第九章　关系

Discrete Mathematics

Wei Li

liwei.cs@ncu.edu.cn

Information Engineering School
Nanchang University

May 23, 2022

关系

- 关系理论历史悠久，与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切联系。
- 关系是日常生活以及数学中的一个基本概念。例如：
  - 父子关系、兄妹关系、师生关系、商品与用户的关系等
  - 相等关系、图形的相似全等关系、集合的包含关系等
- 在某种意义下，关系可以理解为有联系的一些对象相互之间的比较行为。而根据比较结果来执行不同任务的能力是计算机最重要的属性之一。

关系

关系理论被广泛地应用于计算机科学与技术

- 计算机程序的输入、输出关系
- 以关系为核心的关系数据库
- 用于分析编程语言的句法
- 表示信息之间的联系以实现信息检索
- 关系理念也是数据结构、情报检索、数据库、算法分析、计算机理论等计算机学科的数学工具

Part I

9.1 关系及其性质

Outline

1. 二元关系
2. 函数作为关系
3. 关系的性质
4. 关系的组合

二元关系

定义

设 A 和 B 是集合，一个从 A 到 B 的二元关系是 $A \times B$ 的子集，即 $R \subseteq A \times B$。换言之，任一序偶的集合即确定了一个关系。我们使用记号 aRb 表示 $(a, b) \in R$, 称 a 与 b 有关系 R； $a\not{R}b$ 表示 $(a, b) \notin R$。

例

令 $A = \{0, 1, 2\}$,$B = \{a, b\}$，那么 $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ 是从 A 到 B 的关系。

9.1.3 集合的关系

定义

集合 A 上的二元关系 R 是 $A \times A$ 或 A 到 A 的关系的子集。

例

1. 令 $A = \{a, b, c\}$，则 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$ 是从 A 上的关系。
2. 令 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，关系 $R = \{(a, b) | a \quad b\}$ 中的有哪些有序对？
   $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4).$

9.1.3 集合的关系

EXAMPLE 5

考虑下面整数集上的关系：

$R_1 = \{(a, b) | a \leq b\}$

$R_2 = \{(a, b) | a > b\}$

$R_3 = \{(a, b) | a = b \text{或} a = -b\}$

$R_4 = \{(a, b) | a = b\}$

$R_5 = \{(a, b) | a = b + 1\}$

$R_6 = \{(a, b) | a + b \leq 3\}$

其中，哪些关系包含了有序对 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, -1), (2, 2)$?

一些特殊的关系

假设任意非空集合 A ， 可以定义集合 A 上的:

- 空关系: $\emptyset$
- 恒等关系: $I_A = \{(a, a) | \forall a \in A\}$
- 全域关系: $U_A = A \times A = \{(x, y) | \forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A)\}$

Outline

1. 二元关系
2. **函数作为关系**
3. 关系的性质
4. 关系的组合

9.1.2 函数作为关系

- 一个从集合 A 到 B 的函数 f 对 A 中的每一个元素 a 都唯一指定 B 中的元素 b 作为他的像。
- 函数 f 可以表示成所有满足 $f(a) = b$ 的序偶 (a,b) 的集合，所以它就是一个从 A 到 B 的关系。
- 关系不一定是函数，因为关系可以是一对多的，即 A 中的一个元素对应 B 中多个元素的关系。
- 关系是函数的一般表示。关系是集合，因此函数也可以看成是集合。

Outline

9.1.4 关系的性质

定义

若对每个元素 $a \in A$ 有 $(a, a) \in R$, 那么定义在集合 A 上的关系 R 称为自反的。

$$\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \in R)$$

9.1.4 关系的性质

例

下列关于整数的关系是自反的:
$R_1 = \{(a, b) | a \le b\}$
$R_4 = \{(a, b) | a = b\}$
$R_3 = \{(a, b) | a = b$或$a = -b\}$

下列关系不是自反的:
$R_2 = \{(a, b) | a > b\}$
$R_5 = \{(a, b) | a = b + 1\}$
$R_6 = \{(a, b) | a + b \le 3\}$

9.1.4 关系的性质

定义

- 对于任意 $a, b \in A$, 若只要/每当 $(a, b) \in R$ 就有 $(b, a) \in R$, 则称定义在集合 A 上的关系 R 为对称的。
  $\forall a \forall b((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$
- 对于任意 $a, b \in A$, 若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$, 一定有 a=b, 则称定义在集合 A 上的关系 R 为反对称的。
  $\forall a \forall b(((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to (a = b))$

9.1.4 关系的性质

例

下列关于整数的关系是对称的:

$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$

$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{或} a = -b\}$

$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$

下列关系不是对称的:

$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$

$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$

$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$

9.1.4 关系的性质

例

下列关于整数的关系是反对称的:

$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$

$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$

$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$

$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$

下列关系不是反对称的:

$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{或} a = -b\}$

$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$

9.1.4 关系的性质

定义

对于任意 $a, b, c \in A$, $(a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$，则 $(a, c) \in R$, 那么称定义在集合 A 上的关系 R 为传递的。

$\forall a \forall b \forall c(((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R)$

9.1.4 关系的性质

例

下列关于整数的关系是传递的：

$R_3 = \{(a, b)|a = b \text{或} a = -b\}$

$R_4 = \{(a, b)|a = b\}$

$R_1 = \{(a, b)|a \leq b\}$

$R_2 = \{(a, b)|a > b\}$

下列关系不是传递的：

$R_5 = \{(a, b)|a = b + 1\}$

$R_6 = \{(a, b)|a + b \leq 3\}$

Outline

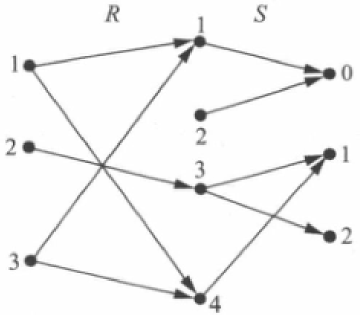
9.1.5 关系的组合

给定两个关系 R_1 和 R_2，我们可以使用基本的集合操作对他们进行运算，形成新的关系，如 $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$.

定义

设 R 是集合 A 到集合 B 的关系，S 是从集合 B 到集合 C 的关系。R 与 S 的合成是由有序对 (a,c) 的集合构成的关系，其中 $a \in A, c \in C$, 并且存在一个 $b \in B$ 的元素，使得 $(a,b) \in R, (b,c) \in S$。我们用 $S \circ R$ 表示 R 与 S 的合成。

9.1.5 关系的组合



$1 \to 1 \to 0$	$(1, 0)$
$1 \to 4 \to 1$	$(1, 1)$
$2 \to 3 \to 1$	$(2, 1)$
$2 \to 3 \to 2$	$(2, 2)$
$3 \to 1 \to 0$	$(3, 0)$
$3 \to 4 \to 1$	$(3, 1)$

图 3 构造 $S \circ R$

逆关系

定义

设 R 是集合 X 到集合 Y 的二元关系，则其逆关系 R^c 是从 Y 从 X 的二元关系：
$R^c = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$

一些重要定理

定理

R_1, R_2, R_3 为关系。R_1 是集合 Z 到集合 W 的关系，R_2 是集合 Y 到集合 Z 的关系，R_3 是集合 X 到集合 Y 的关系，则
$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

证明：$\forall (x, w)$

$$
\begin{aligned}
&(x, w) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
&\equiv \exists y (y \in Y \wedge (y, w) \in (R_1 \circ R_2) \wedge (x, y) \in R_3) \\
&\equiv \exists y (y \in Y \wedge \exists z (z \in Z \wedge (y, z) \in R_2 \wedge (z, w) \in R_1) \wedge (x, y) \in R_3) \\
&\equiv \exists z (z \in Z \wedge \exists y (y \in Y \wedge (x, z) \in R_2 \circ R_3) \wedge (z, w) \in R_1) \\
&\equiv (x, w) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned} \tag{1}
$$

一些重要定理

定理

假设 R, R_1, R_2 都是集合 A 到集合 B 的关系，则如下集合等式皆成立：

- $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$
- $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$
- $(\overline{R})^c = \overline{R^c}$
- $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$
- $(A \times B)^c = B^c \times A^c$

一些重要定理

定理

假设 R_1, R_2 分别是集合 Y 到集合 Z, 以及集合 X 到 Y 的关系，则 $(R_1 \circ R_2)^c = R_2^c \circ R_1^c$

证明：$\forall (z, x)$

$$\begin{aligned}
&(z, x) \in (R_1 \circ R_2)^c \\
&\equiv (x, z) \in (R_1 \circ R_2) \\
&\equiv \exists y (y \in Y \wedge (x, y) \in R_2 \wedge (y, z) \in R_1) \\
&\equiv \exists y (y \in Y \wedge (y, x) \in R_2^c \wedge (z, y) \in R_1^c) \\
&\equiv R_2^c \circ R_1^c
\end{aligned} \tag{2}$$

一些重要定理

定理

假设 R 为集合 A 上的二元关系，则有如下等价命题：

- R 是自反的 $\equiv I_A \subseteq R$
- R 是对称的 $\equiv R = R^c$
- R 是反对称的 $\equiv R \cap R^c \subseteq I_A$
- R 是传递的 $\equiv R \circ R \subseteq R$

关系的幂

定义

设 R 是集合 A 上的关系。R 的 n 次幂 $R^n(n=1,2,3,...)$ 递归地定义为

$$R^1 = R \text{ 和 } R^{n+1} = R^n \circ R$$

定理

集合 A 上的关系 R 是传递的，当且仅当对 n=1,2,3,... 有 $R^n \subseteq R$.

Part II

9.3 关系的表示

Outline

5 用矩阵表示关系

6 用图表示关系

9.3.2 用矩阵表示关系

- 用 0-1 矩阵表示一个有穷集之间的关系。假设 R 是从 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 到 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的关系。
  - 这两个集合的元素可以以任意的顺序列出。当 A=B 时，我们使用相同的顺序。
- 关系 R 可以用矩阵 $\mathbf{M_R}=[m_{ij}]$ 来表示：

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\ 0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases} \tag{3}$$

- 当 a_i 和 b_j 有关系时表示 R 的矩阵的 (i,j) 项是 1，否则为 0

9.3.2 用矩阵表示关系

EXAMPLE 1

假设 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2\}$. 令 R 是从 A 到 B 的关系，如果 $a\in A, b\in B$ 且 $a>b$，则 (a,b) 属于 R，那么 R 的矩阵是什么？

$$\mathbf{M_R}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{4}$$

9.3.2 用矩阵表示关系

EXAMPLE 2

假设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ 哪些有序对在下面的矩阵所表示的关系 R 中？

$$\mathbf{M_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

解：因为 R 是由 $m_{ij} = 1$ 的有序对构成的，所以
$R =$
$\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

9.3.2 用矩阵表示关系

- 如果 R 是自反关系，则 $\mathbf{M_R}$ 主对角线上的所有元素都等于 1.
- R 是对称的当且仅当 $m_{ij}=1$ 时，就有 $m_{ji}=1$。当且仅当 $m_{ij}=1, i\neq j$ 则 $m_{ji}=0$，或者说 $i\neq j$ 时，$m_{ij}=0$ 或 $m_{ji}=0$，R 是反对称关系。

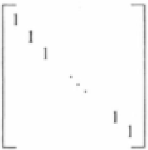
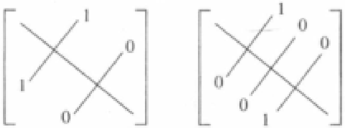


图 1 自反关系的 0-1 矩阵(非主对角线上的元素可为 0 或 1)



a) 对称的 b) 反对称的

图 2 对称和反对称关系的 0-1 矩阵

9.3.2 用矩阵表示关系

EXAMPLE 3

假设集合上的关系 R 由矩阵

$$\mathbf{M_R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

表示，R 是自反的，对称的和反对称的吗？
解：因为这个矩阵中所有对角线元素都等于 1，所以 R 是自反的，又由于 $\mathbf{M_R}$ 是对称的，所以 R 是对称的，也容易看出 R 不是反对称的。

Outline

9.3.3 用图表示关系

定义

一个有向图由顶点（或结点）集 V 和边（或弧）集 E 组成，其中边集是 V 中元素的有序对的集合。顶点 a 叫作边 (a,b) 的始点，而顶点 b 叫作这条边的终点。
表示边 (a,a) 的边称为环。

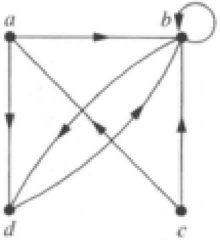


图 3 一个有向图

9.3.3 用图表示关系

- 集合 A 上的关系 R 是自反的：
  - $I_A \subseteq R$
  - $\mathrm{M_R}$ 主对角线上的元素全为 1.
  - $\mathrm{G_R}$ 的每个顶点处均有环。
- 集合 A 上的关系 R 是对称的：
  - $\mathrm{M_R}$ 是对称矩阵。
  - $\mathrm{G_R}$ 任意一对节点之间要么没有边，要么有一对方向相反的有向边。

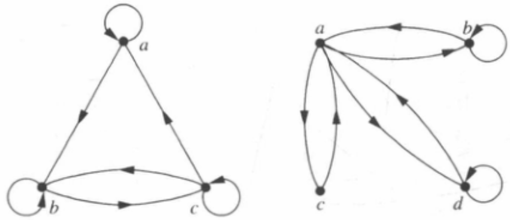
用图表示关系

- 自反性：所有顶点上都有环。
- 反自反性：所有顶点都没有环。
- 对称性：如果 (x,y) 有一条边，那么 (y,x) 也有一条边。
- 反对称性：如果 $x \neq y$,(x,y) 有边，则 (y,x) 没有边。
- 传递性：如果 (x,y) 和 (y,z) 有边，那么 (x,z) 也有边。

9.3.3 用图表示关系

EXAMPLE 10

判断图中的有向图表示的关系，是否为自反的、对称的、反对称的或传递的。

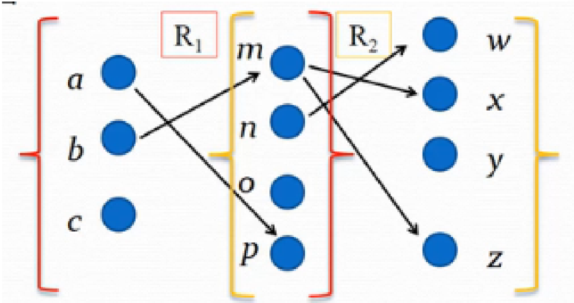


a） S_1的有向图　　b） S_2的有向图

图 6　关系 R 和 S 的有向图

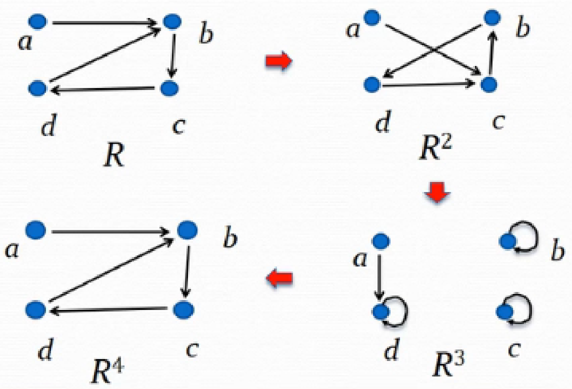
关系合成的表示

- **关系矩阵**： $M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$
- **关系图**



$R_2 \circ R_1 = \{(b, x), (b, z)\}$

关系的幂



R^n 子图中的边表示 (x,y) 在 R 中有长度为 n 的路径（沿着箭头的方向）

Part III

9.4 关系的闭包

Outline

7 关系的闭包

8 与闭包相关的重要定理

9 Warshall 算法

关系的闭包

- 一般来说，集合 A 上的关系 R 可能并不具备我们所需要的性质 P，例如自反性，对称性，传递性。
- 对于不满足性质 P 的关系，我们可以通过补充一些序偶来构造出新的关系 S，使得 S 包含了 R 并且满足性质 P.
- 这些新的关系 S 是有很多种可能的，即包含了 R 且满足性质 P 的关系 S 不唯一。
- 我们能够从这些关系 S 中找到一个特殊的关系 S'，它是其他所有关系 S 的子集，我们称 S' 是关系 R 的关于性质 P 的闭包。

自反闭包 (reflexive closure)

包含给定关系 R 的最小自反关系，称为 R 的自反闭包，记作 $r(R)$.

- $r(R)$ 是自反的；
- $R \subseteq r(R)$;
- $\forall S((R \subseteq S) \wedge S\text{自反}) \rightarrow r(R) \subseteq S)$.

对称闭包 (symmetric closure)

包含给定关系 R 的最小对称关系，称为 R 的对称闭包，记作 $s(R)$.

- $s(R)$ 是对称的；
- $R \subseteq s(R)$;
- $\forall S((R \subseteq S) \wedge S\text{对称}) \to s(R) \subseteq S)$.

传递闭包 (transitive closure)

包含给定关系 R 的最小传递关系，称为 R 的传递闭包，记作 $t(R)$，有时也记为 R^*或R^+.

- $t(R)$ 是传递的；
- $R \subseteq t(R)$;
- $\forall S((R \subseteq S) \wedge S\text{传递}) \to t(R) \subseteq S)$.

Outline

重要定理

定理

对于非空集合 A 上的关系 R，以下几组命题等价：

- R 是自反的 $\equiv r(R) = R$
- R 是对称的 $\equiv s(R) = R$
- R 是传递的 $\equiv t(R) = R$

证明：充分性：因为 $R \subseteq R$ 并且 R 自反，根据闭包的定义，$r(R) \subseteq R$; 同时，根据闭包的定义知 $R \subseteq r(R)$，因此 $r(R) = R$; 必要性：因为 $r(R)$，且 $R = r(R)$, 故 R 自反。

重要定理

定理

对于非空集合 A 上的关系 R_1 和 R_2 且 $R_1 \subseteq R_2$，则以下几组集合包含式成立：

- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明：因为 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq r(R_2)$，且 $r(R_2)$ 自反，因此 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$.

重要定理

定理

对于非空集合 A 上的关系 R_1 和 R_2，则以下几组集合等式及包含式成立:

- $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$
- $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$
- $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

如何求解关系的闭包

给定一个非空集合 A 上的关系 R，如何得到 R 的自反、对称、传递闭包呢？

定理

对于非空集合 A 上的关系 R，有如下等式成立：

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^c$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

回顾

定理

假设 R 为集合 A 上的二元关系，则有如下等价命题：

- R 是自反的 $\equiv I_A \subseteq R$
- R 是对称的 $\equiv R = R^c$
- R 是反对称的 $\equiv R \cap R^c \subseteq I_A$
- R 是传递的 $\equiv R \circ R \subseteq R$

重要定理

定理

对于非空集合 A 上的关系 R, 存在以下几组等式:

- $rs(R) = sr(R)$
- $rt(R) = tr(R)$
- $st(R) \subseteq ts(R)$

9.4.4 传递闭包

定理

假设 A 是含有 n 个元素的非空集合，R 是 A 上的二元关系，则必存在一个正整数 $k \le n$，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots \cup R^k$$

Outline

Part IV

9.5 等价关系

Outline

9.5.2 等价关系

定义

定义在集合 A 上的关系叫作等价关系，如果它是自反的、对称的和传递的。

定义

如果两个元素 a 和 b 由于等价关系而相关联，则称它们是等价的，记法 $a \sim b$，通常用来表示对于某个特定的等价关系来说，a 和 b 是等价的元素。

9.5.2 等价关系

EXAMPLE 3

模 m 同余　设 m 是大于 1 的整数。证明以下关系是定义在整数集上的等价关系。

$$R = \{(a, b) | a \equiv b(mod\ m)\}$$

解：$a \equiv b(mod\ m)$ 当且仅当 m 整除 (a-b).

- 自反性：a-a=0 能被 m 整除，因此 $a \equiv b(mod\ m)$.
- 对称性：假设 $a \equiv b(mod\ m)$，那么 a-b 能被 m 整除，即 a-b=km，其中 k 是整数，从而 b-a=(-k)m，即 $b \equiv a(mod\ m)$.
- 传递性：假设 $a \equiv b(mod\ m)$，$b \equiv c(mod\ m)$，那么存在整数 k 和 l，使得 a-b=km，b-c=lm，从而 a-c=(k+l)m，于是 $a \equiv c(mod\ m)$.

9.5.2 等价关系

EXAMPLE 4

设 R 是定义在英文字母组成的字符串的集合上的关系，满足 aRb 当且仅当 $l(a) = l(b)$，其中 $l(x)$ 是字符串 x 的长度。R 是等价关系吗？

9.5.2 等价关系

EXAMPLE 6

证明正整数集合上的“整除”关系不是等价关系。

解：“整除”关系是自反和传递的，不是对称的，所以“整除”关系不是等价关系。

- 自反性：a|a 对所有 a 成立。
- 对称性：2|4，但 $4 \nmid 2$.
- 传递性：假设 a 整除 b，b 整除 c，则有整数 k 和 n，使得 b=ak,c=bn, 故 c = a(kn), 故 a 整除 c。

Outline

9.5.3 等价类

定义

设 R 是定义在集合 A 上的等价关系。与 A 中的一个元素 a 有关系的所有元素的集合叫作 a 的等价类。A 的关于 R 的等价类记作 $[a]_R$。当只考虑一个关系时，我们将省去下标 R 并把这个等价类写作 [a].

换句话说，如果 R 是定义在集合 A 上的等价关系，则元素 a 的等价类是：

$$[a]_R = \{s | (a, s) \in R\} \tag{7}$$

如果 $b \in [a]_R$, b 叫作这个等价类的代表元。

9.5.3 等价类

EXAMPLE 9 对于模 4 同余关系，0 和 1 的等价类是什么？

解：模 m 同余关系的等价类称为模 m 同余类，整数 a 模 m 的同余类用 $[a]_m$ 表示，满足
$[a]_m = \{..., a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, ...\}$.

- $[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$.
- $[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$.
- $[2]_4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$.
- $[3]_4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$.

Outline

9.5.4 等价类与划分

定理

设 R 是定义在集合 A 上的等价关系，下面的关于集合 A 中的 a,b 两个元素的命题是等价的。

1. aRb
2. $[a]=[b]$
3. $[a]\cap[b]=\emptyset$

9.5.4 等价类与划分

- 设 R 是定义在集合 A 上的等价关系，R 的所有等价类的并集就是集合 A，因为 A 的每个元素 a 都在它自己的等价类，即 $[a]_R$ 中，换句话说，

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A \tag{8}$$

- 这些等价类或者是相等的或者是不相交的，因此当 $[a]_R \neq [b]_R$ 时，

$$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset \tag{9}$$

等价关系划分集合

- 集合 S 的划分是 S 的不相交的非空子集构成的集合，且它们的并集就是 S。
- 等价类构成集合 A 的划分，因为它们将 A 分成不相交的子集。

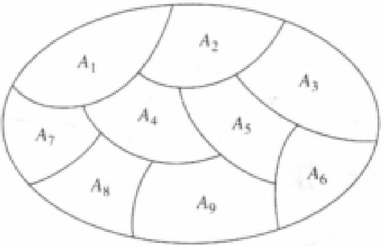


图 1 集合的划分

等价关系划分集合

定理

令 R 是一个定义在集合 S 上的等价关系，那么 R 的等价类构成 S 的划分。反过来，给定集合 S 的划分 $\{A_i|i \in \mathbb{Z}^+\}$, 则存在一个等价关系 R，它以集合 A_i 作为它的等价类。

证明：假设 $\{A_i|i \in \mathbb{Z}^+\}$ 是 S 的一个划分，令 R 是 S 上的关系，R 包含 (x,y) 当且仅当 x 和 y 属于划分中的同一子集 A，我们证明 R 满足等价关系的性质：

- 自反性：对于每一个 $a \in S$, 因为 a 与自身属于同一子集，$(a, a) \in R$
- 对称性：若 $(a, b) \in R$，则 b 和 a 属于划分的同一子集，则 $(b, a) \in R$
- 传递性：略。

商集

- 定义：设 R 是非空集合 A 上的等价关系，以 R 的全体不同的等价类为元素的集合 $\{[a]_R|a \in A\}$ 称为 A 关于 R 的商集，记为 A/R.
- 定理：非空集合 A 上的等价关系 R 决定了 A 的一个划分，该划分就是商集 A/R.
- 定理：设 R_1 和 R_2 为非空集合 A 上的等价关系，则 $R_1 = R_2$ 当且仅当 $A/R_1 = A/R_2$.

Outline

相容关系

定义

设 R 是定义在非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的，则称 R 是集合 A 上的相容关系。

定义

给定非空集合 A，设有集合 $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$. 如果

- $A_i\subseteq A$ 且 $A_i\neq\emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$

则 S 被称作集合 A 的一个覆盖。

重要定理

定理

- 给定集合 A 的划分 $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$，由它确定的关系 $R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup ... \cup A_n \times A_n$ 是等价关系。
- 给定集合 A 的覆盖 $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$，由它确定的关系 $R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup ... \cup A_n \times A_n$ 是相容关系。

Part V

9.6 偏序关系

Outline

9.6.1 偏序集

定义

定义在集合 S 上的关系 R，如果它是自反的、反对称的和传递的，就称为偏序，集合 S 与定义在其上的偏序 R 一起称为偏序集，记作 (S, R). 集合 S 中的成员称为偏序集的元素。
常将偏序关系 R 记为 $\preceq$, 并将 xRy 记为 $x \preceq y$.

9.6.1 偏序集

EXAMPLE 1 证明“大于等于”关系是整数集合上的偏序。

- 自反性：对任意整数 a，$a \geq a$.
- 反对称性：如果 $a \geq b, b \geq a$, 则 a=b.
- 传递性：若 $a \geq b, b \geq c$，则 $a \geq c$。

9.6.1 偏序集

EXAMPLE 2 整除关系"|" 是正整数集合上的偏序。

- 自反性：对任意整数 a，$a|a$.
- 反对称性：如果 $a|b$, $b|a$, 则 a=b.
- 传递性：若 $a|b$, $b|c$，则有正整数 k 和 m ，b=ak 和 c=bm，那么 c=a(km), 故 $a|c$。

9.6.1 偏序集

EXAMPLE 3 证明包含关系 ($\subseteq$) 是定义在集合 S 的幂集上的偏序。

- 自反性：设 A 是 S 的子集，$A \subseteq A$.
- 反对称性：如果 $A \subseteq B, B \subseteq A$, 则 A=B.
- 传递性：$A \subseteq B.B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

9.6.1 可比性

定义

- 偏序集 $(S, \preceq)$ 中的元素 a 和 b 称为可比的，如果 $a \preceq b$ 或者 $b \preceq a$。当 a 和 b 是 S 中的元素既没有 $a \preceq b$ 也没有 $b \preceq a$，则 a 与 b 是不可比的。
- 如果 $(S, \preceq)$ 是偏序集，且 S 中的每对元素都是可比的，则 S 称为全序集或线序集，且 $\preceq$ 称为全序或线序，一个全序集也称为链。
- 对于偏序集 $(S, \preceq)$ ，如果 $\preceq$ 是全序，并且 S 的每个非空子集都有一个最小元素，就称它为良序集。

Outline

9.6.2 字典顺序

定义

给定两个偏序集 $(A_1, \preceq_1)$ 和 $(A_2, \preceq_1)$,$A_1 \times A_2$ 的字典顺序被定义为 (a_1, a_2) “小于” (b_1, b_2)，即

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2) \tag{10}$$

或者 $a_1 \prec_1 b_1$ 或者 $a_1 = b_1$ 且 $a_2 \prec_2 b_2$

9.6.2 字典顺序

EXAMPLE 11

考虑小写英文字母的字符串。字典顺序可以使用字母表中字母的顺序来定义。这与字典中使用的顺序相同。

- $discreet \prec discrete$，因为这些字符串在第七个位置不同，且 $e \prec t$.
- $discreet \prec discreetness$，因为前八个字母一致，但第二个字符串更长.

Outline

9.6.3 哈塞图

定义：哈塞图是部分排序的可视化表示，它忽略了由于自反性和传递性而必须出现的边。

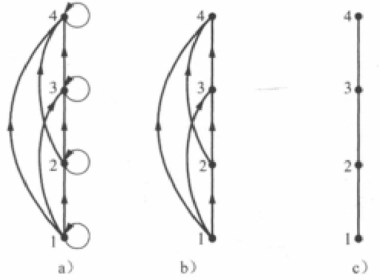


图 2 构造关于({1, 2, 3, 4}, ≤)的哈塞图

(b) 中删除了由于自反性而产生的环；(c) 中删除了由于传递性而必须出现的边。

9.6.3 哈塞图

EXAMPLE 12

画出表示 $\{1,2,3,4,6.8.12\}$ 上的偏序 $\{(a,b)|a$整除$b\}$ 的哈塞图。

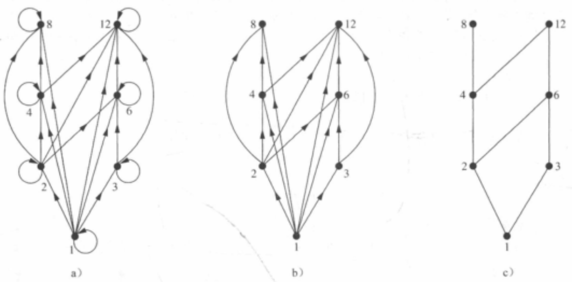


图 3 构造({1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, |)上的哈塞图

Outline

9.6.4 极大元与极小元

设 $(S, \preceq)$ 为偏序集，$A \subseteq S$，则：

- 若 $\exists y \in A$，使得 $\forall x(x \in A \land y \preceq x \to x = y)$，则称 y 为 A 的极大元 (要么比 y 小要么不可比)。
- 若 $\exists y \in A$，使得 $\forall x(x \in A \to x \preceq y)$，则称 y 为 A 的最大元。
- 若 $\exists y \in A$，使得 $\forall x(x \in A \to y \preceq x)$，则称 y 为 A 的最小元。
- 极大元、极小元一定存在，但不一定是唯一的。最大元、最小元不一定存在，但是如果存在，那么一定是唯一的。

9.6.4 极大元与极小元

EXAMPLE 14

偏序集 $(\{2,4,5,10,12,20,25\},|)$ 中的哪些元素是极大元，哪些是极小元？

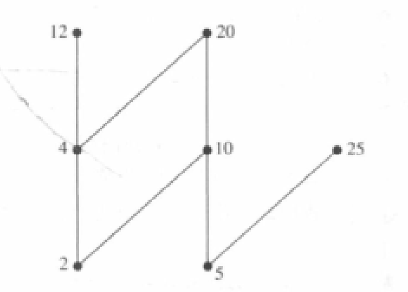


图 5　偏序集的哈塞图

9.6.4 极大元与极小元

EXAMPLE 15

确定图中的每个哈塞图表示的偏序集是否有最大元和最小元。

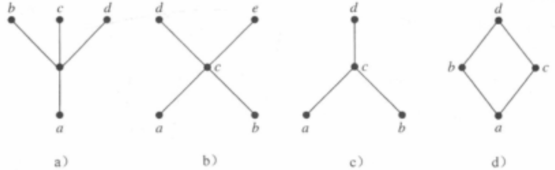


图 6 四个偏序集的哈塞图

上 (下) 界、上 (下) 确界

设 $(S, \preceq)$ 为偏序集，$A \subseteq S$, 则:

- a 为 A 的上界 $\equiv a \in S \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \preceq a)$
- a 为 A 的下界 $\equiv a \in S \wedge \forall x(x \in A \rightarrow a \preceq x)$
- 如果 a 是 A 的上界集合中的最小元。则称 a 为 A 的最小上界或上确界。
- 如果 a 是 A 的下界集合中的最大元。则称 a 为 A 的最大下界或下确界。

Outline

9.6.5 格

如果一个偏序集的每一对元素都有上确界和下确界，就称这个偏序集为格。

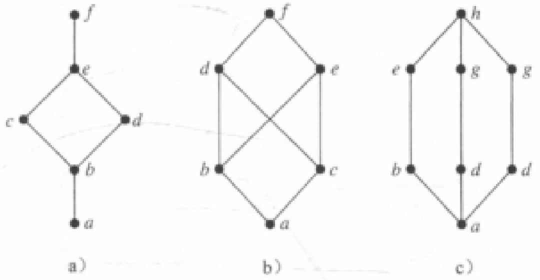


图 8 三个偏序集的哈塞图

Outline

9.6.6 拓扑排序

如果只要 aRb 就有 $a \preceq b$，则称一个全序 $\preceq$ 与偏序 R 是相容的。从一个偏序构造一个相容的全序称为拓扑排序。

算法 1　拓扑排序

procedure topological sort($(S, \preccurlyeq)$：有穷偏序集)

$k := 1$

while $S \neq \varnothing$

　　$a_k := S$ 的极小元(由引理 1 可知，这样的元素一定存在)

　　$S := S - \{a_k\}$

　　$k := k + 1$

return $a_1, a_2, \cdots, a_n$($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是与 S 相容的全序)

9.6.6 拓扑排序

EXAMPLE 26

找出与偏序集 $(\{1,2,4,5,12,20\},|)$ 相容的一个全序。

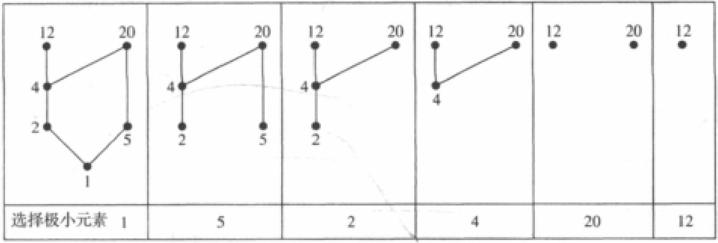


图 9 ({1, 2, 4, 5, 12, 20}, |)的拓扑排序