关系的闭包

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

引言

☞

一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？

我们可以通过添加一些元素，使得关系具备我们想要的性质。例如，对给定集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 1 >\}$，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系 R 中添加 $< 2, 2 >, < 3, 3 >$ 这两个元素后，所得到的新关系 R' 就具有自反性。 另外，还可以添加 $< 2, 2 >$ $< 3, 3 >$ $< 1, 3 >$，得到的新关系 R'' 仍然具有自反性.

如何在给定关系中添加最少的元素，使其具有需要的特殊性质，这就是关系的闭包问题。

闭包定义

Definition

设 R 是集合 A 上的关系, 若存在 A 上的另一个关系 R', 满足:

1. R' 是自反的 (对称的, 或传递的);
2. 对任何自反的 (对称的, 或传递的) 关系 R'',如果 $R \subseteq R''$, 就有 $R' \subseteq R''$, 则称 R' 为 R 的自反闭包(reflexive closure) (对称闭包(symmetric closure), 或传递闭包(transitive closure)), 分别记为$r(R)$($s(R)$或$t(R)$).

Example

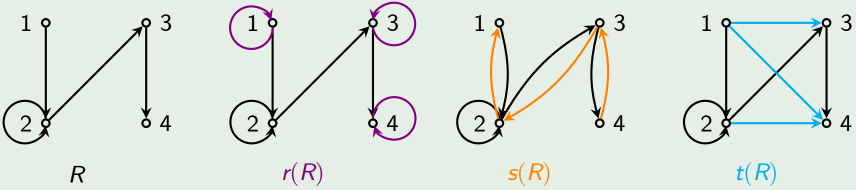
1. 设定义在整数集 Z 上的"$<$"关系为 R, 则 $r(R) =$"$\leqslant$", $s(R) =$"$\neq$", $t(R) =$"$<$" ;
2. 设定义在整数集 Z 上的 "$=$"关系为 S, 则 $r(S) =$"$=$",$s(S) =$"$=$", $t(S) =$"$=$".

闭包求解

Example

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$R=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>\}$ 是定义在 A 上的二元关系，则

1. $r(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,1>,<3,3>,<4,4>\}$;
2. $s(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$;
3. $t(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,3>,<1,4>,<2,4>\}$.



闭包求解

利用关系图求闭包

1. 检查 R 的关系图，在没有自环的结点处加上自环，可得 $r(R)$ 的关系图;
2. 检查 R 的关系图，将每条单向边全部改成双向边，可得 $s(R)$ 的关系图;
3. 检查 R 的关系图，从每个结点出发，找到其终点，如果该结点到其终点没有边相连，就加上此边，可得 $t(R)$ 的关系图.

利用关系运算求闭包

Theorem

设 R 是集合 A 上的关系, 则

1. $r(R) = R \cup I_A$;
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$;
3. $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 若 $|A| = n$, 则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

Proof.

略. $\square$

利用关系运算求闭包

Example

设 $P=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ 是四个程序，$R=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>\}$ 是定义在 P 上的调用关系, 则 R 的闭包为:

1. $r(R)=R\cup I_A=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>\}\cup\{<P_1,P_1>,<P_2,P_2>,<P_3,P_3>,<P_4,P_4>\}=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>,<P_1,P_1>,<P_2,P_2>,<P_3,P_3>,<P_4,P_4>\}$;
2. $s(R)=R\cup R^{-1}=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>\}\cup\{<P_2,P_1>,<P_3,P_1>,<P_4,P_2>,<P_4,P_3>\}=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>,<P_2,P_1>,<P_3,P_1>,<P_4,P_2>,<P_4,P_3>\}$;
3. $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>\}\cup\{<P_1,P_4>\}\cup\varnothing\cup\varnothing=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_4>,<P_3,P_4>,<P_1,P_4>\}$.

THE END, THANKS!