e azul é menor que a fita original.
⋆ A partir dessas explorações iniciais, explore com os alunos a discussão sobre diversas formas de saber qual fita tem o maior tamanho, e que, além disso, é possível determinar o tamanho da nova fita vermelha e azul em relação à original, somando-se as medidas dos dois pedaços (vermelho e azul) que a compõe. Para isso, algumas observações são fundamentais:

a) O tamanho da fita original será uma **unidade**, associada ao número 1, em relação à qual os tamanhos das demais grandezas serão determinadas, e expressas como frações.
b) Como os pedaços vermelho e azul correspondem a subdivisões de tamanhos diferentes da unidade (tamanho da fita original), para determinar sua soma será preciso expressá-los como múltiplos inteiros de uma **subdivisão comum**, que pode ser obtida dividindo-se o pedaço vermelho em duas partes iguais e o pedaço azul em três partes iguais.



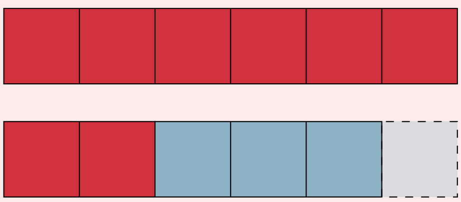
Dessa forma, cada pedaço de fita vermelha equivale a 2 pedaços iguais a $\frac{1}{6}$ da unidade, e cada pedaço de fita azul equivale a 3 pedaços iguais a $\frac{1}{6}$ da unidade, totalizando $\dfrac{5}{6}$ da unidade:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}.$$



Essa subdivisão comum permite ainda determinar a diferença entre os tamanhos da fita original e da nova fita vermelha e azul, associando-se a unidade a 6 pedaços iguais a $\frac{1}{6}$ de uma fita original:

$$1-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}.$$



⋆ Como observado anteriormente, essas construções podem ser feitas por meio de corte e colagem de materiais concretos.
⋆ O item b) deve ser desenvolvido de forma análoga ao item a).

Solução da Atividade 6

a) Um pedaço vermelho mais um pedaço azul corresponde a $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$ de uma fita original. Daí, a nova fita formada é menor do que uma fita original, pois $\frac{5}{6}<\frac{6}{6}=1$. A diferença de tamanho será dada por $1-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$.
b) A nova fita vermelha e amarela é maior do que uma fita original, uma vez que equivale a $\frac{17}{12}>1$ da fita original. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{3}{12}+\frac{3}{12}=\frac{17}{12}$.

Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Aplicar a ideia de obter um denominador comum entre duas frações dadas, com base no processo geométrico de subdivisão da unidade, em exercícios sem uma situação contextualizada e sem uma representação pictórica previamente apresentada, ficando para o aluno construir tal representação.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Embora não sejam dadas situações contextualizadas, procure conduzir esta atividade com base em representações geométricas para as frações dadas e na determinação de uma subdivisão comum a partir dessas representações, como nas atividades 2 a 6. O objeto é justamente aplicar as ideias construídas a partir daquelas atividades em exercícios sem situações contextualizadas.
⋆ Nos casos que envolvem o número 1, deve-se relembrar $1=\frac{n}{n}$, qualquer que seja o número natural n. 1111111111111111111

Solução da Atividade 7

São respostas possíveis:

a) $\frac{3}{9}$ e $\frac{2}{9}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{9}$ da unidade.
b) $\frac{3}{10}$ e $\frac{8}{10}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{10}$ da unidade.
c) $\frac{7}{7}$ e $\frac{3}{7}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{7}$ da unidade.
d) $\frac{9}{15}$ e $\frac{40}{15}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{15}$ da unidade.
e) $\frac{21}{24}$ e $\frac{26}{24}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{24}$ da unidade.
f) $\frac{7}{4}$ e $\frac{20}{4}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{4}$ da unidade.

Observação: Todos esses itens admitem outras respostas, uma vez que é possível escolher diferentes subdivisões da unidade, ou seja, outras fraçoes unitárias. Por exemplo, no item (e) temos como outra solução possível: $\frac{42}{48}$ e $\frac{52}{48}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{48}$ da unidade..

Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Aplicar as ideias de obter um denominador comum entre duas frações dadas e de usar esse denominador para determinar adições e subtrações, com base no processo geométrico de subdivisão da unidade, em exercícios sem uma situação contextualizada.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Como na atividade anterior, embora não sejam dadas situações contextualizadas, procure conduzir esta atividade com base em representações geométricas para as frações dadas e na determinação de uma subdivisão comum a partir dessas representações, como nas atividades 2 a 6.
⋆ Nos casos que envolvem o número 1, deve-se relembrar $1=\frac{n}{n}$.

Solução da Atividade 8

a) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$.
b) $\frac{3}{10} + \frac{4}{5} = \frac{3}{10} + \frac{8}{10} = \frac{11}{10}$.
c) $1 - \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Relacionar a adição de frações com a sua representação como pontos na reta.

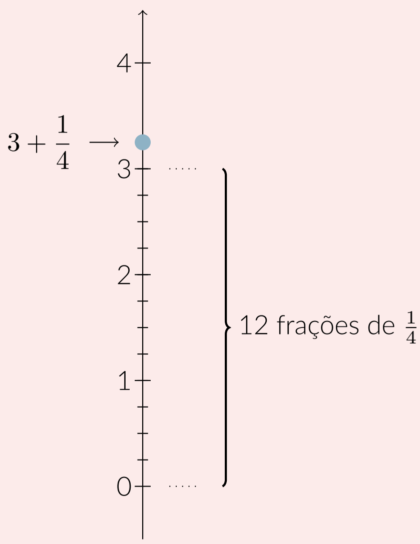
Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade, assim como as duas que se seguem (10 e 11), usam a ideia de que $1 = \frac{n}{n}$, ou de forma mais geral, de que, se a é um número natural, então $a = \frac{an}{n}$, para n diferente de 0.
⋆ Essas atividades envolvem os chamados "números mistos" (números expressos por uma parte inteira e uma parte fracionária). No entanto, **não há necessidade de apresentar essa nomenclatura aos alunos.**
⋆ A representação da reta na posição vertical foi empregada com o objetivo de destacar o fato de que os aspectos determinantes nesta forma de representação são a ordenação e a distância entre os pontos. A apresentação da reta numérica apenas na posição horizontal pode causar uma impressão de que apenas tal posição é aceitável.

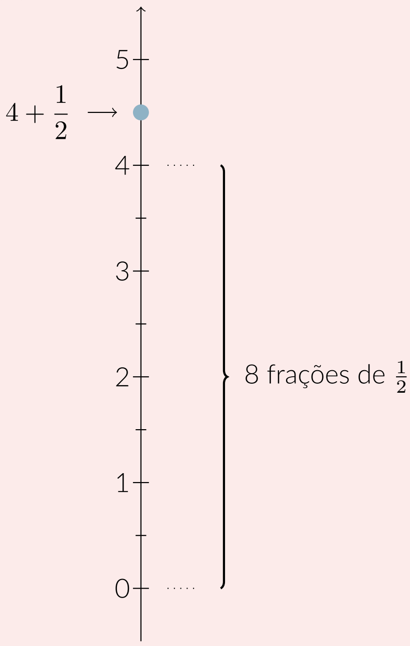
Solução da Atividade 9

(A)

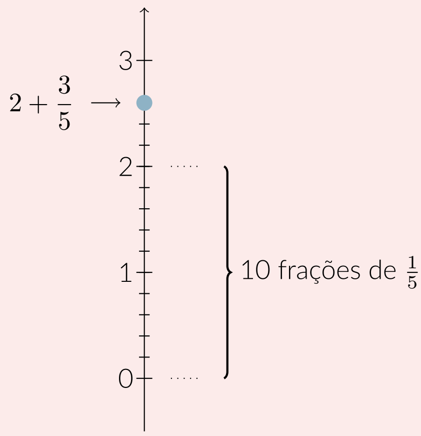
a)



(B)



(C)



b) Repetindo o mesmo processo do item a) obtém-se $7 + \frac{2}{3} = \frac{21}{3} + \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$.

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma subtração de frações com a interpretação de completar.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Explorar o fato de que não é incomum que o uso da palavra

Solução da Atividade 10

De 3 oitavos para se alcançar 27 oitavos faltam 24 oitavos, o que equivale a 3. De outro modo, $\frac{27}{8}-\frac{3}{8}=\frac{24}{8}=3$. Isto indica que deve-se acrescentar a fração $\frac{3}{8}$ a 3 inteiros para obter-se $\frac{27}{8}$.

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma subtração de frações com a interpretação de completar;
⋆ Explorar a articulação entre número misto e subtração de frações.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Como na atividade anterior, observar que a visualização da representação na reta pode ajudar a destacar o fato de que se deve determinar "quanto falta" de $\frac{19}{7}$ para chegar a 2.

Solução da Atividade 11

$\frac{19}{7} > \frac{14}{7} = 2$. Portanto, $\frac{19}{7}$ é maior e deve-se acrescentar 5/7 ao menor número para que o total se iguale ao maior número.

Atividade 12

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Aprofundar a familiaridade dos alunos com a representação na reta;
⋆ Explorar a propriedade de densidade dos pontos que representam frações na reta numérica ou, equivalentemente, do conjunto das frações, ou ainda, dos números racionais positivos.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Caso os alunos tenham dificuldades em pensar sobre as soluções das tarefas propostas, o professor pode propor e explorar tarefas análogas com números naturais, empregando, por exemplo, a primeira figura.
⋆ O item b) visa especificamente dar continuidade à discussão sobre densidade dos números racionais na reta, que foi introduzida na lição 4. A partir da escrita de frações como $\frac{15}{12}$ e $\frac{22}{12}$ pode não ser difícil para os alunos observar os seis números $\frac{16}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{20}{12}$ e $\frac{21}{12}$. Uma estratégia para encontrar mais números é escrever, por exemplo, A e B como $\frac{30}{24}$ e $\frac{44}{24}$ e tomar $\frac{n}{24}$, com n variando entre 30 e 44 está entre A e B. A ideia é discutir com a turma que, como sempre podemos repetir esse processo, sempre podemos encontrar mais números entre A e B. Daí, pode-se retomar a discussão sobre frações equivalentes e sobre densidade, que foi ensejada nos últimos 3 exercícios da lição 4.

Solução da Atividade 12

a) Por exemplo, $C=\frac{15}{12}$ e $D=\frac{22}{12}$.
b) $\frac{16}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{20}{12}$ e $\frac{21}{12}$.

Se escrevermos as frações C e D com outro denominador comum pode ser mais fácil de observar mais que 6 frações. Por exemplo, $C=\frac{30}{24}$ e $D=\frac{44}{24}$ as frações a seguir estão entre C e D

$$\frac{31}{24}, \frac{32}{24}, \frac{33}{24}, \frac{34}{24}, \frac{35}{24}, \frac{36}{24}, \frac{37}{24},$$

$$\frac{38}{24}, \frac{39}{24}, \frac{40}{24}, \frac{41}{24}, \frac{42}{24} \text{ e } \frac{43}{24}.$$

Note que conseguimos agora 13 frações entre C e D. No entanto, se escrevermos C e D com o denominador 48 ainda podemos determinar mais valores. Note também que sempre podemos escolher um denominador maior de modo que encontremos mais valores.

c) O tamanho do segmento CD é dado por

Atividade 13

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar, somar e subtrair frações a partir da determinação de um denominador comum com base no processo geométrico de subdivisão da unidade;
⋆ Explorar as interpretações de juntar para a adição e de comparar para a subtração.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Esta atividade retoma a noção de fração como parte de uma unidade em situações concretas, como nas atividades 2 a 6. Como naquelas atividades, a representação geométrica das frações deve servir como base para a determinação do denominador comum e para a realização da comparação e das operações de adição e de subtração. O próprio desenho do canteiro pode servir como representação geométrica para a determinação do denominador comum.

Solução da Atividade 13

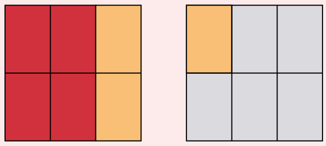
a) Utilizando o mesmo denominador para fins de comparação temos, por exemplo, que as quantidades $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ são iguais a $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{6}$, respectivamente. Portanto a fração do canteiro solicitada pelo pai, $\frac{2}{3}$, é maior do que a fração solicitada pela mãe.

b) Juntando as espaços solicitados temos $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$. Mas $\frac{7}{6} > \frac{6}{6} = 1$. O espaço reservado inicialmente para o canteiro não atende as solicitações do pai e da mãe de Miguel.

c) O espaço inicialmente reservado não é suficiente.

d) Deve-se observar quanto excede um canteiro $\frac{7}{6} - 1 = \frac{7}{6} - \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$. É necessário aumentar $\frac{1}{6}$ do espaço inicialmente reservado para o canteiro.

O denominador comum empregado foi 6. Cada retângulo com 6 divisões indica a fração de canteiro que tinha sido reservada inicialmente.



Atividade 14

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar, somar e subtrair frações a partir da determinação de um denominador comum com base no processo geométrica de subdivisão da unidade;
⋆ Explorar as interpretações de juntar para a adição e de comparar para a subtração.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Considere que, como na atividade anterior, é explorada aqui a noção de fração como parte de uma unidade em uma situação contextualizada, com as interpretações de juntar para a adição e de comparar para a subtração, agora com três parcelas e com uma situação envolvendo volume.

Solução da Atividade 14

Somando a quantidade de água presente nas três garrafas temos: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{16}{24} + \frac{12}{24} + \frac{15}{24} = \frac{43}{24}$. Concluímos que é possível, pois $\frac{43}{24} < \frac{48}{24} = 2$.

Atividade 15

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Explorar a formulação de conjecturas envolvendo a estrutura algébrica dos conjuntos numéricos, visamos atingir não só reflexões a respeito de números racionais, mas também estimular a habilidade de argumentação em Matemática.

Discussões sobre o desenvolvimento da atividade

⋆ Neste momento, não se espera ainda que os alunos justifiquem com rigor suas afirmações, mas sim que busquem ilustrar suas conjecturas a partir de exemplos.
⋆ Recomenda-se que o professor discuta cada item a partir das soluções dos alunos, destacando as respostas corretas com base nos exemplos propostos pelos estudantes.

Solução da Atividade 15

a) Falso. Exemplo: $3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$. Há outras possibilidades de respostas.
b) Falso. Exemplo: $7 - \frac{3}{4} = \frac{25}{4}$.
c) Falso. Exemplo: $\frac{11}{6} + \frac{7}{6} = \frac{18}{6} = 3$.
d) Falso. Exemplo: $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.