集合论基础

集合间关系

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016

空集

Definition

不含任何元素的集合叫做空集(empty set)，记作 $\varnothing$.
空集可以符号化为 $\varnothing = \{x | x \neq x\}$.

Example

- 设 $A = \{x | x \in R, x^2 < 0\}$, 则 $A = \varnothing$
- $|\varnothing| = 0, |\{\varnothing\}| = 1$

空集是绝对唯一的。

全集

Definition

针对一个具体范围，我们考虑的所有对象的集合叫做全集(universal set)，记作 U 或 E.
在文氏图一般使用方形表示全集。

Example

- 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成的；
- 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成的。

全集是相对唯一的。

集合的相等关系

元素的基本特性

- 集合中的元素是无序的。$\{1,2,3,4\}$ 与 $\{2,3,1,4\}$ 相同。
- 集合中的元素是不同的。$\{1,2,2,3,4,3,4,2\}$ 与 $\{1,2,3,4\}$ 相同。

citing example

设 $E=\{x|(x-1)(x-2)(x-3)=0, x\in R\}, F=\{x|x\in Z^{+}, x^{2}<12\}$,
可见 E 和 F 具有相同的元素 $\{1,2,3\}$, 此时称两个集合相等。

Theorem (外延性原理)

两个集合 A 和 B 相等，当且仅当它们的元素完全相同，记为 $A=B$, 否则 A 和 B 不相等，记为 $A\neq B$.

子集和真子集

citing example

设 $A = \{BASIC, PASCAL, ADA\}$, $B = \{ADA, PASCAL\}$,

此时 A 中含有 B 中所有的元素，这种情况称为A 包含 B.

Definition

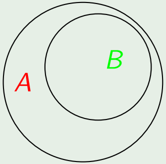
设 A, B 是任意两个集合，

- 如果 B 的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的子集，也称做B 被 A 包含或A 包含 B，记作$B \subseteq A$，否则记作$B \nsubseteq A$.
- 如果 $B \subseteq A$ 并且 $A \neq B$，则称 B 是 A 的真子集，也称做B 被 A 真包含或A 真包含 B，记作$B \subset A$，否则记作$B \not\subset A$.

"$\subseteq$" 关系的数学语言描述为：$B \subseteq A \Leftrightarrow$ 对 $\forall x$, 如果 $x \in B$, 则 $x \in A$.

子集和真子集

文氏图:$B \subseteq A$



由子集定义可有

1. $\varnothing \subseteq A$
2. $A \subseteq A$

Example

已知 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,4\}, C = \{2,3\}, D = \{3,2\}$，可见

1. $A \subseteq A, B \subseteq A, C \subseteq A, D \subseteq A,$
2. $C \subseteq D, D \subseteq C,$ 同时, $C = D$

证明集合相等

Theorem

设 A, B 为任意两个集合，则 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$

★★★ 上面的定理非常重要，这是证明集合相等的一种非常有效的方式。

证明框架

证明：

1. 首先证明 $A \subseteq B$：$\forall x \in A, \cdots, x \in B. \therefore A \subseteq B.$
2. 其次证明 $B \subseteq A$：$\forall x \in B, \cdots, x \in A. \therefore B \subseteq A.$

由以上两点，可知 A=B。

n 元集的子集

Example

设 $A=\{a,b,c\}$，求出 A 的所有子集。

解：由于 $|A|$=3，因而 A 的子集可能包含的元素个数 $m=0,1,2,3$

- $m=0$, 即没有任何元素，也就是空集 $\varnothing$
- $m=1$, 从 A 中任取 1 个元素，则有 $C_3^1=3$ 个：$\{a\},\{b\},\{c\}$
- $m=2$, 从 A 中任取 2 个元素，则有 $C_3^2=3$ 个：$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}$
- $m=3$, 从 A 中任取 3 个元素，则有 $C_3^3=1$ 个：$\{a,b,c\}$

以上 8 个集合就是 A 的所有子集。

★ 推广: 对于任意 n 元集合 A，它的 m 元 $(0\leqslant m\leqslant n)$ 子集个数为 C_n^m 个，
所以不同的子集个数为：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

幂集

Definition

设 A 为任意集合，把 A 的所有不同子集构成的集合叫做 A 的幂集(power set), 记作 $P(A)$，即，

$$P(A) = \{x|x \subseteq A\}$$

$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$

Example

设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{a, \{b, c\}\}$，求他们的幂集 $P(A)$ 和 $P(B)$。

解：$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

$P(B) = \left\{\varnothing, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\right\}$

说明

幂集也叫做集族或集合的集合，对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

THE END, THANKS!