

# 特殊图

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

## 欧拉图

王丽杰

Email: [ljwang@uestc.edu.cn](mailto:ljwang@uestc.edu.cn)

电子科技大学 计算机学院

2016-



# 哥尼斯堡七桥问题

欧拉图

Lijie Wang

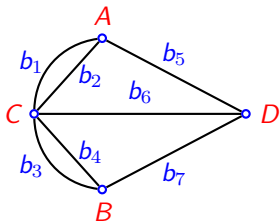
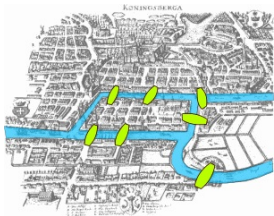
引子

定义

判定

一笔画

求回路



游人从四块陆地中任一块出发，按什么样的线路方能做到每座桥通过一次且仅一次而最后返回原地？

# 欧拉图的定义

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

## Definition

设  $G$  是无孤立结点的图，若存在一条通路 (回路)，**经过图中每边一次且仅一次**，则称此通路 (回路) 为该图的一条**欧拉通路 (回路)**。具有欧拉回路的图称为**欧拉图**(Eulerian graph)。

### 注意

- 规定：平凡图为欧拉图；
- 欧拉通路是经过图中所有边的通路中长度最短的通路；
- 欧拉回路是经过图中所有边的回路中长度最短的回路。

# 欧拉图的定义

欧拉图

Lijie Wang

引子

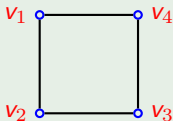
定义

判定

一笔画

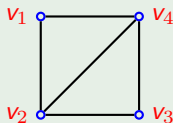
求回路

## Example



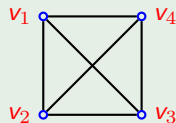
(a)

欧拉图 (存在欧拉回路)



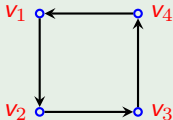
(b)

存在欧拉通路



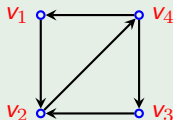
(c)

无欧拉通路



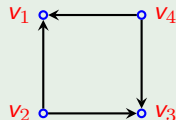
(d)

欧拉图 (存在欧拉回路)



(e)

存在欧拉通路



(f)

无欧拉通路

# 无向欧拉图的判定定理

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

## Theorem

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条欧拉通路，当且仅当  $G$  是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。

# 无向欧拉图的判定定理

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

## Theorem

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条欧拉通路，当且仅当  $G$  是连通的，且仅有零个或两个奇度数结点。

## Corollary

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条欧拉回路，当且仅当  $G$  是连通的，并且所有结点的度数均为偶数。

# 无向欧拉图的判定定理

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

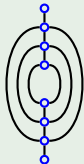
## Theorem

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条**欧拉通路**，当且仅当  $G$  是连通的，且仅有**零个或两个奇度数结点**。

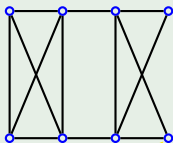
## Corollary

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条**欧拉回路**，当且仅当  $G$  是连通的，并且**所有结点的度数均为偶数**。

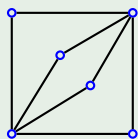
## Example



无欧拉通路



存在欧拉通路



存在欧拉回路 (欧拉图)

# 有向欧拉图的判定定理

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

## Theorem

有向图  $G$  具有一条欧拉通路，当且仅当  $G$  是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大 1，另一个结点的出度比入度大 1。



# 有向欧拉图的判定定理

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路

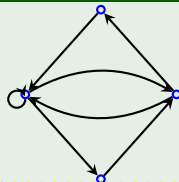
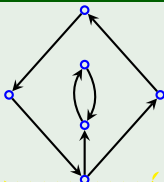
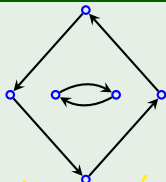
## Theorem

有向图  $G$  具有一条**欧拉通路**，当且仅当  $G$  是**连通**的，且除了两个结点以外，其余结点的**入度等于出度**，而这两个例外的结点中，**一个结点的入度比出度大 1**，**另一个结点的出度比入度大 1**。

## Corollary

有向图  $G$  具有一条**欧拉回路**，当且仅当  $G$  是连通的，且**所有结点的入度等于出度**。

## Example



# 一笔画问题

欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

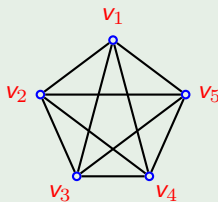
判定

一笔画

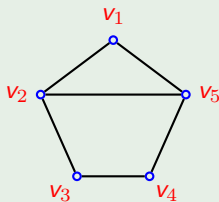
求回路

所谓一笔画是指**笔不离纸**，**不重复**的画出图形。能否一笔画本质上就是求图中是否存在**欧拉通路** (或**欧拉回路**)的问题。

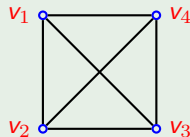
## Example



可以一笔画



可以一笔画



不能一笔画

# 求无向图的欧拉回路–Fleury 算法

欧拉图

Lijie Wang

引子

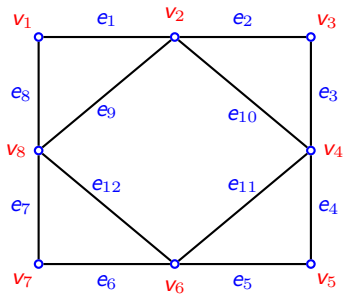
定义

判定

一笔画

求回路

依次选边，每选一条边就从图中删去。选取条件是：与上一条已选取的边关联；除非无别的边可选，否则不能选割边（桥）。



一条欧拉回路：

$e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_8$

## 欧拉图

Lijie Wang

引子

定义

判定

一笔画

求回路



THE END, THANKS!