



基于离散傅立叶变换的 岩石节理形貌分析与随机重构

赵炼恒, 于诚浩, 黄栋梁, 王翔, 张帅浩, 焦康甫

(中南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 为了进一步开展节理面细观形貌特征对其宏观剪切特性影响的数值模拟研究, 提出既可以定量地对实地采集节理试样的形貌特征进行正向分析, 又能够根据预定的形貌特征范围随机地进行节理试样逆向重构的傅里叶形貌分析法。分别采用传统粗糙度分析法与傅里叶分析法对 50 224 个实测的节理样本进行形貌分析, 得到傅里叶参数计算的经验公式; 确定采用离散傅立叶变换法进行不同粗糙度节理试样逆向重构时的傅里叶参数取值范围; 研究成果能为快速随机重构符合一定粗糙度特性的节理轮廓, 建立一个完全数字化的虚拟试验系统提供重要基础。

关键词: 岩石节理; 节理面粗糙度系数; 随机重构; 形貌分析; 离散傅里叶变换

中图分类号: TU45 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-7029(2017)08-1606-09

Fourier-based reconstruction of rock joint and the statistical analysis of its morphology

ZHAO Lianheng, YU Chenghao, HUANG Dongliang, WANG Xiang, ZHANG Shuaihao, JIAO Kangfu

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: In order to further study the numerical effect of the mesoscopic features on the macroscopic shear characteristics of the joint surface, this paper presents a Fourier-based morphology analysis method that can both quantitatively analyze the morphological characteristics of the joint samples and construct rock joint profile morphology in purpose. First, traditional roughness analysis and Fourier analysis were used to analyze 50 224 measured joint profiles, and the empirical formula of Fourier parameters was obtained. Second, the range of Fourier parameters was determined for reverse reconstruction of different roughness joints. The research results provide an important basis for the rapid random reconstruction of joint profiles that conform to certain roughness characteristics and the establishment of a fully digital virtual test system.

Key words: rock joint; joint roughness coefficient; random reconstruction; morphological analysis; discrete Fourier transform

岩石节理的几何形貌特征对其宏观物理力学特性的影响一直是岩石力学界研究的热点, 国内外许多学者从不同角度开展了一系列研究工作。随着计算机数值模拟技术的进步, 采用数值模拟方法开

展大量岩石节理剪切特性的研究成为现有该领域研究的有效手段; 既有研究表明^[1-6], 节理的力学特性在很大程度上取决于节理表面的几何形貌特征。因此, 研究节理粗糙面几何形貌的几何特性和

收稿日期: 2017-02-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51478477)

通信作者: 赵炼恒(1980-), 男, 湖南益阳人, 教授, 博士, 从事道路与铁道工程, 极限分析方面的研究; E-mail: zlh8076@163.com

精确表征方法, 建立能够精细化描述节理粗糙面形貌特征的数字模型, 对于深入探究节理系统的物理力学特性具有重要意义。目前, 评价节理表面粗糙度的方法大多是基于 Barton 提出的节理面粗糙度系数(JRC)^[7-9]。在该方面的研究中, 为了定量节理曲线的 JRC 值, 相关学者进行了一系列的研究。如 Tse 等^[10-11]和, 将标准曲线离散成众多 0.5 mm 长的微段直线, 分别用均方根 Z_2 、方根偏距 SF 和标准差 R_p 来估算节理粗糙度系数。Tatone 等^[12-13]则论证粗糙度指标 $\theta_{\max}^*/(C+1)_{2D}$ 与 JRC 值有较好的相关性。谢和平等^[14-16]提出节理粗糙度系数的分形估计。这些指标虽然能够很好地与 Barton 标准节理曲线^[7-9]的粗糙度系数进行拟合, 但无法采用这些指标进行真实节理的逆向重构。为了研究节理面粗糙度系数对节理面剪切特性的影响, 现有学者多基于规则的齿状几何形状^[6]或随机数^[5]来重构节理的形貌。赵延林等^[5]采用满足正态分布的随机函数, 构造岩石节理剖面的形貌。宋英龙等^[3-4, 6]则通过扫描仪采集岩石节理面样本形貌的三维信息。但当样本数量大量增加时, 这些方法未能兼顾科学性和经济性。基于以上科学性和经济性 2 方面考虑, 开展基于离散傅立叶变换的岩石节理形貌分析与随机重构研究; 首先基于傅里叶形貌分析与重构技术^[17-19], 对 502 24 个实测的节理样本进行统计分析, 进而确定 3 类能够表征真实节理形状特性的傅里叶形貌指标; 进一步, 基于统计结果, 确定傅里叶形貌指标与常规节理粗糙度指标的相关关系; 从而实现了能够重构符合一定 JRC 值, 并与 Barton 标准节理曲线相似的随机节理曲线的方法。本文研究成果可以对具有不同粗糙度的岩石节理进行数字形态模拟, 为从细观层面上探讨随机形貌岩石节理的剪切特性和剪胀效应提供研究基础。

1 Barton 标准节理曲线及其形貌特征的常规统计指标

Barton 标准节理曲线(图 1)通过大量的剪切实验获得^[7-9], 由 JRC-JCS 模型^[7-9]结合岩石节理面剪切试验的结果反算出节理面粗糙度系数(Joint Roughness Coefficient, JRC), 作为评价节理面粗糙程度的重要指标之一。

工程实际中, 为确定某一节理面形貌指标, 一般方法为基于 Barton 标准节理曲线, 通过目测对比、参照评价而得到的节理面形貌评价指标, 该方法具有明显的经验性和随机性。

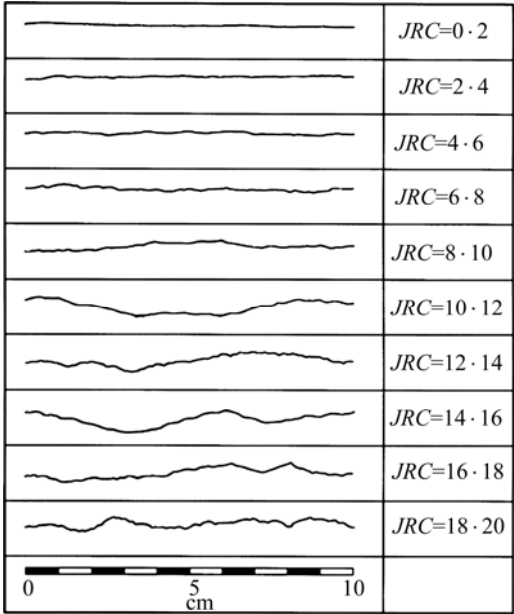


图 1 标准节理曲线及其对应的 JRC 值

Fig. 1 Roughness profiles and their corresponding JRC values

因此, Tse 等^[10-13]将标准曲线离散成众多 0.5 mm 长的微段直线(水平投影总长为 100 mm), 对微直线段的端点进行量测, 采用离散的端点坐标来描述节理曲线(图 2), 并提出统计学指标均方根 Z_2 , 方根偏距 SF 和标准差 R_p 来估算节理曲线的 JRC 值。

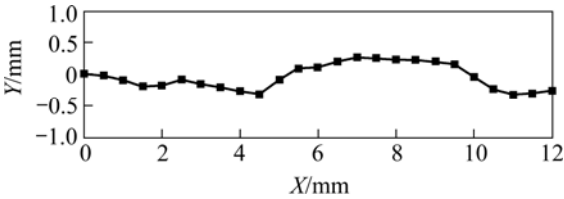


图 2 微直线段示意图

(截取自 Barton 标准节理曲线 JRC=18-20)

Fig. 2 Diagram of micro-line segments (intercepted from Barton joint profiles, JRC=18-20)

Tatone 等^[12-13]对 Barton 标准节理曲线的研究表明, 节理粗糙度系数 JRC 与 R_p 的关系满足下式:

$$R_p = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \left[(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$JRC = \frac{1}{0.0336 + 0.00127/\ln(R_p)} \quad (2)$$

式中: L 为节理曲线水平投影的总长度; $x_{i+1} - x_i$ 为量测步长; y_i 和 y_{i+1} 分别为第 i 和 $i+1$ 个节理离散点的 y 轴坐标; n 为节理曲线的离散点数目。

2 基于离散傅里叶变换的节理形貌分析与重构

数字化的节理曲线本质上是真实节理在延伸方向上的等距采样, 由一系列离散点的坐标构成, 将其视为离散的信号(图3), 进而方便应用信号处理领域的分析方法(离散傅里叶变换)进行节理曲线的分析^[17]。后续为达到正确校核本文研究成果的目的, 本文研究对象(依据 Barton 提出的标准节理曲线, 全部采样间隔为 0.5 mm, 水平投影总长为 100 mm 的节理曲线)的 JRC 值根据 Tatone 等^[12-13]提出的经验公式进行计算。

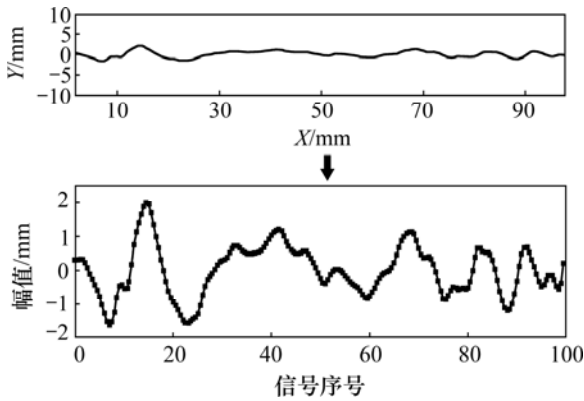


图3 节理曲线与离散信号的转换过程示意图

Fig. 3 Diagram of the transformation process between the joint profile and discrete signal

2.1 离散傅里叶变换的基本原理与计算过程

在离散傅里叶变换中待分析的信号称为时域信号, 变换过程中产生频域信号。其中离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)利用离散的时域信号合成离散的频域信号, 离散傅里叶反变换(Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)利用离散的频域信号合成离散的时域信号。其基本公式^[19]

可以表示为:

$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} \text{Re } \bar{X}[k] \cos(2\pi k i / N) + \sum_{k=0}^{N/2} \text{Im } \bar{X}[k] \sin(2\pi k i / N) \quad (3)$$

$$\text{Re } \bar{X}[k] = \frac{\text{Re } X[k]}{N/2}, \text{Im } \bar{X}[k] = -\frac{\text{Im } X[k]}{N/2} \quad (4)$$

$$\text{Re } \bar{X}[0] = \frac{\text{Re } X[0]}{N}, \text{Re } \bar{X}[N/2] = \frac{\text{Re } X[N/2]}{N} \quad (5)$$

$$\text{Re } X[k] = \sum x[i] \cos\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) \quad (6)$$

$$\text{Im } X[k] = -\sum x[i] \sin\left(\frac{2\pi k i}{N}\right) \quad (7)$$

式中: $x[i]$ 为时域信号; $\text{Re } X[k]$ 和 $\text{Im } X[k]$ 为 2 个频域信号; $\text{Re } \bar{X}[k]$ 和 $\text{Im } \bar{X}[k]$ 分别为余弦函数和正弦函数的幅值; N 为信号包含的离散点个数; $i=0, 1, 2, \dots, N-1, k=0, 1, 2, \dots, N/2$ 。

在节理曲线的分析过程中适当地改写式(3)~(7)可以得到表意相对明确的式子, 改写的结果如下:

$$y_i(\theta_i) = y_0 + \sum_{n=1}^{64} [A_n \cos(n\theta_i) + B_n \sin(n\theta_i)] \quad (8)$$

$$\frac{y_i(\theta_i)}{y_0} = 1 + \sum_{n=1}^{64} [D_n \sin(n\theta_i + \varphi_n)] \quad (9)$$

$$A_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y_i \cos(n\theta_i) \quad (10)$$

$$B_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y_i \sin(n\theta_i) \quad (11)$$

式中: $y_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$, 为式(3)中当 $k=0$ 时的项, 构成节理曲线的离散点可理解为在一定范围内围绕直线 $y=y_0$ 上下波动的散点(取 $y_0=100/2\pi$); 谐波总数取为 64^[17](谐波总数理论上可为无穷多个, 但后半部分的谐波对合成的时域信号的影响极小可忽略不计); 离散点总数 N 为 200(采样间隔为 0.5 mm 的 Barton 标准节理曲线由 200 个离散点构成); $\theta_i = \frac{2\pi i}{N}, i=1, 2, 3, \dots, N$, 可视为在 $[0, 2\pi]$ 范围内的等差

数列; $D_n = \frac{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}{y_0}$, $\sin \varphi_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$, $\cos \varphi_n = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$, 由式(9)~(11)易得, 当待分析

的节理曲线的离散点总数一定时, 节理曲线可完全分解为傅里叶描述因子 $D_n, n=1, 2, 3, \cdots, 64$ 和初相位 $\varphi_n, n=1, 2, 3, \cdots, 64$ (二者均为无量纲数), 即 D_n 和 φ_n 包含节理曲线的全部几何特征。 D_n 本质上是三角函数的幅值, 直接决定谐波的起伏程度(节理曲线的主要形态), 而初相位 φ_n 本质上决定了各谐波在传播方向的平移情况, 研究表明^[17], 傅里叶描述因子的数值大小和分布情况能够定量地控制节理曲线的主要形态。式(9)的原理图如图 4 所示。

2.2 标准节理 JRC 曲线的傅里叶形貌分析

2.2.1 统计分析的节理曲线样本

初步的研究表明, 傅里叶描述因子的频谱总体呈递减态势, 为了进一步探究傅里叶描述因子的分布情况, 本文采集 27 个真实三维空间节理面并生成相应数值曲面(基于数字摄影测量技术), 从中提取了 50 224 个二维节理曲线的样本(图 5)^[12]。

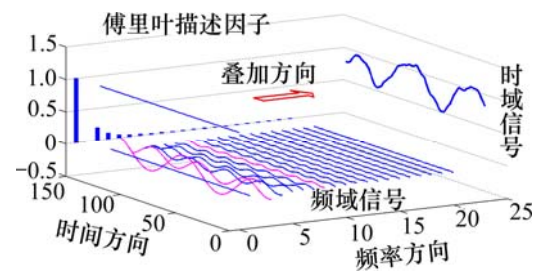


图 4 离散傅里叶变换原理图

Fig. 4 Diagram of the discret Fourier transform

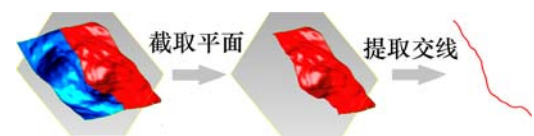


图 5 节理曲线样本的获取示意

Fig. 5 Diagram of the acquisition of joint samples

表 1 统计样本的分布情况

Table 1 Distribution of statistical samples

JRC 取值范围	样本示例(单位: mm)	样本数
0~2		13 156
2~4		6 439
4~6		5 126
6~8		5 119
8~10		4 412
10~12		3 932
12~14		3 576
14~16		3 092
16~18		2 785
18~20		2 587

根据以上确定的 JRC 数值计算式(2)(Tatone & Grasselli 基于标准差 R_p 提出的经验公式)计算相应的 JRC 值,得到在 10 类 JRC 标准节理曲线中的分布情况,见表 1。

2.2.2 傅里叶描述因子的频谱拟合

应用式(10)~(11)计算上述样本的傅里叶描述因子 D_n ,并绘制相应的频谱,频谱实例如图 6 所示。

由图 6 可以看出,傅里叶描述因子的频谱总体呈递减态势,但相邻的描述因子之间没有确定的递增递减关系。考虑到样本总体和个体的差异,取每个描述因子的均值(图 7)作为频谱拟合的对象。统计

分析表明,频谱的分布情况基本与对数函数相吻合^[17-18],因此取拟合的函数形式为:

$$\begin{cases} D_n = 2^{\alpha \cdot \log_2(n/3) + \log_2(D_3)}, & 3 < n < 8 \\ D_n = 2^{\beta \cdot \log_2(n/8) + \log_2(D_8)}, & n > 8 \end{cases} \quad (12)$$

式中: D_2 , D_3 和 D_8 为拟合公式的自变量^[17-18],并且考虑到 D_1 的值在样本中极不稳定,对节理曲线形态的影响极小,故取 $D_1=0$ ^[17-18]。拟合确定待定系数 $\alpha=-1.404\ 2$, $\beta=-1.348\ 9$ (图 7),二者均为无量纲的待定系数。

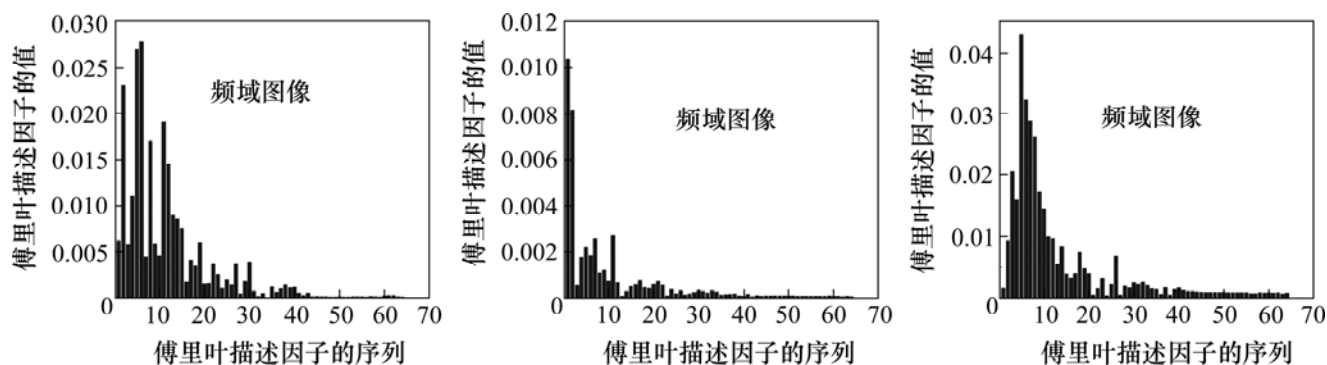


图 6 傅里叶描述因子频谱的 3 个实例

Fig. 6 Frequency domain of the Fourier descriptors of three examples

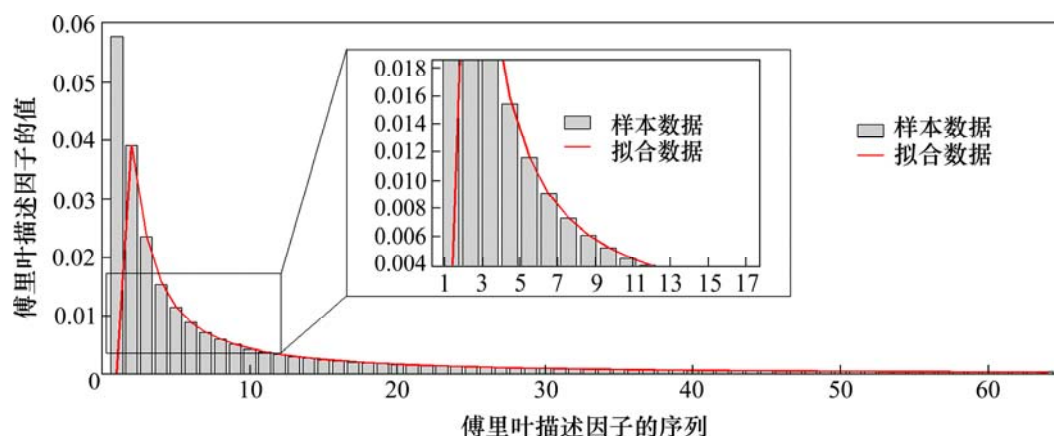


图 7 傅里叶描述因子 D_n 的均值及其频谱拟合的结果

Fig. 7 Mean of the Fourier descriptors and the result of its spectral fit

2.2.3 3 类傅里叶描述因子的控制作用

根据傅里叶描述因子频谱拟合的结果可确定其对节理曲线形态的控制作用可分为 3 类(拟合结果为分段函数),其中每一类控制作用各由一个傅里叶描述因子主导,分别为 D_2 , D_3 和 D_8 。图 8 和图

9 分别呈现了 3 类傅里叶描述因子的变化对节理曲线形态的影响(通过调整 D_2 , D_3 和 D_8 ,再经过拟合式(12)计算余下的描述因子得到,并固定 φ_n 的数值)。由图 8 和图 9 可得 3 类傅里叶描述因子分别从 3 个层次控制节理曲线的形态。其中第 1 类描述因

子反映节理曲线较大的起伏程度(第1层次);第2类描述因子反映节理曲线较小的起伏程度(第2层次),与第1类描述因子的作用效果相比有较多数量

的波峰和波谷;第3类描述因子则反映了节理曲线最小尺度上的起伏(第3层次),即粗糙程度。

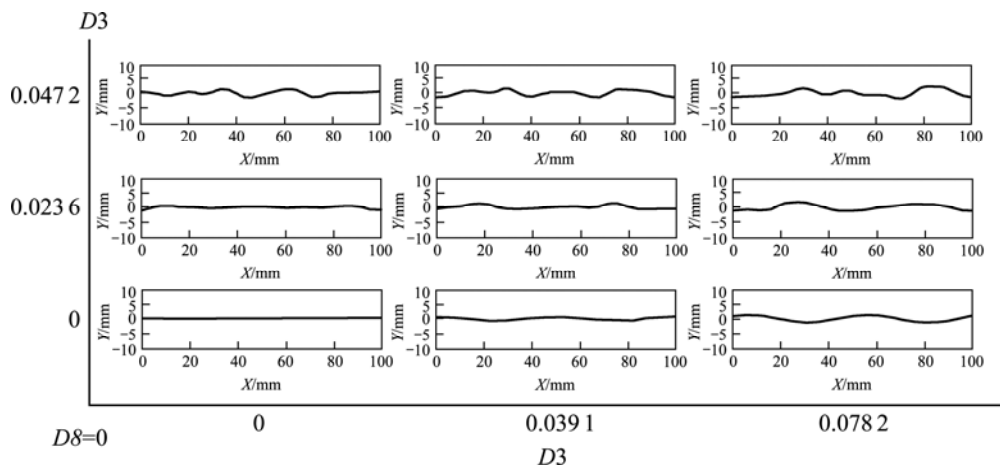


图8 第1, 2类傅里叶描述因子对节理曲线的影响

Fig. 8 Influence of first and second types of the Fourier descriptors on joint profiles

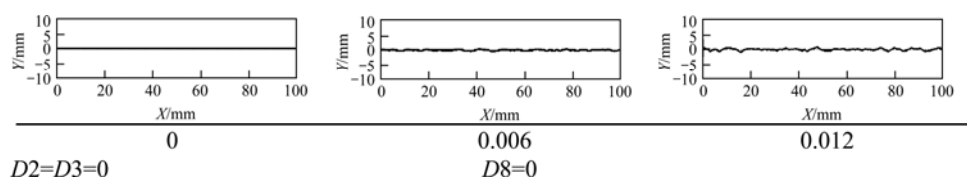


图9 第3类傅里叶描述因子对节理曲线形态的影响

Fig. 9 Influence of third types of the Fourier descriptors on joint profiles

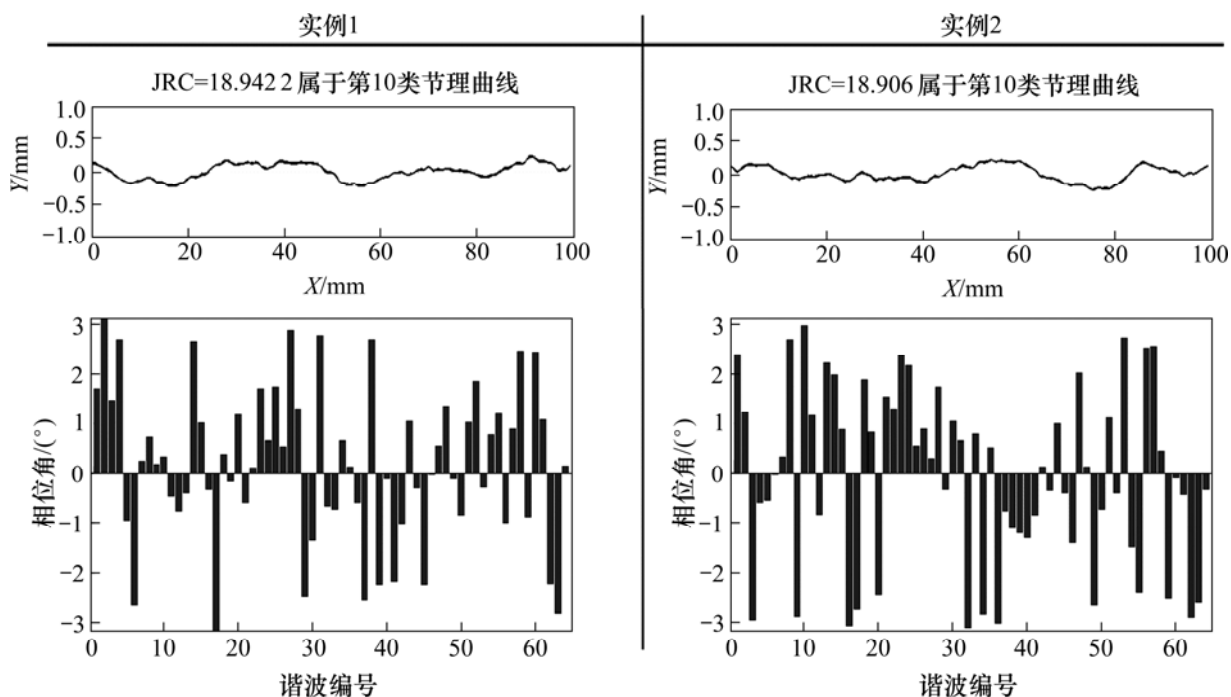


图10 举例介绍初相位的随机图谱、重构的节理曲线

Fig. 10 Examples of the random spectra of the initial phase, the reconstructed joint profiles

2.2.4 初相位的控制作用

由初相位的定义式可得， φ_n 和傅里叶描述因子 D_n 相互独立，与描述因子 D_n 相比， φ_n 不影响节理曲线的主要形态特征。基于此，将初相位角 φ_n 设置为 $[-\pi, \pi]$ 范围内的随机数，将 D_n 设置为固定值，能够生成一批具有相同主要形态特征的节理曲线(次要形态特征随机)。由图 1 可以看出示例 1 和 2 中的节理曲线有接近的 JRC 值，均属于第 10 类 Barton 节理曲线，但不同的初相位分布情况决定了两条节

理曲线在形态上的差异。

2.3 基于 3 类傅里叶指标的节理形貌重构

取上述 50 224 个节理曲线作为样本，依据 Barton 提出的标准节理曲线(图 1)分别计算 10 类节理曲线中各自所有样本的频谱数据的均值(图 11)。

可以看出频谱中 D_n 的数值大小基本与 JRC 值呈正相关关系，因此通过确定相应 D_2 、 D_3 和 D_8 的取值范围(表 2)，再经由拟合公式(12)形成频谱，能够准确地重构出有特定 JRC 值的节理曲线。

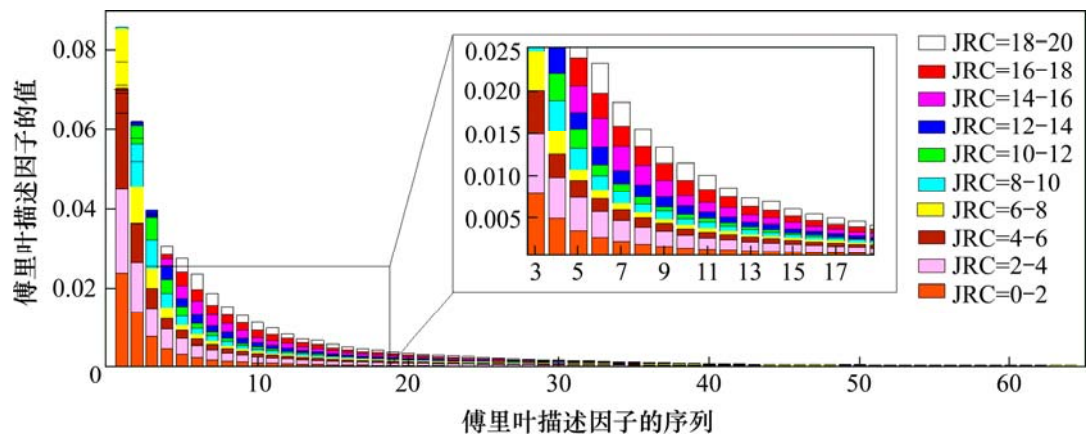


图 11 10 类节理曲线频谱均值的比较

Fig. 11 Comparison of spectral mean of ten types of joint profiles

表 2 不同节理曲线对应的傅里叶描述因子的取值范围

Table 2 Range of the Fourier descriptors corresponding to different types of joint profiles			
JRC	D_2 取值范围	D_3 取值范围	D_8 取值范围
0~2	[0.000 0, 0.021 8]	[0.000 0, 0.011 1]	[0.000 0, 0.001 9]
2~4	[0.022 0, 0.030 0]	[0.011 3, 0.016 6]	[0.002 0, 0.002 8]
4~6	[0.032 1, 0.036 0]	[0.017 0, 0.019 5]	[0.002 9, 0.003 9]
6~8	[0.037 0, 0.039 5]	[0.020 0, 0.021 8]	[0.004 0, 0.005 0]
8~10	[0.040 0, 0.043 8]	[0.022 2, 0.024 7]	[0.005 1, 0.006 1]
10~12	[0.044 0, 0.047 5]	[0.024 8, 0.028 4]	[0.006 2, 0.007 2]
12~14	[0.048 1, 0.050 0]	[0.028 8, 0.031 1]	[0.007 3, 0.008 5]
14~16	[0.052 0, 0.056 1]	[0.032 2, 0.034 5]	[0.008 6, 0.010 0]
16~18	[0.060 0, 0.075 0]	[0.038 0, 0.044 0]	[0.010 0, 0.011 0]
18~20	[0.078 2, 0.080 0]	[0.047 3, 0.053 8]	[0.011 0, 0.013 0]

3 结论

1) 节理曲线的形貌特征根据其起伏程度的大

小不同可分为 3 个层次，一条节理曲线可视为不同层次形貌特征叠加的结果。离散傅里叶变换通过控制 3 类傅里叶描述因子的数值大小和分布情况能够定量地控制重构节理曲线 3 个层次的形貌特征，并

且3类描述因子能够与节理曲线3个层次的形貌特征一一对应。

2) 节理曲线的傅里叶描述因子的频谱可用对数形式的拟合公式描述:

$$\begin{cases} D_n = 2^{\alpha \cdot \log_2(n/3) + \log_2(D_3)}, & 3 < n < 8 \\ D_n = 2^{\beta \cdot \log_2(n/8) + \log_2(D_8)}, & n > 8 \end{cases}$$

其中: $\alpha = -1.404\ 2$, $\beta = -1.348\ 9$, 二者均为无量纲的待定系数。

3) 根据JRC值10个分类初步确定起主导作用的傅里叶描述因子(D_2 , D_3 和 D_8)取值范围, 能够准确重构特定类别节理曲线。固定傅里叶描述因子频谱结合随机生成相位角频谱能够快速重构出大量具有相似形貌特征的节理曲线, 为建立一个完全数字化的虚拟试验系统提供支撑。

参考文献:

- [1] 曹平, 梅慧浩, 宁果果, 等. 经历剪切变形历史的岩石节理表面形貌变化[J]. 铁道科学与工程学报, 2012, 9(2): 99–104.
CAO Ping, MEI Huihao, NING Guoguo, et al. Evolution analysis of surface topography of rock joints under different shear deformation histories[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2012, 9(2): 99–104.
- [2] 吴启红, 徐青, 雍军, 等. 节理面JRC-JCS非线性准则的数值计算方法[J]. 中南大学(自然科学版), 2013, 44(9): 3829–3833.
WU Qihong, XU Qing, YONG Jun, et al. Numerical embedding in FLAC3D of JRC-JCS model of joint plane [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2013, 44(9): 3829–3833.
- [3] 宋英龙, 夏才初, 唐志成, 等. 不同接触状态下粗糙节理剪切强度性质的颗粒流数值模拟和试验验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(10): 2028–2035.
SONG Yinglong, XIA Caichu, TANG Zhicheng, et al. Numerical simulation and test validation for direct shear --kaaskpropertiesk of rough joints under different contact states[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(10): 2028–2035.
- [4] 李博, 蒋宇静. 岩石单节理面剪切与渗流特性的试验研究与数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(12): 2431–2439.
- LI Bo, JIANG Yujing. Experimental study and numerical analysis of shear and flow behaviors of rock with single joint[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(12): 2431–2439.
- [5] 赵延林, 万文, 王卫军, 等. 随机形貌岩石节理剪切数值和非线性剪胀模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(8): 1667–1675.
ZHAO Yanlin, WAN Wen, WANG Weijun, et al. Shear numerical simulation of random morphology rock joint and nonlinear shear dilatancy model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(8): 1667–1675.
- [6] JIA Hongqiang. Experimental research on joint surface state and the characteristics of shear failure[D]. Changsha: Central South University, 2011: 1–46.
- [7] Barton N. Review of a new shear strength criterion for rock joints[J]. Engineering Geology, 1973, 7(3): 287–332.
- [8] Barton N. Shear strength investigations for surface mining[C]// Brawner CO, ed. 3rd International Conference on Stability in Surface Mining. AIME, Vancouver, 1982: 171–192.
- [9] Barton N, Choubey V. The shear strength of rock joints in theory and practice[J]. Rock Mechanics, 1977, 10(1): 1–54.
- [10] Tse R, Cruden D M. Estimating joint roughness coefficients[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics, 1979, 16(4): 303–307.
- [11] Yu X B, Vayssade B. Joint profiles and their roughness parameters[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics, 1991, 28(4): 333–336.
- [12] Tatone Bryan S A. Quantitative. Characterization of natural rock discontinuity roughness in-situ and in the laboratory[D]. Toronto: University of Toronto, 2009: 1–86.
- [13] Bryan S A Tatone, Giovanni Grassellia. A new 2D discontinuity roughness parameter and its correlation with JRC[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics, 2010, 47(10): 1391–1400.

- [14] 谢和平. 岩石节理粗糙系数(JRC)的分形估计[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 297.
- XIE Heping. Fractal-rock mechanics[M]. Beijing: Science Press, 1996: 297.
- [15] 陈世江, 朱万成, 张敏思, 等. 基于数字图像处理技术的岩石节理分形描述[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 34(11): 2088–2092.
- CHEN Shijiang, ZHU Wancheng, ZHANG Minsi, et al. Fractal description of rock joints based on digital image processing technique[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 34(11): 2088–2092.
- [16] Manouchehr Sanei, Lohrasb Faramarzi, Sareh Goli, et al. Development of a new equation for joint roughness coefficient (JRC) with fractal dimension: a case study of Bakhtiary Dam site in Iran[J]. Arabian Journal of Geosciences, 2015, 8(1): 465–475.
- [17] Mollon Guilhem, Zhao Jidong. Fourier–Voronoi-based generation of realistic samples for discrete modelling of granular materials[J]. Granular Matter, 2012, 14(4): 621–638.
- [18] Meloy T P. Fast Fourier transform applied to shape analysis of particle silhouettes to obtain morphological data[J]. Powder Technol, 1977, 17(1): 27–35.
- [19] Steven W Smith. The scientist and engineer's guide to digital signal processing[M]. San Diego: California Technical Publishing, 2001: 141–168.