# 第一章 逻辑和证明

## Discrete Mathematics

Wei Li

liwei.cs@ncu.edu.cn

Information Engineering School
Nanchang University

May 23, 2022

# 逻辑

- “逻辑”是英语 Logic 的译音，源于古希腊文，原意主要指言语、思想、理性、规律性等。
- 逻辑学也称为形式逻辑，是关于思维形态的结构及其规律的科学。
- 也就是说，逻辑学研究人思维的形态结构和一般规律。

# 数理逻辑

- 思维形态是人们在思维过程中用以反映客观现实的具体形式，即概念、判断、推理。
- 数理逻辑是用数学的方法研究形式逻辑。
- 数学方法：建立一套有严格定义的符号体系，即建立一套形式语言，来研究形式逻辑。
- 所以数理逻辑也称为“符号逻辑”，分为两种，“命题逻辑”和“谓词逻辑”

# Part I

## 1.1 命题逻辑

# 命题逻辑

日常使用的自然语言，往往易产生二义性

中国足球：谁也打不赢。中国乒乓球：谁也打不赢

需要引入形式符号体系，包括命题

# Outline

# 命题

## 定义

命题 是一个陈述语句（即陈述事实的语句），它或真或假，但不能既真又假。**命题是能够判断真假的陈述句**。

## 下面的陈述句均为命题

1. 多伦多是加拿大的首都。(F)
2. 厦门是福建省的省会。(F)
3. 1+1=2.(T)
4. 2+2=3.(F)
5. 别的星球有生物。
6. 男人要是靠得住，母猪它也能上树。

原子命题：不能分解为更简单的陈述句；

# 命题

**下述语句均不是命题**

1. 坐下!
2. 几点了?
3. x+1=2
4. x+y=z
5. 我正在说谎

# 命题

1. 只有具有确定真值的陈述句才是命题。一切没有判断内容的句子，无所谓是非的句子，如感叹句、祈使句、疑问句都不是命题。
2. 因为命题只有两种真值，所以“命题逻辑”又称“二值逻辑”。
3. “具有确定真值”是指客观上的具有，与我们是否知道它的真值是两回事。

# 命题构造

- 命题变元：p,q,r,s,...
- 一个命题是真命题，用 T 表示；
- 一个命题是假命题，用 F 表示。
- 复合命题：由原子命题用逻辑运算符组合而来。
  - 否定联结词：$\neg$
  - 合取联结词：$\wedge$
  - 析取联结词：$\vee$
  - 条件联结词：$\rightarrow$
  - 双条件联结词：$\leftrightarrow$

# Outline

1. 命题
2. 联结词
   - 否定联结词
   - 合取联结词
   - 析取联结词
   - 条件语句；逆命题，逆否命题，反命题
   - 双条件语句
3. 真值表

# 复合命题：否定联结词

- 令 p 为一命题，p 的否定记作 $\neg p$，读作 “非 p”，一元运算符.

表 1: 命题之否定的真值表

| p | $\neg p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

- 例：如果 p 表示 “地球是圆的”，则 $\neg p$ 表示 “并非地球是圆的”。也可以更简单的表示为 “地球不是圆的”。
- 例：如果 p 表示 “咱们班上都是男同学”，则 $\neg p$ 表示 “咱们班上都不是男同学” or “咱们班上不都是男同学（$\surd$）”?

# 复合命题：否定联结词

- 令 p 为一命题，p 的否定记作 $\neg p$, 读作 “非 p”，一元运算符.

表 1: 命题之否定的真值表

| p | $\neg p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

- 例：如果 p 表示 “地球是圆的”，则 $\neg p$ 表示 “并非地球是圆的”。也可以更简单的表示为 “地球不是圆的”。
- 例：如果 p 表示 “咱们班上都是男同学”，则 $\neg p$ 表示 “咱们班上都不是男同学” or “咱们班上不都是男同学（$\surd$)”?

# 复合命题：合取联结词

- 令 p 和 q 为命题，p、q 的合取记作 $p \wedge q$.

表 2: 两命题合取的真值表

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

- 例：如果 p 表示“天在下雨”，q 表示“我在想你”。则 $p \wedge q$ 表示“天在下雨并且我在想你”。
- 例：如果 p 表示“2 月 14 日我在吃饭”，q 表示“2 月 14 日我女朋友在吃饭”。则 $p \wedge q$ 表示“2 月 14 日我和女朋友在一起吃饭（原子命题）” or “2 月 14 日我和女朋友都在吃饭（$\surd$）”？

# 复合命题：合取联结词

- 令 p 和 q 为命题，p、q 的合取记作 $p \wedge q$.

表 2: 两命题合取的真值表

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

- 例：如果 p 表示“天在下雨”，q 表示“我在想你”。则 $p \wedge q$ 表示“天在下雨并且我在想你”。
- 例：如果 p 表示“2 月 14 日我在吃饭”，q 表示“2 月 14 日我女朋友在吃饭”。则 $p \wedge q$ 表示“2 月 14 日我和女朋友在一起吃饭（原子命题）” or “2 月 14 日我和女朋友都在吃饭 ($\surd$)”？

# 复合命题：析取联结词

- 令 p 和 q 为命题，p、q 的析取记作 $p \vee q$.

表 3: 两命题析取的真值表

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

- 例：如果 p 表示“天在下雨”，q 表示“我在想你”。则 $p \vee q$ 表示“天在下雨或者我在想你”。

# 复合命题：条件联结词

- 令 p 和 q 为命题，则 $p \to q$ 是一个条件语句也称为蕴含。将其读作”如果 p，则 q“。

表 4: 条件命题 $p \to q$ 的真值表

| p | q | $p \to q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

- 例：如果 p 表示“你安好”，q 表示“晴天”。则 $p \to q$ 表示“你若安好，便是晴天”。
- 在条件语句 $p \to q$ 中，p 称为假设（前件、前提），q 称为结论（后件）。

# 理解条件语句

- 在条件语句 $p \to q$ 中，在前件和后件之间不需要有任何联系。$p \to q$ 只依赖于 p 和 q 的真值。
- 以下复合命题是真的，但在自然语言中不会使用。
  - " 如果 1+1=3, 那么猪会飞。"
  - " 如果月亮是绿色奶酪做的，那么我比比尔盖茨更有钱。"
- 前件和后件可以没有任何内在联系！

# 理解条件语句

- 为了便于理解条件语句的真值表，可以将条件语句想象为义务或合同。
  - ”如果我当选，那么我将会减税。”
  - ”如果你的离散期末考得 100 分，那么你就会得 A。”
- 如果这位政治家当选后没有减税，那么选民就可以说他或她违背了竞选承诺。

# 常用条件语句表达方式

- 如果 p，则 q
- 如果 p， q
- q 如果 p
- q 当 p
- p 是 q 的充分条件
- q 的充分条件是 p
- p 蕴含 q
- p 仅当 q
- q 每当 p
- q 除非 $\neg p$
- q 是 p 的必要条件
- p 的必要条件是 q

# 逆命题、逆否命题与反命题

- 由条件语句 $p \to q$ 可以构成一些新的条件语句。
  - $q \to p$ 是 $p \to q$ 的逆命题
  - $\neg q \to \neg p$ 是 $p \to q$ 的逆否命题
  - $\neg p \to \neg q$ 是 $p \to q$ 的反命题

例：找出“下雨是我不进城的充分条件”的逆命题、逆否命题与反命题。

解：

逆命题：如果我不进城，那就会下雨。

反命题：如果不下雨，我就进城。

逆否命题：如果我进城，那就不会下雨。

# 复合命题：双条件联结词

- 令 p 和 q 为命题，则 $p \leftrightarrow q$ 表示双条件语句。

表 5: 双条件语句 $p \leftrightarrow q$ 的真值表

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

- 例：如果 p 表示“我在家”，q 表示“天在下雨”。则 $p \leftrightarrow q$ 表示“我在家当且仅当天在下雨”。

# 双条件的表达方式

一些其他方式表达 $p \leftrightarrow q$

- p 是 q 的充分必要条件
- 如果 p 那么 q，反之亦然
- p 当且仅当 q

# Outline

1. 命题
2. 联结词
   - 否定联结词
   - 合取联结词
   - 析取联结词
   - 条件语句；逆命题，逆否命题，反命题
   - 双条件语句
3. **真值表**

# 复合命题的真值表

- 构造真值表：
- 行
  - 原子命题的每个可能的值的组合都需要一行
- 列
  - 复合命题需要一个列（通常在最右边）
  - 需要一个列来表示在构建复合命题时出现的每个表达式的真值。

# 示例真值表

复合命题 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 的真值表:

| p | q | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $p \wedge q$ | $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | T | T | F | F |
| F | T | F | F | F | T |
| F | F | T | T | F | F |

# 逻辑运算符的优先级

表 6: 逻辑运算符的优先级

| 运算符 | 优先级 |
|---|---|
| $\neg$ | 1 |
| $\wedge$ | 2 |
| $\vee$ | 3 |
| $\rightarrow$ | 4 |
| $\leftrightarrow$ | 5 |

# Part II

# 1.2 命题逻辑的应用

# Outline

# 语句翻译

- 将句子转换成命题逻辑语句的步骤：
  - 识别原子命题并使用命题变元表示。
  - 确定适当的逻辑联结词。

**请将下列句子翻译成命题逻辑**

“只有你是计算机科学专业的学生，或者你不是新生，你才能在校园里上网”

解：设 a,c,f 分别表示”你能在校园里上网“、”你是计算机科学专业的学生“、”你是新生“。

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

# 语句翻译

除非你努力，否则你将失败

张三或者李四都可以做这件事

# Outline

# 系统规范说明

系统和软件工程师根据自然语言描述的需求，生成精确而无二义性的规范说明，这些规范说明可作为系统开发的基础。

例：使用逻辑联结词表示规范说明：" 当文件系统已满时，不能够发送自动应答 "

解：令 p 表示" 能够发送自动应答，令 q 表示 "文件系统满了".

$$q \to \neg p$$

# 一致的系统规范说明

定义：如果为命题变量赋真值以使每个命题为真的情况成立，那么规范说明是一致的。

**确定下列系统规范说明是否一致**

- ”诊断消息存储在缓冲区或被重传。“
- ”诊断消息没有存储在缓冲区中。”
- ”如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传。“

解：设 p 表示”诊断消息存储在缓冲区中“。设 q 表示”诊断信息被重传“，该规范说明可以写成：$p \vee q$, $p \rightarrow q$, $\neg p$。当 p 为假，q 为真，这三个表述都为真。所以规格是一致的。
如果”诊断消息未被重传“被添加上，他们还能保持一致吗？

# Outline

4 语句翻译

5 系统规范说明

6 **逻辑谜题**

7 逻辑电路

8 布尔搜索

# 逻辑谜题

**A 和 B 的类型是什么？**

- 一个岛上有两类人：骑士和骗子。
- 你去岛上碰见 A 和 B
  - A 说" B 是骑士。"
  - B 说" 我们两个不是同类人 "

解：设 p 和 q 分别表示 A 是骑士，B 是骑士。

- 如果 A 是骑士，那么 p 是真的。既然骑士讲真话，q 也必须是真的。则 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 必须是真的，矛盾，所以 A 不是骑士。
- 如果 A 是无赖，那么 B 一定不是骑士。$\neg p$ 和 $\neg q$ 都成立。

# Outline

# 逻辑电路

- 电路：每个输入/输出可以被看作 0 或 1. 0 代表 False，1 代表 True.
- 复杂的电路由三种简单的基本电路（也称为门电路）构成。
- 更复杂的数字电路可以通过将这些基本电路组合在一起来产生给定输入信号的期望输出，方法是为每个输出表达式构建一个电路，然后将它们组合在一起。

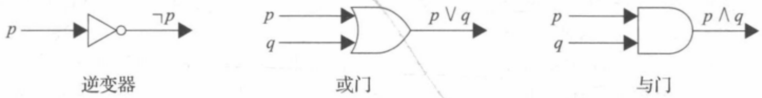


图 1　基本逻辑门

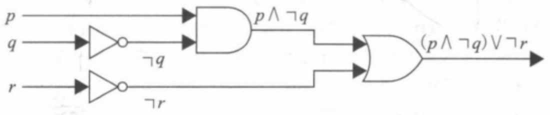


图 2　一个组合电路

# Outline

# 布尔搜索

在搜索中采用命题逻辑的技术，称为布尔搜索。

- AND: 用于匹配同时包含两个搜索项的记录。
- OR: 用于匹配两个搜索项之一或者两项均匹配的记录。
- NOT: 用于排除某个特定的搜索项。

# Part III

# 1.3 命题等价式

# Outline

9 永真式、矛盾式、可能式

10 逻辑等价式
- 重要的逻辑等价式
- 逻辑等价式证明

11 命题的可满足性

# 1.3.1 永真式、矛盾式、可能式

- 永真式是一个真值永远是真的命题。
  - 例：$p \vee \neg p$
- 矛盾式是一个真值永远是假的命题。
  - 例：$p \wedge \neg p$
- 可能式既不是永真式，也不是矛盾式的命题。

表 7: 永真式和矛盾式的例子

| p | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|---|
| T | F | T | F |
| F | T | T | F |

# Outline

9 永真式、矛盾式、可能式

10 逻辑等价式
- 重要的逻辑等价式
- 逻辑等价式证明

11 命题的可满足性

# 1.3.2 逻辑等价式

- 当且仅当真值表中给出真值的列一致时，两个（复合）命题 p 和 q 是逻辑等价的。
- 我们用 $p \Leftrightarrow q$ 或 $p \equiv q$ 表示 p 和 q 是逻辑等价的。
- 如果 $p \leftrightarrow q$ 是永真式，则复合命题 p 和 q 称为是逻辑等价的。
- 以下真值表表明 $\neg p \vee q$ 等价于 $p \rightarrow q$.

| p | q | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T | F |
| F | F | T | T | T | T |

# 1.3.3 德摩根律

1. 第一定律：$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
2. 第二定律：$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

表 8: 真值表表明德摩根第二定律成立

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | T | T | F | T | T |

# 关键的逻辑等价式

- 恒等律（同一律）: $p \wedge T \equiv p \qquad p \vee F \equiv p$
- 支配律（零律）: $p \vee T \equiv T \qquad p \wedge F \equiv F$
- 幂等律: $p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$
- 双重否定率: $\neg(\neg p) \equiv p$
- 否定律: $p \vee \neg p \equiv T \qquad p \wedge \neg p \equiv F$

# 关键的逻辑等价式

- 交换律: $p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$
- 结合律:
  - $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
  - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- 分配律:
  - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- 吸收律:
  - $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
  - $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

# 关键的逻辑等价式

**表 7 条件命题的逻辑等价式**

| |
|---|
| $p \to q \equiv \neg p \vee q$ |
| $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ |
| $p \vee q \equiv \neg p \to q$ |
| $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$ |
| $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ |
| $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$ |
| $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$ |
| $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$ |
| $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$ |

# 关键的逻辑等价式

表 8 双条件命题的逻辑等价式

| |
|---|
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
| $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ |

# 1.3.4 逻辑等价式证明

证明公式等价的方法:

1. 真值表法
2. 构造新的逻辑等价式

**EXAMPLE 7:** 证明 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 是逻辑等价的

| | |
|---|---|
| $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ | 由德·摩根第二定律 |
| $\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$ | 由德·摩根第一定律 |
| $\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$ | 由双重否定律 |
| $\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ | 由第二分配律 |
| $\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$ | 因为 $\neg p \wedge p \equiv \mathbf{F}$ |
| $\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F}$ | 由析取的交换律 |
| $\equiv \neg p \wedge \neg q$ | 由 $\mathbf{F}$ 的恒等律 |

# 1.3.4 逻辑等价式证明

**EXAMPLE 8：证明 $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ 是永真式**

| | |
|---|---|
| $(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ | 由例 3 |
| $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ | 由德・摩根第一定律 |
| $\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$ | 由析取的结合律和交换律 |
| $\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T}$ | 由例 1 和析取的交换律 |
| $\equiv \mathbf{T}$ | 由支配律 |

# Outline

# 1.3.5 命题的可满足性

- 一个复合命题是可满足的（相容的），如果存在一个对其变元的真值赋值为真。当不存在这样的赋值时，则复合命题是不可满足的（不相容）。
- 一个命题是不可满足的，当且仅当它的否定是永真式。

# 1.3.5 命题的可满足性

## EXAMPLE 9

确定下列复合命题是否可满足：

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
   解：满足。把 T 分配给 p, q 和 r（或具有相同真值）.
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
   解：满足。把 T 分配给 p, 把 F 分配给 q （至少一个为真且至少一个为假）
3. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
   解：不满足。命题变元每一个可能的真值赋值，没有一个会使命题为真。

# 1.3 练习题

Exercise 12、13、14、15、16、25、33、34 in Section 1.3.

# Part IV

# 1.4 谓词和量词

# Outline

# 命题逻辑是不足够的

- 假设我们知道：
  - ”人皆有一死。“
  - ”苏格拉底是个人。”
- 这是否意味着“苏格拉底终有一死”
- 不能用命题逻辑来表示。需要一种语言来谈论对象、它们的属性和它们的关系.
- 稍后我们将看到如何进行推论。

# 1.4.2 谓词逻辑

- 谓词逻辑有以下特征:
  - 变量: x, y, z
  - 谓词[1]: $P(x), M(x)$
  - 量词: $\forall, \exists$
- 命题函数是命题的概括。
  - 它们包含变量和谓词，例如 $P(x)$.
  - 变量可以用来自其论域的元素赋值。

[1] 用于刻画客体的性质和关系

# 命题函数

- 当命题函数的变量被域中的值（或由量词绑定）替换时，命题函数就变成命题（并具有真值）。
- P(x) 是命题函数 P 在 x 处的值。
- 例如，设 P(x) 表示 “x>0”，定义域为整数。然后：
  - P(-3) 为假
  - P(0) 为假
  - P(3) 为真
- 通常定义域用 U 表示，所以在这个例子中 U 是整数。

# 命题函数的例子

- 设“x+y=z”用 R(x,y,z) 表示，U (对于所有三个变量) 为整数。找出下列真值:
  - R(-2,-1,5)
  - R(3,4,7)
  - R(x, 3, z)
- 设“x-y=z”用 Q(x,y,z) 表示，U 为整数。找出下列真值:
  - Q(2,-1,3)
  - Q(3,4,7)
  - Q(x, 3, z)

# 复合表达式

- 从命题逻辑到谓词逻辑的联结词
- 如果 P(x) 表示 “x>0”, 找到这些真值:
  - $P(3) \vee P(-1)$
  - $P(3) \wedge P(-1)$
  - $P(3) \rightarrow P(-1)$
- 带有变量的表达式不是命题，因此没有真值。例如:
  - $P(3) \wedge P(y)$
  - $P(x) \rightarrow P(y)$
- 当与谓词一起使用时（下面将介绍），这些表达式（命题函数）就变成了命题。

# Outline

# 1.4.3 量词

- 我们需要量词来表达自然语言中的意思，包括所有和某些:
  - ”人皆有一死”
  - “有些猫没有毛”
- 两个最重要的量词:
  - 全称量词，符号：$\forall$
  - 存在量词，符号：$\exists$
- 我们写成 $\forall x P(x)$ 和 $\exists x P(x)$。
- $\forall x P(x)$ 表示 P(x) 对 x 在其论域的所有值为真。
- $\exists x P(x)$ 表示 P(x) 论域中存在一个个体 x 满足 P(x).
- 量词在这些表达式中绑定变量 x.

# 1.4.3 全称量词

- $\forall x P(x)$ 可读作“对所有 x, P(x)”, ” 任一 x, P(x)” .

**例**

1. 如果 $P(x)$ 表示”x>0” 且 U 是整数，则 $\forall x P(x)$ 是假。
2. 如果 $P(x)$ 表示”x>0” 且 U 是正整数，则 $\forall x P(x)$ 是真。
3. 如果 $P(x)$ 表示”x 是偶数” 且 U 是整数，则 $\forall x P(x)$ 是假。

# 1.4.3 存在量词

- $\exists x P(x)$ 可读作 “对某个 x, P(x)”, ” 至少有一个 x 满足 P(x)” or ” 存在 x, P(x)”.

**例**

1. 如果 $P(x)$ 表示”x>0” 且 U 是整数，则 $\exists x P(x)$ 是真；如果 U 是正整数，$\exists x P(x)$ 也是真。
2. 如果 $P(x)$ 表示”x<0” 且 U 是正整数，则 $\exists x P(x)$ 是假。
3. 如果 $P(x)$ 表示”x 是偶数” 且 U 是整数，则 $\exists x P(x)$ 是真。

## 1.4.3 唯一性量词

- $\exists! x P(x)$ 表示存在唯一的一个 x 使得 P(x) 为真，“恰好存在一个 x，使 P(x) 为真。”，“有且只有一个 x，使 P(x) 为真”

**例**

1. 如果 P(x) 表示"x+1=0" 且 U 是整数，则 $\exists! x P(x)$ 是真。
2. 但是如果 P(x) 表示"x>0"，则 $\exists! x P(x)$ 是假。

- 唯一性量词不是必要的，因为存在一个唯一的 x，使得 P(x) 为真可以表示为：

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow y = x))$$

# 1.4.4 有限域上的量词

- 当论域是有限的，我们可以认为量化是对论域的元素循环。
- 评估 $\forall x P(x)$ 通过在论域中所有 x 循环。
  - 如果每一步 P(x) 都是真，则 $\forall x P(x)$ 是真。
  - 如果有一步 P(x) 是假，则 $\forall x P(x)$ 是假，且结束循环。
- 评估 $\exists x P(x)$ 通过在论域中所有 x 循环。
  - 如果某步使 P(x) 是真，则 $\exists x P(x)$ 是真且结束循环。
  - 如果循环结束且没有找到一个使 P(x) 为真，则 $\exists x P(x)$ 是假。

# 1.4.4 有限域上的量词

- 如果论域是有限的，一个全称量化的命题等价于每个量词命题的合取，一个存在量化的命题等价于每个量词命题的析取。
- 如果 U 由整数 1,2,3 组成：

$$\forall x P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$
$$\exists x P(X) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

# 1.4.5 受限域的量词

- 限定一个量词的论域时经常会用的简写表示法，在这个表示法里，变量必须满足的条件直接放在量词的后面。例：
  - $\forall x < 0(x^2 > 0) \equiv \forall x(x < 0 \to x^2 > 0)$
  - $\exists z > 0(z^2 = 2) \equiv \exists z(z > 0 \land z^2 = 2)$
- 等价形式：
  - 受限的全称量化和一个条件语句的全称量化等价。
  - 受限的存在量化和一个合取式的存在量化等价

# 1.4.6 量词的优先级

- 量词 $\forall$ 和 $\exists$ 比所有逻辑运算符有更高的优先级。
- 例如，$\forall x P(x) \vee Q(x)$ 意思是 $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$
- $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 的意思有所不同。
- 可是人们经常喜欢用 $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 表示 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$，这是错误的。

# 1.4.7 变量绑定

- 当量词作用于变量 $x$ 时，我们说此变量的这次出现为约束的。如果没有被量词约束或设置为等于某一特定值，则称这个变量的出现是自由的。
- 命题函数中所有变量出现必须是约束的或者被设置为等于某个特定值，才能把它转变为一个命题。可以通过全称量词、存在量词和赋值来实现。
- 例：$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$，第一个量词 $\exists x$ 的作用域是表达式 $P(x) \wedge Q(x)$，第二个量词 $\forall x$ 的作用域是表达式 $R(x)$

# Outline

# 1.4.8 谓词逻辑等价式

**定义**

涉及谓词和量词的语句是逻辑等价的，当且仅当无论用什么谓词代入这些语句，也无论为这些命题函数里的变量指定什么论域，它们都有相同的真值。

我们用 $S \equiv T$ 表示 S 和 T 在逻辑上是等价的。

例：$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

# Outline

# 1.4.9 量化表达式的否定

- 设 $\forall x J(x)$ 表示
  " 班级的每个学生都上过 Java 课程"
  J(x) 表示" x 上过 Java 课程", 且域是班级的学生。

- 否定原来的陈述给出" 并不是班上的每个学生都上过 Java 课程。" 这意味着" 你们班有一个学生没有上过 Java 课程 "。

  则 $\neg\forall x J(x)$ 和 $\exists x \neg J(x)$ 是等价的

# 1.4.9 量化表达式的否定

- 设 $\exists x J(x)$ 表示
  " 这个班有个学生上过 Java 课程"
  J(x) 表示" x 上过 Java 课程", 且域是班级的学生。
- 否定原来的陈述给出" 这个班没有一个学生上过 Java 课程。
  " 这意味着" 这个班的每个学生都没有上过 Java 课程 "。

  则 $\neg\exists x J(x)$ 和 $\forall x \neg J(x)$ 是等价的

# 1.4.9 量词的德摩根律

- 否定量词的德摩根律是

表 2 量词的德・摩根律

| 否定 | 等价语句 | 何时为真 | 何时为假 |
|---|---|---|---|
| $\neg\exists xP(x)$ | $\forall x\neg P(x)$ | 对每个 $x$，$P(x)$为假 | 有 $x$，使 $P(x)$为真 |
| $\neg\forall xP(x)$ | $\exists x\neg P(x)$ | 有 $x$ 使 $P(x)$为假 | 对每个 $x$，$P(x)$为真 |

- 由表中推理可知:

$$\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x)$$
$$\neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x)$$

# 1.4.9 量化表达式的否定

EXAMPLE 22 证明 $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 是逻辑等价的。

解：由德摩根律得，$\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 与 $\exists x(\neg(P(x) \rightarrow Q(x)))$ 是等价的，由于 $\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $P(x) \wedge \neg Q(x)$ 是等价的，由此证得。

# Outline

## 1.4.10 语句到逻辑表达的翻译

**EXAMPLE 23 把下面的句子转换成谓词逻辑表达式:”班上的每个学生都学过微积分“**

解 1: 如果 U 是班级中的所有学生，定义一个命题函数 C(x) 表示”x 上过微积分“，则翻译为 $\forall x C(x)$.

解 2: 但是如果 U 是所有人，也定义一个命题函数 S(x) 表示”x 是班级中的一名学生“，则翻译为 $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$

$\forall x(S(x) \wedge C(x))$ 不是正确的。它表达的意思是什么？

# 1.4.10 语句到逻辑表达的翻译

**把下面的句子转换成谓词逻辑表达式：" 这个班的一些学生上过微积分 "**

解 1：如果 U 是班级中的所有学生，定义一个命题函数 C(x) 表示" x 上过微积分 "，则翻译为 $\exists x C(x)$.

解 2：但是如果 U 是所有人，也定义一个命题函数 S(x) 表示" x 是班级中的一名学生 "，则翻译为 $\exists x(S(x) \land C(x))$

$\exists x(S(x) \rightarrow C(x))$ 不是正确的。它表达的意思是什么？

# 1.4.10 语句到逻辑表达的翻译

## EXAMPLE 24

1. " 这个班有学生去过墨西哥。"
   解：令 M(x) 表示" x 去过墨西哥"，S(x) 表示 "x 是班里的学生，" U 表示的域：所有人。
   $\exists x(S(x) \wedge M(x))$
2. " 这个班的每个学生都去过加拿大或墨西哥。"
   解：增加 C(x) 表示 "x 去过加拿大"。
   $$\forall x(S(x) \rightarrow (M(x) \vee C(x)))$$

# 苏格拉底的例子

- 设命题函数 M(x) 表示" x 是一个人 ", D(x) 表示" x 皆有一死 "。指定论域为所有人。
- 这两个前提是:
  - $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$
  - $M(Socrates)$
- 结论是: $D(Socrates)$

# Part V

# 1.5 嵌套量词

# Outline

# 嵌套量词

- 嵌套量词：一个量词出现在另一个量词的作用域内。
- 嵌套量词通常是表达句子意义以及计算机科学和数学中的重要概念所必需的。
- 例：”每个实数都有一个逆“。
  $\forall x \exists y(x+y=0)$，其中 x 和 y 的定义域是实数。
- 我们也可以考虑为嵌套命题函数：
  $\forall x \exists y(x+y=0)$ 可视作 $\forall x Q(x)$ 其中 $Q(x)$ 表示 $\exists y P(x,y)$，$P(x,y)$ 表示 (x+y=0)

# 1.5.2 理解嵌套量词

嵌套循环：

- 如果 $\forall x \forall y P(x, y)$ 为真，对 x 所有值做循环：
  - 每一步，对 y 所有值做循环。
  - 如果对于某些 x 和 y，P(x,y) 为假，则 $\forall x \forall y P(x, y)$ 为假且外部和内部循环都终止。

  $\forall x \forall y P(x, y)$ 为真，如果外循环在遍历每个 x 之后结束。
- 如果 $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真，对 x 所有值做循环：
  - 每一步，对 y 所有值做循环。
  - 当找到一对 x 和 y，P(x,y) 为真，内循环结束。
  - 如果没有找到 y 使 $P(x, y)$ 为真，外循环终止。

  $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真，如果外循环在遍历每个 x 之后结束。

# 1.5.3 量词的顺序

- 令 P(x,y) 为语句“x+y=y+x”。假设 U 是实数，则 $\forall x \forall y P(x,y)$ 和 $\forall y \forall x P(x,y)$ 有相同的真值。
- 令 Q(x,y) 为语句"x+y=0"。假设 U 是实数，则 $\forall x \exists y P(x,y)$ 为真，但 $\exists y \forall x P(x,y)$ 为假。

# 1.5.3 量词的顺序

表 1 两个变量的量化式

| 语句 | 何时为真 | 何时为假 |
|---|---|---|
| $\forall x \forall y P(x, y)$<br>$\forall y \forall x P(x, y)$ | 对每一对 $x$、$y$，$P(x, y)$均为真 | 存在一对 $x$、$y$，使得 $P(x, y)$为假 |
| $\forall x \exists y P(x, y)$ | 对每个 $x$，都存在一个 $y$ 使得 $P(x, y)$为真 | 存在一个 $x$，使得 $P(x, y)$对每个 $y$ 总为假 |
| $\exists x \forall y P(x, y)$ | 存在一个 $x$，使得 $P(x, y)$对所有 $y$ 均为真 | 对每个 $x$，存在一个 $y$ 使得 $P(x, y)$为假 |
| $\exists x \exists y P(x, y)$<br>$\exists y \exists x P(x, y)$ | 存在一对 $x$、$y$，使 $P(x, y)$为真 | 对每一对 $x$、$y$，$P(x, y)$均为假 |

# Outline

# 1.5.4 数学语句到嵌套量词语句的翻译

**EXAMPLE 6 将语句”两个正整数的和总是正数“翻译成逻辑表达式。**

解:

1. 重写语句，使隐含的量词和论域显现出来。
   - ”对每两个整数，如果它们都是正的，那么它们的和是正数。”
2. 引入变量 x 和 y。
   - ”对所有正整数 x 和 y，x+y 是正数。”
3. 最后:
   - $\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0) \to (x + y > 0))$
   - 其中两个变量的论域是全体整数。

# 1.5.4 数学语句到嵌套量词语句的翻译

**EXAMPLE 8 用量词来表示实变量 x 的实函数 f(x) 在其定义域中点 a 处的极限的定义。**

1. 回顾极限的定义:
   - $\lim_{x \to a} f(x) = L$
   - 表示对每个实数 $\epsilon > 0$，存在一个实数 $\delta > 0$，使得对任意的 x，只要 $0 < |x - a| < \delta$，就有 $|f(x) - L| < \epsilon$.
2. 用量词可以表示为:
   - $\forall \epsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$
   - 其中 $\epsilon$ 和 $\delta$ 的论域是正实数集合。
3. 还可表示为:
   - $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$
   - 其中 $\epsilon$ 和 $\delta$ 的论域是实数集合。

# Outline

# 1.5.5 嵌套量词到自然语言的翻译

**EXAMPLE 9**

翻译下列语句

$$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$$

其中 C(x) 表示“x 有一台计算机”，F(x,y) 表示“x 和 y 是好朋友”，x 和 y 的共同论域是全校全体学生的集合。

解：学校的每个学生或者有一台计算机或者有一个有一台计算机的朋友。

# 1.5.5 嵌套量词到自然语言的翻译

**EXAMPLE 10**

翻译下列语句

$$\exists x \forall y \forall z((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$$

解：如果学生 x 和 y 是朋友，并且学生 x 和 z 是朋友，并且如果 y 和 z 不是同一个学生，则 y 和 z 就不是朋友。换句话说，就是有某个学生，他的所有朋友都不是彼此的朋友。

# Outline

# 1.5.6 语句到逻辑表达式的翻译

**EXAMPLE 12** 用量词来表示语句“每个人恰好有一个最好的朋友”。

解:

1. 对每个人 x，x 恰好有一个最好的朋友，引入全称量词。
2. x 恰好有一个最好的朋友意味着有一个人 y，他是 x 最好的朋友。而且对每个人 z，如果 z 不是 y，那么 z 不是 x 最好的朋友。引入谓词 B(x,y) 表示"y 是 x 最好的朋友"。
3. 则句子可以表示为:
   - $\forall x \exists y (B(x,y) \wedge \forall z((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z)))$

# 1.5.6 语句到逻辑表达式的翻译

EXAMPLE 13 用量词来表示语句“世界上有一个女人搭乘过所有航线上的航班”。

解：

1. 令 P(w,f) 表示“w 搭乘过航班 f”，Q(f,a) 表示”f 是航线 a 上的航班。“
2. w 的域是所有女人，f 的域是所有航班，a 的域是所有的航线。
3. 则句子可以表示为：
   - $\exists w \forall a \exists f (P(w,f) \land Q(f,a))$

# Outline

# 1.5.7 嵌套量词的否定

**EXAMPLE 15** 用量词来表示语句“世界上没有一个女人搭乘过所有航线上的航班”。

1. 由 EXAMPLE 13 可知，$\neg\exists w\forall a\exists f(P(w,f)\wedge Q(f,a))$
2. 利用德摩根律：
   - $\neg\exists w\forall a\exists f(P(w,f)\wedge Q(f,a))$
   - $\forall w\neg\forall a\exists f(P(w,f)\wedge Q(f,a))$
   - $\forall w\exists a\neg\exists f(P(w,f)\wedge Q(f,a))$
   - $\forall w\exists a\forall f\neg(P(w,f)\wedge Q(f,a))$
   - $\forall w\exists a\forall f(\neg P(w,f)\vee\neg Q(f,a))$
3. ”对于每位妇女，存在一条航线，使得对所有的航班，这位妇女要么没有搭乘过这个航班，要么该航班不在这条航线上”

# Part VI

## 1.6 推理规则

# Outline

# 命题逻辑的论证

- 命题逻辑中的论证是一个命题序列。除了最后的命题外，所有的命题都叫做前提，最后的命题是结论。
- 一个论证是有效的，如果它的所有前提为真蕴含着结论为真。
- 论证形式是一种有效的论证，无论什么命题被代入它的命题变量中。
- 如果前提是 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，结论是 q 则 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ 是永真式。
- 推理规则都是简单的论证形式，可以用于构造更复杂的论证形式。

# Outline

# 命题逻辑的推理规则：假言推理

论证的形式化表示：

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

相应永真式：
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

例：
令 p 表示"今天正在下雪"
令 q 表示"我将学习离散数学"

如果今天下雪，我将学习离散数学。
今天正在下雪

因此，我将学习离散数学

# 命题逻辑的推理规则：拒取式

论证的形式化表示：

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

相应永真式：

$$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

例：
令 p 表示”今天正在下雪“，
令 q 表示”我将学习离散数学“

如果今天下雪，我将学习离散数学。
我将不会学习离散数学。

因此，今天没下雪。

# 命题逻辑的推理规则：假言三段论

论证的形式化表示：

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

相应永真式：

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

例：

令 p 表示”今天正在下雪“，

令 q 表示”我将学习离散数学“令 r 表示”我将获得 A。“

如果今天下雪，我将学习离散数学。

如果我学习离散数学，我将获得 A。

因此，如果今天下雪，我将获得 A。

# 命题逻辑的推理规则：析取三段论

论证的形式化表示：

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

相应永真式：

$$(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$$

例：

令 p 表示”我将学习离散数学“,
令 q 表示”我将学习数据结构“

我将学习离散数学或者数据结构。
我没有学习离散数学。

因此，我将学习数据结构。

# 命题逻辑的推理规则：附加律

论证的形式化表示：

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

相应永真式：

$p \rightarrow (p \vee q)$

例：

令 p 表示”我将学习离散数学“，
令 q 表示”我将学习数据结构“

我将学习离散数学

因此，我将学习离散数学或数据结构。

# 命题逻辑的推理规则：化简律

论证的形式化表示：

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

相应永真式：

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

例：

令 p 表示”我将学习离散数学“，

令 q 表示”我将学习数据结构“

我将学习离散数学和数据结构

因此，我将学习离散数学。

# 命题逻辑的推理规则：合取律

论证的形式化表示：

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

相应永真式：

$$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$$

例：

令 p 表示”我将学习离散数学“，

令 q 表示”我将学习数据结构“

我将学习离散数学。

我将学习数据结构。

因此，我将学习离散数学和数据结构。

# 命题逻辑的推理规则：消解律

论证的形式化表示：

$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ p \vee q \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

相应永真式：

$$((\neg p \vee r) \wedge (p \vee q)) \to (q \vee r)$$

例：
令 p 表示”我将学习离散数学“，
令 q 表示”我将学习数据结构“令 r 表示”我将学习数据库。“

我将不会学习离散数学或者我将学习数据结构。
我将学习离散数学或数据库。

因此，我将学习数据库或数据结构。

# 命题逻辑的推理规则

表 1 推理规则

| 推理规则 | 永真式 | 名称 |
|---|---|---|
| $p$<br>$p \to q$<br>$\therefore q$ | $(p \land (p \to q)) \to q$ | 假言推理 |
| $\neg q$<br>$p \to q$<br>$\therefore \neg p$ | $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$ | 取拒式 |
| $p \to q$<br>$q \to r$<br>$\therefore p \to r$ | $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$ | 假言三段论 |
| $p \lor q$<br>$\neg p$<br>$\therefore q$ | $((p \lor q) \land \neg p) \to q$ | 析取三段论 |
| $p$<br>$\therefore p \lor q$ | $p \to (p \lor q)$ | 附加律 |
| $p \land q$<br>$\therefore p$ | $(p \land q) \to p$ | 化简律 |
| $p$<br>$q$<br>$\therefore p \land q$ | $((p) \land (q)) \to (p \land q)$ | 合取律 |
| $p \lor q$<br>$\neg p \lor r$<br>$\therefore q \lor r$ | $((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)$ | 消解律 |

# Outline

# 1.6.4 使用推理规则建立论证

- 一个有效论证是一个语句序列。每个命题都是一个前提，或者根据推理规则从前面的命题中推出。最后一句话叫做结论。
- 当有多个前提时，常常需要用到多个推理规则来证明一个论证是有效的。

# 1.6.4 使用推理规则建立论证

**EXAMPLE 6**

- 根据以下假设：
  - 今天下午不是晴天并且今天比昨天冷
  - 只有今天下午是晴天，我们才去游泳
  - 如果我们不去游泳，则我们将乘独木舟浏览
  - 如果我们乘独木舟浏览，则我们将在黄昏前回家
- 利用推理规则，为结论构造一个有效的论证
  - 我们将在日落前到家

解：1. 选择命题变量：

p: 今天下午是晴天；q: 今天比昨天冷；r: 我们将去游泳；s: 我们将乘独木舟浏览；t: 我们将在黄昏前回家

2. 转换成命题逻辑：

前提假设：$\neg p \wedge q, r \to p, \neg r \to s, s \to t$

结论：$t$ .

# 1.6.4 使用推理规则建立论证

如下构造一个论证来证明我们的前提能导致期望的结论。

| 步骤 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\neg p \wedge q$ | 前提引入 |
| 2. $\neg p$ | 化简律，用(1) |
| 3. $r \to p$ | 前提引入 |
| 4. $\neg r$ | 取拒式，用(2)和(3) |
| 5. $\neg r \to s$ | 前提引入 |
| 6. $s$ | 假言推理，用(4)和(5) |
| 7. $s \to t$ | 前提引入 |
| 8. $t$ | 假言推理，用(6)和(7) |

# Outline

# 1.6.7 量化命题的推理规则

- 全称实例
- 全称引入
- 存在实例
- 存在引入

表 2 量化命题的推理规则

| 推理规则 | 名称 |
|---|---|
| $\forall x P(x)$<br>$\therefore P(c)$ | 全称实例 |
| $P(c)$，任意 $c$<br>$\therefore \forall x P(x)$ | 全称引入 |
| $\exists x P(x)$<br>$\therefore P(c)$，对某个元素 $c$ | 存在实例 |
| $P(c)$，对某个元素 $c$<br>$\therefore \exists x P(x)$ | 存在引入 |

# 1.6.7 量化命题的推理规则

**EXAMPLE 13**

证明前提”这个班上有个学生没有读过这本书“和”这个班上的每个人都通过了第一次考试“蕴含结论”通过第一次考试的某个人没有读过这本书“

解：令 C(x) 表示”x 在这个班上“，B(x) 表示”x 读过这本书“，P(x) 表示”x 通过了第一次考试“。
前提是 $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ 和 $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$.
结论是：$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

# 1.6.7 量化命题的推理规则

| 步骤 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ | 前提引入 |
| 2. $C(a) \wedge \neg B(a)$ | 存在实例，用(1) |
| 3. $C(a)$ | 化简律，用(2) |
| 4. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ | 前提引入 |
| 5. $C(a) \rightarrow P(a)$ | 全称实例，用(4) |
| 6. $P(a)$ | 假言推理，用(3)和(5) |
| 7. $\neg B(a)$ | 化简律，用(2) |
| 8. $P(a) \wedge \neg B(a)$ | 合取律，用(6)和(7) |
| 9. $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$ | 存在引入，用(8) |

# Outline

# 1.6.8 命题和量化命题推理规则的组合使用

- 全称假言推理

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ P(a)\text{，其中 } a \text{ 是论域中一个特定的元素} \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

- 全称拒取式

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \neg Q(a)\text{，其中 } a \text{ 是论域中一个特定的元素} \\ \hline \therefore \neg P(a) \end{array}$$

# 回到苏格拉底的例子

- 设命题函数 M(x) 表示" x 是一个人 ", D(x) 表示" x 皆有一死 "。指定论域为所有人。
- 这两个前提是：
  - $\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$
  - $M(Socrates)$
- 结论是： $D(Socrates)$

# 1.6 练习题

Exercise 25、26、27、28、29 in Section 1.6.

# Part VII

## 1.7 证明导论

# Outline

# 数学证明

- 一个证明是建立数学语句真实性的有效的论证。
- 在数学，计算机科学和其他学科中，常使用较短的非形式化证明。
    - 在一个步骤中经常使用多个推理规则。
    - 有些步骤会被省略
    - 不会显式地列出所用到的假设公理和推理规则。
    - 更容易理解和解释。
    - 但它也更容易导致错误。
- 证明有许多实际的应用：
    - 验证计算机程序是否正确。
    - 建立安全的操作系统。
    - 在人工智能领域做推理。
    - 证明系统规范说明是一致的。

# 1.7.2 一些专用术语

- 定理是一个能够被证明是真的语句。
- 证明是建立定理真实性的一个有效论证。
- 引理是一个不太重要但有助于证明其他结论的定理。
- 推论是从一个已经被证明的定理可以直接建立起来的一个定理。
- 猜想是一个被提出认为是真的命题。当猜想的一个证明被发现时，猜想就变成了定理

# Outline

# 1.7.3 定理陈述

- 许多定理断言一个性质相对于论域（比如整数或实数）中的所有元素都成立。
- 通常全称量词被数学里的标准约定所省略。
- 例如"如果 x>y，其中 x 和 y 是正实数，则 $x^2 > y^2$ 它意味着"对于所有正实数 x 和 y, 如果 x>y，则 $x^2 > y^2$"

# 1.7.4 证明定理

- 许多定理有如下形式：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- 为了证明它们为真，其中 c 是定义域的任意元素 $P(c) \rightarrow Q(c)$
- 应用全称引入规则。
- 所以，我们必须证明某种形式：$p \rightarrow q$

# 证明条件语句：$p \to q$

- 平凡证明：如果我们知道 q 是真，则 $p \to q$ 为真。
  - 证明命题 P(0) 为真，其中 P(n) 是" 如果 a 和 b 是满足 $a \geq b$ 的正整数，则 $a^n \geq b^n$，论域是非负整数集合。"
- 空证明：如果我们知道 p 是假，则 $p \to q$ 为真。
  - 证明命题 P(0) 为真，其中 P(n) 是如果 n>1，则 $n^2 > n$

# Outline

# 偶数和奇数

**定义**

整数 $n$ 是偶数，如果存在一个整数 $k$，使 $n=2k$；整数 $n$ 是奇数，如果存在一个整数，使 $n = 2k+1$.

# 证明条件语句：$p \rightarrow q$

直接证明法：假设 p 为真。使用推理规则、公理和逻辑等价来表明 q 也必须为真。

**EXAMPLE 1**

给出定理“如果 n 是奇数，则 $n^2$ 是奇数”的直接证明。

# Outline

# 证明条件语句：$p \to q$

反证法：假设 $\neg q$，证明 $\neg p$ 必须成立。这有时被称为间接证明法。如果我们给出一个关于 $\neg q \to \neg p$ 的直接证明，那么我们就有了关于 $p \to q$ 的证明。

**EXAMPLE 3**

证明如果 n 是一个整数且 3n + 2 是奇数，则 n 是奇数。

# 证明命题：p

归谬证明法：为了证明 p，假设 $\neg p$，并推出一个矛盾式如 $r \wedge \neg r$ (无论 r 是什么). 既然我们已经证明了 $\neg p \rightarrow F$ 为真，那么逆否命题 $T \rightarrow p$ 也成立，从而 p 为真。

**EXAMPLE 10**

证明任意 22 天中至少有 4 天属于每星期的同一天。

# 1.7.8 证明中的错误

证明“1=2”

*“Proof:”* We use these steps, where $a$ and $b$ are two equal positive integers.

| Step | Reason |
|---|---|
| 1. $a = b$ | Given |
| 2. $a^2 = ab$ | Multiply both sides of (1) by $a$ |
| 3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$ | Subtract $b^2$ from both sides of (2) |
| 4. $(a-b)(a+b) = b(a-b)$ | Factor both sides of (3) |
| 5. $a + b = b$ | Divide both sides of (4) by $a - b$ |
| 6. $2b = b$ | Replace $a$ by $b$ in (5) because $a = b$ and simplify |
| 7. $2 = 1$ | Divide both sides of (6) by $b$ |