关系的性质（二）

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

关系性质的判定定理

☞ 对具体集合上的具体关系，我们可根据关系图和关系矩阵等方法来判定关系的性质，但对于抽象集合上的抽象关系，则存在一定的局限性. 为此，我们从集合运算的观点，给出相应的判定定理.

Definition

设 R 是集合 A 上的关系，则.

1. R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$;
2. R 是反自反的 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$;
3. R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;
4. R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;
5. R 是传递的 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

判定定理的证明

证明③:R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

先证必要性: 对任意 $<a, b>\in R$, 由于 R 是对称的，所以 $<b, a>\in R$, 即 $<a, b>\in R^{-1}$，从而 $R\subseteq R^{-1}$; 反过来，若任意 $<a, b>\in R^{-1}$, 则有 $<b, a>\in R$，由于 R 的对称性，得到 $<a, b>\in R$，从而 $R^{-1}\subseteq R$。即有 $R = R^{-1}$。

再证充分性: 对任意 $a, b\in A$，若 $<a, b>\in R$，由于 $R = R^{-1}$， 则有 $<a, b>\in R^{-1}$, 即 $<b, a>\in R$。由对称性的定义可知, R 是对称的。 □

证明⑤:R 是传递的 $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$.

先证必要性: 对任意 $<a, c>\in R\circ R$, 根据复合运算定义, 则必存在 $b\in A$, 使得 $<a, b>\in R$ 并且 $<b, c>\in R$。由于 R 是传递的，因此有 $<a, c>\in R$，即 $R\circ R\subseteq R$。

再证充分性: 对任意 $a, b, c\in A$，若 $<a, b>\in R$ 并且 $<b, c>\in R$，则有 $<a, c>\in R\circ R$。因为 $R\circ R\subseteq R$，所以 $<a, c>\in R$，即 R 是传递的。 □

总结: 关系性质的判定方法

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
定义	$\forall x \in A$, 有 $< x, x > \in R$	$\forall x \in A$, 有 $< x, x > \notin R$	$\forall x, y \in A$, 若 $< x, y > \in R$, 则 $< y, x > \in R$	$\forall x, y \in A$, 若 $< x, y > \in R$ 且 $< y, x > \in R$, 则 $x = y$	$\forall x, y, z \in A$, 若 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R$, 则 $< x, z > \in R$
关系运算	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R_{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	任两结点间，要么没有边，要么有方向相反的两条边	任两结点间，至多有一条边	如果从 x 到 y 有边，从 y 到 z 有边，则从 x 到 z 一定有边
关系矩阵	主对角线上全为 1	主对角线上全为 0	对称矩阵（$M_R = M_R^T$）	$\forall i \neq j, r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$	$\forall i, j, k$, 若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$, 必有 $r_{ik} = 1$

关系性质判定

Example

一个关系可能满足多种性质, 如:

1. 非空集合 A 上的全关系 E_A; 自反, 对称, 传递
2. 非空集合 A 上的空关系 $\varnothing$; 反自反, 对称, 反对称, 传递
3. 非空集合 A 上的恒等关系 I_A; 自反, 对称, 反对称, 传递
4. 实数集 R 上的等于关系 $=$; 自反, 对称, 反对称, 传递
5. 幂集上的真包含关系 $\subset$. 反自反, 反对称, 传递

Example

假设 $A=\{a,b,c,d\}$, R 是定义在 A 上的关系. $R=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,d>\}$.

非自反, 非反自反, 非对称, 非反对称, 非传递

可见,一个关系也有可能不满足任何性质.

关系性质的保守性

关系既可做各种集合基本运算，又可做关系特有的复合运算和求逆运算．具有特殊性质的关系通过各类运算后产生的新关系是否仍然保持原有的特殊性质呢？这就是关系性质的保守性问题。

Definition

设 R, S 是集合 A 上的关系，则.

1. R, S 是自反的，则 $R^{-1}, R \cup S, R \cap S, R \circ S$ 也是自反的;
2. R, S 是反自反的，则 $R^{-1}, R \cup S, R \cap S, R - S$ 也是反自反的;
3. R, S 是对称的，则 $R^{-1}, R \cup S, R \cap S, R - S$ 也是对称的;
4. R, S 是反对称的，则 $R^{-1}, R \cap S, R - S$ 也是反对称的;
5. R, S 是传递的，则 $R^{-1}, R \cap S$ 也是传递的.

关系性质的保守性

Example

设 $A=\{1,2,3\}$,R,S 是集合 A 上的关系.

1. $R=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$,反自反, 反对称, 传递
   $S=\{<3,2>,<3,1>,<2,1>\}$.反自反, 反对称, 传递
   但 $R\circ S=\{<1,1>,<2,2>,<2,1>,<1,2>\}$,非反自反, 非反对称
   $R\cup S=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>,<2,1>,<3,2>,<3,1>\}$,非传递, 非反对称;
2. $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>\}$,自反, 对称, 传递
   $S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<3,2>,<2,3>\}$.自反, 对称, 传递
   但 $R\circ S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>,<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$,非传递, 非对称
   $R-S=\{<1,2>,<2,1>\}$,非自反, 非传递.

THE END, THANKS!