握手定理

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

结点的度数

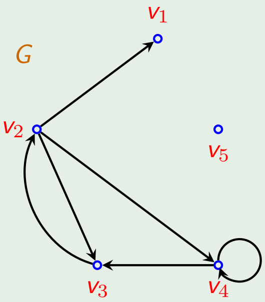
- 交通运输网络中，关联的边的数量较多的结点通常较为繁忙.
- 通信网络中，关联边的数量较多的结点通常是网络的关键结点，一旦出现故障，对整个网络通信的影响会非常大; 反之，关联边较少的结点出现故障则不会造成全局性的影响。

Definition

- 图 $G=<V,E>$ 中以结点 $v \in V$ 为端点的次数之和称为结点 v 的度数或度，记为$deg(v)$。显然，有环时则需计算两次。
- 有向图 $G=<V,E>$ 中以结点 v 为始点的次数称为 v 的出度，记为$deg^{+}(v)$; 以结点 v 为终点的次数称为 v 的入度，记为$deg^{-}(v)$。显然，$deg(v)=deg^{+}(v)+deg^{-}(v)$。
- 度数为 1 的结点称为悬挂结点，以悬挂结点为端点的边称为悬挂边。

结点的度数

Example

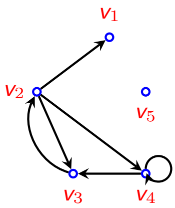


- $deg(v_1) = 1,\ deg^+(v_1) = 0,\ deg^-(v_1) = 1;$
- $deg(v_2) = 4,\ deg^+(v_2) = 3,\ deg^-(v_2) = 1;$
- $deg(v_3) = 3,\ deg^+(v_3) = 1,\ deg^-(v_3) = 2;$
- $deg(v_4) = 4,\ deg^+(v_4) = 2,\ deg^-(v_4) = 2;$
- $deg(v_5) = 0,\ deg^+(v_5) = 0,\ deg^-(v_5) = 0;$
- v_1 是悬挂结点,$< v_2, v_1 >$ 为悬挂边。

结点的度数

Definition

- 图 $G=<V,E>$ 中，称$\Delta(G)=max\{deg(v)|v\in V\}$为 G 的最大度，$\delta(G)=min\{deg(v)|v\in V\}$为 G 的最小度。
- 有向图 $G=<V,E>$ 中，称$\Delta^+(G)=max\{deg^+(v)|v\in V\}$为 G 的最大出度，$\delta^+(G)=min\{deg^+(v)|v\in V\}$为 G 的最小出度；$\Delta^-(G)=max\{deg^-(v)|v\in V\}$为 G 的最大入度，$\delta^-(G)=min\{deg^-(v)|v\in V\}$为 G 的最小入度。



- $\Delta(G)=4,\ \delta(G)=0$
- $\Delta^+(G)=3,\ \delta^+(G)=0$
- $\Delta^-(G)=2,\ \delta^-(G)=0$

邻接矩阵计算度数

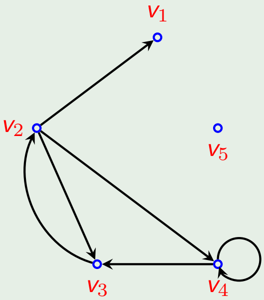
设图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 若 G 是无向图，则结点 v_i 的度数 $deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}+a_{ii}$，或 $deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}+a_{ii}$;
- 若 G 是有向图，则结点 v_i 的出度 $deg^{+}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$，入度 $deg^{-}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}$.

邻接矩阵计算度数

Example



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad deg^{+}(v_2) = 3$$

$$deg^{-}(v_2) = 1$$

握手定理

图中每条边都有两个端点 (环的两个端点相同)，所以一条边就会为两个端点各增加 1 度，总共 2 度，因而得到握手定理。

Theorem (图论基本定理, 握手定理)

图中结点度数的总和等于边数的二倍，即设图 $G = < V, E >$，则有

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

握手定理是由欧拉于 1736 年最先给出的。欧拉曾对此定理给出了这样一个形象论断：如果许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

握手定理

Example

已知图 G 中有 15 条边，2 个度数为 4 的结点，4 个度数为 3 的结点，其余结点的度数均小于等于 2，问 G 中至少有多少个结点？为什么？

Solution

图中边数为 *15*，由握手定理知，*G* 中所有结点的度数之和为 *30*，*2* 个度数为 *4* 的结点，*4* 个度数为 *3* 的结点占去 *20* 度，还剩下 *10* 度。若其余全是度数为 *2* 的结点，还需要 *5* 个结点来占用这 *10* 度，所以 *G* 至少有 *11* 个结点.

握手定理推论

Corollary

图中度数为奇数的结点个数为偶数。

常称度数为奇数的结点为奇度数结点，度数为偶数的结点为偶度数结点

Proof.

设图 $G=<V,E>$，$V_1=\{v|v\in V$ 且 $deg(v)$ 为奇数 $\}$，$V_2=\{v|v\in V$ 且 $deg(v)$ 为偶数 $\}$。显然，$V_1\cap V_2=\varnothing$，且 $V_1\cup V_2=V$，于是

$$\sum_{v\in V} deg(v)=\sum_{v\in V_1} deg(v)+\sum_{v\in V_2} deg(v)=2|E|.$$

式中 $2|E|$ 和 $\sum_{v\in V_2} deg(v)$(偶数之和为偶数) 均为偶数，因而 $\sum_{v\in V_1} deg(v)$ 也为偶数。于是 $|V_1|$ 为偶数，即度数为奇数的结点个数为偶数. □

握手定理推论

Theorem

有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数，即设有向图 $G=<V,E>$，则有

$$\sum_{v\in V} deg^{+}(v) = \sum_{v\in V} deg^{-}(v) = |E|.$$

Proof.

每条有向边具有一个始点和一个终点 (环的始点和终点是同一个结点)，因此，每条有向边对应一个出度和一个入度。图 G 中有 $|E|$ 条有向边，则 G 中必产生 $|E|$ 个出度，这 $|E|$ 个出度即为各结点的出度之和，G 中也必产生 $|E|$ 个入度，这 $|E|$ 个入度即为各结点的入度之和。因而定理成立. □

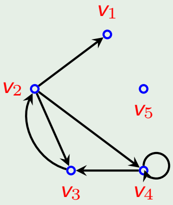
图的度数序列

Definition

设 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为图 G 的结点集，称 $(deg(v_1), deg(v_2), \cdots, deg(v_n))$ 为 G 的度数序列.

若 G 为有向图，还可分别定义出度序列和入度序列。

Example



度数序列为 (1,4,3,4,0)

Example

- (3, 5, 1, 4)，(1, 2, 3, 4, 5) 能成为图的度数序列吗？
- 已知一个有向图 G 的度数序列为 (3,3,2,3,3), 出度序列为 (1,2,1,2,1), 则其入度序列为 __________.

THE END, THANKS!