关系的幂运算

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

关系的幂运算

Definition

设 R 是集合 A 上的关系，则 R 的 n 次幂，记为 R^n，定义如下：

1. $R^0 = I_A$;
2. $R^1 = R$;
3. $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.

☞

- R^n 仍然是 A 上的关系，表示 R 多次自我复合的结果;
- $R^{m+n} = R^m \circ R^n = R^n \circ R^m = R^{n+m}$,
  $(R^m)^n = R^{mn}, m, n \in \mathbb{N}$;

幂运算的性质

Example

设 $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系，考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$：

$R^1=R$，

$R^2=R\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$，

$R^3=R^2\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$，

$R^4=R^3\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$，

$R^5=R^4\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}$，

$R^6=R^5\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}=R^5$，

$R^7=R^6\circ R=R^5$，

$\ldots$

$R^n=R^5(n>5)$.

幂运算的性质

Example

设 $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系，考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$：

$S^1=S,\ \ S^2=S\circ S=\{<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\},$

$S^3=S\circ S\circ S=S^2\circ S=\{<1,4>,<2,5>,<3,6>\},\ \ S^4=S^3\circ S=\{<1,5>,<2,6>\},$

$S^5=S^4\circ S=\{<1,6>\},\ \ S^6=S^5\circ S=\varnothing,\ \ S^7=\varnothing,\ \ \cdots\ S^n=\varnothing(n>5)$；

☞ 由前例可见

- R^n 的基数并非随着 n 的增加而增加，而是呈递减趋势;
- 当 $n\geqslant |A|$ 时，则 $R^n\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{|A|} R^i$.

幂运算的收敛性

Theorem

设 A 是有限集合，且 $|A| = n$，R 是 A 上的关系，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

Proof.

显然有 $\bigcup_{i=1}^{n} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. 下面仅证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

因为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = (\bigcup_{i=1}^{n} R^i) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^i)$, 所以只要证明 $\forall k > n, R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$ 即可。

对任意 $< a, b > \in R^k$，由复合运算定义可知，存在 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1} \in A$，使得 $< a, a_1 > \in R, < a_1, a_2 > \in R, < a_2, a_3 > \in R, ..., < a_{k-1}, b > \in R$

由于 $|A| = n$，且 $k > n$，根据鸽笼原理可知,$k+1$ 个元素 $a = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k = b$ 中至少有两个元素相同. $\square$

幂运算的收敛性

continue..

不妨假设 $a_i = a_j (i < j)$，则可在上式中删去

$$< a_i, a_{i+1} > \in R, < a_{i+1}, a_{i+2} > \in R, < a_{i+2}, a_{i+3} > \in R, \cdots, < a_{j-1}, a_j > \in R$$

后仍有

$$< a_0, a_1 > \in R, \cdots, < a_{i-1}, a_i > \in R, < a_j, a_{j+1} > \in R, ..., < a_{k-1}, a_k > \in R$$

由复合运算得 $< a, b > = < a_0, a_k > \in R^{k'}$，其中 $k' = k - (j - i)$. 此时:

若 $k' \leqslant n$，则 $< a, b > \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$；

若 $k' > n$，则重复上述做法，最终总能找到 $k'' \leqslant n$，使得 $< a, b > = < a_0, a_k > \in R^{k''}$， 即有 $< a, b > \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$. 于是得到 $R^k \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$.

由 k 的任意性知: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$.

综上所述, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$. $\square$

THE END, THANKS!