序偶和笛卡尔积

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

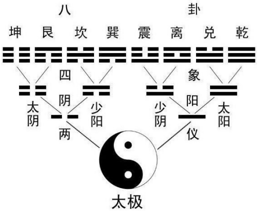
万事万物皆有联系

蝴蝶效应

亚马逊雨林一只蝴蝶翅膀偶尔振动，也许两周后就会引起美国得克萨斯州的一场龙卷风。

易经

太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦生万物。



有序组的定义

Definition

由两个元素按照一定的次序组成的二元组称为序偶，记作$< x, y >$，其中 x 是第一元素，y 是第二元素。

由定义可见，两个序偶$< a, b >=< c, d >$当且仅当$a = c, b = d$

Example

1. 张明喜欢离散数学可用序偶表示为：< 张明, 离散数学 >
2. 英语课本在书桌上可用序偶表示为：< 英语课本, 书桌 >
3. 若序偶 $< x + y, 2y - 1 >=< 3y - 4, 5 >$, 根据序偶相等的定义有 $x + y = 3y - 4, 2y - 1 = 5$, 解得 $x = 2, y = 3$

笛卡儿积

Definition

设 A, B 是两个集合，称集合 $A \times B = \{< x, y > |(x \in A) \wedge (y \in B)\}$ 为集合 A 与 B 的笛卡儿积。

Example

1. 令 A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则 $A \times B$ 可表示该校学生选课的所有可能情况。
2. 集合 $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ 的笛卡儿积 $A \times B = \{< 1, a >, < 1, b >, < 1, c >, < 2, a >, < 2, b >, < 2, c >\}$，而 $B \times A = \{< a, 1 >, < b, 1 >, < c, 1 >, < a, 2 >, < b, 2 >, < c, 2 >\}$.

笛卡儿积的性质

☞

由笛卡儿积定义可以看出:

1. 设 A, B 是任意两个集合，则不一定有 $A \times B = B \times A$，即笛卡儿积不满足交换律；
2. $A \times B = \varnothing$ 当且仅当 $A = \varnothing$ 或者 $B = \varnothing$；
3. 设 A, B, C 是任意三个集合，则不一定有 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$，即笛卡儿积不满足结合律；
4. 当集合 A, B 都是有限集时，$|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$。
5. 笛卡儿积对并运算和交运算满足分配律。

推广

Definition

- 由 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按照一定次序组成的 n 元组称为n 重有序组，记作$< a_1, a_2, \cdots, a_n >$. 其中 a_1 是第一个元素，a_2 是第二个元素，$\cdots$，a_n 是第 n 个元素。
- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，称集合 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$ 为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿积。当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，可记 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$。

- 两个 n 重有序组$< a_1, a_2, \cdots, a_n >=< b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n >$当且仅当$a_i = b_i$,$i = 1, 2, ..., n$
- 当集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是有限集时，$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |An|$.

THE END, THANKS!