无向树

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

无向树

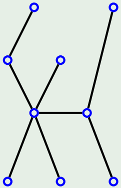
Definition

- 连通而不含回路的无向图称为无向树(undirected tree)，简称树(tree)，常用 T 表示树。
- 树中度数为 1 的结点称为叶(leaf)；度数大于 1 的结点称为分支点(branch point)或内部结点(interior point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为森林(forest)。
- 平凡图称为平凡树(trivial tree)。

容易看出，树中没有环和平行边，因此一定是简单图，并且在任何非平凡树中，都无度数为 0 的结点。

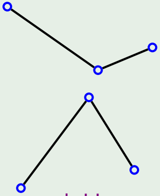
无向树

Example

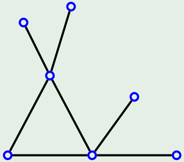


树

树



森林



不是树，也不是森林

考虑：一棵单独的树可以称作森林吗？

树的性质（等价定义）

Theorem

设无向图 $G =< V, E >$，$|V| = n$，$|E| = m$，下列各命题是等价的：

1. G连通而不含回路(即 G 是树)；
2. G 中无回路，且 $m = n - 1$；
3. G 是连通的，且 $m = n - 1$；
4. G 中无回路，但在任二结点之间增加一条新边，就得到惟一的一条基本回路；
5. G 是连通的，但删除任一条边后，便不连通；$(n \geqslant 2)$
6. G 中每一对结点之间有惟一一条基本通路。$(n \geqslant 2)$

直接证明这 6 个命题两两等价的工作量太大，一般采用循环论证的方法，即证明
$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)$

(1)$\Rightarrow$ (2)

(1) G 连通而不含回路
(2) G 中无回路，且 $m=n-1$

Proof.

对 n 作归纳。 $n=1$ 时，$m=0$，显然有 $m=n-1$。 假设 $n=k$ 时命题成立，现证 $n=k+1$ 时也成立。

由于 G 连通而无回路，所以 G 中至少有一个度数为 1 的结点 v_0， 在 G 中删去 v_0 及其关联的边，便得到 k 个结点的连通而无回路的图，由归纳假设知它有 $k-1$ 条边。 再将结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G，所以 G 中含有 $k+1$ 个结点和 k 条边，符合公式 $m=n-1$。

所以，G 中无回路，且 $m=n-1$。 □

(2)$\Rightarrow$ (3)

(2)G 中无回路，且 $m = n - 1$

(3)G 是连通的，且 $m = n - 1$

Proof.

证明只有一个连通分支。

设 G 有 k 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，其结点数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，边数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，且 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ ，$m = \sum_{i=1}^{k} m_i$。 由于 G 中无回路，所以每个 $G_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 均为树，因此 $m_i = n_i - 1(i = 1, 2, \cdots, k)$，于是

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = n - 1$$

故 $k = 1$，所以 G 是连通的，且 $m = n - 1$。 □

(3)⇒(4)

(3) G 是连通的，且 $m = n - 1$
(4) G 中无回路，但在任二结点之间增加一条新边，就得到惟一的一条基本回路

Proof.

首先证明 G 中无回路。对 n 作归纳。
$n = 1$ 时，$m = n - 1 = 0$，显然无回路。 假设结点数 $n = k - 1$ 时无回路，下面考虑结点数 $n = k$ 的情况。 因 G 连通，故 G 中每一个结点的度数均大于等于 1。 可以证明至少有一个结点 v_0，使得 $deg(v_0) = 1$，因若 k 个结点的度数都大于等于 2，则 $2m = \sum_{v \in V} deg(v) \geqslant 2k$，从而 $m \geqslant k$，即至少有 k 条边，但这与 $m = n - 1$ 矛盾。 在 G 中删去 v_0 及其关联的边，得到新图 G'，根据归纳假设知 G' 无回路，由于 $deg(v_0) = 1$，所以再将结点 v_0 及其关联的边加回得到原图 G，则 G 也无回路。
其次证明在 G 中任二结点 v_i，v_j 之间增加一条边 (v_i, v_j)，得到一条且仅一条基本回路。
由于 G 是连通的，从 v_i 到 v_j 有一条通路 L，再在 L 中增加一条边 (v_i, v_j)，就构成一条回路。若此回路不是惟一和基本的，则删去此新边，G 中必有回路，得出矛盾。 □

树的特点

在结点给定的无向图中，

树是边数最多的无回路图；

树是边数最少的连通图。

由此可知，在无向图 $G = (n, m)$ 中，

若 $m < n\text{-}1$，则 G 是不连通的；

若 $m > n\text{-}1$，则 G 必含回路。

树的性质

Theorem

任意非平凡树 $T=(n,m)$ 都至少有两片叶。

Proof.

因树 T 是连通的，从而 T 中各结点的度数均大于等于 1。 设 T 中有 k 个度数为 1 的结点 (即 k 片叶)，其余的结点度数均大于等于 2。 由握手定理，可得

$$2m=\sum_{v\in V} deg(v)\geqslant k+2(n-k)=2n-k$$

由于树中有 $m=n-1$，于是 $2(n-1)\geqslant 2n-k$，因此可得 $k\geqslant 2$，这说明 T 中至少有两片叶。 □

树的性质应用

Example

已知一棵无向树 T 中有 4 度，3 度，2 度的分支点各一个，其余为树叶，问 T 中有几片树叶？

Solution

设 T 有 x 片树叶，则 T 共有 $n = 3 + x$ 个结点。 由握手定理以及树的性质，可得

$$4 + 3 + 2 + x = 2(n - 1) = 2(3 + x - 1)$$

解出 $x = 5$，即 T 中有 5 片树叶。

THE END, THANKS!