最小生成树

王丽杰

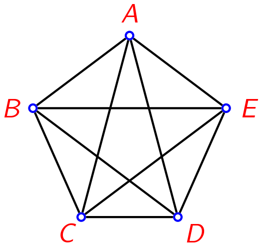
Email: ljwang@uestc.edu.cn

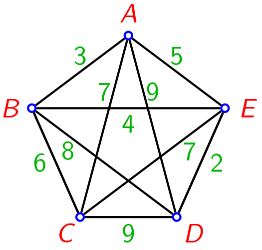
电子科技大学 计算机学院

2016-

引子

回顾生成树的学习中提到的构建一个包含 5 个信息中心 A,B,C,D,E 的通信系统的问题，如下左图所示。通常情况下，各中心之间的光纤连接长度并不相同，这会影响总体费用。所以我们建立一个带权图 (以百公里为单位，如右图所示)，希望能从这个图中找出一棵生成树，而且总权值最小。





无向树

Definition

设 $G=<V,E>$ 是连通的赋权图，T 是 G 的一棵生成树，T 的每个树枝所赋权值之和称为 T 的权，记为 $w(T)$。G 中具有最小权的生成树称为 G 的最小生成树(minimal spanning tree)。

一个无向图的生成树不是惟一的，同样地，一个赋权图的最小生成树也不一定是惟一的。求赋权图的最小生成树的方法很多，这里主要介绍 Kruskal 算法和 Prim 算法。

Kruskal 算法

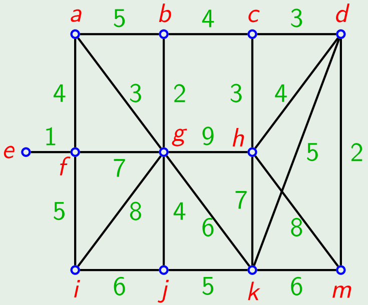
Kruskal 算法是克鲁斯克尔 (Kruskal) 于 1956 年将构造生成树的避圈法推广到求最小生成树，其要点是，在与已选取的边不构成回路的边中选取最小者。

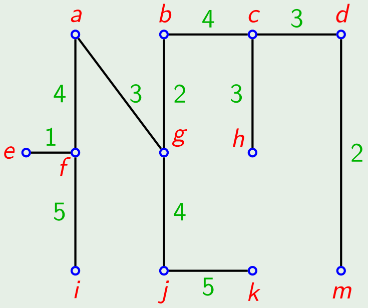
Kruskal 算法

1. 在 G 中选取最小权边 e_1，置 $i=1$，$E_T=\{e_1\}$。
2. 当 $i=n-1$ 时，结束，否则转 (3)。
3. 在 G 中选取不在 E_T 中的边 e_{i+1}，使 $E_T\cup\{e_{i+1}\}$ 中无回路且 e_{i+1} 是满足此条件的最小权边。
4. 置 $i=i+1$，$E_T=E_T\cup\{e_{i+1}\}$，转 (2)。

Kruskal 算法

Example





$w(T) = 36$

Prim 算法

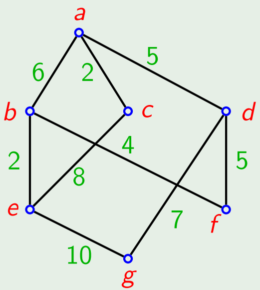
Prim 算法的要点是，从任意结点开始，每次增加一条最小权边构成一棵新树。

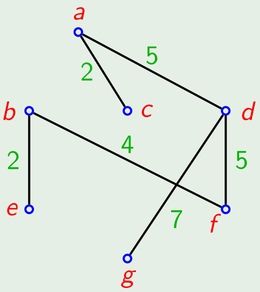
Prim 算法

1. 在 G 中任意选取一个结点 v_1，置 $V_T=\{v_1\}, E_T=\varnothing$，$k=1$；
2. 在 $V-V_T$ 中选取与某个 $v_i\in V_T$ 邻接的结点 v_j，使得边 (v_i,v_j) 的权最小，置 $V_T=V_T\cup\{v_j\}, E_T=E_T\cup\{(v_i,v_j)\}$，$k=k+1$；
3. 重复步骤 2，直到 $k=|V|$。

Prim 算法

Example





$w(T) = 25$

THE END, THANKS!