2020-2021-1≪应用数学≫ 期末A-参考答案

张彦斌

计算机学院
2021年1月5日

1 第一题

解：设3万元当中的技术改造投入为$x(x>0)$万元，广告投入为(3-x)万元，则广告投入带来的销售额增加值为$y_1=-2(3-x)^2+14(3-x)$(万元)。
总投入带来的销售额的增加值，即目标函数为(4分)

$$f(x)=-2(3-x)^2+14(3-x)-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x=-\frac{1}{3}x^3+3x+24(0\le x\le 3)$$

令$f'(x)=0$,解得$x_1=\sqrt(3), x_2=-\sqrt(3)$,(4 分)
故在(0,3)内的驻点为$x_1=\sqrt(3)$.
计算驻点和两端点的函数值得$f(\sqrt(3))=24+2\sqrt(3), f(0)=24, f(3)=24.$
所以，当该公司用于广告得投入为$(3-\sqrt(3))$万元，用于技术改造得投入为$\sqrt(3)$万元时，
获得得最大收益为$(24+2\sqrt(3))$万元.(4分)

2 第二题

解答:

设二次函数为$f(x)=\frac{1}{2}x^THx+b^Tx$,其中$H$ 为n阶对称正定矩阵。$g_k=Hx_k+b$, $G_k=H$.
牛顿法求解算法步骤:
(0)初始条件给出(2分)
(1)终止条件判定(2分)
(2)搜索方向确定，$G_kd_k=-g_k$(4分)
$d_k=-H^{-1}g_k$
(3)$x_{k+1}=x_k+d_k$(4分)

3 第三题

设方程为$y = c_0 e^{a_1 x}$,令$z = lny$,$a_0 = lnc_0$,则方程变成线性形式$z = a_0 + a_1 x$
(1)1次多项式拟合:(6分)

$$
\begin{aligned}
e_0 &= a0 + a_1 x_0 - z_0 \\
e_1 &= a0 + a_1 x_1 - z_1 \\
e_2 &= a0 + a_1 x_2 - z_2 \\
e_3 &= a0 + a_1 x_3 - z_3 \\
e_4 &= a0 + a_1 x_4 - z_4 \\
e_5 &= a0 + a_1 x_5 - z_5 \\
e_6 &= a0 + a_1 x_1 - z_6 \\
e_7 &= a0 + a_1 x_2 - z_7 \\
e_8 &= a0 + a_1 x_3 - z_8 \\
e_9 &= a0 + a_1 x_4 - z_9 \\
e_1 0 &= a0 + a_1 x_5 - z_{10}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$F(a_0, a_1, \cdot, a_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=0}^{m}(z_i - a_0 - a_1 x_i)$
要求其最小值, 则有:

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = -2\sum_{i=0}^{m} x_i^j (z_i - a_0 - a_1 x_i) = 0$$

写出多项式拟合的法方程XA=Y,从而$A = X^{-1}Y$。(6 分)

或者写出求解该问题的高斯-牛顿法迭代公式的具体形式:

$$J_k = F'(x(k)) = (\nabla F_1(x(k)), \cdots, \nabla F_m(x(k)))^T \tag{2}$$

$d_k^{GN} = -[J_k^T J_k]^{-1} J_k^T F(x_k)$

4 第四题

解答:

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases} \tag{3}$$

(6分) $\nabla g_1(x) = -A$, $\nabla g_2(x) = I$,
其拉格朗日函数为$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = c^T x - \lambda_1^T (b - Ax) - \lambda_2^T x$. 对上述函数关于$x$求极小. 令$\nabla_x L(x, \lambda_1, \lambda_2) = c - \lambda_2 + A^T \lambda_1 = 0$, 由(3)$\lambda_2 g_2(x) = \lambda_2 x = 0$, 令$\lambda_2 = 0$, 因此最优性条件为(6分):

$$\begin{cases} c + A^T \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 (b - Ax) = 0, \lambda_1 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

5 第五题

(4分)
(问题1)
首先我们对一局比赛中的所有状态分类，可以分为6 大类：(1) “过渡”的状态，例如15:0 这样的状态。(2) A 赢的状态，例如60:15, 60:30, 60+2:60, 60+4:60+2，⋯这种状态是吸收态(3) B 赢的状态，例如15:60, 30:60, 40:60+1, 60+1:60+3, ⋯这种状态是吸收态(4) A 占先的状态，也即A 再赢一球就取胜，而即使A 再输一球也只是平分的状态，例如40:30, 60:40 (5) B 占先的状态，也即B 再赢一球就取胜，而即使B 再输一球也只是平分的状态，例如30:40, 40:60 (6) 平分的状态，例如30:30, 40:40, 60:60, 60+1:60+1, ⋯值得注意的是，15:15 不是平分状态，因为平分状态后再打一球，状态应该转移到A 占先或者B 占先的状态，而15:15 不符合这个概念。问题2(4分)
在完成了上述的分析后，我们需要做的就只是确定图Figure 1 中的五状态随机

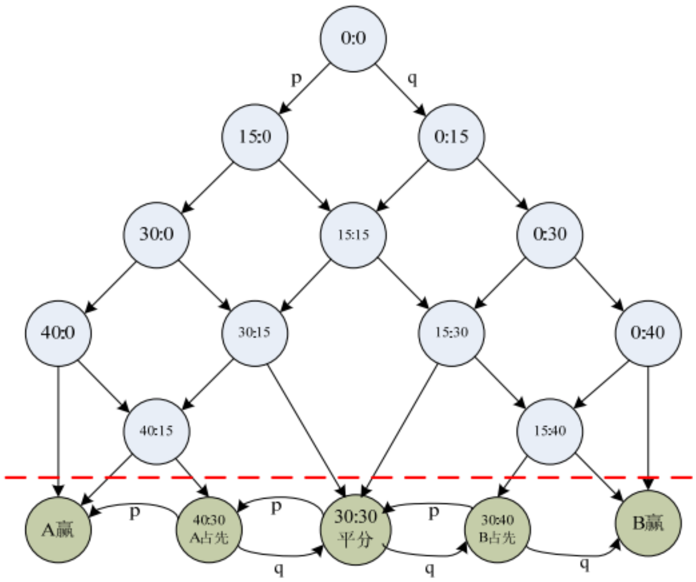

图 1 一局比赛的状态转移图

游动中，各状态的初始概率了。记：(4分)
状态0：A 赢：$P_0 = p^4 + 4p^4q$
状态1：A 占先：$P_1 = 4p^3q^2$
状态2：平分：$P_2 = 6p^2q^2$
状态3：B 占先：$P_3 = 4p^2q^3$
状态4：B 赢：$P_4 = q^4 + 4p^4q$
其中状态0 和状态4 是两个吸收壁，因此初始概率分布为：$p(0) = [p^4 + 4p^4q, 4p^3q^2, 6p^2q^2, 4p^2q^3, q^4 + 4q^4p]$ 该随机游动的转移概率矩阵为：
(4分)

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\p&0&q&0&0\\0&p&0&q&0\\0&0&p&0&q\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{5}$$

到此，网球比赛的输赢问题已经被我们转化成了类似赌徒输光的问题，所不同的是一般讨论赌徒输光时我们认为赌徒具有初始资金a 的初始概率为1，而我们这里“赌徒”可能有各种各样的“初始资金”，即各状态的初始概率都不为0.

(1分)放大选手之间的输赢概率。

6 第六题

解答：(5分)这个问题实际是带有两个吸收壁的随机游动问题，这时的状态空间是I：$0,1,2,\cdots,c, c=a+b, a\geq 1, b\geq 1$问题是从a 点出发，到达0状态先于c状态的概率。设$0\leq j\leq c$,u_j为质点从j点出发到0状态先于c状态的概率。由全概率公式有$u_j=pu_{j+1}+qu_{j-1}$ 由边界条件有$u_c=1, u_0=0$ 解递推关系式有:
$(p+q)u_j=pu_{j+1}+qu_{j-1}$
$p(u_j-u_{j+1})=q(u_{j-1}-u_j)$
$u_{j+1}-u_j=\frac{q}{p}(u_j-u_{j-1})$
定义$u_{j+1}-u_j=d_j, \frac{q}{p}=r$相应的差分方程是
$d_j=rd_{j-1}=r^2d_{j-2}=\cdots=r^jd_0$
(4分)设$r\neq 1$,

$$u_0=u_0-u_c=\sum_{i=0}^{c-1}(u_i-u_{i+1})=\frac{1-r^c}{1-r}d_0$$

$$u_j=u_j-u_c=\sum_{i=j}^{c-1}(u_i-u_{i+1})=\sum_{i=j}^{c-1}r^id_0=\frac{r^j-r^c}{1-r}d_0$$

$$u_j=\frac{r^j-r^c}{1-r^c}u_0=\frac{r^j-r^c}{1-r^c}=\frac{(q/p)^j-(q/p)^c}{1-(q/p)^c}$$

(4分)得到当$r\neq 1$,

$$u_a=\frac{r^a-r^c}{1-r^c}=\frac{(q/p)^a-(q/p)^c}{1-(q/p)^c}$$

以上是甲输光计算结果,$1-u_a$就是甲赢了得概率。把p=0.4,q=0.6；a=20,b=30,c=a+b=50带入即可。

7　第七题

解答：(5分)到达率函数:进行时间变换,8点到下午5点对应0-9

$$\lambda(t)=\begin{cases}50+50t, 0\le t\le 3\\ 200, 3\le t\le 5\\ 200-20(t-5), 5\le t\le 9\end{cases} \tag{6}$$

该过程是一个非齐次泊松过程。
(4分)8点半到9点半

$$m(1.5)-m(0.5)=\int_{0.5}^{1.5}\lambda(t)dt=\int_{0.5}^{1.5}(50+50t)dt=100$$

8 点半到9 点半无顾客到达的概率是$e^{-(m(1.5)-m(0.5))}$
(4分)平均顾客到达数为m(1.5)-m(0.5)=100.

8　第八题

排队问题的分析方法:马尔可夫模型的排队问题,$M/M/1/\infty$
(1)首先确定：系统状态转换图,Q 矩阵,稳态的线性方程组,
(2)得到:稳态分布的递推关系和稳态解,
(3)分析:系统中的平均顾客数、平均队长、系统中的时间、平均等待时间、李特公式.

泊松到达，到达率λ.
指数分布服务时间，平均服务时间$\frac{1}{\mu}$, $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$,系统负载因子,$\rho\le 1$时系统稳定.
服务规则：FCFS;
在排队系统的平均顾客数：(4分) $L=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}$
在排队等候的平均顾客数:(3分) $L_Q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$
顾客在系统中平均花费的时间(延迟时间)：(3分) $W=\frac{1}{\mu-\lambda}$
顾客在排队等候的平均时间：(3分) $W_Q=\frac{1}{\mu}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
具体例子数据代入即可(无数据代入计算扣3分):
$\lambda=25$,$\mu=30$