通路和回路

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

引言

- 成都可经重庆、武汉、郑州到达北京;
- 成都无论如何也到不了台北.

通路与回路概念

Definition

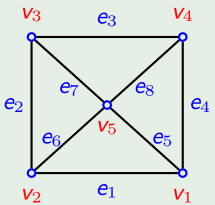
给定图 $G=<V,E>$ 中结点和边相继交错出现的序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

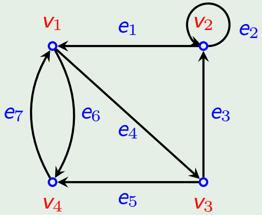
1. 若 Γ 中边 e_i 的两端点是 v_{i-1} 和 v_i（有向图时 v_{i-1} 与 v_i 分别是 e_i 的始点和终点），$i=1,2,\cdots,k$，则称 Γ 为结点 v_0 到结点 v_k 的通路。v_0 和 v_k 分别称为此通路的始点和终点，统称为通路的端点。通路中边的数目 k 称为此通路的长度。当 $v_0=v_k$ 时，此通路称为回路。
2. 若通路中的所有边互不相同，则称此通路为简单通路, 否则称为复杂通路；若回路中的所有边互不相同，则称此回路为简单回路, 否则称为复杂回路。
3. 若通路中的所有结点互不相同，所有边也互不相同，则称此通路为基本通路或者初级通路; 若回路中除 $v_0=v_k$ 外的所有结点互不相同, 所有边也互不相同，则称此回路为基本回路或者初级回路。

通路与回路举例

Example



- Γ_1 : $v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 复杂通路，长度 6
- Γ_2 : $v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$; 简单通路，长度 5
- Γ_3 : $v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$; 基本通路，简单通路，长度 4



- Γ_1 : $v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 复杂回路，长度 6
- Γ_2 : $v_3 e_3 v_2 e_2 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 简单回路，长度 4
- Γ_3 : $v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$; 基本回路，简单回路，长度 3

记号的简化

- 回路是通路的特殊情况;

记号的简化

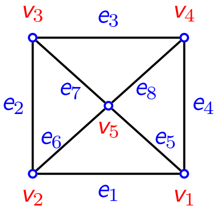
- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下，一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;

记号的简化

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下，一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;
- 在简单图中，一条通路也可以用结点的序列 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ 来表示.

记号的简化

- 回路是通路的特殊情况;
- 在不会引起误解的情况下，一条通路可以用边的序列 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 来表示;
- 在简单图中，一条通路也可以用结点的序列 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ 来表示.



Γ_1 : $v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$

可简化为: $e_1 e_6 e_7 e_2 e_6 e_8$

或: $v_1 v_2 v_5 v_3 v_2 v_5 v_4$

引入

我们经常会考虑如下的问题:

- 有多少种方式可从成都到达北京？
- 猫头鹰和松鼠之间的间接食物竞争有哪些方式？
- 报文有多少种方式可从 A 计算机发送到距离很远的 B 计算机？

这些问题都可以归结为求图中任何两个结点间有多少条长度为 m 的通路的问题。若使用人工方式，随着图中结点和边的数目增加，其难度将呈几何级数增加。而利用计算机，我们可以较为容易且准确的解决这个问题。

通路数量的计算

Theorem

设 $G=<V,E>$ 为线图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$A=(a_{ij})_{nxn}$ 为 G 的邻接矩阵，$A^m=(a_{ij}^{(m)})_{nxn}$。则:

- $a_{ij}^{(m)}$ 为从结点 v_i 到结点 v_j 长度为 m 的通路数目;
- $a_{ii}^{(m)}$ 为结点 v_i 到自身的长度为 m 的回路数目;
- $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}$ 是 G 中长度为 m 的通路（含回路）总数.
- $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}^{(m)}$ 是 G 中长度为 m 的回路总数.

通路数量的计算

Proof.

对 m 用数学归纳法。

1. 当 $m=1$ 时，显然成立。
2. 设 $m=k$ 时，定理成立。
3. 证明 $m=k+1$ 时定理成立。因为 $(a_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}=A^{k+1}=A\times A^k=(\sum\limits_{p=1}^{n}a_{ip}a_{pj}^{(k)})_{n\times n}$，故 $a_{ij}^{(k+1)}=\sum\limits_{p=1}^{n}a_{ip}a_{pj}^{(k)}$，而 a_{ip} 是结点 v_i 到 v_p 长度为 1 的通路数目，$a_{pj}^{(k)}$ 是结点 v_p 到 v_j 长度为 k 的通路数目，故 $a_{ip}a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 经过 v_p 到结点 v_j 的长度为 $k+1$ 的通路数目，那么 $\sum\limits_{p=1}^{n}a_{ip}a_{pj}^{(k)}$ 是从结点 v_i 到结点 v_j 的长度为 $k+1$ 的通路数目。

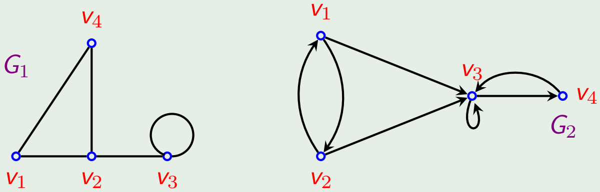
$\square$

通路数量的计算

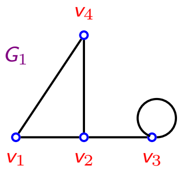
Example

针对如下两个图 G_1 与 G_2，求:

1. 从结点 v_1 到结点 v_3 长度为 2 和 3 的通路数目。
2. 所有长度为 2 和 3 的通路数目。



解：对于图 G_1



$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

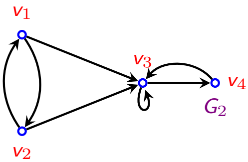
$$A_{G_1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)} = 1$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 1;
- $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij}^{(2)} = 21, \sum\limits_{i=1}^{4} a_{ii}^{(2)} = 9$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 21(含 9 条回路);

$$A_{G_1}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(3)} = 2$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路数为 2;
- $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij}^{(3)} = 48, \sum\limits_{i=1}^{4} a_{ii}^{(3)} = 10$, 即图中所有长度为 3 的通路数为 48(含 10 条回路);

解：对于图 G_2



$$A_{G_2}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A_{G_2}^2=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&1\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(2)}=2$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数为 2;
- $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(2)}=13, \sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(2)}=5$, 即图中所有长度为 2 的通路数为 13(含 5 条回路);

$$A_{G_2}^3=\begin{pmatrix}0&1&4&2\\1&0&4&2\\0&0&3&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

- $a_{13}^{(3)}=4$, 即结点 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路数为 4;
- $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(3)}=22, \sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(3)}=4$, 即图中所有长度为 3 的通路数为 22(含 4 条回路);

通路数量

想一想，如何求图中两结点间长度不大于 m 的通路数目？

Corollary

设矩阵 $B_m = (b_{ij})_{n\times n} = A + A^2 + \cdots + A^m (m \geqslant 1)$，则 b_{ij} 表示结点 v_i 到 v_j 长度不大于 m 的通路数目，而 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ 则可表示图中长度不大于 m 的通路总数，$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ 则可表示图中所有长度不大于 m 的回路总数。

THE END, THANKS!