图论作业 3

一、填空题

1. 完全图 K_{2n} 共有 $(2n-1)!!$ **个不同的完美匹配**

> K_{2n} 有 $(2n-1)!!$ 个不同的完美匹配
>
> $K_{n,n}$ 有 $n!$ 个不同的完美匹配

2. 超方体 Q_6 的最小覆盖包含的点数为 32

> **考点：** **定理 62 (König 1931)：** 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数
>
> **注意 1：** 如果最小覆盖中的点数不好求，可以求最大匹配中的边数
>
> **注意 2：** 推论：若 G 是 k 正则偶图 $(k>0)$，则 G 有完美匹配
>
> **注意 3：** 每个 n 方体都有完美匹配 $(n \geq 1)$
>
> n 方体是正则二部图，有完美匹配，且完美匹配的边数为顶点数的一半

3. 图 $K_{m,n}$ $(m \leq n)$ 的最小覆盖包含的点数为 m

> **考点：** **定理 62 (König 1931)：** 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数
>
> $m \leq n$，最大匹配中的边数正好是 m

4. 完全图 K_{60} 能分解为 59 **个边不重的一因子之并**

> **考点：** 因子分解
>
> **注意 1：** 因子分解是历年来考试的重点
>
> **注意 2：** 总结为 3 个方面「有没有」「能不能」「数一数」
>
> 先看选择题 4、5、6 和解答题 5

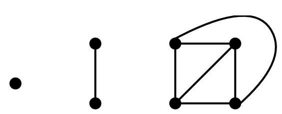
5. 完全图 K_{61} 能分解为 30 **个边不重的二因子之并**

> **考点：** 因子分解

6. 假定 G 是具有 n 个点、m 条边、k 个连通分支的无圈图，则 G 的荫度为 1

> **考点：** 荫度 (只需要掌握概念即可)
>
> **定义 82：** 无环图 G 分解为边不重的生成森林的最少数目，称为图 G的**荫度**，记为 $\sigma(G)$

7. 图 G 是由 3 个连通分支 K_1, K_2, K_4 组成的平面图，则其共有 4 **个面**

> **考点：** 平面图点数、边数、面数的关系
>
> **定理 76 (Euler 公式)：** 设 G 是具有 n 个点，m 条边，φ 个面的连通平面图，则有 $n-m+\varphi=2$
>
> 推论：设 G 是具有 n 个点，m 条边，φ 个面，k 个连通分支的平面图，则 $n-m+\varphi=k+1$
>
> 这个题目可以画出来，如果是抽象的，利用公式计算即可
>
> 
>
> 如果利用公式计算：$7-7+\varphi=3+1 \Longrightarrow \varphi=4$

8. 设图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删掉 1 **条边才可能使其成为可平面图**

> **思考：** 若图 G 与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚，则至少从 G 中删去 1 条边才可能使其成为可平面图
>
> **注意：** 如果考试中具体画出了一个图判断是否可平面
>
> 第一步：根据 推论：设 G 是具有 n 个点，m 条边的简单平面图且 $n \geq 3$，则 $m \leq 3n-6$ 看是否成立
>
> 第二步：如果第一步成立，先尝试去画一下
>
> 第三步：如果第二步画不出来，再去思考是否和 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚

9. 设连通平面图 G 具有 5 个顶点，9 条边，则其面数为 6

> **考点：** 平面图点数、边数、面数的关系
>
> 图是连通图，直接用欧拉公式：$n-m+\varphi=2$
>
> 所以 $\varphi=6$

10. 若图 G 是 10 阶极大平面图，则其面数等于 16

> **考点：** 极大平面图
>
> 先看选择题 10
>
> $\varphi=2n-4=16$

11. 若图 G 是 10 阶极大外平面图，其内部面共有 8 **个**

> **考点：** 极大非平面图
>
> 先看选择题 10
>
> $\varphi=n-2=8$

二、不定项选择题

1. **关于非平凡树 T，下面说法错误的是（ACE）**

- A. T 至少包含一个完美匹配 ❌
- B. T 至多包含一个完美匹配
- C. T 的荫度大于 1 ❌
- D. T 是只有一个面的平面图
- E. T 的对偶图是简单图 ❌

> **考点：** 非平凡树的总结
>
> A 错误：要想存在完美匹配，必须是偶数阶的图
>
> B 正确
>
> C 错误：T 的荫度等于 1
>
> D 正确：只有一个面的平面图一定无圈，即肯定是树
>
> E 错误：对偶图中都是自环

2. **下列说法正确的是（ABE）**

- A. 三正则的偶图存在完美匹配
- B. 无割边的三正则图一定存在完美匹配
- C. 有割边的三正则图一定没有完美匹配 ❌
- D. 有完美匹配的三正则图一定没有割边 ❌
- E. 三正则哈密尔顿图存在完美匹配

> **考点：** 三正则图的总结
>
> A 正确：推论：若 G 是 k 正则偶图 $(k>0)$，则 G 有完美匹配
>
> B 正确：
>
> C 错误：有割边的三正则图即可能有完美匹配，也可能没有
>
> D 错误：有完美匹配的三正则图可能有割边
>
> E 正确：见选择题 5 的 E 选项

3. **下列说法正确的是（ABCD）**

- A. 在偶图中，最大匹配包含的边数等于最小覆盖包含的点数
- B. 任一非平凡正则偶图包含完美匹配
- C. 任一非平凡正则偶图可以 1-因子分解
- D. 偶度正则偶图可以 2-因子分解
- E. 非平凡偶图的最大匹配是唯一 ❌

> **考点：** 二部图的总结
>
> A 正确
>
> B 正确 C 正确：推论：若 G 是 k 正则偶图 $(k>0)$，则 G 有完美匹配
>
> D 正确：只要是偶数度正则图即可，不一定需要二部图；可见选择题 6 的 B 选项
>
> E 错误：不唯一

4. **下列说法错误的是（AF）**

- A. 完全图 K_{101} 包含 1-因子 ❌
- B. 完全图 K_{101} 包含 2-因子
- C. 完全图 K_{102} 包含 1-因子
- D. 完全图 K_{102} 包含 2-因子
- E. 图 G 的一个完美匹配实际上就是它的一个 1 因子
- F. 图 G 的一个 2-因子实际上就是它的一个哈密尔顿圈 ❌

> **考点：** 因子分解 --「有没有」问题
>
> A 错误：**定理 64：** 完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的；1-因子实际上就是完美匹配；若 G 有一个 1-因子 (其边集称为完美匹配)，则显然 G 的阶数是偶数。所以，奇数阶图不能 1-因子分解
>
> B 正确：**定理 68：** 图 K_{2n+1} 是 n 个 H 圈的并
>
> C 正确：偶数阶的图不仅有 1-因子，还有 1-因子分解
>
> D 正确：阶数 ≥ 3 的完全图就是哈密尔顿图，哈密尔顿图的哈密尔顿圈一定是 2-因子；**定理 69：** 完全图 K_{2n} 是一个 1-因子和 $n-1$ 个 H 圈的并
>
> E 正确：1-因子的边集对应一个完美匹配；严格来说是错误的：完美匹配对应一个边集，而 1-因子是一个生成子图，这两个不是同一个概念 (考试中不会出现模凌两可的选项)
>
> F 错误：连通的 2-因子才对应哈密尔顿圈

5. **下列说法正确的是（AD）**

- A. 方体 Q_n 可以 1-因子分解
- B. 非平凡树可以 1-因子分解 ❌
- C. 无割边的 3 正则图可以 1-因子分解 ❌
- D. 有割边的 3 正则图一定不可以 1-因子分解
- E. 可 1-因子分解的 3 正则图一定是哈密尔顿图 ❌

> **考点：** 因子分解 --「能不能」问题
>
> A 正确：考察 k 正则二部图 (好好总结)；推论：若 G 是 k 正则偶图 $(k > 0)$，则 G 有完美匹配；存在完美匹配的图一定包含 1-因子 (不一定可以 1-因子分解，如彼得森图)，去掉一个 1-因子后，剩下的图是 $k-1$ 正则偶图，依然存在完美匹配；所以 k 正则偶图一定可以 1-因子分解；$\rightarrow 2k$ 正则偶图一定可以 2-因子分解
>
> B 错误：可以 1-因子分解的图一定是偶数阶数的正则图
>
> C 错误：推论 (Peterson)：每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配；所以一定有 1-因子，但不一定可以 1-因子分解，如彼得森图
>
> D 正确：有割边的 3 正则图即便有 1-因子，也一定不可以 1-因子分解
>
> E 错误：3 正则图的哈密尔顿图一定可以 1-因子分解；但可以 1-因子分解的 3 正则图不一定是哈密尔顿图

6. **下列说法正确的是（ACDE）**

- A. 完全图 K_{2n} 是 $2n-1$ 个完美匹配的并
- B. 完全图 K_{2n} 是 n 个哈密尔顿圈的并 ❌
- C. 完全图 K_{2n} 是 1 个完美匹配与 $n-1$ 个哈密尔顿圈的并
- D. 若图 G 是 $2k$ 正则连通图，则 G 可以分解为 k 个二因子的并
- E. 无割边的 3 正则图可以分解为是一个 1-因子与一个 2-因子的并

> **考点：** 因子分解 --「数一数」问题
>
> **注意：** 能分解多少个 k 因子的并 = 顶点在原图中的度数 ÷ 顶点在现在图中的度数
>
> A 正确：原图中每个点的度数为 $2n-1$，现在图中每个点的度数为 1，所以可以分解成 $(2n-1)/1$ 个因子的并
>
> B 错误：完全图 K_{2n+1} 是 n 个哈密尔顿圈的并；可以 1-因子分解的图一定是偶数阶数的正则图；可以 2-因子分解的图一定是偶数度正则图
>
> C 正确：原图中每个点的度数为 $2n-1=2(n-1)+1$
>
> D 正确：可以 2-因子分解的图一定是偶数度正则图
>
> E 正确：推论 (Peterson)：每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配；完美匹配对应的就是 1-因子，去掉一个 1-因子后，就剩一个 2-因子

7. **下列说法正确的是（ABCDE）**

- A. 完全图 K_n 的荫度为 $[n/2]$，符号 [] 代表向上取整
- B. 完全二部图 $K_{a,b}$ 的荫度为 $[ab/(a+b-1)]$，符号 [] 代表向上取整
- C. 非平凡树的荫度为 1
- D. 具有 m 条边的 n 阶无环图可以分解为 m 个生成森林的并
- E. 假设 H是图 G 的子图，则 $\sigma(H) \leq \sigma(G)$

> **考点：** 荫度 (只需要掌握概念即可)
>
> 该选择题有兴趣的可以看一下，无兴趣的可忽略
>
> 言外之意：最多考填空或者不考 😊

8. **下列说法错误的是（C）**

- A. 任何平面图都只有一个外部面
- B. 简单平面图中一定有度数不超过 5 的顶点
- C. 平面图的各个面的次数之和可能为奇数 ❌
- D. 只有一个面的连通平面图一定是树
- E. 存在一种方法，总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面

> **考点：** 平面图
>
> A 正确

> B 正确：**定理 77**：设 G 是简单平面图，则 $\delta \leq 5$
>
> C 错误：**定理 75**：设 G 是具有 m 条边的平面图，则 $\sum_{f\in\Phi} deg(f) = 2m$
>
> D 正确：只有一个面的连通平面图一定无圈，因为圈有内部和外部
>
> E 正确：

9. **下列说法正确的是（ABCD）**

- A. 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割点
- B. 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割边
- C. 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含只属于一个面的边
- D. 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其每个面的边界均为圈

> A 正确：2 连通，一定没有割点
>
> B 正确：2 连通，一定 2 边连通，一定没有割边；可见作业 2 选择题 6 的 B 选项
>
> C 正确：对于平面图来说，割边就是只属于一个面的边
>
> D 正确：如果不是圈，就有割点

10. **下列说法错误的是（D）**

- A. 若 (n, m) 图 G 是极大平面图且 $n \geq 3$，则 $m = 3n - 6$
- B. 若 (n, m) 图 G 是极大外平面图且 $n \geq 3$，则 $m = 2n - 3$
- C. 阶数至少为 3 的极大平面图的每个面均是三角形
- D. 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形 ❌
- E. 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图

> **考点：** 极大平面图 + 极大非平面图
>
> 「极大平面图的三角形特征」，即每个面 (内部面 + 外部面) 的边界是三角形；**定理 81**：设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图的充分必要条件为 G 中各面次数均为 3 且为简单图
>
> 推论：设 G 是一个有 n 个点，m 条边，φ 个面的极大平面图，且 $n \geq 3$，则 (1) $m = 3n - 6$；(2) $\varphi = 2n - 4$
>
> 极大外平面图的外部面的边界是由多边形组成，内部面均由三角形围成
>
> 极大外平面图就是在 N 边形的基础上，添加 $n - 3$ 条不相交的边，把它分成了不相交的 $n - 2$ 个三角形的并，所以 $m = n + n - 3 = 2n - 3$；$\varphi = n - 2 + 1$，即 $n - 2$ 个内部面➕ 1 个外部面
>
> A 正确 B 正确 C 正确
>
> D 错误：外部面是哈密尔顿圈，不一定是三角形
>
> E 正确

11. **关于平面图 G 和其对偶图 G^* 的关系，下列说法错误的是（DEF）**

- A. G^* 是连通平面图
- B. G^*的顶点数等于 G 的面数
- C. G^* 的边数等于 G 的边数
- D. G^*的面数等于 G 的点数 ❌
- E. $G^* \cong G$ ❌
- F. 若 $G_1 \cong G_2$，则 $G_1^* \cong G_2^*$ ❌

> **考点：** 「平面图」+「对偶图」知识梳理
>
> A 正确：平面图的对偶图一定是连通的平面图
>
> B 正确 C 正确

D 错误 E 错误：图 G 必须连通才满足

F 错误

三、解答题

1. **共有 n 为男士和 n 位女士参加一次舞会，已知每位男士至少认识两位女士，而每位女士至多认识两位男士。能否将男士和女士分配为 n 对，使得每队中的男士和女士彼此相识？**

   考点： 一个结论的应用

   注意： 解答题 1 & 4 的类型最喜欢出

   解： 以人为顶点，相识的异性之间连一条边，得到图记为 G

   图 G 显然是一个二部图

   注意： 下面要证明图 G 是正则二部图，因为「推论：若 G 是 k 正则偶图 $(k>0)$，则 G 有完美匹配」；存在完美匹配才可以说明使得每队中的男士和女士彼此相识

   设男士为集合 X，女士为集合 Y，构成二部图 (X, Y)

   显然：

   $$\begin{cases}\forall x\in X,\ \delta(x)\geq 2\\ \forall y\in Y,\ \delta(y)\leq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{x\in V(X)} d(x)\geq 2n\\ \sum\limits_{y\in V(Y)} d(y)\leq 2n\end{cases}$$

   根据二部图的性质得：$\sum\limits_{x\in V(X)} d(x)=\sum\limits_{y\in V(Y)} d(y)$

   故：$\sum\limits_{x\in V(X)} d(x)=\sum\limits_{y\in V(Y)} d(y)=2n$

   故：$\forall x\in X,\ \forall y\in Y,\ d(x)=d(y)=2$

   故 (X, Y) 为二正则偶图，存在完美匹配

   所以能将男士和女士分配为 n 对，使得每队中的男士和女士彼此相识

2. **由于在考试中获得好成绩，6 名学生将获得下列书籍的奖励，分别是:代数学 (a)、微积分 (c)、微分方程 (d)、几何学 (g)、数学史 (h)、规划学 (p)、拓扑学 (t)。每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：A: d,h,t；B: h,t；C: c,d,g,p；D: d,h；E: d,t；F: a,c,d**

   每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？（用图论方法求解）

   考点：定理 60 (Hall 1935)： 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当 $|N(S)|\geq|S|$ 对所有 $S\subseteq X$ 成立

   解： 以学生和书籍作为顶点，两个顶点之间连一条边当且仅当该名学生喜欢这本书，得到图记为 G，图 G 显然是一个二部图

   原问题转换成判断图 G 中是否存在可以饱和学生顶点集的最大匹配

   在学生顶点集中可以找到 4 个顶点 $S=\{A, B, D, E\}$，其邻集为 $N(S)=\{d, h, t\}$，满足 $|N(S)|<|S|$

   由 Hall 定理知，图 G 中不存在可以饱和学生集合的最大匹配

   因此，每名学生不都可以得到他喜欢的书

3. **(20 年考过) 假定 G 是具有 m 条边的简单二部图，顶点的最大度为 Δ。证明：G 包含一个至少有 m/Δ 条边的匹配**

   考点：定理 62 (König 1931)： 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数

   证明： 因为顶点的最大度为 Δ，所以一个顶点最多可以覆盖 Δ 条边

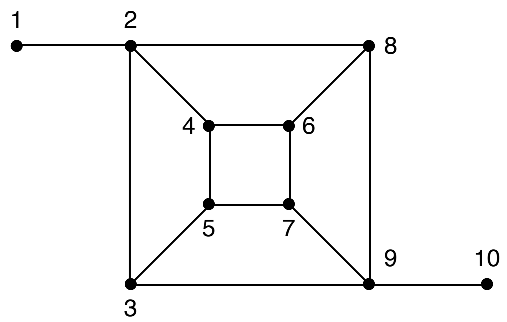
   由于图 G 有 m 条边，所以最少需要 m/Δ 个顶点才能覆盖所有的边

   所以最小覆盖中的点数一定大于等于 m/Δ

根据 König 定理，最大匹配中至少有 m/Δ 条边

4. **(去年出过) 有一个街区如下图所示，其中所有街道都是直线段。为了在巷战中能控制所有的街道，需要在街口处修筑碉堡，其中一个碉堡可以控制与其关联的所有街道。问最少需要多少个碉堡？并给出一种具体修建的位置。(用图论方法解答)**

考点：定理 62 (König 1931)： 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数



显然，上图是二部图

可以很容易找到一个匹配 $\{24, 35, 68, 79\}$，大小为 4

也可以很容易找到一个覆盖 $\{2, 5, 6, 9\}$，大小为 4

定理 61： 设 M 是匹配，K 的覆盖，若 $|M| = |K|$，则 M 是最大匹配，且 K 是最小覆盖

所以该覆盖是最小覆盖

故原问题最少需要 4 个碉堡，分别修在 $\{2, 5, 6, 9\}$ 处即可

5. **证明：完全图 K_{6n-2} 可以 3-因子分解**

注意 1： 关于能不能 k-因子分解，只讲过「1-因子分解」和「2-因子分解」，所以其他因子分解全部需要转化成「1-因子分解」和「2-因子分解」

注意 2： 根据阶数分为两类「偶数阶图」「奇数阶图」；「偶数阶图」可以 1-因子分解，「奇数阶图」可以 2-因子分解

分析： K_{6n-2} 的阶数为偶数，所以可以分解为 $6n-3$ 个边不重的 1-因子的并

证明： 设 $\forall v \in V(K_{6n-2})$，显然：$d(v) = 6n - 3$，即：完全图 K_{6n-2} 是 $6n-3$ 正则图

所以 K_{6n-2} 可以分解为 $6n-3$ 个边不重的 1-因子的并

将每 3 个 1-因子合并成一个 3-因子，故恰好有 $2n-1$ 个 3-因子

所以完全图 K_{6n-2} 可以 3-因子分解

扩展： 完全图 K_{4n+1} 的因子分解

阶数为奇数，显然可以 2-因子分解

可以分解成 $2n$ 个边不重的 2-因子的并

将每 2 个 2-因子合并成一个 4-因子，故恰好有 n 个 4-因子

所以完全图 K_{4n+1} 可以 4-因子分解

6. **(考过) 设简单图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点，其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大数目，使得 G 保持其可平面性**

考点： 握手定理 + 简单平面图 $m \le 3n - 6$

解： 假设 7 度顶点有 x 个，则 $n = 10 + 8 + x$

根据握手定理得：$10 \times 4 + 8 \times 5 + 7x = 2m$

> 又因为简单平面图满足 $m \leq 3n-6$
>
> 得：$x \leq 16$
>
> 所以 7 度顶点的最大数目为 16

7. **设 G^* 是具有 $k\ (k \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G 的对偶图，已知 G 的边数为 10，面数为 3，求 G^* 的面数**

> **解：** 因为图 G 的边数为 10，面数为 3，所以对偶图点数为 3，边数为 10
>
> 又因为对偶图一定是连通的，根据欧拉公式：$n-m+\varphi=2$
>
> 得：$\varphi=9$

8. **富勒烯图 (Fullerene graph) 是一种只包含五边形面和六边形面的三正则平面图。试求富勒烯图的五边形面的个数**

> **解：** 设五边形面和六边形面的个数分别是 F_5 和 F_6
>
> 可知，在富勒烯图中，每个顶点被 3 个面共用，每条边被 2 个面共用
>
> $$\begin{cases} n=|V|=(5F_5+6F_6)/3 \\ m=|E|=(5F_5+6F_6)/2 \\ \varphi=F_5+F_6 \end{cases}$$
>
> 根据欧拉公式：$n-m+\varphi=2$；得：$F_5=12$
>
> 所以五边形面又 12 个