

二元关系

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算

关系的运算

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-



关系的并交差补运算

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算



关系是一种**特殊的集合**，因此集合的所有基本运算（并、交、差、补），都可以应用到关系中，并且同样满足集合的所有运算定律。

Definition

设 R, S 是从 A 到 B 的两个关系，则

- $R \cup S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \vee (xSy) \}$;
- $R \cap S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \wedge (xSy) \}$;
- $R - S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \wedge (\neg xSy) \}$;
- $\bar{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \neg (xRy) \}$ (即全集为 $A \times B$)。

关系的并交差补运算

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算

Example

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 从 A 到 B 的关系 R 和 S 定义为:

$$R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}, S = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle\}$$

计算 $R \cup S, R \cap S, S - R, \bar{R}$.

解:

① $R \cup S = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle\};$

② $R \cap S = \{\langle a, 1 \rangle\};$

③ $S - R = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle\};$

④ $\bar{R} = A \times B - R = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle c, 4 \rangle\} - \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\} = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 4 \rangle\};$

关系的复合运算

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算

Definition

设 A, B, C 是三个集合, R 是从 A 到 B 的关系, S 是从 B 到 C 的关系 (即 $R: A \rightarrow B, S: B \rightarrow C$), 则 R 与 S 的复合关系(合成关系)(**composite relation**) $R \circ S$ 是从 A 到 C 的关系, 并且: $R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xRy \wedge ySz) \}$ 。运算 “ \circ ” 称为**复合运算**(**composite operation**)。

Example

设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, d\}, C = \{a, b, d\}, R = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, b \rangle \}$ 是 A 到 B 的关系, $S = \{ \langle d, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, a \rangle \}$ 是 B 到 C 的关系。
则 $R \circ S = \{ \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle b, d \rangle \}$ 。

用三种关系表示法进行复合运算

关系的运算

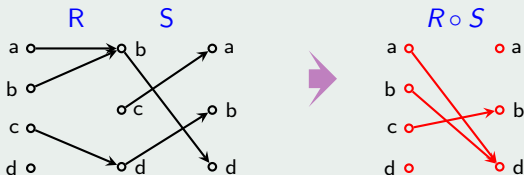
Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算

复合运算(关系图形式)



复合运算(关系矩阵形式)

$$M_{R \circ S} = M_R \odot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用三种关系表示法进行复合运算

关系的运算

Lijie Wang

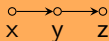
基本运算

复合运算

逆运算

总结

- ① 集合表示法求复合: 寻找所有满足 $\langle x, y \rangle \in R$ 并且 $\langle y, z \rangle \in S$, 从而得到 $\langle x, z \rangle \in R \circ S$;
- ② 关系图表示法求复合: 将关系 R, S 的关系图画在一起, 然后寻找所有首尾相接的两条有向边, 再去掉中间相接的结点 y , 可得到 $R \circ S$ 的关系图;



- ③ 关系矩阵表示法求复合: 直接将关系 R 和 S 的关系矩阵做布尔积运算即得 $R \circ S$ 的关系矩阵.

关系的逆运算

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算

Definition

设 A, B 是两个集合, R 是 A 到 B 的关系, 则从 B 到 A 的关系

$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$ 称为 R 的逆关系(inverse relation), 运算 " -1 " 称为逆运算(inverse operation)。



由逆运算的定义可知：

- ① $(R^{-1})^{-1} = R$
- ② $\emptyset^{-1} = \emptyset$
- ③ $(A \times B)^{-1} = B \times A$

用三种关系表示法求逆

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

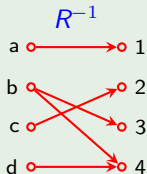
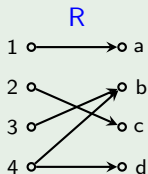
逆运算

Example

设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c, d\}$, R 是从 A 到 B 的一个关系且

$R = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 4, d \rangle \}$ 则

$R^{-1} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle d, 4 \rangle \}$ 。



$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用三种关系表示法求逆

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算

总结

- ① 将 R 的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得 R^{-1} 的关系图，反之亦然；
- ② 将 R 的关系矩阵转置即得 R^{-1} 的关系矩阵，即 R 和 R^{-1} 的关系矩阵互为转置矩阵；
- ③ R^{-1} 的定义域和值域正好是 R 的值域和定义域，即 $\text{dom}R = \text{ran}R^{-1}$ ，
 $\text{dom}R^{-1} = \text{ran}R$ ；
- ④ $|R| = |R^{-1}|$.

关系的运算

Lijie Wang

基本运算

复合运算

逆运算



THE END, THANKS!