

# 等价关系

集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出

## 集合的划分

王丽杰

Email: [ljwang@uestc.edu.cn](mailto:ljwang@uestc.edu.cn)

电子科技大学 计算机学院

2016-



# 集合的划分

集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出



在等价关系中我们已经发现, 同一个等价类中的元素具有相同的属性, 因而可将集合中的元素分成不同的类别, 对应于集合的划分。

## Definition

给定一个非空集合  $A$ , 设有集合  $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ 。如果满足:

- $S_i \subseteq A, S_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, m;$
- $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m;$
- $\bigcup_{i=1}^m S_i = A.$

则集合  $\pi$  称作集合  $A$  的一个划分 (partition), 而  $S_1, S_2, \dots, S_m$  叫做这个划分的块 (block) 或类 (class)。

# 等价关系-> 集合划分

集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出

## Theorem

设  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系, 则  $A$  对  $R$  的商集  $A/R$  是  $A$  的一个划分, 称为由  $R$  所导出的等价划分.

## Example

设集合  $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ , 则

- $A$  上以 4 为模的同余关系  $R$  导出的划分为,  
 $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\};$
- $A$  上以 3 为模的同余关系  $S$  导出的划分为,  
 $A/S = \{[0]_S, [1]_S, [2]_S\} = \{\{0, 9\}, \{1, 4\}, \{2, 5, 8\}\}.$

同一个集合有多种不同的划分, 不同的等价关系导出不同的划分.

# 集合划分-> 等价关系

集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出

## Theorem

给定集合  $A$  的一个划分  $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ , 则由该划分确定的关系

$R = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \dots \cup (S_m \times S_m)$  是  $A$  上的等价关系。我们称该关系  $R$  为由划分  $\pi$  所导出的等价关系。

## Proof.

- 对  $\forall x \in A$ , 必  $\exists i > 0$ , 使得  $x \in S_i$ , 所以  $\langle x, x \rangle \in S_i \times S_i$ , 即  $\langle x, x \rangle \in R$ , 因此  $R$  是自反的。
- 对  $\forall x, y \in A$ , 如果  $\langle x, y \rangle \in R$ , 必  $\exists j > 0$ , 使得  $\langle x, y \rangle \in S_j \times S_j$ , 从而  $\langle y, x \rangle \in S_j \times S_j$ , 即  $\langle y, x \rangle \in R$ , 因此  $R$  是对称的。
- 对  $\forall x, y, z \in A$ , 如果  $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ , 必  $\exists i, j > 0$ , 使得  $\langle x, y \rangle \in S_i \times S_i, \langle y, z \rangle \in S_j \times S_j$ , 即  $x, y \in S_i$  且  $y, z \in S_j$ , 从而  $y \in S_i \cap S_j$ , 由集合划分定义, 必有  $S_i = S_j$ , 因此  $x$  和  $z$  同属于集合  $A$  的一个划分块  $S_i$ , 从而  $\langle x, z \rangle \in R$ , 所以  $R$  是传递的。 □

# 集合划分-> 等价关系

集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出

## Example

设  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $\pi = \{\{a, b\}, \{c, e, f\}, \{d\}\}$  是  $A$  的一个划分, 则  $\pi$  对应的等价关系  $R$  为:

$$\begin{aligned} R &= (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{c, e, f\} \times \{c, e, f\}) \cup (\{d\} \times \{d\}) \\ &= \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle \} \\ &\quad \cup \{ \langle c, c \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle c, e \rangle, \langle e, c \rangle, \langle c, f \rangle, \langle f, c \rangle, \\ &\quad \langle e, f \rangle, \langle f, e \rangle \} \cup \{ \langle d, d \rangle \} \\ &= \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \\ &\quad \langle c, e \rangle, \langle e, c \rangle, \langle c, f \rangle, \langle f, c \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, e \rangle, \langle d, d \rangle \} \end{aligned}$$

# 集合划分-> 等价关系

集合的划分

Lijie Wang

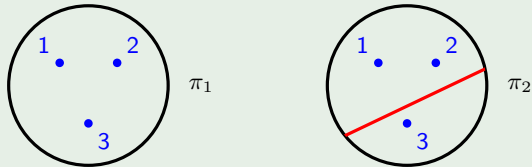
定义

等价划分

等价关系导出

## Example

设  $A = \{1, 2, 3\}$ , 求  $A$  上所有的等价关系及其对应的商集.



- $R_1 = S_1 \times S_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \} = A \times A$ ,  $A/R_1 = \{\{1, 2, 3\}\}$ ;
- $R_2 = (\{1, 2\} \times \{1, 2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ ,  $A/R_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ;

# 集合划分-> 等价关系

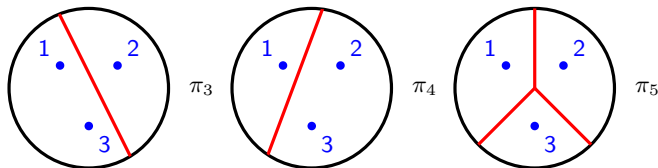
集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出



- $R_3 = (\{1, 3\} \times \{1, 3\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) = \{< 1, 1 >, < 1, 3 >, < 2, 2 >, < 3, 1 >, < 3, 3 >\}$ ,  
 $A/R_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\};$
- $R_4 = (\{2, 3\} \times \{2, 3\}) \cup (\{1\} \times \{1\}) = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 2 >, < 3, 3 >\}$ ,  
 $A/R_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\};$
- $R_5 = (\{1\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) \cup (\{3\} \times \{3\}) = \{< 1, 1 >, < 2, 2 >, < 3, 3 >\} = I_A$ ;  
 $A/R_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$

集合的划分

Lijie Wang

定义

等价划分

等价关系导出



THE END, THANKS!