平面图

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

平面图的定义

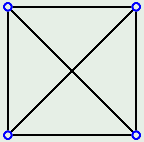
很多时候，我们需要避免图中的边在非端点位置交叉。例如在印制电路板和集成电路中，我们需要避免导线发生交叉，这会导致短路。又如在建筑布线时，也要注意尽量不能发生交叉，因为这会导致信号传输时的电磁干扰。

Definition

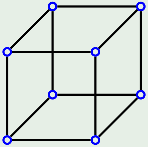
如果能够把一个无向图 G 的所有结点和边画在平面上，使得任何两边都不会在非结点处交叉，则称 G 为平面图(plane Graph)，否则称 G 为非平面图。

平面图示例

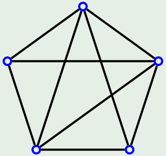
Example



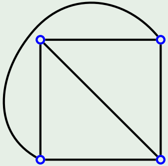
平面图 K_4



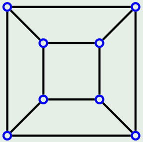
平面图 Q_3



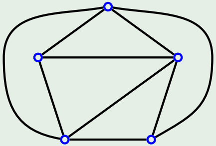
平面图 G



K_4 的平面表示



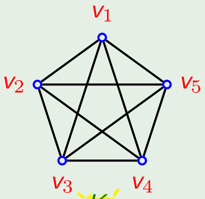
Q_3 的平面表示



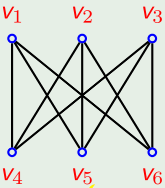
G 的平面表示

非平面图示例

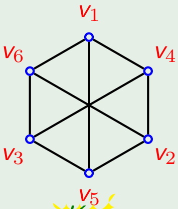
Example



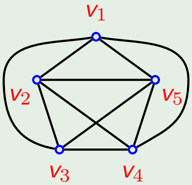
K_5

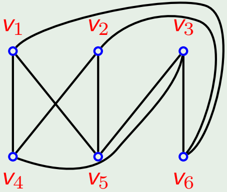


$K_{3,3}$



$K_{3,3}$



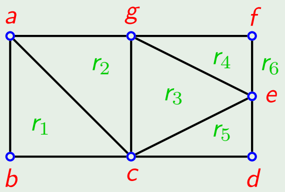


面和边界

Definition

在平面图 G 的一个平面表示中，由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，称为 G 的一个面，包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界，面 r 的边界的长度称为该面的次数，记为 $D(r)$。区域面积有限的面称为有限面，区域面积无限的面称为无限面。

Example



- r_1，边界为 $abca$，$D(r_1) = 3$;
- r_2，边界为 $acga$，$D(r_2) = 3$;
- r_3，边界为 $cegc$，$D(r_3) = 3$;
- r_4，边界为 $efge$，$D(r_4) = 3$;
- r_5，边界为 $cdec$，$D(r_5) = 3$;
- r_6，边界为 $abcdefga$，$D(r_6) = 7$;无限面

面

☞ 注意

面的概念也可以用下面形象的说法加以描述：假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上，然后用一把小刀，沿着图的边切开，那么平面就被切成许多块，每一块就是图的一个面。更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用边作边界线，且不能再分成子块。

Theorem

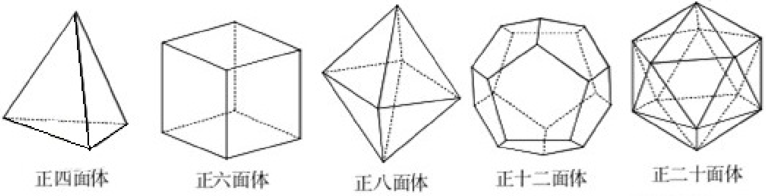
平面图中所有面的次数之和等于边数的二倍。

Proof.

因任何一条边，或者是两个面边界的公共边，或者是在一个面中作为边界被重复计算两次，故平面图所有面的次数之和等于其边数的二倍。 □

欧拉公式

1750 年，欧拉发现，任何一个凸多面体，若有 n 个顶点、m 条棱和 r 个面，则有 $n-m+r=2$。这个公式可以推广到平面图上来（球极投影），称之为欧拉公式。



Theorem

设 $G=<V,E>$ 是连通平面图，若它有 n 个结点、m 条边和 r 个面，则有

$$n-m+r=2$$

欧拉公式的证明

Proof.

我们对 G 的边数 m 进行归纳。

1. 若 $m=0$，由于 G 是连通图，故必有 $n=1$，这时只有一个无限面，即 $r=1$。所以 $n-m+r=1-0+1=2$，定理成立。
2. 若 $m=1$，这时若该边是自回路，则有 $n=1$，$r=2$，从而 $n-m+r=1-1+2=2$；若该边不是自回路，则有 $n=2$，$r=1$，从而 $n-m+r=2-1+1=2$。所以 $m=1$ 时，定理也成立。
3. 假设对少于 m 条边的所有连通平面图，欧拉公式成立。现考虑 m 条边的连通平面图，设它有 n 个结点。分以下两种情况：
   - 若 G 是树，则 $m=n-1$，$r=1$。有 $n-m+r=n-(n-1)+1=2;$
   - 若 G 不是树，则 G 中必有回路，因此有基本回路，设 e 是某基本回路的一条边，则从 G 中删除边 e 后仍是连通平面图，它有 n 个结点，$m-1$ 条边和 $r-1$ 个面，按归纳假设知 $n-(m-1)+(r-1)=2$, 整理得 $n-m+r=2$.

所以对 m 条边时，欧拉公式也成立。 □

欧拉公式推论一

Corollary

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图，若 $m > 1$，则有

$$m \leqslant 3n - 6。$$

Proof.

设 G 有 r 个面，因为 G 是简单图，所以 G 的每个面至少由 3 条边围成，所以 G 所有面的次数之和 (即边数的两倍)

$$\sum_{i=1}^{r} D(r_i) = 2m \geqslant 3 \times r$$

即 $r \leqslant \frac{2}{3}m$ ，代入欧拉公式有

$$2 = n - m + r \leqslant n - m + \frac{2}{3}m$$

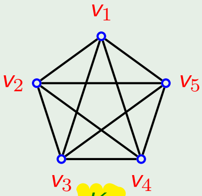
即 $2 \leqslant n - \frac{1}{3}m$，整理得 $m \leqslant 3n - 6$。 □

推论一的应用

☞ 注意

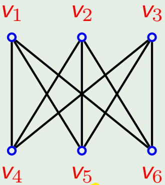
欧拉公式的推论一（$m \leqslant 3n-6$）本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图，若不满足 $m \leqslant 3n-6$，则一定是非平面图。但需要注意，满足该不等式的简单连通图未必是平面图。

Example



K_5

$n=5$，$m=10$，$m>3n-6=3\times5-6=9$，因此 K_5 不是平面图。



$K_{3,3}$

$n=6$，$m=9$，满足不等式 $m \leqslant 3n-6$，但 $K_{3,3}$ 是一个非平面图。

欧拉公式推论二

Corollary

设 G 是一个 (n, m) 简单连通平面图，若每个面的次数至少为 $k(k \geqslant 3)$，则有

$$m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)。$$

Proof.

设 G 共有 r 个面，各面的次数之和 (等于边数的两倍) 为 T，由条件可知

$$2 \times m = T \geqslant k \times r$$

利用欧拉公式解出面数 $r = 2 - n + m$，得出下式成立

$$2 \times m \geqslant k \times (2 - n + m)$$

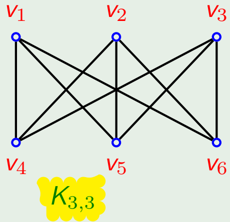
从而有 $(k-2) \times m \leqslant k \times (n-2)$ 由于 $k \geqslant 3$，因而 $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$ □

推论二的应用

☞ 注意

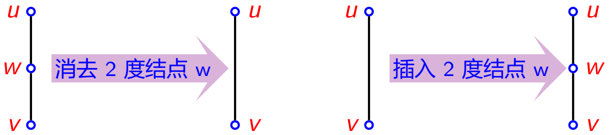
与欧拉公式的推论一类似，推论二本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图，若每个面的次数至少为 $k(k \geqslant 3)$，若不满足 $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$，则一定是非平面图。

Example



$n = 6$，$m = 9$，每个面的次数至少为 4，代入不等式 $m \leqslant \frac{k}{k-2}(n-2)$，得到 $9 \leqslant \frac{4}{4-2}(6-2)$，即 $9 \leqslant 8$，这是矛盾的，因而 $K_{3,3}$ 是一个非平面图。

同胚



Definition

如果两个图 G_1 和 G_2 同构，或经过反复插入或消去 2 度结点后同构，则称 G_1 与 G_2 同胚。

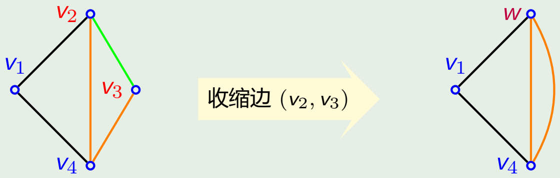
Example

收缩

Definition

图中边 $e=(u,v)$ 的收缩是指从 G 中删除 e，将 e 的两个端点 u,v 重合，用一个新的结点 w 代替，使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边，称为边 e 的收缩。一个图 G 可以收缩为图 H，是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。

Example



库拉托夫斯基定理

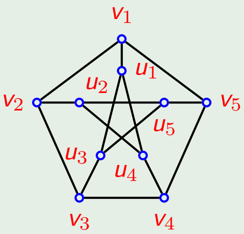
Theorem

一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚。

Theorem

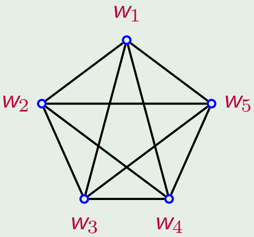
一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$。

Example



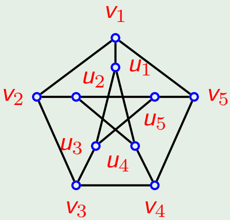
收缩边 (v_i, u_i)，

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

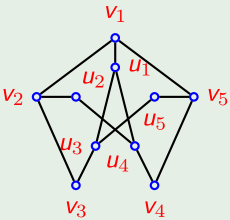


库拉托夫斯基定理

Example

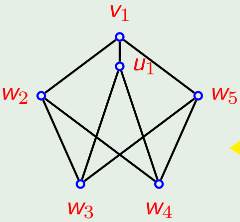


删除 $(u_2, u_5), (v_3, v_4)$



收缩边 (v_i, u_i)，

$i = 2, 3, 4, 5$



$K_{3,3}$

THE END, THANKS!