子图和补图

王丽杰

Email: ljwang@uestc.edu.cn

电子科技大学 计算机学院

2016-

各类子图

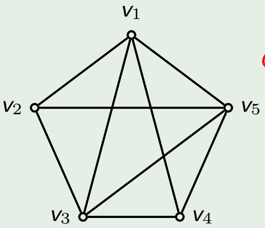
Definition

设有图 $G=<V,E>$ 和图 $G_1=<V_1,E_1>$.

- 若 $V_1\subseteq V$，$E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的子图(subgraph)，记为 $G_1\subseteq G$.
- 若 $G_1\subseteq G$，且 $G_1\neq G$(即 $V_1\subset V$ 或 $E_1\subset E$)，则称 G_1 是 G 的真子图(proper subgraph)，记为 $G_1\subset G$.
- 若 $V_1=V$，$E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的生成子图(spanning subgraph).
- 设 $V_2\subseteq V$ 且 $V_2\neq\varnothing$，以 V_2 为结点集，以两个端点均在 V_2 中的边的全体为边集的 G 的子图，称为 V_2 导出的 G 的子图，简称 V_2 的导出子图(induced subgraph).

各类子图

Example

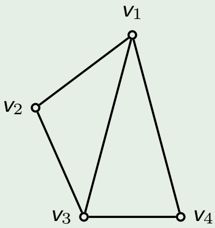


G

子图

生成子图

导出子图

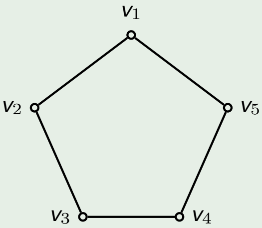


G_1

子图

真子图

导出子图

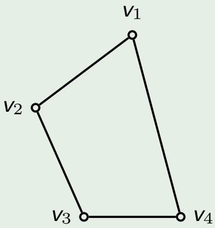


G_2

子图

真子图

生成子图



G_3

子图

真子图

完全图

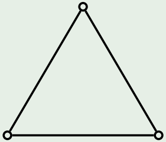
Definition

- 设 $G=<V,E>$ 为一个具有 n 个结点的无向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有边相连，则称 G 为无向完全图，简称 G 为完全图，记为 K_n。
- 设 $G=<V,E>$ 为一个具有 n 个结点的有向简单图，如果 G 中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连，则称 G 为有向完全图，在不发生误解的情况下，也记为 K_n。

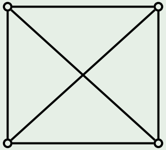
- 完全图的邻接矩阵除主对角线上的元素为 0 外，其余元素均为 1;
- 无向完全图 K_n 的边数为 $\mathrm{C}_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$;
- 有向完全图 K_n 的边数为 $\mathrm{P}_n^2=n(n-1)$.

完全图举例

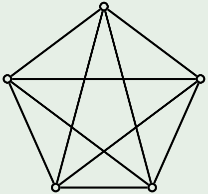
Example



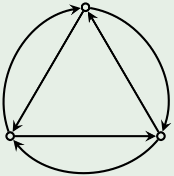
K_3



K_4



K_5



K_3

补图

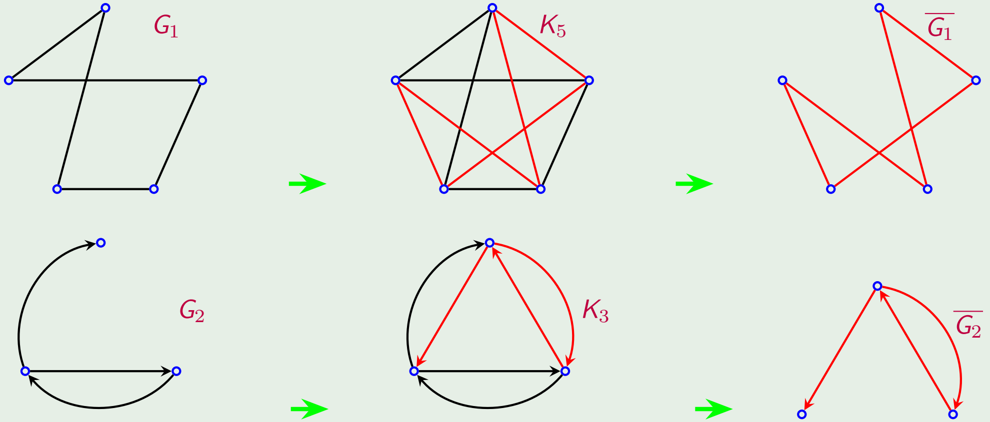
Definition

设 $G =< V, E >$ 为简单图，$G' =< V, E_1 >$ 为完全图，则称$G_1 =< V, E_1 - E >$为 G 的补图(complement of graph)，记为$\overline{G}$。

- 补图 $\overline{G}$ 就是从完全图中删除图 G 中的边;
- 补图 $\overline{G}$ 就是以 V 为结点集，以所有能使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图;
- 图 G 和它的补图 $\overline{G}$ 有相同的结点，两个结点在 $\overline{G}$ 里相邻，当且仅当它们在 G 里不相邻.

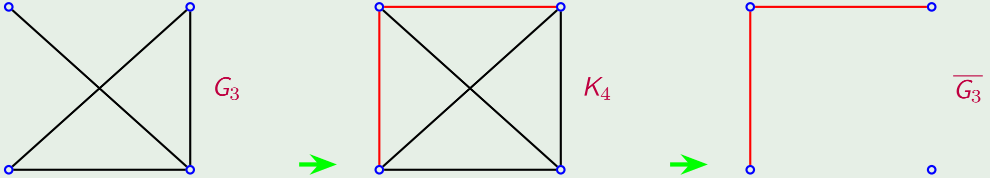
补图

Example



补图

Example

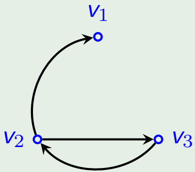


☞ 注意

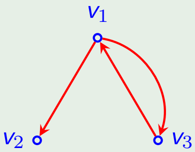
画补图时，边和原图是互补关系，但结点不变。尤其是孤立结点，一定不要漏掉！

补图的邻接矩阵

Example



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵求补图的方法

若设简单图 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则它的补图 $\overline{G}$ 的邻接矩阵 $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{n\times n}$ 为：

$$\overline{a_{ij}} = \begin{cases} 1 - a_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} ,(i,j = 1,2,3,\cdots,n)$$

补图的应用

1958 年美国《数学月刊》上的一个数学问题：

Example

证明：在任意 6 个人的集会上，总会有 3 个人相互认识或者有 3 个人互相不认识（假设认识是相互的）。

Proof.

把参加集会的人作为结点，相互认识的人之间连边，得到图 G，设 $\overline{G}$ 为 G 的补图，这样问题就转化为证明 G 或 $\overline{G}$ 中至少有一个完全子图 K_3。 考虑完全图 K_6，结点 v_1 与其余 5 个结点各有一条边相连，这 5 条边一定有 3 条在 G 或 $\overline{G}$ 中，不妨设有 3 条边在 G 中，设这 3 条边为 $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)$。 考虑结点 v_2, v_3, v_4。若 v_2, v_3, v_4 在 G 中无边相连，则 v_2, v_3, v_4 相互不认识；若 v_2, v_3, v_4 在 G 中至少有一条边相连，例如 (v_2, v_3)，则 v_1, v_2, v_3 就相互认识。 因此，总会有 3 个人相互认识或者有 3 个人互相不认识。 $\square$

THE END, THANKS!