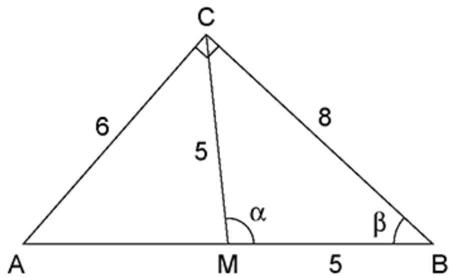
Resolução

Lembrando que a medida da mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa, tem-se que $AB = 10$ e, consequentemente, $AM = MB = 5$.

Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACB, tem-se que $BC = 8$.



Agora, aplicando o teorema dos senos no triângulo CMB, vem:

$$\frac{5}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{8}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\therefore 5 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 8 \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\therefore 5 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 8 \cdot \frac{6}{10}$$

$$\therefore \operatorname{sen}\alpha = \frac{24}{25}$$

a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

b) $\cos(2x) - 2\,\text{sen}(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2\text{sen}^2(x) - 2\text{sen}(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\text{sen}^2(x) - 2\text{sen}(x) + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\text{sen}^2(x) + 4\text{sen}(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x) = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x) = \frac{-4 \pm 8}{8} \Leftrightarrow \text{sen}(x) = \frac{1}{2}$ ou

$\text{sen}(x) = -\frac{3}{2}$ (não serve)

Assim, para $x \in [0; 2\pi]$, temos:

$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

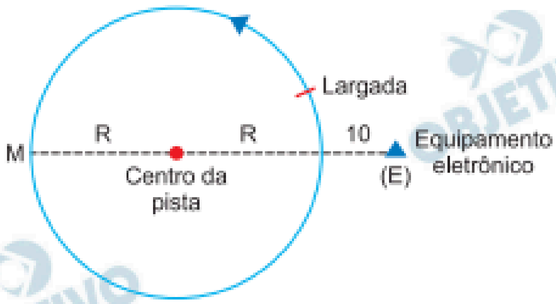
Respostas: a) $-\sqrt{2}$

b) $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

Resolução

a) A partir do gráfico da Figura 1 a distância entre o ponto de largada (tempo igual a zero) e o equipamento eletrônico é 20 metros, e o tempo que Márcia demora para completar uma volta (período da função) é 24 segundos.

b) Sendo 200 metros o comprimento da pista circular de raio R, $2\pi R = 200 \Leftrightarrow R = \dfrac{100}{\pi}$ metros.



Logo, a maior distância possível, em metros, entre Márcia e o equipamento eletrônico, quando Márcia atinge o ponto M é,

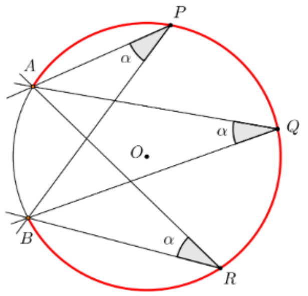
$$2 \cdot R + 10 = 2 \cdot \frac{100}{\pi} + 10 = \frac{200 + 10\pi}{\pi}$$

Respostas: a) 20 metros e 24 segundos

b) $\dfrac{200 + 10\pi}{\pi}$ metros

Resolução

Em uma circunferência de centro O, dada uma corda $\overline{AB}$ qualquer, um observador que percorre o arco maior $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência consegue enxergar a corda $\overline{AB}$ sempre sob um mesmo ângulo α. Este arco chama-se arco capaz do ângulo α sob o segmento $\overline{AB}$.



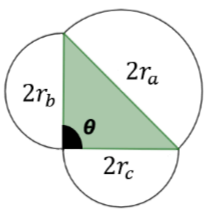
Na ilustração do enunciado, repare que o ângulo α é estritamente menor que os ângulos $\widehat{AQ_2B}$ e $\widehat{AQ_4B}$, pois é ângulo excêntrico exterior às circunferências que contêm os pontos Q_2 e Q_4.

De modo análogo, os ângulos $\widehat{AQ_5B}$ e $\widehat{AQ_6B}$ são estritamente menores que o ângulo α, por serem ângulos excêntricos exteriores à circunferência que contém o ponto Q_1.

Por fim, note que os jogadores nas posições Q_1 e Q_3 estão na mesma circunferência e que ambos pertencem ao arco capaz do ângulo α sob o segmento $\overline{AB}$. Portanto, podemos afirmar que **o jogador na posição Q_3 receberá a bola**.

Comentário da questão

Sabendo que diâmetro é o dobro do raio, temos que 2ra, 2rb e 2rc são, respectivamente, os diâmetros dos círculos 1, 2 e 3.



Como a questão afirma que a área da pizza do professor é maior que a soma das áreas das pizzas dos amigos, temos que:

$$\pi \cdot r_a^2 > \pi \cdot r_b^2 + \pi \cdot r_c^2$$

simplificando, temos:

$$2r_a^2 > 2r_b^2 + 2r_c^2$$
$$2r_b^2 + 2r_c^2 - 2r_a^2 < 0$$

$r_a^2 = r_b^2 + r_c^2 \cdot 2 \cdot r_b \cdot r_c \cdot \cos\theta$

$$2r_a^2 > 2r_b^2 + 2r_c^2$$
$$2r_b^2 + 2r_c^2 - 2r_a^2 < 0$$

Agora, aplicamos a lei dos cossenos no triângulo:

$$(2r_a)^2 = (2r_b)^2 + (2r_c)^2 - 2 \cdot 2r_b \cdot 2r_c \cdot cos\theta$$
$$r_a^2 = r_b^2 + r_c^2 \cdot 2 \cdot r_b \cdot r_c \cdot cos\theta$$
$$cos\theta = \frac{2r_b^2 + 2r_c^2 - 2r_a^2}{2r_b r_c}$$

Como $2r_b^2 + 2r_c^2 - 2r_a^2$ <0, temos que cosθ<0.

Então temos que θ<180 (porque é um ângulo de um triângulo) e, como o cosseno é negativo, 90< θ. Portanto 90< θ< 180.

Gabarito: **C**

Equipe Descomplica

a) As coordenadas do ponto P devem satisfazer a lei de formação da função com $x = 0$. Lembrando que a função seno é uma função ímpar, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, temos que:

$$y_P = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(3 \cdot 0 - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Logo, $\boxed{P\left(0, -\sqrt{3}\right)}$.

b) Para determinar o coeficiente angular da reta que passa por Q e R, vamos determinar as coordenadas destes pontos.

- **Ponto Q.**

Do enunciado, ele é o ponto de menor coordenada x positiva para o qual a função atinge seu valor máximo. Tal máximo ocorre quando $\operatorname{sen}($3
seja, quando

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow 3\mathrm{x} = \frac{5\pi}{6} + 2\mathrm{k}\pi$$

isto é,

$$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

O menor valor positivo de x ocorre para $k = 0$, daí que $x = \frac{5\pi}{18}$ e $f(x) = 2 \cdot 1 = 2$.

Portanto, $Q\left(\frac{5\pi}{18}, 2\right)$.

- **Ponto R.**

O ponto R tem a segunda maior coordenada x positiva com $y = 0$, logo,

$$0 = 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow 3\mathrm{x} = \frac{\pi}{3} + \mathrm{k}\pi \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\pi}{9} + \frac{\mathrm{k}\pi}{3},\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

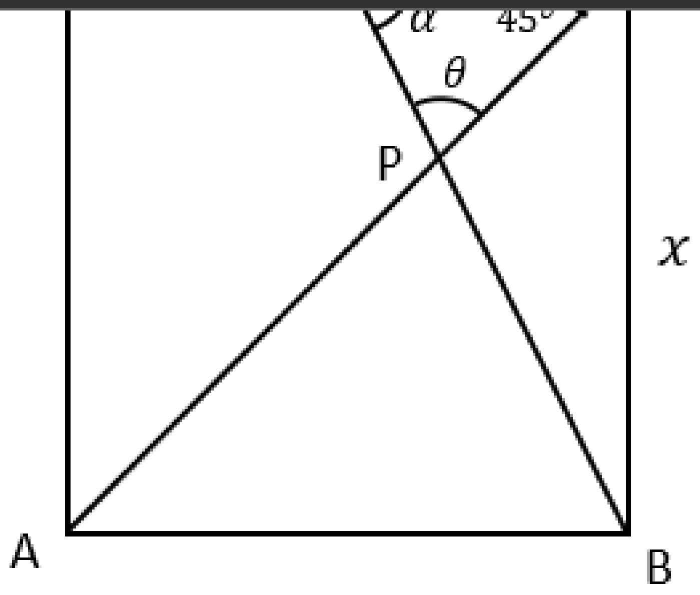
A menor coordenada x positiva com $y = 0$ ocorre para $k = 0$ e a segunda menor, para $k = 1$. Daí que

$$x_R = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}$$

e $R\left(\frac{4\pi}{9}, 0\right)$.

Assim, o coeficiente angular da reta que os liga é dada por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{\frac{5\pi}{18} - \frac{4\pi}{9}} = \boxed{-\frac{12}{\pi}}$$



Do triângulo retângulo MCB vem:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{\frac{x}{2}} \quad \therefore \quad \text{tg}\,\alpha = 2$$

Do triângulo MPC vem:

$$\alpha + \theta + 45° = 180° \quad \therefore \quad \theta = 135° - \alpha$$

Assim,

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(135° - \alpha)$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\,135° - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,135° \cdot \text{tg}\,\alpha}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot 2}$$

$$\text{tg}\,\theta = 3$$

Portanto,

$$2\cos(2\theta) + 5\cos(\theta) = 4$$
$$\therefore \quad 2\cos^2(\theta) - 2\text{sen}^2(\theta) + 5\cos(\theta) - 4 = 0$$
$$\therefore \quad 2\cos^2(\theta) - 2[1 - \cos^2(\theta)] + 5\cos(\theta) - 4 = 0$$
$$\therefore \quad 4\cos^2(\theta) + 5\cos(\theta) - 6 = 0$$
$$\therefore \quad \cos(\theta) = \frac{-5 \pm 11}{8}$$

$\therefore \quad \cos(\theta) = \frac{3}{4}$ ou $\cos(\theta) = -2$ (não convém)

Como $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, então

$$\cos(45°) < \cos(\theta) < \cos(30°)$$

A função $f(x) = \cos(x)$ é decrescente no intervalo $0° < x \leq 90°$, logo

$$30° < \theta < 45° \quad \therefore \quad 30° < \theta \leq 45°$$

é equivalente a

Solução em texto

GABARITO: ALTERNATIVA B

Temos a seguinte expressão

$$\frac{\frac{cos\theta + sen\theta}{sen\theta} + \frac{cos\theta - sen\theta}{cos\theta}}{\frac{cos\theta + sen\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta - sen\theta}{sen\theta}}$$

$$\frac{cos\theta(cos\theta + sen\theta) + sen\theta(cos\theta - sen\theta)}{sen\theta cos\theta} \cdot \frac{cos\theta sen\theta}{sen\theta(cos\theta + sen\theta) + cos\theta(cos\theta - sen\theta)}$$

$$\frac{cos^2\theta + cos\theta sen\theta + sen\theta cos\theta - sen^2\theta}{sen\theta cos\theta + sen^2\theta + cos^2\theta - sen\theta cos\theta} = \frac{cos2\theta + sen2\theta}{1}$$

COS2θ + SEN2θ

Gabarito: b)