关于极值与期望不足的金融风险测量方法的述评

A Review of Extreme Value and Expected Shortfall Methods for Financial Risk Measuring

陈秋雨
（上海期货交易所博士后工作站，上海 200122）

摘要： 本文梳理了基于极值理论的BMM方法、重现水平和POT方法的VaR风险值测量文献，然后对期望不足的风险测量进行梳理综述,最后对各种方法进行了比较。文献显示出传统的VaR已经失去了价值，极值方法更能描述尾部风险，但极值方法对超越VaR之后的风险值无能为力，因此应用期望不足方法来衡量超越VaR之后的风险值，形成对极值方法的有效补充。

关键词： 金融风险　极值理论　重现水平　期望不足
中图分类号　F224　　**文献标识码**　A

1952年，诺贝尔经济学奖获得者Markovitz发表了《证券组合投资》一文，提出了用方差来度量风险，为数量风险管理开创了一个新纪元。自此，对金融风险的研究蓬勃发展，随后半方差、下偏矩、绝对离差、下方风险等方法一一出现，但由于需要满足一系列的前提假设，往往偏离现实而得不到满足，所以准确性小，逐渐被新发展出来的风险价值（VaR）所替代。VaR的发展经历了传统的阶段，包括有方差–协方差法、历史模拟法、蒙特卡罗方法。由于金融市场大多被证实具有尖峰厚尾现象，所以人们引进了极值理论来测量VaR，专注于处理尾部风险。但VaR忽视了超越VaR之后的尾部风险，对于超过VaR风险值后的损失一无所知，从而对金融海啸、自然灾害等极端情况无效，因此人们利用期望不足（Expected Shortfall）来弥补了VaR对超过VaR值之后无能为力的缺陷。本文对近年来应用到金融领域的极值理论及期望不足风险测量方法进行梳理和综述。

一、基于极值理论的VaR风险测量

20世纪90年代以来，金融衍生品迅速发展，市场风险日益突出。1993年J.P.Morgen集团创立了VaR（value at risk）应用于内部风险衡量和管理，VaR指的是

一定概率 p 下，某一金融资产或组合在未来特定的持有期内的最大可能损失，也即金融资产在持有期 l 内以 $1-p$ 的概率遭受的潜在损失小于或等于VaR。VaR得到了巴塞尔银行监理委员会的介绍和推荐，很快地，无论是金融机构还是养老基金等都将其应用到资本配置和业绩评估中，监管部门甚至要求证券公司等定期公布VaR值。经过Longerstaey（1995）、Philippe（1996）[1]、Bouchaud和Potters (1999)、Berkowitz (1999)[2]等人发展并改进，VaR渐渐发展成为目前最流行的风险度量方法，对VaR的确定、衡量以及管理已逐渐建立起一个整体的框架。

（一）极值理论及早期应用

传统的VaR计算方法一般包括有方差-协方差法、历史模拟法、蒙特卡罗方法，这些方法在市场正常波动下较为准确地衡量了资产组合的市场风险，但却无法了解尾部的分布详情，而金融市场已被证实具有尖峰厚尾现象，这样金融市场发生极端值的概率比正常的市场要高，且这些极端值的出现具有聚集现象，一旦这些小概率事件发生，其带来的后果将是毁灭性的，这样的例子在现实中比比皆是，为此，人们将极值理论引进了风险值的计算当中。与传统的风险计算方法不同的是，极值专注于处理尾部，满足人们对巨额损失关注的要求，并具有样本外推的性质。

Bertkiewicz在1922年最早开始了极值的研究，他的研究表明，样本的最大值服从一个新的分布，即使整体样本服从正态分布，这是最早的极值理论萌芽。早期的极值理论研究的代表者主要有Tippett、Fisher、Frechet、Gumbel、Weibull等人。他们对极值理论作出了巨大的贡献，并构造了后来被Fisher和Tippett（1928）总结为极值类型定理的三个分布[3]，根据尾部参数k的不同，该定理可分为Gumbel、Frechet和Weibull分布。Jenkinson（1955）将上面的三种分布整合成一个形式，使人们在建模之前不必对其参数进行预先估计并作分布选择，这个统一的形式就是广义极值分布（Generalized Extreme Value Distribution，GEVD）[4]，它们在水文学、气象学和制造业质量控制等方面取得了巨大的成功。

虽然极值早就应用到了其他领域，但一直到1988年，Akging、Geoffrey和Seifert对拉美汇率的分布进行研究后，极值理论才慢慢被应用于金融领域。Harvey、Ruiz和Sharphard（1994）以及Jacquier、Polson和Rossi（1994）为了解决波动聚集的问题将时变的条件异方差用于波动率模型，从而提出随机波动（SV）模型，较好地反映了资产报酬分布的尖峰厚尾和波动聚集现象，但仍未完全解决厚尾现象的问题。Longin（1996）用极值方法对1885～1990年的S&P 500指数每日股价共29,641个样本量进行研究，发现其最大值与最小值的分布近似服从Frechet分布，如果用正态分布来刻画会低估其风险[5]。Broussard和Booth（1998）采用了极值的方法研究了CBOT的玉米期货和公债期货的保证金设置问题，结果发现期货涨跌幅限制影响了极值分布的估计结果。Embrechts（1999）认为传统的VaR方法的前提假设是正态分布，实际上金融数据不但是自相关的、厚尾的，

更有可能存在波动聚集和异方差情况，因此传统的计算方法会低估VaR的值。Jorion（2000）认为极值理论不需要事先对样本的分布进行假设，更能捕捉尾部的性质，降低了模型的风险，并且认为极值理论特别适合于计算高置信水平的风险值，尤其是超过99%以上置信水平的风险值[6]。Longin（2000）对S&P 500指数日收盘价进行研究，分别比较了正态分布、历史模拟法和极值理论方法，结果显示两端均有厚尾现象，并强调极值理论优于其他方法[7]。Burridge（2000）对亚洲六国股票价格进行估计，结果显示1984～1996年金融风暴期间日收益报酬率存在尖峰厚尾现象，利用极值的方法比历史模拟法、方差—协方差方法和蒙特卡罗方法都更为精确。

（二）BMM方法与POT方法

McNeil（1999）根据样本资料选取方法的不同，把极值理论分为区块极大值法（Block Maximum Model，BMM）和超越门槛值法（Peak-Over-Threshold Model，POT）两大类[8]。BMM出现得比较早，由Fisher和Tippett（1928）提出，是一种较为传统的方法，主要思想是将样本分为n个区间，每个区间找出最大值或最小值，这些极值渐近地服从广义极值分布（GEVD），并用GEVD去估算其参数及VaR风险值。

超越门槛法则出现得比较晚，由Balkema和Haan（1974）[9]以及Pickands（1975）[10]提出，主要思想是选定一个门槛值，超过门槛值的被选为极值，然后对这些极值进行分析。POT并不着重研究最小值或最大值，所以无需对样本进行分区，也就不存在n的选择问题，而且还可将其他的解释变量纳入到模型中。POT着重研究的是超过某个门槛值η的超出量以及超越的时间，从而还可以处理波动聚集性问题。POT模型需要满足一些前提假设：一是超越量彼此相互独立且服从广义帕累托分布（GPD）；二是超越量与其发生的时间相互独立；三是超越量发生的时间服从泊松分布。POT重点关心两个问题：一是超越的量有多少；二是什么时间超越了门槛值，超越时间可以反映这种稀有事件发生的强度和聚集性。Balkema和Haan（1974）的研究表明门槛值η越大越接近无穷大，其超越值的分布越接近广义帕累托分布。Pickands（1975）的研究认为超过门槛值的极值分布服从广义帕累托分布。

关于门槛值的选择，Hall（1990）提出尾部指数的均方差（MSE）最小时的值最为理想；Gilli（2000）等提出可以用QQ图或者平均超越图来选择门槛值[11]；Gavin（2000）认为不可能每天都重新选择新的门槛值，因此提出直接用90%的分位数作门槛[12]；Neftci（2000）提出用标准差的1.65倍作为门槛值，相当于正态分布的5%分位数。

McNeil和Frey（2000）将GARCH模型融入广义帕累托分布中去计算风险值，也就是将数据用GARCH模型滤波后剩下的残差再应用到广义帕累托分布上来，以此分析时间序列中的条件异方差和收益率波动聚集问题[13]。Bali（2003）用基于广义极值分布的BMM方法和基于广义帕累托分布的POT方法分别估计了1950～1998年美国债

券市场的风险值，结果显示用广义极值分布中的Frechet分布和帕累托分布较好地描述了市场波动剧烈时的风险状况。Viviana（2003）对智利股价指数、汇率和国库券等数据进行研究，证明条件帕累托分布是计算风险值的最好方法[14]。Ramazan等（2003）实证表明在S&P 500指数中，条件帕累托分布的估计效果让人满意。Byström（2004）用条件极值理论对波动平稳和剧烈的市场分别用BMM方法和POT方法进行研究，结果表明这些方法可以有效地处理数据尾部的情况。Cotter（2007）对欧洲十二种股票指数期货运用了极值VaR理论分析，采取的是BMM方法，分析其在无条件分布和有条件分布环境下的不同，结果发现无条件单期和多期估计偏离了正态分布假设，同样的情况也发生在条件分布假设下，从而认为极值方法的结果比其他方法更为可靠[15]。

（三）重现水平

重现水平（Return Level）同样也是极值分布下的风险测量方法，最早应用于水文领域，它同样也是基于子区间的一种广义极值分布下的风险测量方法。重现水平其实是水文领域中的称呼，在风险管理中其实就是VaR，表示在给定的概率水平下的广义极值分布的分位数，本质上它也是一个门槛值。这个分位数用公式表示如下：

$$p(r_{n,i} < R_{n,g}) = \frac{1}{g}$$

上式中的 $r_{n,i}$ 为第 i 个子区间的最小值，$R_{n,g}$ 为重现水平，n和g依然为子区间的长度和子区间个数，上式表达的意思是从极小值的角度出发，g个子区间中有一个收益率低于重现水平的概率为1/g，也即平均每g个区间会出现一次超过重现水平 $R_{n,g}$ 的极端事件。标准化后的 $r_{n,i}$ 在子样本区间足够大时是渐进服从广义极值分布的，因此重现水平可表达如下：

$$R_{n,g} = \beta_n + \frac{\alpha_n}{k}\{[-\ln(1-\frac{1}{g})]^k - 1\} \qquad k \neq 0$$

其中 k 为形状参数，α_n 为尺度参数，β_n 为位置参数。关于重现水平的风险研究文献相当少见，主要应用在水文学和气候学方面，Cooley等（2007）对美国科罗拉多州的降雨量重现水平进行了研究，Guillou等（2009）利用美国科林斯堡1948~2001年的降雨量讨论了连续和非连续随机变量的重现水平边界[16]。重现水平也是对极端事件进行评估的有效步骤，近年来开始被金融界关注。

二、关于期望不足的风险测量

到目前为止，VaR在应用中占据着主流位置，主要原因是它具有很多优点，比如直观，可以将不同的资产、不同的头寸转换成货币金额进行统一衡量等。但Artzner等（1999）认为充当风险管理的工具必须满足一致性的要求，从而提出了影响整个金融界的一致性公理（Coherent Measure of Risk），并成为了评价金融风险的一个标准[17]。一致性公理内容包括次可加性、正奇次性、单调性、平移不变性，其中次可加性最重要。

次可加性公理（Subadditivity）：对于任意一个 $x \in R$ 和 $y \in R$，令 $\rho(x)$、

$\rho(y)$ 分别表示其风险衡量指标，则 $\rho(x+y)\le\rho(x)+\rho(y)$。次可加性公理表示对于任意两个投资组合，其合并后所形成的新组合的总风险必然小于或等于合并前的风险总和，也即资产组合的风险不可能大于各个资产风险之和，否则即使单个资产已经设置了足够的保证金，但还是不能保证其组合的保证金足以抵抗风险，这样会导致监管措施失效，也不符合客观事实。

正奇次性公理（Positive Homogeneity）：若 $\lambda\in R$，则 $\rho(\lambda x)=\lambda\rho(x)$。正奇次性公理表示如果一个投资组合在不改变其资产分配的情况下增加 λ 倍规模，则总风险也同样增加 λ 倍，表明投资风险与投资规模成正比关系。

单调性公理（Monotonicity）：若 $x\le y$，则 $\rho(x)\le\rho(y)$。单调性公理说明一个投资组合在市场状态下获取的报酬比另一个投资组合低，则表明这个投资组合的风险不应该比另一个组合的投资风险高。

平移不变性公理（Translation Invariance）：若 $a\in R$，r_f 为无风险利率，则 $\rho(x+ar_f)=\rho(x)-a$。平移不变性公理说明，如果一个投资组合加入一个无风险资产（如现金或国债等），则这个组合的风险必然会呈等额下降。

以上四个公理形成了度量风险的标准，其中次可加性公理最为重要。Follmer和Schied（2002）后来改进了一致性公理的风险度量标准，把次可加性和正奇次性发展成凸性（Convexity）标准，也就是说分散投资不会增加风险[18]。而对于非正态分布的情况，VaR却不满足凸性，也即资产组合的风险可能大于各个资产风险之和，即使单个资产已经设置了足够的保证金，但还是不能保证其组合的保证金足以抵抗风险，这点并不合理，同时还意味着用VaR对资产进行优化时，可能存在多个局部最优解，在数学上难以处理。另外，VaR忽视了尾部风险，反映的是市场正常情况下的风险，而对于金融海啸、自然灾害等极端情况就失效了。Basak和Shapiro（2001）的研究证实了在衡量单一金融资产风险时，尾部的极端损失无法通过VaR表现出来[19]。Yamai和Yoshiba（2002）也证明了当小概率事件发生时，也即存在巨额损失时，VaR无法反映资产的尾部风险[20]。

为了改进VaR的这些缺陷，Artzner（1999）提出了CVaR模型，即条件VaR，又称为条件尾部期望（CTE）、期望不足（Expected Shortfall，ES），它们从不同的角度说明了同一个问题。但它无法对低频率、高额度的损失进行适当的调整。Acerbi和Taschen（2001）在修正前人研究的基础上提出了新的期望不足定义，并证明其符合一致性公理[21]。

期望不足被定义为在损失超过VaR后的条件期望损失，是一种平均超越损失。它与VaR之间的关系可以从图1中显示，ES就是在VaR的基础上加上超过VaR之后的损失超越量的平均期望值。在给定的概率下，ES可表示为式2.1，利用广义帕累托分布的性质，最终ES由式2.2求出。

$$ES = E(r|r>VaR) == VaR + E(r-VaR|r>VaR) \quad (2.1)$$

$$ES = \frac{VaR + \varphi(\eta) + k\eta}{1+k} \quad (2.2)$$

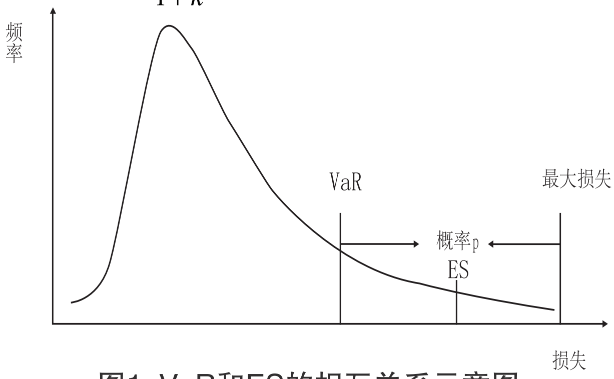

图1 VaR和ES的相互关系示意图

VaR反映的是可忍受的风险值，而ES反映的是伤害性的风险值。Rockafeller和Uryasev（2000）的研究结果证明了在进行资产组合优化时发现VaR无法考虑风险分散效果以及超越了VaR之后的情况，而ES却符合凸性标准，考虑了超越VaR之后的风险，表现出比VaR更优良的性质[22]。Ogryczak和Ruszczy ń ski（2001）用均值风险模型证明ES是符合一致性公理的风险测度。Acerbic和Tasche（2001）证明了VaR会违反次可加性，这等同于否定分散投资可以降低风险的作用，而ES模型则没有违反这个性质。Yamai和Yoshiba（2005）的研究表明ES模型在极端情况下能很好的估计尾部风险，从而避免了VaR的缺陷。Elsinger、Lehar和Summer（2006）对欧洲银行系统风险进行评估，发现VaR的估计不能很好地估算总体风险，而ES计算的结果与VaR不一样。Liang 和Park（2007）对对冲基金1995～2004年的交易回报率分别用了VaR和ES等方法进行了比较，发现ES能很好地捕捉左尾风险，较好地解释了对冲基金回报率交叉部分的方差。Timotheos和Skiadopoulos（2008）将ES运用到货运风险和货运衍生品市场，结果表明ES是风险的一致性估计。

三、综述小结

传统的VaR风险测量已经慢慢显示出其缺陷，应用也因此而受到很多局限。而基于广义极值分布和帕累托分布的极值理论估算的VaR风险值表现出了比传统VaR风险测度更优良的性质，重现水平其实就是VaR，也是对极端事件进行评估的有效步骤。但VaR反映的是可忍受的风险值，它忽视了超越VaR之后的尾部风险，对于超过VaR风险值后的损失一无所知，反映的是市场正常情况下的风险，而对于金融海啸、自然灾害等极端情况无效。期望不足（ES）不需要事先假设样本的分布，反映了超过VaR值之后的平均损失，正好弥补了VaR对超过VaR值之后无能为力的缺陷，反映的是伤害性的风险值，能更好地反映极端情况下的风险。尤其是雷曼兄弟的倒闭，使VaR的可靠性受到质疑，ES越来越被人关注。将BMM与ES相结合，或者将POT与ES相结合，再同时考虑重现水平风险值，对金融资产实行三限管制更有利于风险管理。由于这些理论在国内仅限于介绍和应用，对其改进或创新几乎没有，关于ES及其拓展模型Mean-ES（去均值期望不足）的应用国内文献更是不多见，因此本文未将国内的应用情况进行介绍。

参考文献：

[1] Philippe, J. Risk2: Measuring the risk in value at risk [J]. Financial Analysts Journal, 1996,52(6),47-56.

[2] Berkowitz, J. Evaluating the forecasts of risk models [EB/OL]. http:// www. federal res- eve .gov/pubs/feds/ 1999/199911,1999.

[3] Fisher, R.A.and Tippett, L.H.C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample[J]. Cambridge Philosophical Society, 1928,24(2):180-190.

[4] Jenkinson,A.F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1955,81(348):158-171.

[5] Longin, F. M. The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns[J]. Journal of Business, 1996,69: 383-408

[6] Jorion, P. Value at Risk[M]. NewYork: McGraw- Hill, 2000.

[7] Longin,F.M. From Value at Risk to Stress Testing: the Extreme value Approach [J]. Journal of Baking and Finance, 2000,24:1097-1130.

[8]McNeil, A.J.and Frey, R. Estimation of Tail — Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach [J]. Journal of Empirical Finance, 1999, 7:271-300.

[9]Balkema, A.A.and Haan,L. Residual lifetime at great age[J]. Annals of Probability,1974, 2:792-804.

[10] Pickands, J. Statistical inference using extreme order statistics[J]. Annals of Statistics, 1975,3:119~131.

[11] Hall, P. Using the Bootstrap to Estimate Mean Squared Error and Select Smoothing Parameter in Nonparametric Problems [J]. Journal of Multivariate Analysis, 1990,32: 177-203.

[12]Gavin, J. Extreme Value Theory — An Empirical Analysis of Equity Risk. Working Paper, UBS Warburg, London, 2000.

[13] McNeil, A.J.&Frey, R.. Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach [J]. Journal of Empirical Finance ,2000,7 (3-4):271-300.

[14] Viviana, F. Extreme value theory and value at risk[J]. Revista de Analisis Economico, 2003,18(1): 57-85.

[15] Cotter, J. Varying the VaR for unconditional and conditional environments[J]. Journal of International Money and Fina nce,2007,26:1338-1354.

[16]Guillou, A., Naveau, P., Diebolt, J. and Ribereau, P. Return level bounds for discrete and continuous random variables [J]. TEST ,2009,18(3):584-604.

[17]Artzner, P., Delbaen, F.and Eber, J.M.et al. Coherent Measures of Risk[J]. Mathematical Finance,1999, 3:203~228.

[18]Follmer, H.and Schied, A. Convex Measures of Risk and Trading Constraints [J]. Finance and Stochastics, 2002, 6:429-447.

[19] Basak, S. & Shapiro, A. Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices[J]. The Review of Financial Studies, 2001,14 (2): 371 ～ 405.

[20] Yamai, Y. & Yoshiba, T. On the validity of value-at-risk: Comparative analysis with expected shortfall [J]. Monetary and Economic Studies, 2002,20 (1): 57 ～ 86.

[21]Acerbi, C.and Tasche,D. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk[EB/OL]. Working Paper, arXiv:condmat/0105191,2001.

[22]Rockafeller, R.T.and Uryasev, S. Optimization of conditional Value-at -Risk [J]. Journal of Risk, 2000, 2(3):21-41.

（责任编辑 张 灿）