

等价关系

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

等价关系定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



等价关系

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集



我们在生活中经常遇到需要对集合中的元素进行分类的问题。例如：开学注册时，由于人数众多，为了避免拥挤，我们需要将所有新生分成三个类别，然后将这三个类别的学生分成不同时间段来完成注册。那么，应该如何进行分类呢？

其中一种方案是，将学号分成三段，每一段分配一个时间段。这种情况下，我们可以定义一个关系 $R, \langle a, b \rangle \in R$ 当且仅当 a 和 b 的学号在同一段。此关系 R 具备了自反，对称和传递的性质。

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是**自反的**、**对称的**、**传递的**，则称 R 为 A 上的**等价关系**(equivalent relation)。

等价关系

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

Example

- 同姓关系, 等于关系都是等价关系; 而朋友关系, 包含关系都不是等价关系.
- 在所有的英文单词中建立关系 R, aRb 当且仅当 a 和 b 的长度相同, 则关系 R 是等价关系.
- 在包含各种颜色的球的集合中建立关系 S, aSb 当且仅当 a 和 b 的颜色相同, 则关系 S 是等价关系.

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义一个以 4 为模的同余关系, 即 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid 4 \mid (x - y) \}$,
 $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 8, 0 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 9 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 9, 1 \rangle, \langle 9, 5 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$;
则 R 满足自反, 对称, 传递的性质, 从而 R 是等价关系.

等价关系

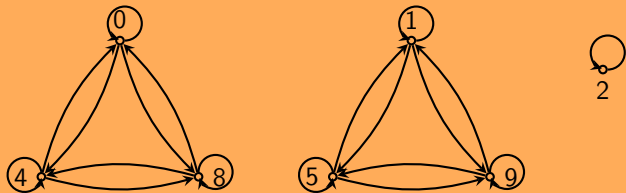
等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

上例的关系图



- 集合 A 被分成三个子集: $\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}$;
- 每个子集内的元素都具有与 R 相关的共同性质: $0, 4, 8$ 除以 4 的余数都是 0 , 而 $1, 5, 9$ 除以 4 的余数都是 1 , 同时 2 除以 4 的余数是 2 ;
- 此例子可以推广到整数集上的以 n 为模的同余关系.

以 n 为模的同余关系

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

Example

设 n 为正整数, 定义整数集合 \mathbf{Z} 上的以 n 为模的同余关系 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid n \mid (x - y) \}$, 证明 R 是一个等价关系.

Proof.

- ① **自反性**: 对任意 $x \in \mathbf{Z}$, 有 $n \mid (x - x)$, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$, 即 R 是自反的;
- ② **对称性**: 对任意 $x, y \in \mathbf{Z}$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则有 $n \mid (x - y)$, 因为 $(y - x) = -(x - y)$, 所以 $n \mid (y - x)$, 从而 $\langle y, x \rangle \in R$, 即 R 是对称的;
- ③ **传递性**: 对任意 $x, y, z \in \mathbf{Z}$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 则有 $n \mid (x - y)$ 且 $n \mid (y - z)$. 因为 $(x - z) = (x - y) + (y - z)$, 所以 $n \mid (x - z)$, 从而 $\langle x, z \rangle \in R$, 即 R 是传递的.

由 (1), (2) 和 (3) 知, R 是 \mathbf{Z} 上的等价关系。

□

以 n 为模的同余关系

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

注意

- 在 \mathbb{Z} 上以 n 为模的同余关系 R 中, 一般记 xRy 为 $x \equiv y \pmod{n}$ (即同余式) 或 $\text{Res}_n(x) = \text{Res}_n(y)$. 其中, $\text{Res}_n(x)$ 表示 x 除以 n 的余数;
- 在此关系下, 整数集 \mathbb{Z} 被分成了 n 个子集:
 $\{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\};$
 $\{\dots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \dots\};$
 $\{\dots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \dots\};$
 $\dots;$
 $\{\dots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \dots\}.$
- 这些子集称作由 R 产生的等价类.

等价类

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 对任意 $x \in A$, 称集合 $[x]_R = \{y | y \in A, \langle x, y \rangle \in R\}$ 为 x 关于 R 的**等价类**(equivalence class), 或叫作由 x 生成的一个 R 等价类, 其中 x 称为 $[x]_R$ 的**生成元**(代表元或典型元)(generator).

Example

在集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ 上定义的以 4 为模的同余关系中,

- $[0]_R = [4]_R = [8]_R = \{0, 4, 8\};$
- $[1]_R = [5]_R = [9]_R = \{1, 5, 9\};$
- $[2]_R = \{2\}.$

等价类的性质

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

Theorem

设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

- ① 对任意 $x \in A, [x]_R \neq \emptyset$;
- ② 对任意 $x, y \in A$, 如果 $y \in [x]_R$, 则有 $[x]_R = [y]_R$, 否则 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$;
- ③ $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$.

Proof.

- ① 对 $\forall x \in A$, 因为 R 是等价关系, 所以 R 是自反的, 从而 $\langle x, x \rangle \in R$, 即 $x \in [x]_R$, 故 $[x]_R \neq \emptyset$;



等价类的性质

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

Continue...

② $\forall x, y \in A$,

a) 若 $y \in [x]_R$, 则 $\langle x, y \rangle \in R$. 对任意 $z \in [x]_R$, 则有 $\langle x, z \rangle \in R$. 因为 R 是等价关系, 所以 R 对具有对称性和传递性. 由 R 的对称性有 $\langle y, x \rangle \in R$, 由 R 的传递性有 $\langle y, z \rangle \in R$. 所以 $z \in [y]_R$, 即 $[x]_R \subseteq [y]_R$. 同理可证, $[y]_R \subseteq [x]_R$. 从而, 有 $[x]_R = [y]_R$;

b) 若 $y \notin [x]_R$, 设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, 则存在 $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 即 $z \in [x]_R, z \in [y]_R$, 因此有 $\langle x, z \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$. 由 R 的对称性有 $\langle z, y \rangle \in R$, 由 R 的传递性有 $\langle x, y \rangle \in R$, 所以 $y \in [x]_R$, 与假设 $y \notin [x]_R$ 矛盾. 从而, 有 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$;

③ 对任意 $x \in A, [x]_R \subseteq A$, 所以 $\bigcup_{x \in A} [x]_R \subseteq A$; 又对任意 $x \in A$, 因 R 是自反的, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$, 即 $x \in [x]_R$. 所以 $x \in \bigcup_{x \in A} [x]_R$, 即 $A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R$. 故 $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$. □

商集

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

Definition

设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 由 R 确定的一切等价类的集合, 称为集合 A 上关于 R 的商集(quotient set), 记为 A/R , 即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

Example

设集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$, 则

- 在 A 上定义的以 4 为模的同余关系 R 中,
 $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\};$
- 在 A 上定义的以 3 为模的同余关系 S 中,
 $A/S = \{[0]_S, [1]_S, [2]_S\} = \{\{0, 9\}, \{1, 4\}, \{2, 5, 8\}\}.$

计算商集 A/R 的通用过程

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集

- ① 任选 A 中一个元素 a , 计算 $[a]_R$;
- ② 如果 $[a]_R \neq A$, 任选一个元素 $b \in A - [a]_R$, 计算 $[b]_R$.
- ③ 如果 $[a]_R \cup [b]_R \neq A$, 任选一个元素 $c \in A - [a]_R - [b]_R$, 计算 $[c]_R$.
- ④ 以此类推 , 直到 A 中所有元素都包含在计算出的等价类中.

等价关系定义

Lijie Wang

定义

等价类和商集



THE END, THANKS!