

# 二元关系

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## 关系的定义

王丽杰

Email: [ljwang@uestc.edu.cn](mailto:ljwang@uestc.edu.cn)

电子科技大学 计算机学院

2016-



# 什么是二元关系

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## Example

- ① 令  $A$  为某大学所有学生的集合， $B$  表示该大学开设的所有课程的集合，则  $A \times B$  可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是  $A \times B$  的某一个子集。
- ② 令  $F$  为某地所有父亲的集合， $S$  表示该地所有儿子的集合，则  $F \times S$  可表示父子关系的所有可能情况。而真正的父子关系则会是  $F \times S$  的某一个子集。

## Definition

设  $A, B$  为两个非空集合，称  $A \times B$  的任意子集  $R$  为从  $A$  到  $B$  的一个二元关系，简称关系 (relation)。其中， $A$  称为关系  $R$  的前域， $B$  称为关系  $R$  的后域。如果  $A = B$ ，则称  $R$  为  $A$  上的一个二元关系。

# 二元关系的数学符号

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## 标记

- ① 若序偶  $\langle x, y \rangle \in R$ , 通常把这一事实记为  $xRy$ , 读作 “ $x$  对  $y$  有关系  $R$ ”;
- ② 若序偶  $\langle x, y \rangle \notin R$ , 通常把这一事实记为  $x \not R y$ , 读作 “ $x$  对  $y$  没有关系  $R$ ”。

## Example

- ① 设  $R_1$  为自然数集合上的小于关系, 则  $\langle 2, 3 \rangle \in R_1$  (或  $2R_1 3$ ), 但  $\langle 5, 5 \rangle \notin R_1$  (或  $5 \not R_1 5$ );
- ② 设  $R_2$  为中国城市的地区归属关系, 则 成都  $R_2$  四川, 但 重庆  $\not R_2$  四川。

# 枚举二元关系

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## Example

假设  $A = \{a, b\}$   $B = \{c, d\}$  , 试写出从  $A$  到  $B$  的所有不同关系。

**解** 首先求两个集合的笛卡儿积： $A \times B = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ 。

再求  $A \times B$  的所有不同子集：

- 0-元子集： $\emptyset$ ；
- 1-元子集： $\{\langle a, c \rangle\}, \{\langle a, d \rangle\}, \{\langle b, c \rangle\}, \{\langle b, d \rangle\}$ ；
- 2-元子集： $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ；
- 3-元子集：  
 $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\},$   
 $\{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ；
- 4-元子集： $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ 。

所以，上面的 16 个不同子集就是从  $A$  到  $B$  的所有不同关系。

# 由定义及示例可见

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## 几种重要关系

- ① 当  $R = \emptyset$  时, 称  $R$  为从  $A$  到  $B$  的**空关系**(empty relation);
- ② 当  $R = A \times B$  时, 称  $R$  为从  $A$  到  $B$  的**全关系**(total relation);  $A$  上的全关系通常记为  $E_A$ 。
- ③ 当  $R = I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$  时, 称  $R$  为  $A$  上的**恒等关系**(identity relation)。

## 有限集合的二元关系数量

当集合  $A, B$  都是有限集时,  $A \times B$  共有  $|A| \times |B|$  个不同的元素, 这些元素将会产生  $2^{|A| \times |B|}$  个不同的子集。即, 从  $A$  到  $B$  的不同关系共有  $2^{|A| \times |B|}$  个。

# 定义域和值域

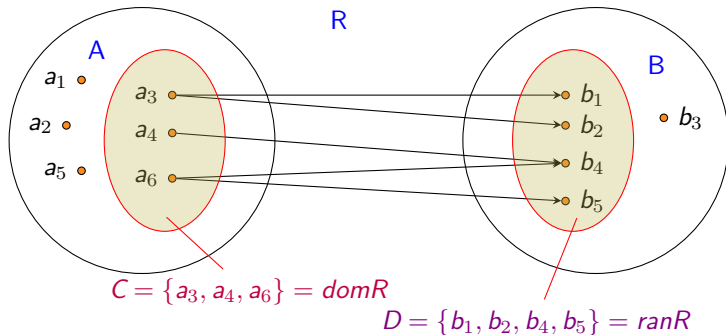
关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系



# 定义域和值域

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## Definition

设  $R$  是从  $A$  到  $B$  的二元关系, 则  $A$  为关系  $R$  的前域,  $B$  为关系  $R$  的后域。令：  
 $C = \{x | x \in A, \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in R\}$ ,  $D = \{y | y \in B, \exists x \in A, \langle x, y \rangle \in R\}$ 。称  $C$  为  $R$  的定义域(domain), 记为  $C = \text{dom}R$ ;  $D$  为  $R$  的值域(range), 记为  $D = \text{ran}R$ ;  
 $\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$  为  $R$  的域(field)。

## Example

- ①  $R_Z = \{\langle x, y \rangle | (x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$ , 则  
 $\text{dom}R_Z = \{7, -7\}$ ,  $\text{ran}R_Z = \{7, -7\}$ ,  $\text{fld}R_Z = \{7, -7\}$ ;
- ② 设  $H = \{f, m, s, d\}$  表示一个家庭中父母子女四个人的集合,  $R_H$  是  $H$  上的长幼关系, 则  
 $\text{dom}R_H = \{f, m\}$ ,  $\text{ran}R_H = \{s, d\}$ ,  $\text{fld}R_H = \{f, m, s, d\}$ .

# 二元关系概念的推广

关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系

## Definition

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $n$  个非空集合, 称  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  的任意子集  $R$  为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的一个  $n$  元关系 ( $n$ -ary relation)。



在  $n$  元关系中, 最常用的是二元关系, 因而, 在不引起混淆的情况下, 提到的关系均指二元关系.



关系的定义

Lijie Wang

二元关系定义

定义域和值域

$n$  元关系



THE END, THANKS!