

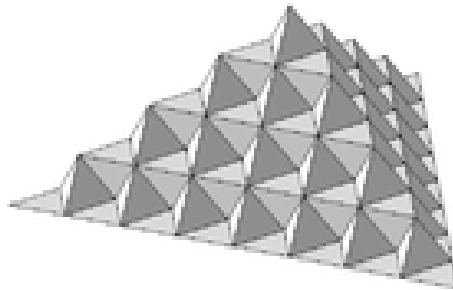
Formation ICM 2016-2017
Toolbox « Equations Fonctionnelles et Géométrie »

Examen théorique du ??/02/2017 (durée 45 minutes) portant sur la Géométrie

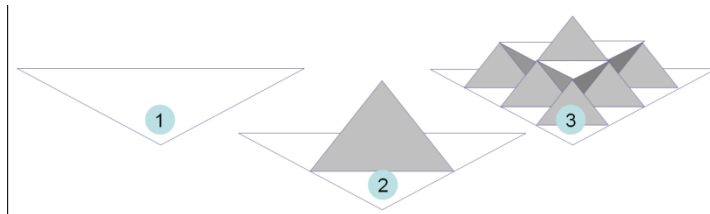
Supports de cours autorisés. Un point par •.

1- Exercice 1 (4 points) : Géométrie fractale

La surface de von Koch est la généralisation à deux dimensions de la courbe de von Koch. Chaque triangle équilatéral est remplacé par 6 triangles deux fois plus petits.



« Surface de von Koch à l'étape i S_{K_i} »

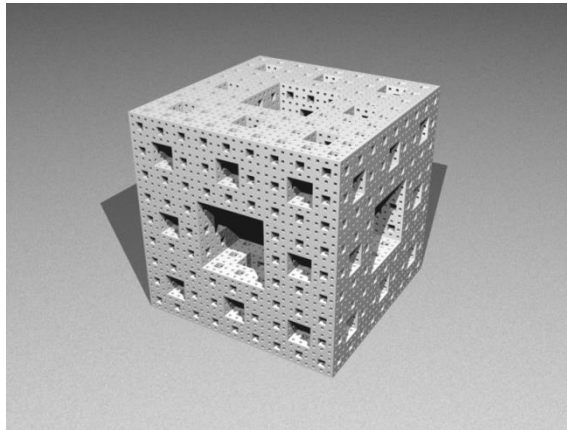


« Surface de von Koch à l'étape i S_{K_i} »

Questions

- A la limite, cette « surface » S_{vK_∞} est-elle un objet fractal ? Si oui ou si non, pourquoi ?
- La « pyramide » S_{vK_∞} est-elle mesurable au sens de la mesure de Hausdorff ?
- Comment calculer pratiquement sa dimension fractale ? Justifiez !
- Quelle est la valeur exacte (i.e., analytique) de cette dimension fractale ?

3- Exercice 2 (6 points) : Séréologie fractale



La construction d'une éponge de Menger E_{M_∞} peut être décrite de la manière suivante :

- débuter par un cube de longueur de cote unité ;
- réduire le cube au tiers et en faire 20 copies ;
- placer ces copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de la même taille que l'original, sans les parties centrales ;
- répéter le processus à partir de l'étape 2 pour chacun des 20 cubes ainsi créés.
- Le solide obtenu à la limite, après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger E_{M_∞} .

À chaque itération, on multiplie le nombre de cubes par 20, ce qui fait que le solide créé à l'itération i contient 20^i cubes.

Questions

- Quelle est la dimension de Lebesgue-Cech de E_{M_∞} ?
- L'éponge de Menger est-elle un ensemble compact ? dénombrable ?
- A quoi correspond : une face de l'éponge de Menger E_{M_∞} ?, une diagonale l'éponge de Menger E_{M_∞} dans son cube initial ?
- Fournir l'expression analytique de la fraction volumique V_V de E_{M_∞} .
- Fournir l'expression analytique de la densité surfacique S_V de E_{M_∞} .
- Fournir l'expression analytique du nombre de connectivité par unité de volume N_{χ_V} de E_{M_∞} .