

次序关系

其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

其它次序关系

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



拟序关系

其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的, 则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“ $<$ ”, 读作“小于”, 并将“ $< a, b > \in <$ ”记为 $a < b$. 序偶 $< A, < >$ 称为拟序集 (quasi-order set).

拟序关系

其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

Definition

设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 R 是反自反的和传递的, 则称 R 为 A 上的拟序关系(quasi-order relation), 记为“ $<$ ”, 读作“小于”, 并将“ $\langle a, b \rangle \in <$ ”记为 $a < b$. 序偶 $\langle A, < \rangle$ 称为拟序集 (quasi-order set).

Example

- 实数集上的小于关系是拟序关系;
- 幂集上的真包含关系是拟序关系.

拟序关系

其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

Example

设 R 是集合 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的.

Proof.

使用反证法, 假设 R 不是反对称的关系, 则必存在 $x, y \in A$, 且 $x \neq y$, 满足 $\langle x, y \rangle \in R$ 并且 $\langle y, x \rangle \in R$. 因为 R 是 A 上的拟序关系, 所以 R 具有传递性, 从而有 $\langle x, x \rangle \in R$. 这与 R 是反自反的矛盾, 从而假设错误, 即 R 一定是反对称的. □

拟序关系 VS 偏序关系

- R 是集合 A 上的偏序关系, 则 $R - I_A$ 是 A 上的拟序关系;
- S 是集合 A 上的拟序关系, 则 $S \cup I_A$ 是 A 上的偏序关系.

全序关系

其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序关系, 若对任意 $x, y \in A$, x 与 y 都是可比的, 则称关系 " \leq " 为全序关系 (total order relation) 或线序关系. 称 $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集 (total order set), 或线序集, 或链。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系 " \leq " = $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$ 是全序关系;
- 数集上的小于等于关系是全序关系;
- 正整数集合上的整除关系不是全序关系, 但集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 上的整除关系是全序关系;
- 幂集 $P(A)$ 上的包含关系在 $|A| < 2$ 时是全序关系; 但 $|A| \geq 2$ 时则不是全序关系;
- 计算机科学中常用的字典排序关系是全序关系。

全序关系的哈斯图

其它次序关系

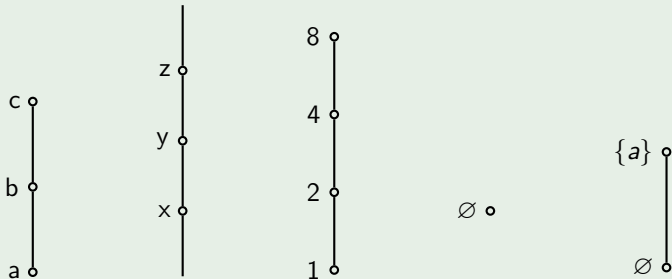
Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

Example



全序关系的哈斯图将集合中的元素排成一条线，像一条链子，这充分体现了全序集可以称作线序集或链的原因。

良序关系

其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是全序集, 若 A 的任何一个非空子集都有最小元素, 则称“ \leq ”为良序关系 (well order relation), 此时 $\langle A, \leq \rangle$ 称为良序集 (well order set)。

Example

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系“ \leq ”
“ \leq ” = $\{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$ 是良序关系;
- 整数集上的小于等于关系不是良序关系, 但正整数集上的小于等于关系是良序关系;
- 良序关系一定是全序关系, 而有限全序集一定是良序集.

总结

其它次序关系

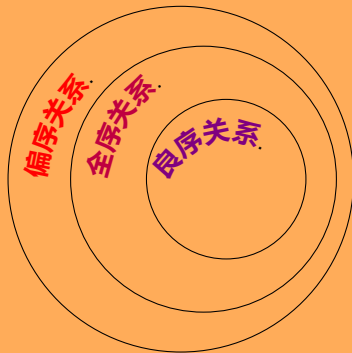
Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系

偏序关系, 全序关系和良序关系之间的关系如下图:



其它次序关系

Lijie Wang

拟序关系

全序关系

良序关系



THE END, THANKS!