函数的运算

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

函数的复合

Definition

设 $f: A \to B, g: B \to C$ 是两个函数, 则 f 与 g 的复合关系 $f \circ g = \{<x, z> | x \in A, z \in C, \exists y \in B, 使得 y = f(x) 且 z = g(y)\}$ 是从 A 到 C 的函数, 称为函数 f 与 g 的复合函数(composition function), 记为 $f \circ g : A \to C$.

☞

- 函数 f 和 g 可以复合的前提条件是 $ranf \subseteq domg$；
- $dom(f \circ g) = domf, ran(f \circ g) \subseteq rang$；
- 对任意 $x \in A$, 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$;
- $I_A \circ f = f \circ I_B = f$.

函数的复合

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,$B = \{a, b, c, d\}$, 函数 $f : A \to B, g : B \to A$ 定义如下:

- $f = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, d >, < 4, c >, < 5, b >\}$;
- $g = \{< a, 1 >, < b, 3 >, < c, 5 >, < d, 2 >\}$.

则,

- $f \circ g = \{< 1, 1 >, < 2, 1 >, < 3, 2 >, < 4, 5 >, < 5, 3 >\}$;
- $g \circ f = \{< a, a >, < b, d >, < c, b >, < d, a >\}$.

函数的复合不满足交换律.

函数的复合

Example

设 f, g, h 都是实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数, 满足

$$f(x) = 2x,\ g(x) = (x+1)^2,\ h(x) = \frac{x}{2}\ .$$

- 求 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$:

  $((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2}$;

  $(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h((2x+1)^2) = \frac{(2x+1)^2}{2}$;

- 求 $f \circ h$ 和 $h \circ f$:

  $f \circ h(x) = h(f(x)) = h(2x) = x,\ h \circ f(x) = f(h(x)) = f(\frac{x}{2}) = x.$

函数的复合满足结合律.

保守性

Example

设 f 和 g 分别是从 A 到 B 和从 B 到 C 的函数，则

- 若 f, g 是满射，则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的满射；
- 若 f, g 是单射，则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的单射；
- 若 f, g 是双射，则 $f \circ g$ 也是从 A 到 C 的双射。　可由前面两条直接得到

Proof.

- 对 $\forall c \in C$, 由 g 是满射, 所以 $\exists b \in B$, 有 $g(b) = c$. 又 f 是满射, 所以 $\exists a \in A$, 有 $f(a) = b$, 从而 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 即 $\exists a \in A$, 使得 $f \circ g(a) = c$, 所以 $f \circ g$ 是满射;
- 对 $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. 由于 f 是单射, 所以 $f(a_1) \neq f(a_2)$. 令 $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$, 所以 $g(b_1) \neq g(b_2)$, 即 $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. 从而有 $f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$, 所以 $f \circ g$ 是单射; $\square$

函数的逆

Definition

设 $f: A \to B$ 是函数, 如果 $f^{-1} = \{< y, x > | x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ 是从 B 到 A 的函数, 则称 $f^{-1}: B \to A$ 为函数 f 的逆函数(inverse function).

Example

- 函数 $f_1(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ 时没有逆函数, 但当 $x \in \mathbf{R}^+$ 时有逆函数 $\sqrt{x}$;
- 函数 $f_2(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$ 时有逆函数 $\frac{1}{2}x$;

- 函数 f^{-1} 存在当且仅当 f 是双射, 此时 f^{-1} 也是双射.
- $f \circ f^{-1} = I_A \quad ; \quad f^{-1} \circ f = I_B$.

THE END, THANKS!