

集合论基础

运算定律及其证明

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

集合运算的基本等式

集合论基础

Lijie W.

运算定律

形象理解

证明方法

Theorem

设 U 为全集, A, B, C 为任意集合。

① $A \cup A = A, A \cap A = A.$

(幂等律)

② $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

(交换律)

③ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

(结合律)

④ $A \cup \emptyset = A, A \cap U = A.$

(同一律)

⑤ $A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset.$

(零律)

⑥ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

(分配律)

⑦ $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$

(吸收律)

⑧ $\overline{A} \cap A = \emptyset, \overline{A} \cup A = U.$

(矛盾律和排中律)

⑨ $\overline{\overline{A}} = A.$

(双重否定律)

⑩ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

(德摩根律)

基于文氏图的形象理解

集合论基础

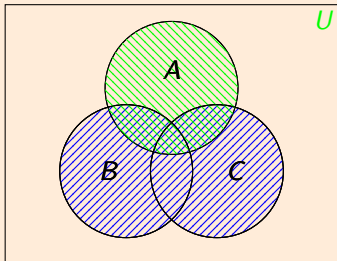
Lijie W.

运算定律

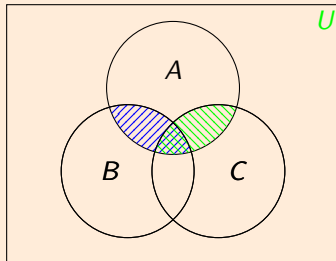
形象理解

证明方法

$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$



集合相等的证明

集合论基础

Lijie W.

运算定律

形象理解

证明方法

回顾证明方法

如需证明集合 A 和 B 相等，通常的方法是证明两个集合间的相互包含关系，即

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 并且 } B \subseteq A$$

而证明集合的包含关系则使用如下方法： $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A$

证明框架

证明：

① 首先证明 $A \subseteq B : \forall x \in A, \dots, x \in B. \therefore A \subseteq B.$

② 其次证明 $B \subseteq A : \forall x \in B, \dots, x \in A. \therefore B \subseteq A.$

由以上两点，可知 $A=B$ 。

集合相等的证明

集合论基础

Lijie W.

运算定律

形象理解

证明方法

Example

证明德摩根律的等式之一： $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

证明：

① 首先证明 $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \overline{A \cup B} &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B \\ &\Rightarrow x \in \bar{A} \text{ 并且 } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}\end{aligned}$$

② 其次证明 $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \bar{A} \cap \bar{B} &\Rightarrow x \in \bar{A} \text{ 并且 } x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}\end{aligned}$$

由以上两点，可知等式 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 成立。

集合论基础

Lijie W.

运算定律

形象理解

证明方法



THE END, THANKS!