哈密顿图

王丽杰

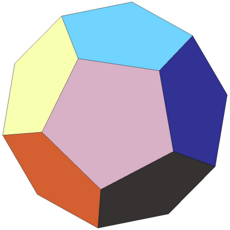
Email: ljwang@uestc.edu.cn

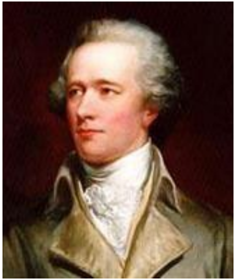
电子科技大学 计算机学院

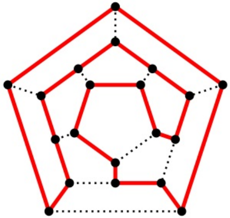
2016-

周游世界问题

1859 年英国数学家威廉·哈密顿爵士发明了一个小玩具，这个小玩具是一个木刻的正十二面体，每面系正五角形，共有 20 个顶点，每个顶点标有世界上一个重要城市。他提出一个问题：要求沿正十二面体的边寻找一条路通过 20 个城市，而每个城市只通过一次，最后返回原地。哈密顿将此问题称为周游世界问题。







哈密顿图的定义

Definition

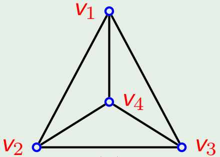
设 G 是一个无向或有向图，若存在一条通路 (回路)，经过图中每个结点一次且仅一次，则称此通路 (回路) 为该图的一条哈密顿通路 (回路)。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian graph)。

☞ 注意

- 规定：平凡图为哈密顿图；
- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中长度最短的通路；
- 哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中长度最短的回路。

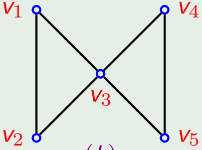
哈密顿图的定义

Example



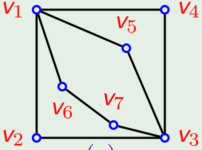
(a)

哈密顿图（哈密顿回路）



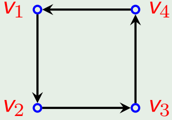
(b)

存在哈密顿通路



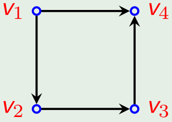
(c)

无哈密顿通路



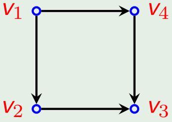
(d)

哈密顿图（哈密顿回路）



(e)

存在哈密顿通路



(f)

无哈密顿通路

哈密顿图的必要条件

Theorem

设无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则$p(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $p(G-V_1)$ 是从 G 中删除 V_1 后所得到图的连通分支数。

Proof.

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路，V_1 是 V 的任意非空子集。下面分两种情况讨论：

（1）V_1 中结点在 C 中均相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，$C-V_1$ 仍是连通的，但已非回路，因此 $p(C-V_1)=1\leqslant|V_1|$。

（2）V_1 中结点在 C 上存在 $r(2\leqslant r\leqslant|V_1|)$ 个互不相邻，删除 C 上 V_1 中各结点及关联的边后，将 C 分为互不相连的 r 段，即 $p(C-V_1)=r\leqslant|V_1|$。

一般情况下，V_1 中的结点在 C 中即有相邻的，又有不相邻的，因此总有 $p(C-V_1)\leqslant|V_1|$。

又因 C 是 G 的生成子图，从而 $C-V_1$ 也是 $G-V_1$ 的生成子图，故有

$p(G-V_1)\leqslant p(C-V_1)\leqslant|V_1|$。 □

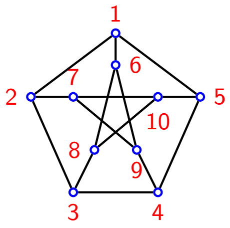
必要条件的推论及使用

Corollary

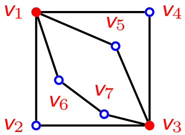
设无向图 $G=<V,E>$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1，都有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|+1。$$

- 此定理是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。
- 此定理的主要应用是判断某些图不是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得 $p(G-V_1)>|V_1|$，则 G 不是哈密顿图。
- 有割点的图一定不是哈密顿图。

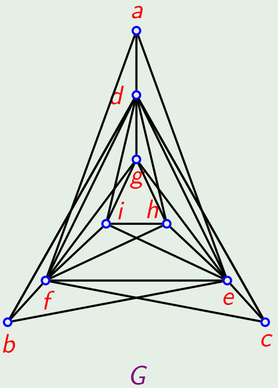


彼得森图

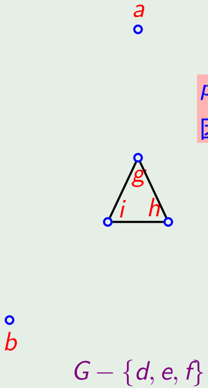


证明不存在哈密顿回路

Example



删除 {d,e,f}



$p(G-\{d,e,f\}) = 4 > 3$,

因而不会存在哈密顿回路。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G = < V, E >$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u, v \in V$，均有 $deg(u) + deg(v) \geqslant n - 1$，则 G 中存在哈密顿通路。

哈密顿图的充分条件

Theorem

设 $G = < V, E >$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u, v \in V$，均有 $deg(u) + deg(v) \geqslant n - 1$，则 G 中存在哈密顿通路。

Example

某地有 5 个风景点，若每个风景点均有 2 条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处？

解 将 5 个风景点看成图中的结点，两风景点间的道路看成是无向图的边，故每个结点的度数均为 2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于 4，正好为总结点数减 1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处。

Theorem

设 $G = < V, E >$ 是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 $u, v \in V$，均有 $deg(u) + deg(v) \geqslant n$，则 G 中存在哈密顿回路。

哈密顿图的充分条件

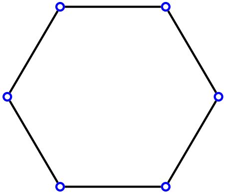
Corollary

设 $G =< V, E >$ 是具有 n 个结点的简单无向图，$n \geqslant 3$。如果对任意 $v \in V$，均有 $deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图。

☞ 注意

定理及其推论给出的是哈密顿图的充分条件，而不是必要条件。

六边形

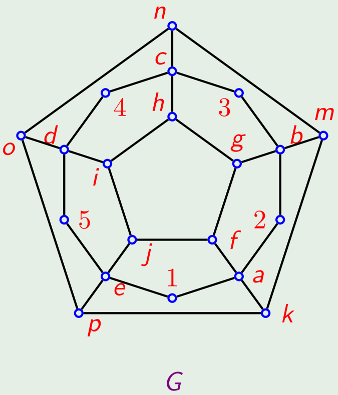


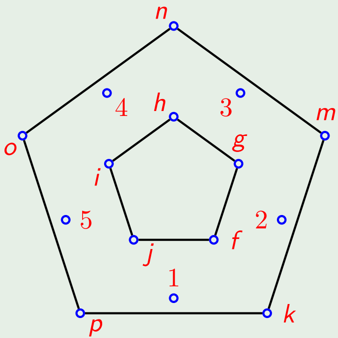
4<6，仍是哈密顿图

其它判定方法

Example

判断图 G 是否存在哈密顿回路。



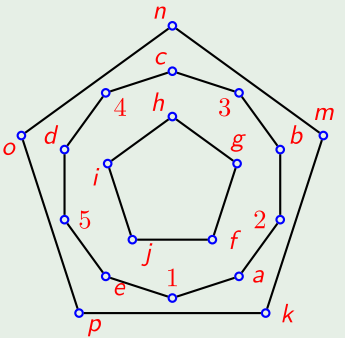


方法一：$G-\{a,b,c,d,e\}$,$7>5$，不存在哈密顿回路

方法二

Example

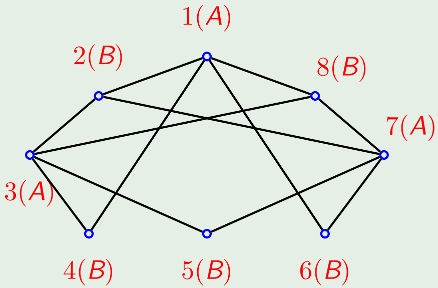
若图 G 中存在哈密顿回路，则该回路组成的图中任何结点的度数均为 2。因而结点 1、2、3、4、5 所关联的边均在回路中，于是在结点 a、b、c、d、e 处均应将不与 1、2、3、4、5 关联的边删除，而要删除与结点 a、b、c、d、e 关联的其它边，得到右图，它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。



G

其它判定方法

Example



任取一结点如 1 用 A 标记，所有与它邻接的结点用 B 标记。继续不断地用 A 标记所有邻接于 B 的结点，用 B 标记所有邻接于 A 的结点，直到所有结点都标记完毕。

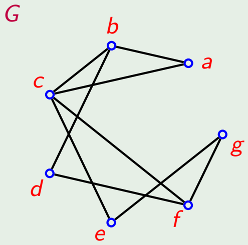
如果图中有一条哈密顿通路，那么它必交替通过结点 A 和 B，故而标记 A 的结点与标记 B 的结点数目或者相同，或者相差 1 个。然而图中有 3 个结点标记为 A，5 个结点标记为 B，它们相差两个，所以该图不存在哈密顿通路。

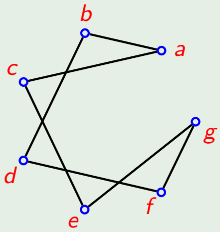
哈密顿图的应用

Example

今有 7 个人 a,b,c,d,e,f,g，已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语，日语和俄语，g 会讲法语和德语。问能否将这 7 个人安排就坐圆桌旁，使得每个人都能与两边的人交谈？

解： 做无向图 $G =< V, E >$，$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$E = \{(u, v)|u \neq v, \text{且 } u, v \text{有共同语言}\}$。因而问题变成了图中是否存在哈密顿回路，这个回路就是他们的圆桌就坐顺序。





$C = acegfdba$

THE END, THANKS!