可达性与最短通路

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

引言

很多时候，我们可能并不关心到底有多少条通路，而只关心从 v_i 到 v_j 是否存在通路，以及长度最短的通路是什么，从而有可达性以及短程线和距离的定义。

Definition

在图 $G=<V,E>$ 中，$v_i,v_j\in V$。如果从 v_i 到 v_j 存在通路，则称 v_i 到 v_j 是可达的，否则称 v_i 到 v_j 不可达。规定：任何结点到自己都是可达的。

考虑: 如何判断图中两结点间是否可达？

判断图中两结点 v_i 到 v_j 是否可达的关键是判断是否存在通路，因而只要求邻接矩阵 A 及其正整数次幂 $A,A^2,A^3,\cdots$，一旦发现这些矩阵中 i 行 j 列元素为非 0，则表示存在通路。

可达关系判定-引理

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j(v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n-1$ 的通路.

Proof.

设 $v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ 为从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的一条通路，其中 $v_{i_0}=v_i$，$v_{i_k}=v_j$，此通路上有 $k+1$ 个结点。若 $k \leqslant n-1$，这条通路即为所求。 若 $k > n-1$，则此通路上的结点数 $k+1 > n$，由鸽笼原理知，必存在一个结点在此通路中不止一次出现，设 $v_{i_s}=v_{i_t}$，其中，$0 \leqslant s < t \leqslant k$。 去掉 v_{i_s} 到 v_{i_t} 中间的通路，至少去掉一条边，得通路 $v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_s}v_{i_{t+1}}\cdots v_{i_k}$，此通路比原通路的长度至少小 1。 如此重复进行下去，必可得一条从 v_i 到 v_j 的长度不大于 $n-1$ 的通路。 □

可达关系判定-引理

Corollary

在一个具有 n 个结点的图中，如果从结点 v_i 到结点 $v_j(v_i \neq v_j)$ 存在一条通路，则从 v_i 到 v_j 存在一条长度不大于 $n-1$ 的基本通路。

Theorem

在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的回路。

Corollary

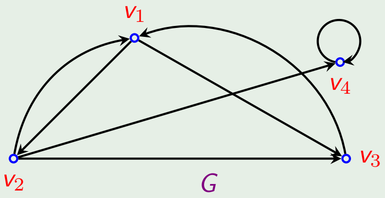
在一个具有 n 个结点的图中，如果存在经过结点 v_i 回路，则存在一条经过 v_i 的长度不大于 n 的基本回路。

可达关系的判定定理

Theorem

设 $G=<V,E>$ 为线图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$A=(a_{ij})_{nxn}$ 为 G 的邻接矩阵，$A^m=(a_{ij}^{(m)})_{nxn}$，$m=1,2,\cdots,n$，$B_n=(b_{ij}^{(n)})_{nxn}=A+A^2+A^3+\cdots+A^n$。则有当 $v_i\neq v_j$ 时，如果$b_{ij}^{(n)}>0$，那么从 v_i 到 v_j 可达，否则不可达。

Example



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可达关系的判定

Example

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 从 v_1 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_2 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_3 到 v_1, v_2, v_3, v_4 都是可达的;
- 从 v_4 到 v_4 是可达的，从 v_4 到 v_1, v_2, v_3 都是不可达的.

可达性矩阵

Definition

设 $G=<V,E>$ 是一个线图，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，并假定结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序，称 n 阶方阵 $P=(p_{ij})_{nxn}$ 为图 G 的可达性矩阵(accessibility matrix)，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}v_i\text{到}v_j\text{可达}\\0 & \text{否则}\end{cases},(i,j=1,2,3,\cdots,n)$$

1. 无向图的可达性矩阵是对称的，而有向图的可达性矩阵则不一定对称;
2. 由前面的讨论可知，通过计算 B_n 就可计算出 P 中各元素，即

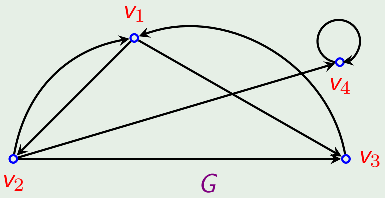
$$p_{ij}=\begin{cases}1 & b_{ij}^{(n)}\neq 0\\0 & b_{ij}^{(n)}=0\end{cases},(i,j=1,2,3,\cdots,n)$$

可达性矩阵的简洁求法

Theorem

设 $G=<V,E>$ 为线图，A、P 分别是 G 的邻接矩阵和可达性矩阵，则有 $P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee\cdots\vee A^{(n)}$，这里，$A^{(i)}$ 表示做矩阵布尔乘法的 i 次幂.

Example



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可达性矩阵的简洁求法

Example

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

短程线及距离

Definition

如果 v_i 到 v_j 可达，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为从 v_i 到 v_j 的距离(distance)，记为$d(v_i, v_j)$。如果 v_i 到 v_j 不可达，则通常记为 $d(v_i, v_j) = \infty$。

结点间距离的性质

1. $d(v_i, v_j) \geqslant 0$
2. $d(v_i, v_i) = 0$
3. $d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geqslant d(v_i, v_j)$。
4. 无向图满足 $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$，而有向图不行。

结点间距离的判定定理

Theorem

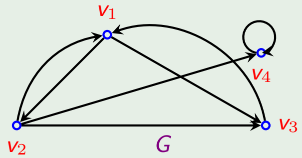
设 $G=<V,E>$ 为线图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$A=(a_{ij})_{nxn}$ 为 G 的邻接矩阵，$A^m=(a_{ij}^{(m)})_{nxn}$，$m=1,2,\cdots,n$，

$$d(v_i,v_j)=\begin{cases}\infty & \text{如果所有}a_{ij}^{(m)}\text{均为}0\\ k & k=min\{m|a_{ij}^{(m)}\neq 0\}\end{cases},(m=1,2,3,\cdots,n)。$$

显然，这里也可以使用邻接矩阵的布尔积幂来判定。

结点间距离的判定

Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_3) = d(v_2, v_1) = 1$;
- $d(v_2, v_3) = d(v_2, v_4) = d(v_3, v_1) = 1$;
- $d(v_1, v_4) = d(v_3, v_2) = 2$;
- $d(v_3, v_4) = 3$;
- $d(v_4, v_1) = d(v_4, v_2) = d(v_4, v_3) = \infty$.

THE END, THANKS!