

有向图的连通性

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



有向图的连通性

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

由于有向图中边都有方向性，因此有向图结点之间的可达关系仅仅具有自反性和传递性，而不具有对称性。因此，有向图中的可达关系不是等价关系。

Definition

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有向图，

- 略去 G 中所有有向边的方向得无向图是连通图，则称有向图 G 是连通图或称为弱连通图。否则称 G 是非连通图；
- 若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称 G 是单向连通图；
- 若 G 中任何一对结点之间都是相互可达的，则称 G 是强连通图。

有向图的连通性

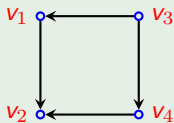
有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

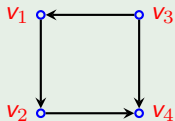
连通分支

Example



G_1

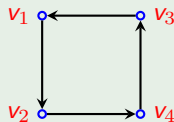
弱连通图



G_2

弱连通图

单向连通图

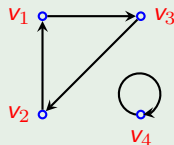


G_3

弱连通图

单向连通图

强连通图



G_4

非连通图

显然，强连通图必是单向连通图；单向连通图必是（弱）连通图。但反之均不成立。

强连通图的判定

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

Definition

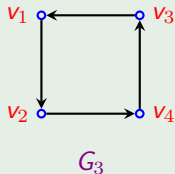
有向图 G 是**强连通图**的充分必要条件是 G 中存在一条经过所有结点至少一次的回路。

Proof.

略。



Example



强连通图

回路: $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$

单向连通图的判定

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

Definition

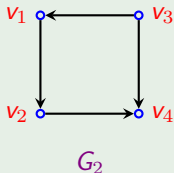
有向图 G 是**单向连通图**的充分必要条件是 G 中存在一条**经过所有结点至少一次的通路**。

Proof.

略。



Example



单向连通图

通路: $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4$

邻接矩阵判定法

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

由邻接矩阵 A , 求出可达性矩阵 P ,

- 有向线图 G 是**强连通图**当且仅当它的可达性矩阵 P 的**所有元素均为 1** ;
- 有向线图 G 是**单向连通图**当且仅当它的可达性矩阵 P 及其转置矩阵 P^T 经过布尔加运算后所得的**矩阵 $P' = P \vee P^T$ 中除主对角元外其余元素均为 1** ;
- 有向线图 G 是**弱连通图**当且仅当它的邻接矩阵 A 及其转置矩阵 A^T 经布尔加运算所得的矩阵 $A' = A \vee A^T$ 作为邻接矩阵而求得的**可达性矩阵 P' 中所有元素均为 1**.

三类连通分支

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

Definition

在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 设 G' 是 G 的子图, 如果

- G' 是**强连通的**(**单向连通的**、**弱连通的**);
- 对任意 $G'' \subseteq G$, 若 $G' \subset G''$, 则 G'' 不是**强连通的**(**单向连通的**、**弱连通的**);

那么称 G' 为 G 的**强连通分支**(**单向连通分支**、**弱连通分支**), 或称为**强分图**(**单向分图**、**弱分图**)。

- 弱连通分支也就是忽略边的方向所对应的无向图的连通分支;
- 注意把握 (强、单向、弱) 连通分支的**极大性**特点, 即任意增加一个结点或一条边就不是 (强、单向、弱) 连通的了。

三类连通分支

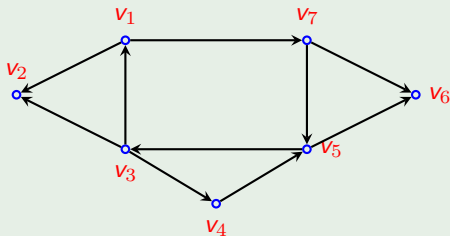
有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

Example



- $\{v_2\}$, $\{v_6\}$, $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$, $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是单向连通分支;
- 该图自身即是弱连通分支.

三类连通分支

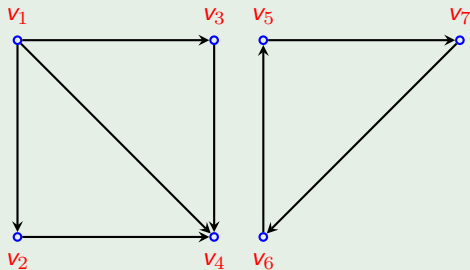
有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

Example



- $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$, $\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是强连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是单向连通分支;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6, v_7\}$ 导出的子图是弱连通分支.

连通分支的判定

有向图的连通性

Lijie Wang

有向图的连通性

连通分支

Theorem

在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中，至少位于一个单向连通分支中。

Theorem

在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

- 弱连通分支: 图的不互连部分
- 强连通分支: 出度为 0 或入度为 0 的结点, 极大回路, ...
- 单向连通分支: 极大通路



THE END, THANKS!