关系的性质 (一)

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

自反性与反自反性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

1. 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $<x, x> \in R$, 那么称 R 在 A 上是自反的(reflexive), 或称 R 具有自反性(reflexivity);
2. 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $<x, x> \notin R$, 那么称 R 在 A 上是反自反的(antireflexive), 或称 R 具有反自反性(antireflexivity);

Example

- 同姓关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是自反的关系;
- 父子关系, 小于关系, 真包含关系都是反自反的关系.

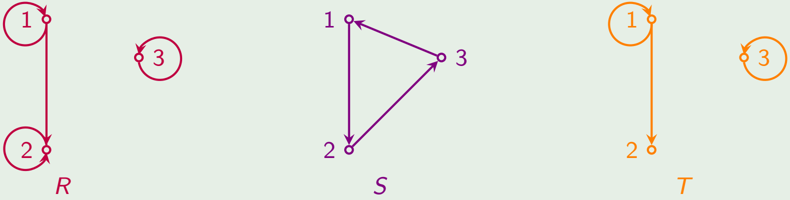
自反性与反自反性

Example

设 $A=\{1,2,3\}$, 定义 A 上的关系 R, S 和 T 如下:

1. $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<3,3>\}$; 自反
2. $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,1>\}$; 反自反
3. $T=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>,<3,3>\}$. 非自反, 非反自反

关系图：



自反性与反自反性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 存在既不是自反的也不是反自反的关系;
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系图中每个结点都有自环, 关系 R 是反自反的当且仅当 R 的关系图中每个结点都无自环;
- 关系 R 是自反的当且仅当 R 的关系矩阵的主对角线上全为 1, 关系 R 是反自反的当且仅当 R 的关系矩阵的主对角线上全为 0.

对称性与反对称性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系.

1. 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $<x, y> \in R$, 那么 $<y, x> \in R$, 则称 R 是对称的(symmetric), 或称 R 具有对称性(symmetry);
2. 如果对任意的 $x, y \in A$, 如果 $<x, y> \in R$ 且 $<y, x> \in R$, 那么 $x = y$, 则称 R 是反对称的(antisymmetric), 或称 R 具有反对称性(antisymmetry);

Example

- 同姓关系, 朋友关系, 同余关系都是对称的关系;
- 父子关系, 小于等于关系, 包含关系, 整除关系都是反对称的关系.

对称性与反对称性

Example

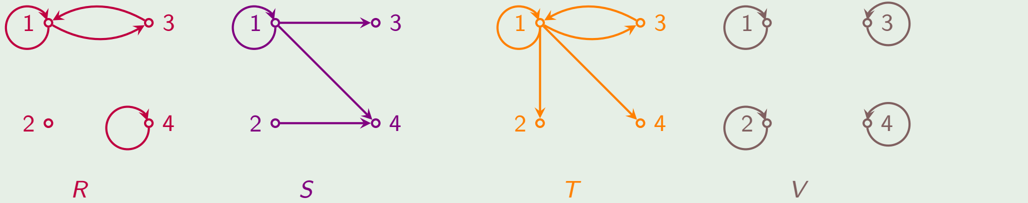
设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

1. $R = \{< 1, 1 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 4, 4 >\}$; 对称
2. $S = \{< 1, 1 >, < 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 4 >\}$; 反对称
3. $T = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 3, 1 >, < 1, 4 >\}$; 非对称, 非反对称
4. $V = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >, < 4, 4 >\}$. 对称, 反对称

存在既不是对称的也不是反对称的关系, 也存在既是对称又是反对称的关系;

对称性与反对称性

Example (关系图)



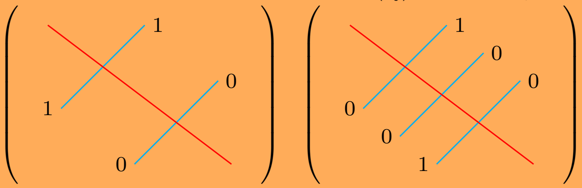
关系图判定法：关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无边，关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系图中，任何一对结点之间至多只有一条边。

对称性与反对称性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系矩阵判定法：关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵，关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $i \neq j$ 时，$r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$.



传递性

Definition

设 R 是集合 A 上的关系. 对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 那么 $< x, z > \in R$, 则称 R 是传递的(transitive), 或称 R 具有传递性(transitivity);

Example

- 同姓关系, 小于关系, 包含关系, 整除关系, 飞机航线的可达关系都是传递的关系;
- 父子关系, 朋友关系, 婚姻关系, 飞机航线的直达关系都不是传递的关系.

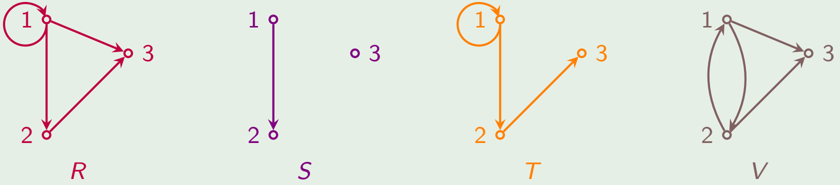
传递性

Example

设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 R, S, T 和 V 如下:

1. $R = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 3 >, < 1, 3 >\};$ 传递
2. $S = \{< 1, 2 >\};$ 传递
3. $T = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 3 >\};$ 非传递
4. $V = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >, < 1, 3 >, < 2, 1 >\}.$ 非传递

关系图:



传递性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系图中, 任何三个不同结点 x, y, z 之间, 若从 x 到 y 有一条边存在, 从 y 到 z 有一条边存在, 则从 x 到 z 一定有一条边存在;
- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系矩阵中, 对任意 $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$, 必有 $r_{ik} = 1$.

THE END, THANKS!