

次序关系

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

偏序关系定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



偏序关系

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

定义

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是自反的、反对称的、传递的, 则称 R 为 A 上的偏序关系 (partial order relation), 记为 " \leq ". 读作“小于等于”, 并将 " $a, b \in \leq$ " 记为 $a \leq b$. 序偶 $\langle A, \leq \rangle$ 称为偏序集 (partial order set).

注意

用 " \leq " 来表示偏序关系是由于“小于等于关系”是偏序关系的典型范例, 此时已不局限于“小于等于”关系, 它指代的是在偏序关系中元素之间的先后顺序, 不局限于通常的数的大小;

偏序关系

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

例

- 偏序关系 \leq 可表示实数集上的小于等于关系; ($2 \leq 4, 4 \not\leq 2$)
- 偏序关系 \leq 可表示幂集上的包含关系; ($\{1\} \leq \{1, 2\}$)
- 偏序关系 \leq 可表示正整数集合上的整除关系; ($2 \leq 4, 3 \not\leq 4, 4 \not\leq 3$)
- 偏序关系 \leq 可表示实数集上的大于等于关系; ($2 \not\leq 4, 4 \leq 2$)
- 偏序关系 \leq 可表示任何一个集合上的恒等关系; ($a \leq a, a \in A$)

注意

- 当 $a \leq b$, 并且 $a \neq b$ 时, 可以写作 $a < b$;
- $a \leq b$ 可对应写作 $b \geq a$, $a < b$ 可对应写作 $b > a$.

可比与覆盖

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

定义

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系, $\forall x, y \in A$,

- 如果 $x \leq y$ 或 $y \leq x$, 则称 x 与 y 可比;
- 如果 $x \leq y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \leq z \leq y$, 则称 y 覆盖 x .

例

- 正整数集合上的整除关系中, 2 与 4 可比, 6 与 3 可比, 4 和 3 不可比; 4 和 6 覆盖 2, 但 8、12 等均不覆盖 2.
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的幂集上的包含关系中, $\{1\}$ 和 $\{1, 2\}$ 可比, $\{1\}$ 和 $\{2\}$ 不可比, $\{1, 2\}$ 和 $\{1, 3, 4\}$ 不可比; $\{1, 2\}$ 覆盖 $\{1\}$ 和 $\{2\}$.

计算机科学中的字典排序

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

例

设 Σ 是一个有限的字母表. Σ 上的字母组成的字母串叫 Σ 上的字, Σ^* 是包含空字“ ε ”的所有字组成的集合, 建立 Σ^* 上的字典次序关系 L 如下. 设 $x = x_1x_2 \cdots x_n, y = y_1y_2 \cdots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma (i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 则 $x, y \in \Sigma^*$.

- 当 $x_1 \neq y_1$ 时, 若 $x_1 \leq y_1$, 则 xLy ; 若 $y_1 \leq x_1$, 则 yLx .
- 若存在最大的 k 且 $k < \min(n, m)$, 使 $x_i = y_i (i = 1, 2, \cdots, k)$, 而 $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, 若 $x_{k+1} \leq y_{k+1}$, 则 xLy ; 若 $y_{k+1} \leq x_{k+1}$, 则 yLx .
- 若存在最大的 k 且 $k = \min(n, m)$, 使 $x_i = y_i (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$, 此时, 若 $n \leq m$, 则 xLy ; 若 $m \leq n$, 则 yLx .

可见: L 是 Σ^* 上的一个偏序关系.

计算机科学中的字典排序

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

例

令 Σ 为所有小写英文字母的集合. 则 Σ^* 定义了所有由小写字母构成的串.

- ① $\langle aiscrete, discrete \rangle \in \mathbf{L}$, 即 $aiscrete \leqslant discrete$;
- ② $\langle discreet, discrete \rangle \in \mathbf{L}$, 即 $discreet \leqslant discrete$;
- ③ $\langle discreet, discreetness \rangle \in \mathbf{L}$, 即 $discreet \leqslant discreetness$.



在 C 语言的标准库中的字符串比较函数 `strcmp(str1, str2)`, 就是基于字典排序来比较两个字符串的大小, `str1 = str2` 则返回 0, `str1` 大于 `str2` 时返回正值, `str1` 小于 `str2` 时返回负值.

计算机科学中的字典排序

偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序

证明: L 是偏序关系.

① L 是自反的.

对任意 $x \in \Sigma^*$, 令 $x = x_1 x_2 \dots x_n$, 其中 $x_i \in \Sigma$, 显然有 $x_i \leq x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 从而有 $x L x$;

② L 是反对称的.

对任意 $x, y \in \Sigma^*$, 令 $x = x_1 x_2 \dots x_n, y = y_1 y_2 \dots y_m$, 其中 $x_i, y_j \in \Sigma (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$. 若 $x L y$ 且 $y L x$, 根据 L 的定义有 $x = y$;

③ L 是传递的.

对任意 $x, y, z \in \Sigma^*$, 令 $x = x_1 x_2 \dots x_n, y = y_1 y_2 \dots y_m, z = z_1 z_2 \dots z_p$, 其中 $x_i, y_j, z_k \in \Sigma (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, p)$. 若 $x L y$ 且 $y L z$, 根据 L 的定义和 “ \leq ” 的传递性, 有 $x L z$.

综上所述, L 是 Σ^* 上的一个偏序关系。



偏序关系定义

Lijie Wang

定义

可比与覆盖

字典排序



THE END, THANKS!