偶图

王丽杰
Email: ljwang@uestc.edu.cn
电子科技大学 计算机学院

2016-

偶图的定义

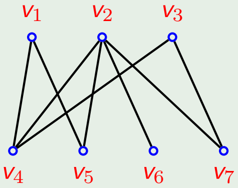
考虑：有一组工人和一批工作任务作为图中的结点，并根据工人对任务是否熟悉来建立边的连接。在这样的图中，工人之间没有边，工作任务之间也不会有边，所有的边都存在于工人组和任务组之间。这样的图称为偶图。

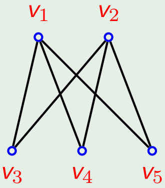
Definition

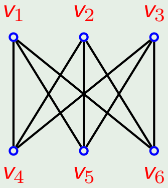
若无向图 $G = <V, E>$ 的结点集 V 能够划分为两个子集 V_1, V_2，满足 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，且 $V_1 \cup V_2 = V$，使得 G 中任意一条边的两个端点，一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为偶图(bipartite graph) 或二分图或二部图。V_1 和 V_2 称为互补结点子集，偶图通常记为 $G = <V_1, E, V_2>$。

偶图的定义

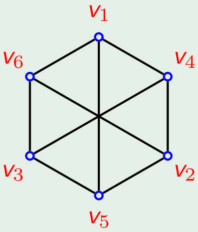
Example



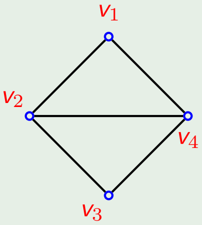




偶图



偶图



不是偶图

完全偶图

偶图

Lijie Wang

引入偶图

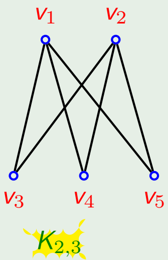
偶图的判定

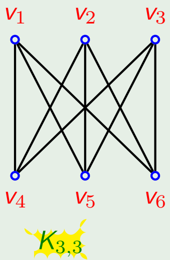
偶图的匹配

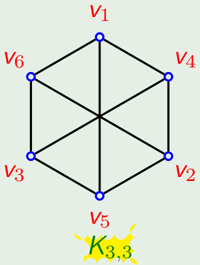
Definition

在偶图 $G =< V_1, E, V_2 >$ 中，若 V_1 中的每个结点与 V_2 中的每个结点都有且仅有一条边相关联，则称偶图 G 为完全偶图或完全二分图，记为 $K_{i,j}$ ，其中，$i = |V_1|$ ，$j = |V_2|$。

Example







偶图的充分必要条件

Theorem

无向图 $G =< V, E >$ 为偶图的充分必要条件是所有回路的长度均为偶数。

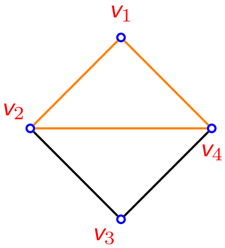
Proof.

- 必要性：令 $C = v_0 v_1 v_2 \cdots v_k v_0$ 是偶图 $G =< V_1, E, V_2 >$ 的任意一条回路，其长度为 $k + 1$。不妨设 $v_0 \in V_1$，由偶图的定义知，$v_1 \in V_2$，$v_2 \in V_1$，依次类推。又因 $v_0 \in V_1$，所以 $v_k \in V_2$，因而 k 为奇数，故 C 的长度为偶数。
- 充分性：设 G 中每条回路的长度均为偶数，若 G 是连通图（否则可对 G 的每个连通分支继续如下论证），任选 $v_0 \in V$，定义 V 的两个子集如下：$V_1 = \{v_i | d(v_0, v_i)为偶数\}$，$V_2 = V - V_1$。
  现证明 V_1 中任两结点间无边存在。假若存在一条边 $(v_i, v_j) \in E$，其中 $v_i, v_j \in V_1$，则由 v_0 到 v_i 间的短程线 (长度为偶数) 以及边 (v_i, v_j)，再加上 v_j 到 v_0 间的短程线 (长度为偶数) 所组成的回路的长度为奇数，与假设矛盾。
  同理可证 V_2 中任两结点间无边存在。
  故 G 中每条边 (v_i, v_j)，必有 $v_i \in V_1$，$v_j \in V_2$ 或 $v_i \in V_2$，$v_j \in V_1$，因此 G 是偶图。 $\square$

充分必要条件的使用

☞ 注意

- 根据偶图的充分必要条件，我们可将平凡图和零图看成特殊的偶图。
- 我们常使用它的逆否命题来判断一个图不是偶图：无向图 G 不是偶图的充分必要条件是 G 中存在长度为奇数的回路。

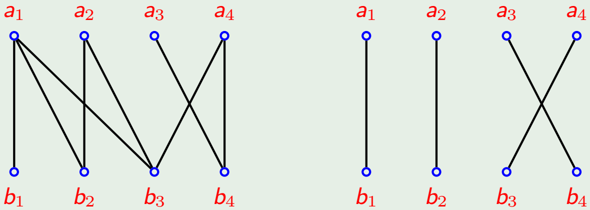


存在奇数长度回路，所以不是偶图

匹配的引入

Example

假设有 4 个工人 a_1，a_2，a_3，a_4，4 项工作任务 b_1，b_2，b_3，b_4，并且工人 a_1 熟悉任务 b_1，b_2，b_3；a_2 熟悉任务 b_2，b_3；a_3 熟悉任务 b_4；a_4 熟悉任务 b_3，b_4；建立偶图如下。那么，该如何给每个工人分配任务，并且保证每个人做的都是自己熟悉的任务呢？



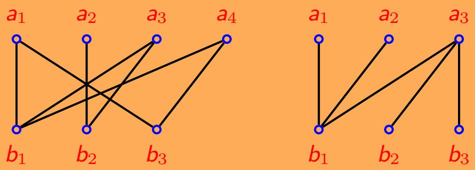
右图就是一种分配方案，称作原图的一个匹配。

偶图的匹配

Definition

在偶图 $G=<V_1,E,V_2>$ 中，$V_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$，若存在 E 的子集 $E'=\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2'),\cdots,(v_q,v_q')\}$，其中 v_1', v_2',$\cdots$, v_q' 是 V_2 中的 q 个不同的结点，则称 G 的子图 $G'=<V_1,E',V_2>$ 为从 V_1 到 V_2 的一个完全匹配，简称匹配。

匹配实际上就是在偶图 G = $<V_1$, E, $V_2>$ 中，寻找 V_1 到 V_2 的单射。显然，这样的单射有时并不存在。



匹配的判定条件

Theorem (霍尔定理)

偶图 $G =< V_1, E, V_2 >$ 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配的充分必要条件是 V_1 中任意 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻，$k = 1, 2, \cdots, |V_1|$。这个条件通常称为相异性条件(*diversity condition*)。

Theorem (t 条件)

设 $G =< V_1, E, V_2 >$ 是一个偶图。如果满足:

1. V_1 中每个结点至少关联 t 条边；(V_1 中结点的最小度数)
2. V_2 中每个结点至多关联 t 条边；(V_2 中结点的最大度数)

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。这个条件通常称为 t 条件(*t-condition*)。

匹配的应用

Example

现有三个课外小组：物理组，化学组和生物组，有五个学生 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5。

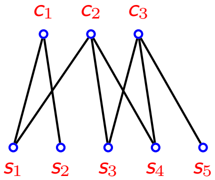
1. s_1, s_2 为物理组成员,s_1, s_3, s_4 为化学组成员,s_3, s_4, s_5 为生物组成员。
2. s_1 为物理组成员,s_2, s_3, s_4 为化学组成员,s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。
3. s_1 即为物理组成员，又为化学组成员,s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

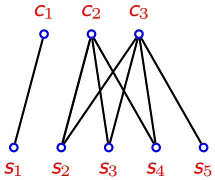
在以上三种情况的每一种情况下，在 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 中选三位组长，不兼职，问能否办到？

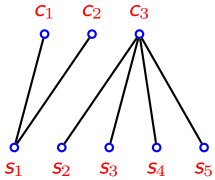
Solution

用 c_1, c_2, c_3 分别表示物理组、化学组和生物组。令 $V_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$，$V_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$，以 V_1，V_2 为互补结点子集，以 $E = \{(c_i, s_j)|c_i \in V_1, s_j \in V_2, c_i\text{中有成员}s_j\}$ 为边集，构造偶图，然后在这些偶图中寻找匹配。

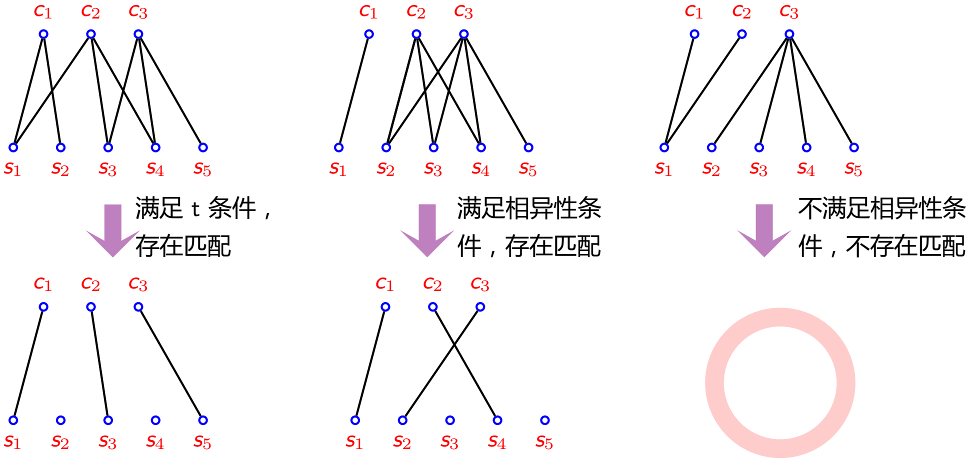
匹配的应用







匹配的应用



THE END, THANKS!