第二章 基本结构：集合、函数、序列求和与矩阵

Discrete Mathematics

Wei Li

liwei.cs@ncu.edu.cn

Information Engineering School
Nanchang University

May 23, 2022

Part I

2.1 集合

Outline

2.2.1 引言

- 集合是离散数学中考虑的对象类型的基本结构之一。
  - 组合——用于计数
  - 关系——表示对象之间的关系
  - 图——结点和连接结点的边的集合
  - 有限状态机——为计算机器建模
- 集合论是数学的一个重要分支。

2.2.1 集合

定义

集合是不同对象的一个无序的聚集，对象也称为集合的元素 (element) 或成员 (member)。集合包含它的元素。

- $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的一个元素。
- $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的一个元素。

Outline

1. 集合定义
2. **集合描述**
3. 子集
4. 集合大小
5. 笛卡尔积

集合描述：花名册方法

- $S = \{a, b, c, d\}$
- 顺序不重要
  $S = \{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}$
- 每个不同的对象要么是成员，要么不是；多次列出并不会更改集合。
  $S = \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, b, c, d\}$
- 先列出集合中的某些元素，当元素的一般规律显而易见时用省略号代替。
  $S = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$

集合描述：集合构造器方法

- 指定一个或多个所有成员都必须满足的属性
  - $S = \{x|x$是小于 100 的正整数$\}$
  - $O = \{x|x$是小于 10 的奇正整数$\}$
  - $O = \{x \in \mathbf{Z}^+|x$是奇数且$x < 10\}$
- 可以使用谓词
  $S = \{x|P(x)\}$
- 例：$S = \{x|Prime(x)\}$
- 正有理数
  $\mathbf{Q}^+ = \{x \in \mathbf{R}|x = p/q|p \in \mathbf{Z}^+, q \in \mathbf{Z}^+\}$

一些重要的集合

- $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，所有自然数的集合
- $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，所有整数的集合
- $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$，所有正整数的集合
- $\mathbf{Q} = \{p/q | p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0\}$，所有有理数的集合
- $\mathbf{R}$，所有实数的集合
- $\mathbf{R}^+$，所有正实数的集合
- $\mathbf{C}$，所有复数的集合

区间符号

- $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 闭区间
- $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ 开区间

全集和空集

- 全集 U 是包含当前正在考虑的所有东西的集合。
  - 有时隐含
  - 有时显式声明
  - 内容取决于上下文
- 空集是不包含任何元素的集合，可记作 $\emptyset$，也可用 $\{\}$

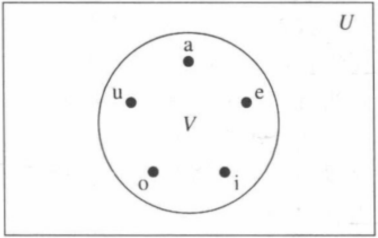


图 1 元音字母集合的文氏图

全集和空集

- 集合可以是集合的元素。
  - $\{\{1,2,3\}, a, \{b, c\}\}$
  - $\mathbf{N}, \mathbf{z}, \mathbf{Q}$
- 空集不同于包含空集的集合。
  - $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

相等集合

定义

两个集合相等当且仅当它们有相同的元素。因此，如果 A 和 B 是集合，则 A 和 B 是相等的当且仅当

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

例

如果 A 和 B 是相等集合，记作 A=B.

$$\{1,3,5\} = \{3,5,1\}$$
$$\{1,5,5,5,3,3,1\} = \{1,3,5\}$$

Outline

2.1.3 子集

定义

集合 A 是 B 的子集，当且仅当 A 中的每一个元素都是 B 中的一个元素。

- 符号 $A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集。
- $A \subseteq B$ 成立当且仅当 $\forall x(x \in A \to x \in B)$ 为真
  - $a \in \emptyset$ 总是错的，$\emptyset \subseteq S$，对于任意集合 S 成立。
  - $a \in S \to a \in S, S \subseteq S$，对于任意集合 S 成立。

证明一个集合是否是某个集合子集

- **证明 A 是 B 的子集**：为了证明 $A \subseteq B$，需要证明如果 x 属于 A 则 x 也属于 B。
- **证明 A 不是 B 的子集**：为了证明 $A \nsubseteq B$，需要找一个 x 属于 A 使得 x 不属于 B。

相等集合

- 两个集合 A 和 B 是相等的 A=B，当且仅当
  $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- 使用逻辑等价 A=B 当且仅当
  $\forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$
- 等价于
  $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

真子集

定义

如果 $A \subseteq B$, 但是 $A \neq B$, 则认为 A 是 B 的真子集，表示为 $A \subset B$. 如果 $A \subset B$，则

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \land \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

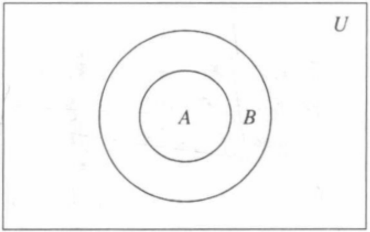


图 2　表示 A 是 B 的子集的文氏图

Outline

2.1.4 集合的大小

定义

令 S 为集合，如果 S 中恰有 n 个不同的元素，这里 n 是非负整数，我们就说 S 是有限集，而 n 是 S 的基数。S 的基数记为 $|S|$.

例

- 令 A 为小于 10 的正奇数集合。则 $|A| = 5$
- 令 S 为英语字母表中字母的集合。那么 $|S| = 26$
- 由于空集没有元素，所有 $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset\}| = 1$
- 正整数集合是无限的。

幂集

定义

集合 A 的所有子集的集合，表示为 $\mathcal{P}(A)$，称作 A 的幂集。

例

- 如果 $A = \{a, b\}$，则 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

如果一个集合有 n 个元素，则其幂集的基数是 2^n。

Outline

2.1.6 元组

定义

有序 n 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是以 a_1 为第 1 个元素，a_2 为第 2 个元素，…，a_n 为第 n 个元素的有序聚集。

- 当且仅当其对应的元素相等时，两个 n 元组相等。
- 有序 2- 元组称为序偶。
- 序偶 (a,b) 和 (c,d) 相等当且仅当 a=c 且 b=d.

2.1.6 笛卡尔积

定义

令 A 和 B 为集合。A 和 B 的笛卡尔积用 $A \times B$ 表示，是所有序偶 (a,b) 的集合，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$. 于是

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \land b \in B\}$$

例

$A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

笛卡尔积 $A \times B$ 的子集 R 称为从集合 A 到集合 B 的关系。

2.1.6 笛卡尔积

定义

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡尔积用 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 表示，是有序 n 元组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的集合，其中 $a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

例

$A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}, C = \{0, 1, 2\}$

$A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2),$
$(1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$

2.1.8 真值集和量词

把集合理论和谓词逻辑的一些概念结合起来。给定谓词 P 和论域 D，定义 P 的真值集为 D 中使 P(x) 为真的元素 x 组成的集合。P(x) 的真值集记为 $\{x \in D | P(x)\}$.

例

P(x) 的真值集是什么？其中论域是整数集合，谓词 P(x) 定义为 "$|x| = 1$".
解：P 的真值集是 $\{-1, 1\}$

Part II

2.2 集合运算

Outline

2.2.1 并集

定义

令 A 和 B 为集合。集合 A 和 B 的并集，用 $A \cup B$ 表示，是一个集合，它包含 A 或 B 中或同时在 A 和 B 中的元素。

$$A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$$

例

集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的并集是集合 $\{1, 2, 3, 5\}$.

2.2.1 交集

定义

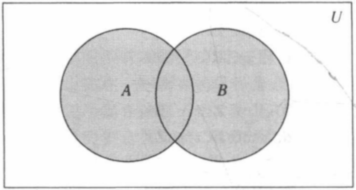
令 A 和 B 为集合。集合 A 和 B 的交集，用 $A \cap B$ 表示，是一个集合，它包含同时在 A 和 B 中的那些元素。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例

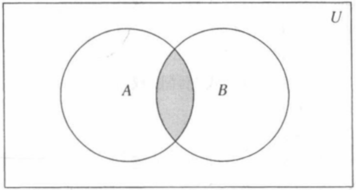
集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的交集是集合 $\{1, 3\}$.

并集和交集



$A\cup B$ 为阴影区

图 1 A 和 B 并集的文氏图



$A\cap B$ 为阴影区

图 2 A 和 B 交集的文氏图

两个集合并集的基数

容斥原理: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

2.2.1 差集

定义

令 A 和 B 为集合。A 和 B 的差集，用 $A-B$ 表示，是一个集合，它包含属于 A 而不属于 B 的元素。A 和 B 的差集也称为 B 相对于 A 的补集。

$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

例

集合 $\{1,3,5\}$ 和集合 $\{1,2,3\}$ 的差集是集合 $\{5\}$.

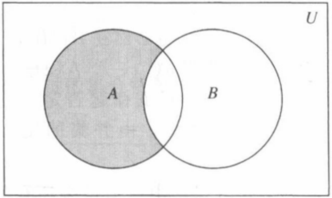
2.2.1 补集

定义

令 U 为全集。集合 A 的补集，用 $\bar{A}$ 表示，是 A 相对于 U 的补集。集合 A 的补集是 U-A。

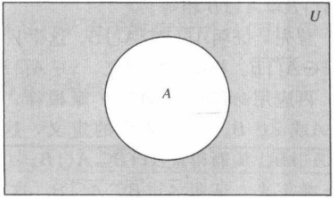
$$\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$$

差集和补集



$A-B$ 为阴影区

图 3　A 和 B 的差集的文氏图(阴影部分是 $A-B$)



$\overline{A}$ 为阴影区

图 4　集合 A 的补集的文氏图(阴影部分是 $\overline{A}$)

Outline

集合恒等式

- 恒等律：$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap U = A$
- 支配律：$A \cup U = U \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
- 幂等律：$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
- 补律：$\overline{(\overline{A})} = A$

集合恒等式

- 交换律: $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$
- 结合律:
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 分配律: :
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

集合恒等式

- 德摩根律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
- 互补律：： $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Outline

2.2.2 集合恒等式

证明集合恒等式的不同方法：

1. 互相证明其中一个集合是另一个集合的子集。
2. 使用集合构造器符号和逻辑等价式。
3. 成员表：验证在相同集合组合中的元素同属于恒等式两边的集合。

2.2.2 集合恒等式

例

EXAMPLE 10 证明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.2.2 集合恒等式

例

EXAMPLE 10 证明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

解 通过下列步骤证明这一恒等式。

$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\}$	补集的定义
$= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\}$	不属于符号的含义
$= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$	交集的定义
$= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$	逻辑等价式的第一德·摩根律
$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$	不属于符号的含义
$= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$	补集的定义
$= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$	并集的定义
$= \overline{A} \cup \overline{B}$	集合构造器记号的含义

2.2.2 集合恒等式

例

EXAMPLE 13 证明 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

表 2 分配律的成员表

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

2.2.3 扩展的并集和交集

定义

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集和交集分别表示为:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

例

令 $A_i = \{i, i+1, i+2, \cdots\}$,i = 1, 2, ...

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \cdots\} = \{n, n+1, n+2, \cdots\} = A_n$$

Outline

2.2.4 集合的计算机表示

- 简单无序的存储集合数据会造成在进行集合运算的时候进行大量的元素搜索，降低集合运算效率。
- 假定全集 U 是有限的，可以首先为 U 中的所有元素定一个顺序，例如 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。并用长度为 n 的位串来表示 U 的子集 A。如果元素 a_i 属于子集 A，则 A 对应的位串的第 i 位置为 1，否则置为 0.

2.2.4 集合的计算机表示

例

EXAMPLE 20 集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 和 $\{1,3,5,7,9\}$ 的比特串分别为 11 1110 0000 和 10 1010 1010。用比特串找出它们的并集和交集。

解：这两个集合的并集的比特串是

11 1110 0000 $\vee$ 10 1010 1010 $=$ 11 1110 1010

它对应的集合是 $\{1,2,3,4,5,7,9\}$

这两个集合的交集的比特串是

11 1110 0000 $\wedge$ 10 1010 1010 $=$ 10 1010 0000

它对应的集合是 $\{1,3,5\}$

Part III

2.3 函数

Outline

函数定义

定义

令 A 和 B 为非空集合。从 A 到 B 的函数 f 是对元素的一种指派，对 A 的每个元素恰好指派 B 的一个元素。如果 B 中元素 b 是唯一有函数/ 指派给 A 中元素 a 的，则我们就写成 f(a)=b。如果 f 是从 A 到 B 的函数，就写成 $f\colon A \to B$

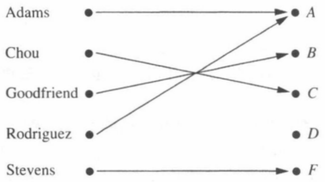


图 1 离散数学课程成绩的指派

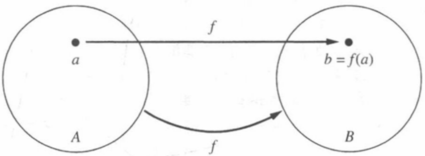


图 2 函数 f 把 A 映射到 B

函数定义

定义

设 X 和 Y 是任何两个非空集合，而 f 是 X 到 Y 的一个关系 $(f \subset X \times Y)$, 如果对于每一个 $x \in X$, 都有唯一的 $y \in Y$, 使 $< x, y > \in f$. 则称 f 是 X 到 Y 的函数（function），记为 $f : A \to B$。x：自变元/原像，y：x 的像。当 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 时，称 f 为 n 元函数。函数也称映射（mapping）或变换 (transformation)。

函数是序偶的集合，是特殊的关系。两个函数相等可以用集合相等的概念来定义。

函数

- 函数 $f : A \to B$ 也可以定义为 $A \times B$ 的子集。这个子集被限制为一个关系。
- 具体地说，对于每个元素 $a \in A$ 都有且仅有一个序偶 $(a, b) \in f$, 则定义了从 A 到 B 的函数 f。
- 存在性：$\forall x(x \in A \to \exists y(y \in B \wedge (x, y) \in f))$
- 唯一性：$\forall x \forall y_1 \forall y_2(((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \to y_1 = y_2)$

函数

给定一个函数 $f: A \to B$:

- 我们说 f 把 A 映射到 B。
- A 是 f 的定义域。
- B 是 f 的培域。
- 如果 f(a) = b。则说 b 是 a 的像。a 是 b 的原像（自变元）。
- f 的值域是 A 中元素的所有像的集合，记为 $f(A) \subset B$
- 当两个函数有相同的定义域，陪域，定义域中的每个元素映射到培域中相同的元素时，这两个函数是相等的。

Outline

单射函数

定义

函数 f 称为是一对一 (one-to-one) 或单射 (injection) 函数，当且仅当对于 f 的定义域中的所有 a 和 b 有 f(a)=f(b) 蕴含 a=b。一个函数如果是一对一的，就称为是单射的 (injective).

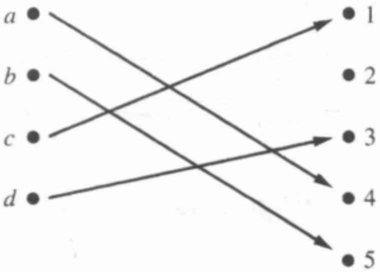


图 3 一个一对一函数

满射函数

定义

一个从 A 到 B 的函数 f 称为映上 (onto) 或满射 (surjection) 函数，当且仅当对每个 $b \in B$ 有元素 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$。一个函数 f 如果是映上的就称为是满射的 (surjective).

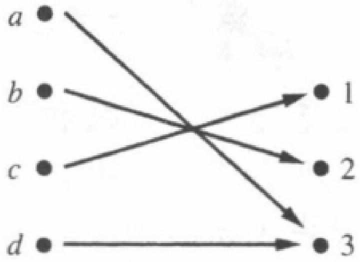


图 4　一个映上函数

双射函数

定义

函数 f 是一一对应 (one-to-one correspondence) 或双射 (bijection) 函数，如果它既是一对一的又是映上的。这样的函数称为是双射的 (bijective).

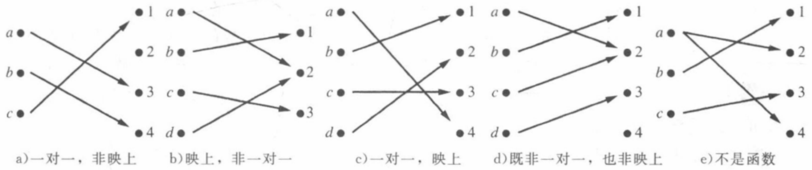


图 5 不同类型的对应关系的例子

证明单射或满射函数

假设 $f: A \to B$:

- 要证明 f 是单射的：证明对于任意 $x, y \in A$, 如果 $f(x) = f(y)$, 则 $x = y$.
- 要证明 f 不是单射的：找到特定的 $x, y \in A$, 使得 $x \neq y$, 且 $f(x) = f(y)$.

- 要证明 f 是满射的：考虑任意元素 $y \in B$, 并找到一个元素 $x \in A$，使得 $f(x) = y$.
- 要证明 f 不是满射的：找到一个特定的元素 $y \in B$, 使得对于任意 $x \in A$，有 $f(x) \neq y$.

Outline

反函数

定义

令 f 为从集合 A 到集合 B 的一一对应。f 的反函数（或逆函数）是这样的函数，它指派给 B 中元素 b 的是 A 中使得 f(a)=b 唯一元素 a。f 的反函数用 f^{-1} 表示。于是，当 f(a)=b 时 $f^{-1}(b) = a$.

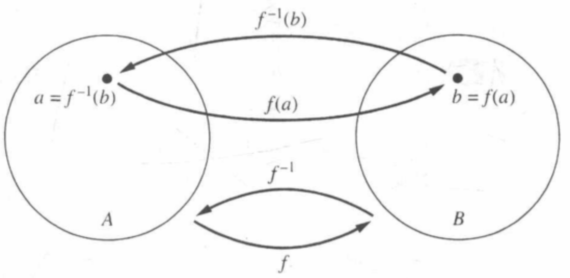


图 6 函数 f^{-1} 是函数 f 的反函数

反函数

例

EXAMPLE 20: 令 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, 使得 $f(x) = x + 1$。f 可逆吗？如果可逆，其反函数是什么？
解：f 可逆，因为它是一一对应的关系。反函数与 f 给出的对应关系相反，所以 $f^{-1}(y) = y - 1$.

EXAMPLE 21: 令 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得 $f(x) = x^2$。f 可逆吗？
解：f 不可逆，因为它不是一一对应的关系。

函数合成

定义

令 g 为从集合 A 到集合 B 的函数，f 是从集合 B 到集合 C 的函数，函数 f 和 g 的合成 (composition) 记作 $f \circ g$，定义为对任意 $a \in A$，有：

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

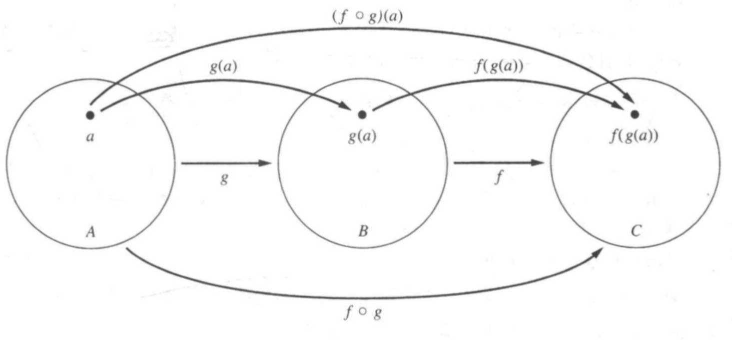


图 7 函数 f 和 g 的合成

函数合成

例

EXAMPLE 24: 令 f 和 g 为从整数集到整数集的函数，其定义为 $f(x) = 2x + 3$ 和 $g(x) = 3x + 2$. f 和 g 的合成是什么？g 和 f 的合成是什么？

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

Outline

2.3.4 函数的图

定义

令 f 为从集合 A 到集合 B 的函数，函数 f 的图是序偶集合 $\{(a, b) | a \in A\ f(a) = b\}$

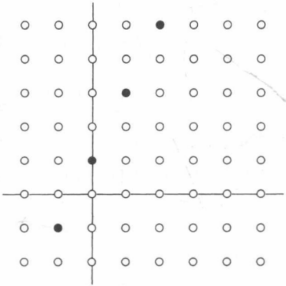


图 8 从 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的函数 $f(n)=2n+1$ 的图

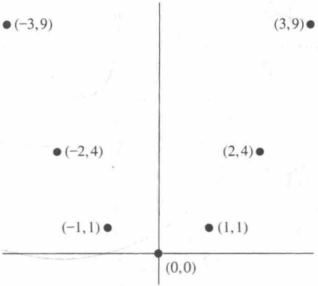


图 9 从 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的 $f(x)=x^2$ 的图

Outline

2.3.5 一些重要的函数

- 下取整函数，记为 $f(x) = \lfloor x \rfloor$，小于等于 x 的最大整数。
- 上取整函数，记为 $f(x) = \lceil x \rceil$，大于等于 x 的最小整数。

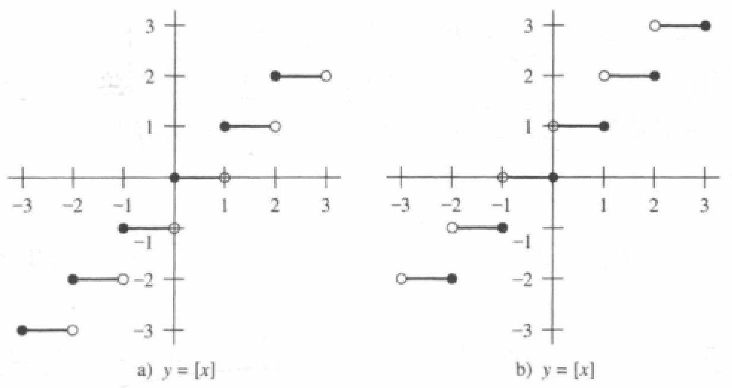


图 10 a)下取整函数图像；b)上取整函数图像

Part IV

2.4 序列与求和

Outline

15 序列
- 几何级数
- 算数级数

16 递推关系
- 斐波那契序列

17 特殊的整数序列

引言

- 序列是元素的有序列表。
  - 1,2,3,5,8 (有限)
  - 1,3,9, 27,81,...(无限：无穷序列)
- 序列出现在数学、计算机科学和许多其他学科中。
- 我们将介绍表示序列的术语和序列和。

2.4.2 序列

定义

序列是一个从整数集的一个子集（通常是集合 $\{0,1,2,\ldots\}$ 或集合 $\{1,2,3,\ldots\}$ 到一个集合 S 的函数。用记号 a_n 表示整数 n 的像。称 a_n 为序列的一个项 (term)。

例

EXAMPLE 1: 考虑序列 $\{a_n\}$，其中 $a_n = \frac{1}{n}$
这个序列的项的列表从 a_1 开始，即 $a_1, a_2, a_3, \ldots$
开头是：$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$

几何级数

定义

几何级数是如下形式的序列：$a, ar, ar^2, \cdots, ar^n, \cdots$；其中初始项 a 和公比 r 都是实数。

几何级数是指数函数 $f(x) = ar^x$ 的离散的对应体。

算术级数

定义

几何级数是如下形式的序列：$a, a+d, a+2d, \cdots, a+nd, \cdots$；其中初始项 a 和公差 d 都是实数。

几何级数是指数函数 $f(x) = dx + a$ 的离散的对应体。

串 (string)

- 串：字符串是有限集合（字母表）中的有限字符序列。
- 字符或比特序列（位串）在计算机科学中很重要。
- 空串记为 λ，长度为 0。
- 字符串 abcd 是长度为 4 的串。

Outline

2.4.3 递推关系

- 定义：关于序列 $\{a_n\}$ 的一个递推关系是一个等式，对所有满足 $n \geq n_0$ 的 n，它把 a_n 用序列中前面的项即 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 中的一项或多项来表示，这里 n_0 是一个非负整数。
- 如果一个序列的项满足递推关系，则该序列就称为是递推关系的一个解。
- 递推定义的序列的初始条件指定了在递推关系定义的首项前的那些项。
- 采用数学归纳法可以证明一个递推关系及其初始条件可以唯一地确定一个序列。

斐波那契序列

定义：斐波那契序列，$f_0, f_1, f_2, \ldots,$

- 初始条件：$f_0 = 0, f_1 = 1$
- 递推关系：$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1 \\
f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \\
f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 \\
f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 \\
f_6 &= f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8
\end{aligned}
$$

求递推关系

- 找到由递归关系生成的序列的第 n 项的公式称为求解递归关系。
- 当我们为序列的任意一项找到一个显示公式（通项），我们称其为闭形公式。
- 第 8 章将讨论求解递推关系的各种方法。
- 猜测公式的迭代方法，用归纳法证明这个猜想是正确的。
  - 正向替换
  - 反向替换

求递推关系

例

令 $\{a_n\}$ 是一个序列，满足递推关系 $a_n = a_{n-1} + 3$, n=2,3,4,...,并假定 $a_1 = 2$.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2+3 \\
a_3 &= (2+3)+3 = 2+3\cdot 2 \\
a_4 &= (2+2\cdot 3)+3 = 2+3\cdot 3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1}+3 = (2+3\cdot(n-2))+3 = 2+3(n-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}+3 \\
&= (a_{n-2}+3)+3 = a_{n-2}+3\cdot 2 \\
&= (a_{n-3}+3)+3\cdot 2 = a_{n-3}+3\cdot 3 \\
&\vdots \\
&= a_2+3(n-2) = (a_1+3)+3(n-2) = 2+3(n-1)
\end{aligned}
$$

Outline

2.4.4 特殊的整数序列 (可选)

当给定初始项并试图推导出一个可能的公式、递推关系或序列项的某种一般规则时，尝试寻找这些项的一种模式。再观察能否确定一项如何从它前面的项产生。有许多问题可以问，但比较有用的问题是：

- 是否有相同值连续出现，即相同的值在一行中出现多次？
- 是否给前项加上某个常量或与序列中项的位置有关的量后就得出后项？
- 是否给前项乘以特定量就得出后项？
- 是否按照某种方式组合前面若干项就可以得出后项？
- 是否在各项之间存在循环？

Part V

2.5 集合的基数

Outline

2.5.1 基数

定义

集合 A 和集合 B 有相同的基数，当且仅当存在从 A 到 B 的一个一一对应。当 A 和 B 有相同的基数时，就写成 $|A| = |B|$.

定义

如果存在一个从 A 到 B 的一对一函数，则 A 的基数小于或等于 B 的基数，并 A 的基数小于等于 B 的基数，并写成 $|A| \leq |B|$. 当 $|A| \leq |B|$ 并且 A 和 B 有不同的基数时，我们就说 A 的基数小于 B 的基数，并写成 $|A| < |B|$. 。

Outline

2.5.2 可数集

定义

一个集合或者是有限集或者与自然数集具有相同的基数，这个集合就称为可数的。一个集合不是可数的，就称为不可数的。

如果一个无限集 S 是可数的，我们用符号 $\aleph$ 来表示集合 S 的基数（是阿里夫，希伯来语字母表的第一个字母），写作 $|S| = \aleph_0$，并说 S 有基数“阿里夫零”。

可数集

定义

设 A,B 是两个集合，若在 A,B 之间存在 **1-1 对应**关系，则称 A 与 B 等势。

定义

凡是与自然数集等势的集合，均称为可数集。可数集的基数记为 $\aleph_0$ (读作阿里夫零).

给定集合是可数集的证明方法：找到一个使给定集合与自然数集 N 一一对应的关系即可。

证明集合是可数的

- 一个无限集合是可数的，当且仅当它可以把集合中的元素排除序列（下标是正整数）。
- 从正整数集合到集合 S 的一一对应关系 f 可以用序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 表示，其中 $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \cdots, a_n = f(n), \cdots$

可数集

EXAMPLE 1 证明正奇数集合是可数集

解：要证明正奇数集合是可数的，就要给出这个集合与正整数集合之间的一个一一对应。考虑函数：

$$f(n) = 2n - 1$$

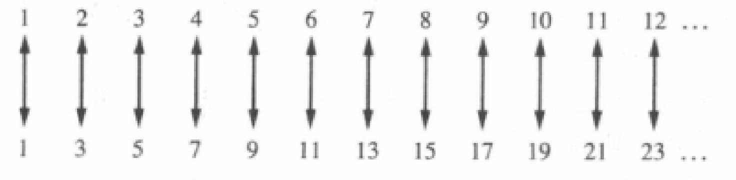


图 1 在 $\mathbf{Z}^{+}$ 和正奇数集合之间的一一对应

可数集

EXAMPLE 3 证明所有整数的集合是可数的

- 可以用序列列出：0,1,-1,2,-2,3,-3,...
- 或者能够定义一个双射函数：
  - 当 n 是偶数时：$f(n) = n/2$
  - 当 n 是奇数时：$f(n) = -(n-1)/2$

可数集

EXAMPLE 4 证明正有理数集合是可数的

证明如何把正有理数排列成序列:

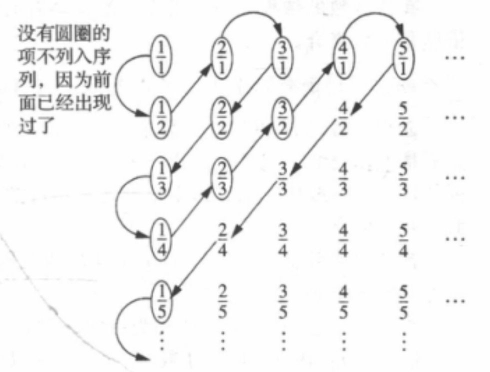


图 3 正有理数是可数的

Outline

2.5.3 不可数集

EXAMPLE 5 证明实数集合是不可数的

假定落在 0 合 1 之间的实数构成的子集是可数的，可以按照某种顺序列出，如下：

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.\,d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\cdots \\
r_2 &= 0.\,d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\cdots \\
r_3 &= 0.\,d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\cdots \\
r_4 &= 0.\,d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

构造新的实数 $r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots$，发现 r 不在列表中，所以，在 0 和 1 之间的所有实数不能一一列出，因此，实数集合是不可数的。

2.5.3 不可数集

定理

如果 A 和 B 是集合，$|A| \le |B|$ 且 $|B| \le |A|$，则 $|A| = |B|$ 。换言之，若存在 A 到 B 的单射函数 f 和从 B 到 A 的单射函数 g，则存在 A 和 B 之间的双射函数。

EXAMPLE 6 证明 $|(0,1)| = |(0,1]|$

寻找 $(0,1), (0,1]$ 之间的一一对应来证明。