高等数值分析第一次实验作业

姓名：李伟伟 学号：2019312462 学院：核学院

注意：矩阵规模不得小于 1000 阶。每个题目需分别计算由递推式或公式计算的残差范数和由定义计算的残差范数，并进行比较。

说明：

（1）本次实验作业所使用的软件是 matlab

（2）本次实验所产生的对称正定矩阵方法依据下面的定理

定理1.1.2：若$A \in R^{n\times n}$,且存在正交矩阵$Q \in R^{n\times n}, Q^TQ = I$,使得

$A = Q\Lambda Q^T$成立，

其中$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$是$A$的特征值，

Q的第i个列向量q_i是矩阵A对应的λ_i的特征向量.

（已证明）：若Q是单位正交矩阵时，矩阵Λ的特征向量就是矩阵A的特征向量

1. 构造例子说明 CG 的数值形态.当步数=阶数时 CG 的解如何？当 A 的最大特征值远大于第二个最大特征值，最小特征值远小于第二个最小特征值时方法的收敛性如何？

解：以 1000 阶对称正定矩阵为例说明 CG 的数值形态

（1） 分别构造 1000 阶的对称正定矩阵 A1、A2、A3，中间特征值分布不同，同时设置了初始残差r_0由$m = 10, 100, 1000$个A_1特征向量组合而成

$$n = 1000;$$
$$Q = orth(rand(n, 1));$$
$$D1 = \mathrm{diag}([1, linspace(10, 950, n-2), 1000]);$$
$$D2 = \mathrm{diag}([1, linspace(300, 800, n-2), 1000]);$$
$$D3 = \mathrm{diag}([1, linspace(500, 600, n-2), 1000]);$$
$$r1 = Q(1:n, 1:10)*ones(10, 1);$$
$$r2 = Q(1:n, 1:100)*ones(100, 1);$$
$$r3 = Q(1:n, 1:1000)*ones(1000, 1);$$
$$A1 = Q*D1*Q'$$
$$A2 = Q*D2*Q'$$
$$A3 = Q*D3*Q'$$

（2） CG 法计算递推公式残差范数和定义残差范数，CG 法收敛曲线见图 1.1，图 1.2

三个对称正定矩阵的条件数均为

$$\kappa = 1000$$

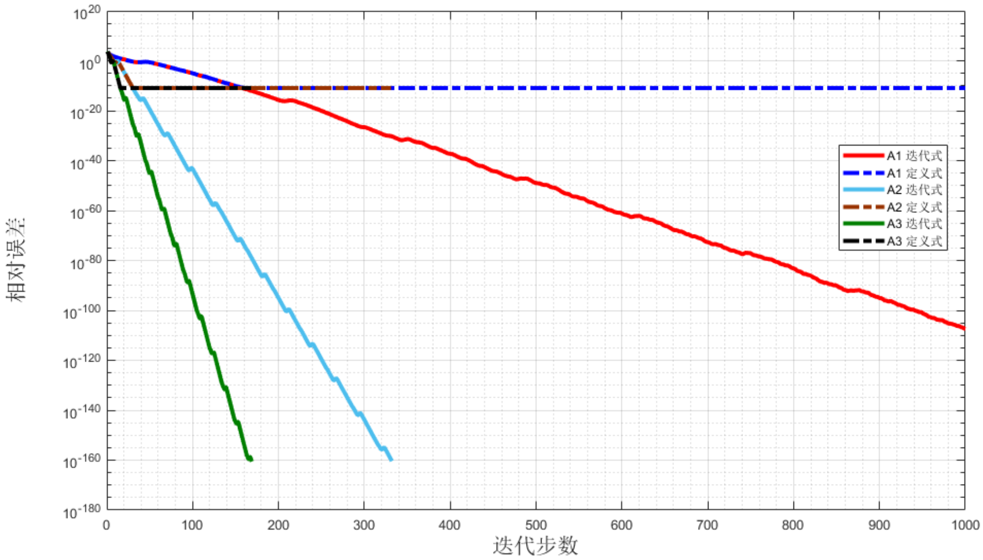

图 1.1

分析图 1.1：图像纵坐标有误，改为相对残差！

（1）观察递推式的残差范数和定义的残差范数，发现在相对残差 1e-10 范围内是重合的，当小于这个范围时定义残差范数便不能反映 CG 法的收敛性

（2）比较 A1,A2,A3 的递推式残差范数和迭代步数的关系，可以发现 A 的中间特征值分布对 CG 的收敛速度有很大影响，且分布满足

$$\lambda_1 \gg \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1} \gg \lambda_n$$

时收敛速度最快

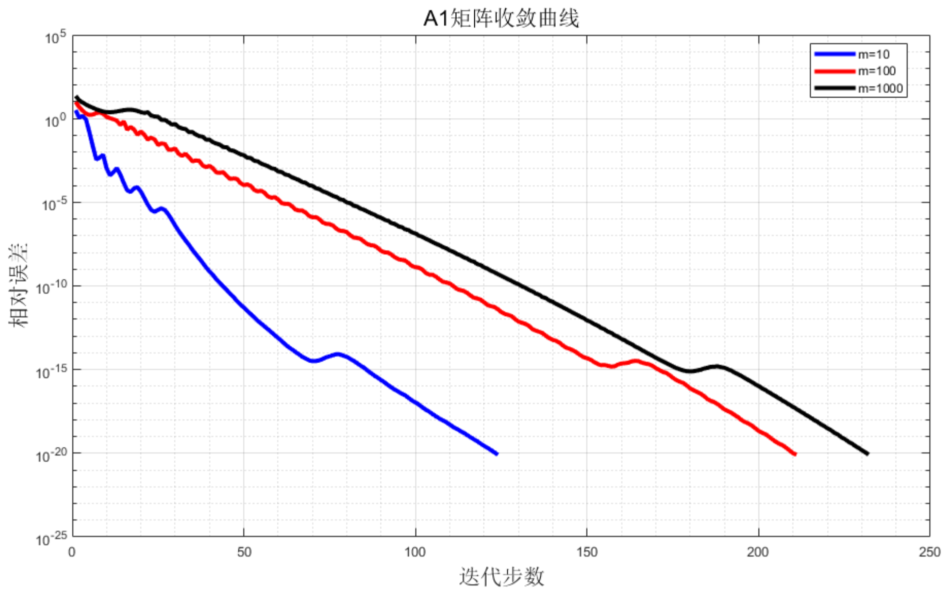

图 1.2

分析图 1.2：

说明：停机常数$\varepsilon=1e-20$，图像纵坐标有误，改为相对残差！

（1）A1 的特征向量对 CG 的收敛影响很大，如果r_0是由 m 个特征向量组合而成，m 的个数越小，其迭代步数越少。

2. 对于同样的例子，比较 CG 和 Lanczos 的计算结果

（1） 构造 1000 阶的对称正定矩阵 A1 和 1000 阶对称非正定矩阵 A2

$$n=1000;$$
$$Q=orth(rand(n,1));$$
$$D1=\text{diag}(rand(n,1));$$
$$D2=\text{diag}(linspace(-1,100,n));$$
$$A1=Q*D1*Q';$$
$$A2=Q*D2*Q';$$

（2） CG 法和 Lanczos 计算递推公式残差范数和定义残差范数，对称正定矩阵 A1 的 CG 法收敛曲线和 Lanczos 法收敛曲线见图 2.1，对称非正定矩阵 A2 的 CG 法收敛曲线和 Lanczos 法收敛曲线见图 2.2

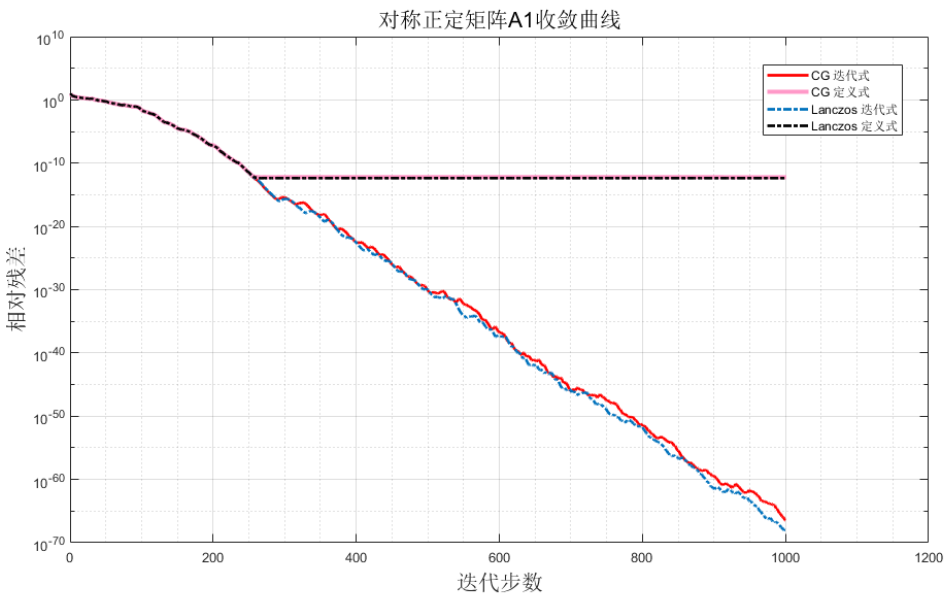

图 2.1

分析图 2.1：

（1）观察递推式的残差范数和定义的残差范数，发现在相对残差 1e-15 范围内是重合的，当小于这个范围时定义残差范数便不能反映 CG 法和 Lanczos 法的收敛性。

（2） 对于对称正定矩阵，使用 CG 法和 Lanczos 法，其收敛速度基本一致

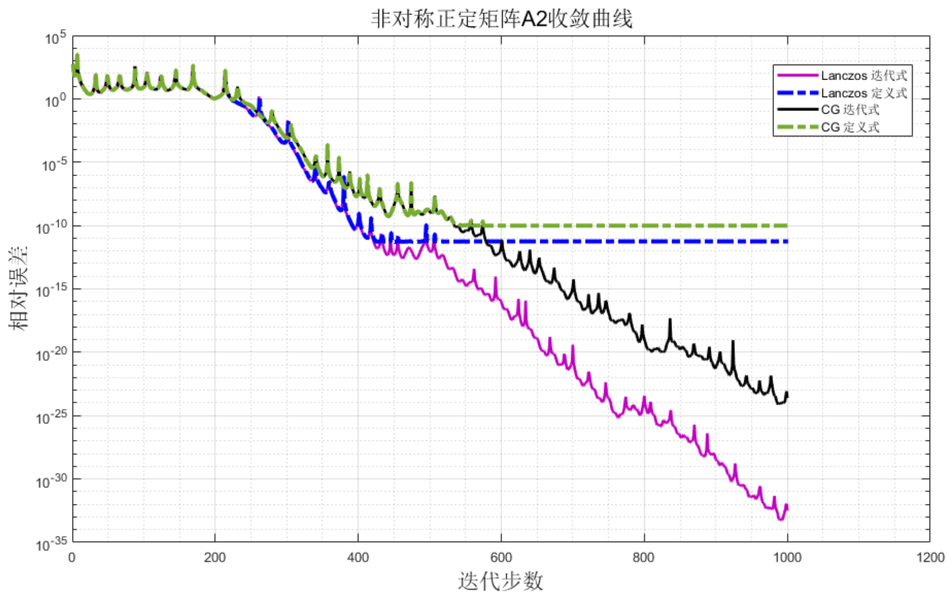

图 2.2

分析图 2.2：图像纵坐标有误，改为相对残差！

（1） Lanczos 方法同时可以解对称非正定矩阵问题，而 CG 方法在理论上不适用，但是实际上可以进行运算，如本题的 A2。

（2） 比较两者的收敛速度，发现 Lanczos 方法的收敛速度要快于 CG 方法，但在算法上所用时间要高于 CG 法。

（3） 对于相同的停机误差，两个函数迭代次数相同，但 CG 方法精度更高。

3. 当 A 只有 m 个不同特征值时，对于大的 m 和小的 m，观察有限精度下的 Lanczos 方法如何收敛

（1） 构造 1000 阶分别只有 500，300，100 个不同特征值的对称正定矩阵 A1，A2，A3

$$n = 1000;$$
$$m1 = 500; m2 = 300; m1 = 100;$$
$$Q = orth(rand(n,n));$$
$$D1 = \operatorname{diag}([repelem(10, n - m1), linspace(15, 1000, m1)]);$$
$$D2 = \operatorname{diag}([repelem(10, n - m2), linspace(15, 1000, m2)]);$$
$$D3 = \operatorname{diag}([repelem(10, n - m3), linspace(15, 1000, m3)]);$$
$$A1 = Q*D1*Q';$$
$$A2 = Q*D1*Q';$$
$$A3 = Q*D1*Q';$$

（2） 利用 Lanczos 法计算三个矩阵的迭代残差范数和定义残差范数，并绘制收敛曲线，见图 3.1

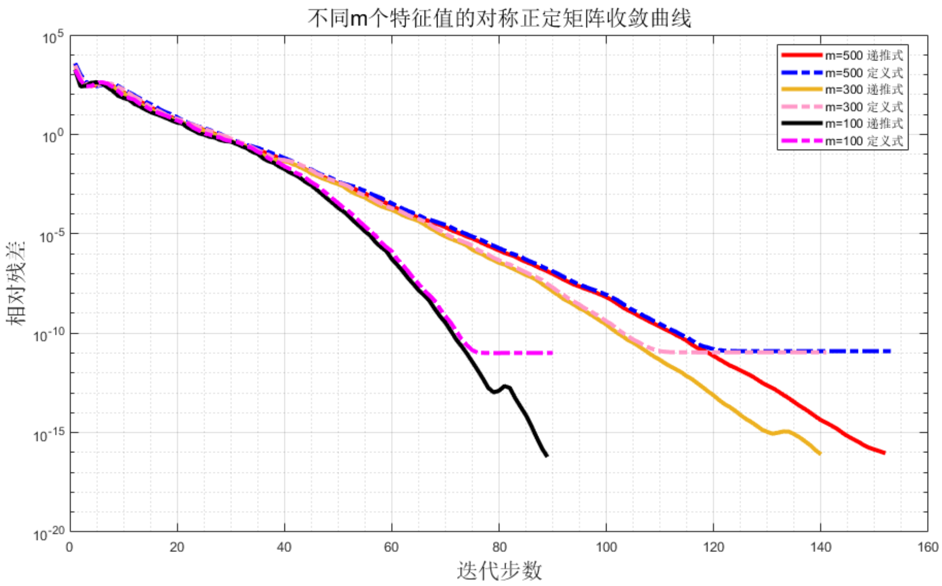

图 3.1

分析图 3.1：

说明：停机常数 $\varepsilon = 1e-16$

不同特征值数 m	100	300	500
迭代步数	89	140	152

表 1

（1） 在有限精度下，m 较小时，迭代次数与之相近，m 越大收敛速度越慢，但迭代步数基本一致。

（2） 若 A 只有 m 个不同特征值，则 Lanczos 方法 m 步必然收敛 $x_m = x^*$。

4. 取初始近似解为零向量，右端项 b 仅由 A 的 m 个不同特征向量的线性组合表示时，Lanczos 方法的收敛性如何？数值计算方法中方法的收敛性和 m 的大小关系如何？

（1） 构造 1000 阶对称正定矩阵，并设置 b 仅有 1000，500，100，10 个不同特征向量的线性组合表示

$$n = 1000;$$

$$m1 = 1000; m2 = 600; m3 = 200; m4 = 10;$$

$$D = \mathrm{diag}(linspace(1, 1000, n));$$

$$Q = orth(rand(n, n));$$

$$A = Q*D*Q';$$

$$b1 = X1(:, 1:m1)*rand(m1, 1);$$

$$b2 = X1(:, 1:m2)*rand(m2, 1);$$

$$b3 = X1(:, 1:m3)*rand(m3, 1);$$

$$b4 = X1(:, 1:m4)*rand(m4, 1);$$

$$x_0 = zeros(n, 1);$$

（2） 利用 Lanczos 方法计算不同 b 时的迭代残差范数和定义残差范数，并绘制收敛曲线，见图 4.1

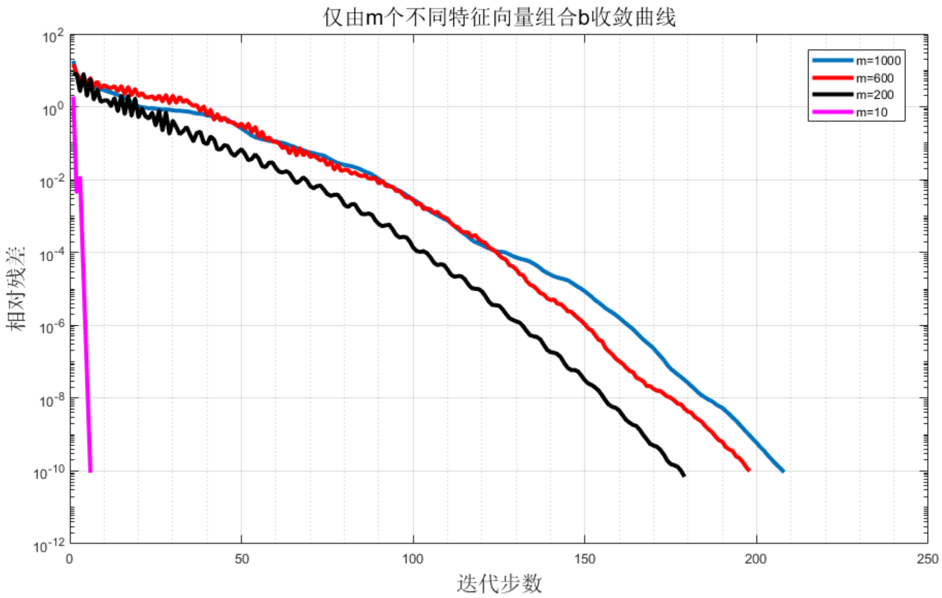

图 4.1

分析图 4.1:

说明：停机常数$\varepsilon=1e-10$

m 个不同特征向量	10	200	600	1000
迭代步数	6	175	201	211

表 2

（1） 对比不同 m 个特征向量组合而成的 b 所计算出的收敛曲线，可以看出 Lanczos 方法至多 m 步收敛，$x_m=x^*$，m 较小时，迭代步数接近于 m 值，m 越大收敛速度越慢，但是迭代步数增长缓慢，收敛速度基本一致。

（2） 从曲线可以看出，m 较大时，迭代式残差值会出现明显的波动，从而导致延迟收敛，原因可能是机器精度的限制导致迭代过程中，正交阵的正交性会消失，从而导致计算出的残差范数会有明显波动。

5. 构造对称不正定的矩阵，验证 Lanczos 方法的近似中断，观察收敛曲线中的峰点个数和特征值的分布关系；观察当出现峰点时，MINRES 方法的收敛性态怎样

（1） 构造 5 个 1000 阶对称不正定矩阵 A1，A2，A3，A4，A5，其正负特征值分布不同

$$n = 1000;$$
$$D1 = \mathrm{diag}(linspace(-1, 1000, n));$$
$$D2 = \mathrm{diag}(linspace(-10, 1000, n));$$
$$D3 = \mathrm{diag}(linspace(-100, 1000, n));$$
$$D4 = \mathrm{diag}(linspace(-500, 1000, n));$$
$$D5 = \mathrm{diag}(linspace(-1, 1000, n));$$
$$Q = orth(rand(n, n));$$
$$A1 = Q^*D1^*Q';$$
$$A2 = Q^*D2^*Q';$$
$$A3 = Q^*D3^*Q';$$
$$A4 = Q^*D4^*Q';$$
$$A5 = Q^*D5^*Q';$$

（2） 利用 Lanczos 方法计算正负特征值分布不同时的系数矩阵残差范数，收敛曲线如图 5.1

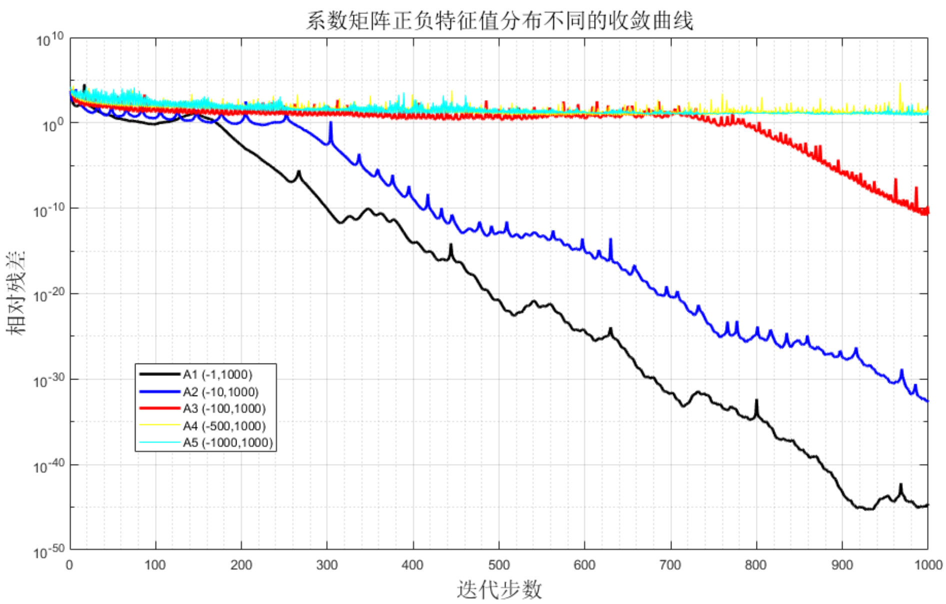

图 5.1

（3） 利用 MINRES 方法计算 A1 时的残差范数，收敛曲线如图 5.2

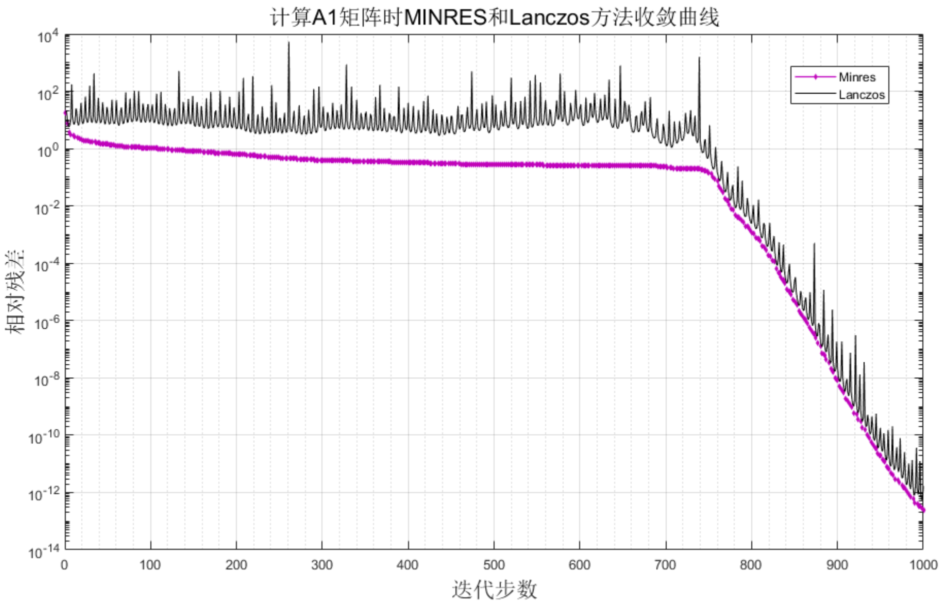

图 5.2

特征值分布	(-1，1000)	(-10，1000)	(-100，1000)	(-500，1000)	(-1000，1000)
峰点个数	71	81	180	387	486

表 3

分析图 5.1，5.2：

（1） 正负特征值分布越对称，峰点个数越多，收敛性越差，如图 5.1，A4，A5 使用 Lanczos 方法已经不收敛了。

（2） MINRES 方法的残差范数是单调递减的，Lanczos 方法在特征值有正有负时残差范数会出现振荡，存在峰点，但是 MINRES 方法没有。