

二元关系

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

关系的运算性质

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



结合律与同一律

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Theorem

设 A 、 B 、 C 和 D 是任意四个集合， R 、 S 和 T 分别是从 A 到 B ， B 到 C 和 C 到 D 的二元关系， I_A 和 I_B 分别是 A 和 B 上的恒等关系，则

- ① $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$;
- ② $I_A \circ R = R \circ I_B = R$.

二元关系相等的证明方法

目标: 证明两个关系 R_1 和 R_2 相等

也即: 证明两个集合 R_1 和 R_2 相等

从而: 1) $\forall \langle x, y \rangle \in R_1, \dots, \langle x, y \rangle \in R_2. \therefore R_1 \subseteq R_2$;

2) $\forall \langle x, y \rangle \in R_2, \dots, \langle x, y \rangle \in R_1. \therefore R_2 \subseteq R_1$.

结合律的证明： $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Proof.

任取 $\langle a, d \rangle \in (R \circ S) \circ T$ ，则由复合运算定义知，存在 $c \in C$ ，使得 $\langle a, c \rangle \in R \circ S$ 且 $\langle c, d \rangle \in T$ 。

又因为 $\langle a, c \rangle \in R \circ S$ ，所以存在 $b \in B$ ，使得 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, c \rangle \in S$ 。

因为 $\langle b, c \rangle \in S, \langle c, d \rangle \in T$ ，由复合运算定义知，有 $\langle b, d \rangle \in S \circ T$ ；

又由 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, d \rangle \in S \circ T$ 有， $\langle a, d \rangle \in R \circ (S \circ T)$ 。

从而 $(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$ 。

同理可证： $R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$ 。

由以上可知， $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ 。



同一律的证明： $I_A \circ R = R \circ I_B = R$

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Proof.



同一律的证明： $I_A \circ R = R \circ I_B = R$

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Proof.

任取 $\langle a, b \rangle \in I_A \circ R$, 其中 $a \in A, b \in B$, 由复合运算定义可知, 存在 $a \in A$, 使得 $\langle a, a \rangle \in I_A$ 且 $\langle a, b \rangle \in R$, 从而有 $I_A \circ R \subseteq R$ 。

反过来, 任取 $\langle a, b \rangle \in R$, 由 I_A 的定义知, $\langle a, a \rangle \in I_A$, 即 $\langle a, b \rangle \in I_A \circ R$. 从而 $R \subseteq I_A \circ R$ 。

由以上可知, $I_A \circ R = R$ 。

同理可证 $R \circ I_B = R$ 。

于是 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 得证。



分配律

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Theorem

设 A 、 B 、 C 和 D 是任意四个集合, R 是从 A 到 B 的关系, S_1, S_2 是从 B 到 C 的关系, T 是从 C 到 D 的关系, 则

- ① $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$;
- ② $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$;
- ③ $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$;
- ④ $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$.

证明②.

对任意 $\langle a, c \rangle \in R \circ (S_1 \cap S_2)$, 则由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, c \rangle \in S_1 \cap S_2$.

根据交运算的定义, $\langle b, c \rangle \in S_1$, 且 $\langle b, c \rangle \in S_2$.

于是有 $\langle a, c \rangle \in R \circ S_1$ 并且 $\langle a, c \rangle \in R \circ S_2$, 即有 $\langle a, c \rangle \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

从而, $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.



逆运算性质定律

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Theorem

设 A, B, C 是三个集合, R, S 分别是从 A 到 B , 从 B 到 C 的关系, 则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Proof.

任取 $\langle c, a \rangle \in (R \circ S)^{-1}$, 则 $\langle a, c \rangle \in R \circ S$, 由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, c \rangle \in S$. 根据逆运算的定义, 有 $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$ 且 $\langle c, b \rangle \in S^{-1}$. 于是得到 $\langle c, a \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$. 即 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$.

反之, 任取 $\langle c, a \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$, 由复合运算定义知, 存在 $b \in B$, 使得 $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$ 且 $\langle c, b \rangle \in S^{-1}$. 又根据逆运算的定义, 有 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, c \rangle \in S$. 从而有 $\langle a, c \rangle \in R \circ S$, 即有 $\langle c, a \rangle \in (R \circ S)^{-1}$, 故有 $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$.

由以上可知, $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.



逆运算性质定律

关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质

Theorem

设 R, S 是从集合 A 到集合 B 的关系, 则有

- | | | | |
|---|-------|--|-------|
| ① $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1};$ | (分配性) | ② $(\bar{R})^{-1} = \overline{R^{-1}};$ | (可换性) |
| $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$ | | ③ $(R^{-1})^{-1} = R;$ | |
| $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1};$ | | ④ $S \subseteq R \Leftrightarrow S^{-1} \subseteq R^{-1}.$ | (单调性) |

证明④ .

必要性: 任取 $\langle b, a \rangle \in S^{-1}$, 有 $\langle a, b \rangle \in S$. 因为 $S \subseteq R$, 所以 $\langle a, b \rangle \in R$, 从而 $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$. 即有 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$;

充分性: 任取 $\langle a, b \rangle \in S$, 有 $\langle b, a \rangle \in S^{-1}$. 因为 $S^{-1} \subseteq R^{-1}$, 所以 $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$, 从而 $\langle a, b \rangle \in R$. 即有 $S \subseteq R$.



关系的运算性质

Lijie Wang

复合运算性质

逆运算性质



THE END, THANKS!