

函数

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较

函数基本定义

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



引言

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较



函数是数学中的一个基本概念, 它非常古老, 这个词出现于十七世纪下半叶, 比关系理论早两个多世纪, 由伟大的数学家莱布尼兹提出, 他也与牛顿各自独立的发现了微积分的基本定理.

在高等数学中, 函数一般是在实数集的基础上来研究, 通常是连续或间断连续的函数. 在这里, 我们将函数看作是一种特殊的二元关系, 从离散量的角度讨论函数的定义, 运算和性质.

函数的概念在日常生活和计算机科学中非常重要. 例如, 各种高级程序语言中都大量的使用了函数. 实际上, 计算机的任何输出都可看成是某些输入的函数.

引例

函数基本定义

Lijie Wang

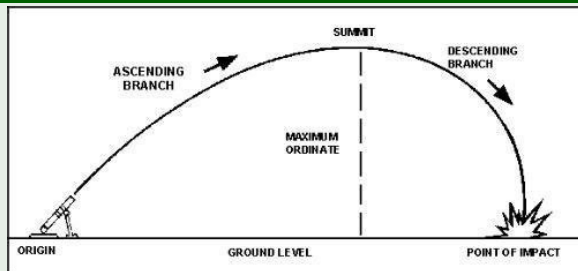
定义

举例

数量

比较

Example



假定你需要编写一个函数, 函数的输入是目标的距离 x , 函数的输出是大炮射角 α . 考虑这个函数的输入 x 和输出 α 应该满足什么性质?

函数

函数基本定义

Lijie Wang

定义

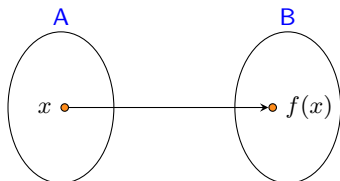
举例

数量

比较

Definition

设 f 是集合 A 到 B 的关系, 如果**对每个** $x \in A$, **都存在惟一的** $y \in B$, 使得 $\langle x, y \rangle \in f$, 则称关系 f 为 A 到 B 的**函数**或映射, 记为 $f: A \rightarrow B$. A 为函数 f 的**定义域**, 记为 $\text{dom} f = A$; $f(A)$ 为函数 f 的**值域**, 记为 $\text{ran} f$.



当 $\langle x, y \rangle \in f$ 时, 通常记为 $y = f(x)$, 这时称 x 为函数 f 的**自变量 (或原像)**, y 为 x 在 f 下的**函数值 (或像)**. 注意区分 f 和 $f(x)$, 二者是不同的。

函数

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, 则.

- $f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$; 函数
- $f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$; 非函数
- $f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$; 函数
- $f_4 = \{\langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle\}$. 非函数

如果关系 f 具备下列两种情况之一, 那么 f 就不是函数:

- 存在元素 $a \in A$, 在 B 中没有像;
- 存在元素 $a \in A$, 有两个及两个以上的像。

函数

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较

Example (更多函数的例子)

- $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = x + 1;$
- $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^2 + 2x + 1;$
- $h : A \rightarrow P(A), h(x) = \{x\};$
- 设 $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是 n 项任务的集合, $M = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 是 m 个人的集合, 则 $t : V \rightarrow M$ 表示任务的安排方案: $t(a_i) = b_j$ 表示 a_i 任务由 b_j 来完成.

Definition

所有从 A 到 B 的一切函数构成的集合记为 B^A :

$$B^A = \{f | f : A \rightarrow B\}.$$

函数的数量

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较

Example

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 A 到 B 的所有不同函数有:

- | | |
|---|---|
| ① $f_1 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$ | ⑤ $f_5 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$ |
| ② $f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$ | ⑥ $f_6 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$ |
| ③ $f_3 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle \};$ | ⑦ $f_7 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$ |
| ④ $f_4 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \};$ | ⑧ $f_8 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle \}.$ |

设函数 $f: A \rightarrow B, |A| = m, |B| = n$, 对 A 中的每个元素而言, 其序偶的第二元素都有 n 种可能的选择, 因而总共有 n^m 种选法, 也就是有 n^m 个不同的函数.

关系与函数的差别

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较

当 A 和 B 都是有限集合时, 函数和一般关系具有如下差别:

- 关系和函数的**数量不同**: 从 A 到 B 的不同关系有 $2^{|A| \times |B|}$ 个, 从 A 到 B 的不同函数却仅有 $|B|^{|A|}$ 个;
- 关系和函数的**基数不同**: 每一个关系的基数可以从零一直到 $|A| \times |B|$, 每一个函数的基数都为 $|A|$ 个;
- 关系和函数的**第一元素存在差别**: 关系的第一个元素可以相同, 函数的第一元素一定是互不相同的.

函数基本定义

Lijie Wang

定义

举例

数量

比较



THE END, THANKS!