集合论基础

可数集合与不可数集合

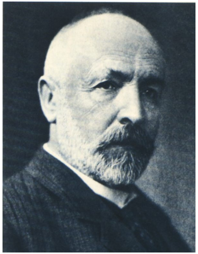
王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

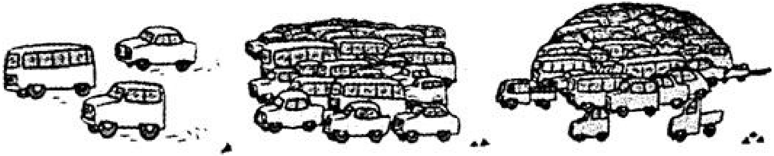
2016-

有限 → 无限，量变 → 质变



$$1.01^{365} = 37.8 \qquad \lim_{n\to\infty} 1.01^n = \infty$$

$$0.99^{365} = 0.03 \qquad \lim_{n\to\infty} 0.99^n = 0$$



自然数集的定义

定义 (皮亚诺公理)

1891 年, 意大利数学家皮亚诺公开发表了基于序数的自然数定义公理。这组公理包括:

1. 0 是自然数;
2. 每个自然数 n 都有一个后继，这个后继也是一个自然数，记为 $S(n)$;
3. 两个自然数相等当且仅当它们有相同的后继，即 $m = n$ 当且仅当 $S(m) = S(n)$;
4. 没有任何自然数的后继是 0;
5. (归纳公理) 若 φ 是关于一个自然数的预测，如果❶$\varphi(0)$ 为真；❷当 $\varphi(n)$ 为真，则有 $\varphi(S(n))$ 为真；则 $\varphi(n)$ 对任意自然数 n 都成立。

自然数集的定义

定义 (冯 • 诺依曼的自然数定义)

20 世纪初，集合称为数学的基本概念之后，数学奇才，计算机之父冯 • 诺依曼基于基数，利用一个集合的序列来定义自然数：

1. $\varnothing \in \mathbf{N}$
2. 若$n \in \mathbf{N}$,则$n' \equiv n \cup \{n\} \in \mathbf{N}$。

从而，这个集合序列的基数就可以来定义自然数：

- $0 \equiv |\varnothing|$;
- $1 \equiv |\varnothing \cup \{\varnothing\}| = |\{\varnothing\}|$;
- $2 \equiv |\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$;
- $\cdots$

如何比较集合的大小?

例

比较下列的集合对，哪一个的元素个数更多?

1. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 与集合 $\{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\}$
2. 自然数集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 与奇数集合 $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

☞

对于两个有限集合而言，比较二者的大小只需要看集合的基数，但对于无限集合却没有这么简单。如何比较无限集合的“大小”呢？这里需要采用一种通过判断两个无限集合之间是否存在一种一一对应的关系来解决这个问题。

等势

定义

设 A, B 为两个集合，若在 A, B 之间存在一种一一对应的关系：

$$\Psi : A \to B$$

则称 A 与 B 是等势的 (equipotential)，记作：

$$A \sim B$$

☞

由等势定义可以看出，如果 $A = B$，那么 $A \sim B$，反之却不成立。

可数集合

定义

凡与自然数集合 $\mathbb{N}$ 等势的集合，称为可数集合(countable set)，该集合的基数记为$\aleph_0$(读作阿列夫零)

例

试证明下列集合都是可数集合.

(1) $O^+ = \{x|x \in \mathbb{N}, x\text{是正奇数}\}$;

(2) $P = \{x|x \in \mathbb{N}, x\text{是素数}\}$;

(3) 有理数集合Q;

正奇数集合 O^+ 与素数集合 P

证明.

在 O^+ 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi_1 : \mathbf{N} \to O^+$ 如下:

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2n+1 & \cdots
\end{array}
$$

所以 O^+ 是可数集合。
在 P 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi_2 : \mathbf{N} \to P$ 如下:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & \cdots
\end{array}
$$

所以 P 是可数集合。 $\square$

(3) 有理数集合 Q

证明.

在 Q 与 $\mathbf{N}$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi_3 : \mathbf{N} \to Q$ 如下图所示。注意，所有有理数以 p/q 的形式表示，其上标表示对应的自然数。

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & -3/1^{[18]} \arrow[l] & -2/1^{[5]} \arrow[d] & -1/1^{[4]} \arrow[l] & 0/1^{[0]} \arrow[r] & 1/1^{[1]} \arrow[d] & 2/1^{[10]} \arrow[r] & 3/1^{[11]}\cdots \arrow[d] \\
\cdots & -3/2^{[17]} \arrow[u] & -2/2 \arrow[d] & -1/2^{[3]} \arrow[u] & 0/2 \arrow[l] & 1/2^{[2]} \arrow[l] & 2/2 \arrow[u] \arrow[r] & 3/2^{[12]}\cdots \arrow[d] \\
\cdots & -3/3 \arrow[u] & -2/3^{[6]} \arrow[r] & -1/3^{[7]} \arrow[r] & 0/3 \arrow[r] & 1/3^{[8]} \arrow[r] & 2/3^{[9]} \arrow[u] & 3/3\cdots \arrow[d] \\
\cdots & -3/4^{[16]} \arrow[u] & -2/4 \arrow[l] & -1/4^{[15]} \arrow[l] & 0/4 \arrow[l] & 1/4^{[4]} \arrow[l] & 2/4 \arrow[l] & 3/4^{[13]}\cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

所以 Q 是可数集合。 $\square$

☞

从有限到无限，不仅仅是简单数量上的变化 (量变)，而引起了本质的改变 (质变)。

- 两个无限集合的“大小”已经不能单纯使用集合中的元素个数来衡量。$\aleph_0$ 表示一切可数集合的基数，是一种抽象的表达。
- 表面上个数完全不相等的两个集合之间仍可能存在等势关系，如集合与其真子集之间，这体现了有限集合和无限集合的根本差别。

不可数集合

定义

开区间 $(0,1)$称为不可数集合，凡与开区间 $(0,1)$ 等势的集合，称为不可数集合，该类集合的基数记为$\aleph$(读作阿列夫)

例

- 闭区间 $[0,1]$ 是不可数集合; $\begin{cases} \frac{1}{4} & \rightarrow & 0 & \\ \frac{1}{2} & \rightarrow & 1 & \\ \frac{1}{2^n} & \rightarrow & \frac{1}{2^{n-2}} & (n=3,4,5\cdots) \\ n & \rightarrow & n & (others \quad n \in (0,1)) \end{cases}$
- 实数集合 $\mathbf{R}$ 是不可数集合. $n \rightarrow tan\pi(\frac{2n-1}{2})$

THE END, THANKS!