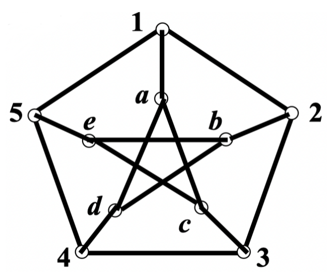
图论作业 2

一、填空题

1. 图 G 的顶点数为 n 且 7 连通，则其边数至少为 $\lceil \frac{7n}{2} \rceil$

> **考点：** 握手定理 + 点连通度 + k 连通
>
> 「一个图是 k 连通的，说明点连通度 $\geq k$」「$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$」
>
> 故有 $\delta(G) \geq \kappa(G) \geq 7$
>
> 所以：$d(G) \geq 7n$
>
> 所以 $m \geq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$

2. 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 3 和 3

> **考点：** 特殊图的点连通度和边连通度
>
> **注意：** 特殊图有：「彼得森图」「n 方图」「二部图」「完全图」
>
> **注意：** 总结特殊图的「点连通度」「边连通度」「点色数」「边色数」
>
> 彼得森图是 3 正则图，故有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 3$
>
> 彼得森图不是哈密尔顿图，但在彼得森图的基础上删去任意一个顶点后，会变成哈密尔顿图 (经过每个点的圈)；如果再删去一个点，必不会改变图的点连通性，因为已经是圈了，删去一个点顶多把圈变成路。所以必有 $\kappa(G) \geq 3$
>
> 综上：$\kappa(G) = \lambda(G) = 3$
>
> 
>

3. 非平凡树的点连通度和边连通度分别为 1 和 1

> 对树来说，每条边都是割边，每个分支点 (度数大于 1 的顶点称为**分支点**) 都是割点
>
> 非平凡树首先想到完全 2 阶图，即 K_2
>
> K_2 没有割点，但点连通度为 1 (完全图的点连通度是顶点数 -1)
>
> 对于 $n \geq 3$ 的非平凡树，肯定有分支点，所以点连通度为 1
>
> ---
>
> 从另一个角度理解，非平凡树每条边都是割边，故 $\lambda(G) = 1$
>
> 又因为有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$
>
> 所以有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) = 1$
>
> 故 $\kappa(G) = 1$

4. 长度为 $n(n \geq 3)$ 的圈的 2 宽直径为 $n - 1$

> **考点：** 宽距离 & 宽直径

> 两个顶点 x, y 的 w 宽距离，x, y 间找 w 条独立的路，且每条路尽可能的短，w 条路中最长的路就是宽距离
>
> 所有点对的 w 宽距离的最大值就是 w 宽直径
>
> 对于本题，两个点邻接时，宽距离最大，为 $n-1$，故 2 宽直径为 $n-1$

5. 完全图 $K_n(n \geq 5)$ 的 3 宽直径为 2

> **考点：** 宽距离 & 宽直径
>
> 任意两个点 u, v 的第一条路直接为相连，即 uv，长度为 1
>
> 第二条路：任意找一个其他点 x，即 uxv，长度为 2
>
> 第三条路同理。所以 3 宽直径为 2

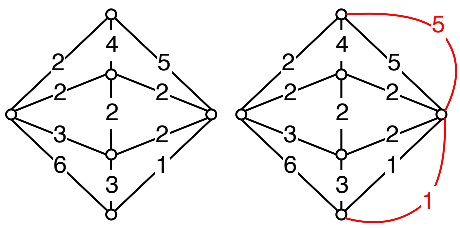
6. 设图 G 是具有 k 个奇度顶点，则在 G 中最少添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使 G 具有欧拉回路

> 奇度顶点的个数一定是偶数，不然无法满足握手定理
>
> 欧拉图的每个顶点的度数一定是偶数

7. 完全偶图 $K_{m,n}(m, n \geq 2$ 且均为偶数)，则在其最优欧拉环游中共含 mn 条边

> 最优欧拉环游：包含该图的每条边**至少**一次，且边权之和最小的闭途径
>
> 特别地，对于欧拉图来说，最优欧拉环游就是欧拉回路
>
> 完全偶图 $K_{m,n}$ 一定是欧拉图，所以 $K_{m,n}$ 包含的边数为 mn

8. 下图的最优欧拉环游的权值为 38



> 这样的图一定是特殊的图，恰好有一对奇度顶点
>
> 我们只需要把这对奇度顶点最短路上的边复制一次即可

9. 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$

> **考点：** $C_{m,n}$ 图
>
> **注意：** $C_{m,n}$ 图的结构和性质需要掌握
>
> 包含边数最多的非哈密尔顿图只有两类：$C_{1,n}$ 和 $C_{2,n}$

二、不定项选择题

1. **下列说法正确的是**（CD）

- A. 有割边的图一定有割点 ❌
- B. 有割点的图一定有割边 ❌
- C. 割点至少属于图的两个块
- D. 割边不在图的任一圈中
- E. 图的割点也是子图的割点 ❌

> **考点：** 割边 + 割点
>
> **注意 1：** 提到割边一定要想到「K_2」；提到割点一定要想到「自环」「八字形的图」「K_2」；提到块一定要想到「阶数至少为 3」
>
> **注意 2：** 两个不同块的公共顶点只能是割点，即块与块只能由割点相联结，因此可以通过割点搜寻块

> A 错误：提到割边想到「K_2」，有割边无割点
>
> B 错误：提到割点想到「八字形的图」，有割点没有割边
>
> C 正确：**定理 33：** 点 v 是图 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同的块
>
> D 正确
>
> E 错误：八字形的图去掉一个块就没有割点

2. **设 $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$ 分别表示图 G 的点连通度、边连通度和最小度。下面说法错误的是（D）**

- A. 存在图 G，使得 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$
- B. 存在图 G，使得 $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$
- C. 设图 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G) \geq n/2$，则 G 连通且 $\lambda(G) = \delta(G)$
- D. 图 G 是 k 连通的，则 $\kappa(G) = k$ ❌
- E. 若图 G 是 k 连通的，则 $\lambda(G) \geq k$

> **考点：** 点连通度 + 边连通度 + 最小度「$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$」
>
> A B 显然正确
>
> C 正确：**引理：设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$，则 G 必连通** **定理 37：** 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$
>
> D 错误：$\kappa(G) \geq k$
>
> E 正确

3. **下面说法正确的是（BDE）**

- A. 没有割点的非平凡连通图一定是 2 连通图 ❌
- B. 2 连通图一定没有割边
- C. 完全图一定没有割边 ❌
- D. 完全图一定没有割点
- E. 非平凡树一定有割边
- F. 非平凡树一定有割点 ❌

> **考点：** 割边 + 割点
>
> A 错误：提到割点想到「K_2」，是 1 连通图；如果加上限定条件「阶数 ≥ 3」就是正确的
>
> B 正确：2 连通图一定是 2 边连通的，一定没有割边；2 连通图阶数一定 ≥ 3，有割边一定有割点，故矛盾！
>
> C 错误：提到割边想到「K_2」；如果加上限定条件「阶数 ≥ 3」就是正确的
>
> D 正确
>
> E 正确：非平凡树一定有边，每条边一定是割边
>
> F 错误：提到割点想到「K_2」

4. **下面说法正确的是（B）**

- A. 若图 G 是 k 连通的，则 G 中必存在 k 点割 ❌
- B. 若图 G 是 k 连通的，则 G 也是 k 边连通的
- C. 若图 G 是 k 边连通的，则 G 也是 k 连通的 ❌
- D. 存在最小度为 3 的 4 连通图 ❌
- E. 存在具有 n 个点，m 条边的 $[2m/n+1]$ 连通图 ❌

> **考点：** 点连通度 + 边连通度 + 点割 + 边割
>
> **注意：** 有些图没有点割，但其连通度为 $n-1$
>
> A 错误：完全图 K_n 没有点割，但连通度为 $n-1$；换成边割就成立

> B 正确 C 错误：$k \leq \kappa(G) \leq \lambda(G)$
>
> D 错误：最小度为 3，其点连通度最多为 3
>
> E 错误：$[2m/n+1]$ 表示「平均度 + 1」，肯定大于最小度

5. **设图 G 是一个块，下列说法错误的是（ABC）**

- A. 图中一定有圈❌
- B. 图中一定无环❌
- C. 图中一定无割边❌
- D. 图中一定无割点
- E. 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两点必位于某一圈上
- F. 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两条边必位于某一圈上
- G. 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中没有割边

> **考点：** 块
>
> **注意：** 提到块，一定要想到阶数至少为 3
>
> - 阶数为 1 的块，要么是孤立点，要么是自环
> - 只有一条边的块，要么是自环，要么是 K_2
>
> A 错误：「K_2」；B 错误：「自环」；C 错误：「K_2」
>
> D 正确：块就是没有割点的连通图
>
> E 正确：**定理 32：** 设图 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G 无自环并且任意两点都位于同一个圈上
>
> F 正确：推论：设 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G 无孤立点且任意两条边都在同一个圈上
>
> G 正确：至少有三个点的块无环、无割边

6. **下面说法错误的是（AB）**

- A. 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图❌
- B. 欧拉图一定没有割点❌
- C. 欧拉图一定没有割边
- D. 非平凡欧拉图中一定有圈
- E. 至少具有 2 个点的无环欧拉图一定是 2 边连通的

> **考点：** 欧拉图
>
> **注意：欧拉图和哈密尔顿图都有一个大前提：均为连通图**
>
> A 错误：没有说明是否连通，只能确定每个连通分支均为欧拉图
>
> B 错误：八字形的图
>
> C 正确：欧拉图的边集能划分为边不重的圈的并，每条边均在圈上
>
> D 正确：只要有边，就有圈
>
> E 正确：根据 C 选项知欧拉图一定没有割边，所以边连通一定是 2
>
> **思考 1：** 两个欧拉图的积图是否还是欧拉图?（是）
>
> **思考 2：** 两个哈密尔顿图的积图是否还是哈密尔顿图?（是）

7. **关于哈密尔顿图，下列命题错误的是（E）**

- A. 若 G 是哈密尔顿图，则对于 V 的每个非空顶点真子集 S，均有 $\omega(G-S) \leq |S|$
- B. 设 G 是阶数为 $n(n \geq 3)$ 的简单图，若其最小度 $\delta \geq n/2$，则 G 是哈密尔顿图
- C. 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶的简单图，若 G 中任意两个不邻接点 u 与 v，满足 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 是哈密尔顿图
- D. 哈密尔顿图一定没有割边

- E. 哈密尔顿图一定没有割点

> **考点：** 哈密尔顿图
>
> A 正确：**定理 44：** 若 G 是 H 图，则对于 V 的每个非空真子集 S，均有 $\omega(G-S) \leq |S|$
>
> B 正确：**定理 45 (Dirac 1952)：** 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G，如果 G 中有：$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，那么 G 是 H 图
>
> C 正确：**定理 46 (Ore 1962)：** 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：$d(u)+d(v) \geq n$，那么 G 是 H 图
>
> D 显然正确
>
> E 错误：存在自环的哈密尔顿图有割点；**哈密尔顿简单图中一定不存在割点**

8. **关于哈密尔顿图，下列命题正确的是（ABCE）**

- A. 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图的最小度满足 $\delta \geq n/2$，则其闭包一定为完全图
- B. 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图的任意两个不邻接顶点 u 与 v 满足 $d(u)+d(v) \geq n$，则其闭包一定为完全图
- C. 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图 G 满足度序列判定定理的条件，则其闭包一定为完全图
- D. 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图 G 的闭包不是完全图，则它一定是非哈密尔顿图
- E. 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图 G 的闭包是完全图，则图 G 是哈密尔顿图

> **考点：** 闭包
>
> **注意 1：** 满足 Dirac 定理、Ore 定理、度序列判定定理的图的闭包一定是完全图
>
> **注意 2：** **定理 49 (Bondy)：** 一个简单图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图
>
> A B C 正确
>
> D 错误：否命题不成立
>
> E 正确： 推论：设 G 是 $n \geq 3$ 的简单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图

9. **关于哈密尔顿图，下列命题错误的是（BD）**

- A. 设 G 是阶数为 $n(n \geq 3)$ 的非哈密尔顿简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图
- B. 图 G 是哈密尔顿图当且仅当其闭包是完全图
- C. 若 (m,n) 简单图 G 的边数 $m > \binom{n-1}{2}+1$，且 $n>3$，则 G 是哈密尔顿图
- D. 若图 G 的闭包是哈密尔顿图，则其闭包一定是完全图
- E. 设 G 是阶数为 $n(n \geq 3)$ 的哈密尔顿简单图，若 n 为奇数，则 G 一定不是偶图

> **考点：** 哈密尔顿图 + 闭包
>
> A 正确：**定理 51 (Chvátal 1972)：** 若 G 是 $n \geq 3$ 的非 H 简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图
>
> B 错误：**定理 49 (Bondy)：** 一个简单图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图
>
> C 正确：推论：设 G 是 n 阶简单图。若 $n \geq 3$ 且 $|E(G)| > \binom{n-1}{2}+1$，则 G 是 H 图
>
> D 错误：一个图的闭包不一定是完全图 
>
> (a)
>
> E 正确：阶数为奇数，则哈密尔顿圈是奇圈；**定理 9：** 一个图是偶图当且仅当它不包含奇圈

三、解答题

1. **(去年考过) 证明：设简单图 G 是 k 边连通的，E' 是 G 的某 k 条边构成的集合，则 $\omega(G-E') \leq 2$**

> **证明：** 因为简单图 G 是 k 边连通的，所以 $\lambda(G) \geq k$；同时 $|E'| = k$

如果 E' 是边割，那么 E' 一定是最小边割，所以 $\omega(G-E')=2$

如果 E' 不是边割，那么删去 E' 中的边后不会破坏图的连通性，所以 $\omega(G-E')=1$

综上所述：E' 是 G 的某 k 条边构成的集合，则 $\omega(G-E')\le 2$

2. ✨ **证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G)\ge n-2$，则 $\kappa(G)=\delta(G)$**

证明： 显然：$n-2\le\delta(G)\le n-1$

如果 $\delta(G)=n-1$，则图 G 一定是完全图 K_n，此时图 G 的点连通度和最小度均为 $n-1$

如果 $\delta(G)=n-2$，只需证明：「**任意删除 $n-3$ 个顶点，不会破坏图的连通性**」即可

任意删除 $n-3$ 个顶点，那么只留下了 3 个顶点，假设为 x,y,z

由于 $\delta(G)=n-2$，故 x,y,z 中一定有一个邻接顶点留下

假设 y 是 x 的邻接顶点，如果 x 不是 z 的邻接，那么 y 一定与 z 相邻，所以 x,y,z 连通

假设 y 不是 x 的邻接顶点，那么 z 一定与 x 和 y 相邻，所以 x,y,z 连通

得证：「**任意删除 $n-3$ 个顶点，不会破坏图的连通性**」所以 $\kappa(G)\ge n-2$

又因为 $n-2\le\kappa(G)\le\delta(G)=n-2$，所以 $\kappa(G)=\delta(G)$

扩展 (去年考过)： 如果一个图 G 满足：$\delta(G)\ge 2$，那么一定有圈存在

在图 G 中找一条最长的路，假设为 P，且依次经过 $v_1,v_2,\cdots,v_k$

因为 $d(v_1)\ge 2$，那么 v_1 一定有两个邻接顶点，所以除了 v_2 一定还存在另外一个邻接顶点

假设 v_1 另外一个邻接顶点为 u，那么一定有 $u\in P$

所以一定存在一个路 P 上一定存在圈 $v_1v_2\cdots uv_1$

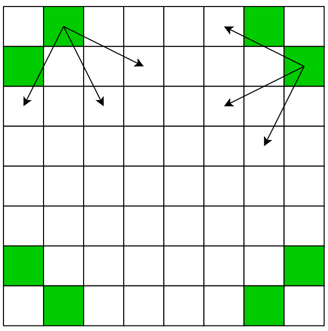
3. **在 8×8 黑白方格相间的棋盘上跳动一只马，这只马能否连续地完成每一种可能的跳动恰好一次？（一只马跳动一次是指从一个长为 3 ，宽为 2 的黑白方格组成的长方形的一个角跳到对角上；在同一个长方形的两个对角之间的相互跳动认为是同一跳动）**

关键： 建立正确的图论模型

解： 以每个方格为顶点，如果两个方格恰好是某个长 3 宽 2 矩形的对角，则这两个方格之间连一条边，我们可以得到一个图，那么该图中的边与马的每一次跳动相对应

现在问题转换为了：能否连续的经过图的每条边恰好一次，即求该图是否存在欧拉迹

图中度数为 3 的顶点有 8 个，根据 推论：连通图 G 有 $Euler$ 迹当且仅当 G 最多有两个奇点，显然不存在欧拉迹



扩展： 能否通过马的跳动遍历完所有的方格？

现在问题转换为了：上述建立模型中的图是否为哈密尔顿图

4. **证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G) \geq (n-1)/2$，则 G 包含哈密尔顿路**

> **证明：** 在图 G 的基础上添加一个顶点 v，让点 v 与图 G 的每个顶点都相连，得到新图，记为 K
>
> 那么，在 H 中，一定存在 $\delta(K) \geq (n+1)/2$
>
> 根据 **定理 45 (Dirac 1952)：** 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G，如果 G 中有：$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，那么 G 是 H 图，图 K 一定是哈密尔顿图
>
> 从图 K 的哈密尔顿圈上去掉新添加的顶点 v，就变成了原图 G 的一条哈密尔顿路

5. **(前年考过) 亚瑟王在王宫中召见他的 $2n$ 位骑士，其中某些骑士之间互有怨仇。已知每个骑士的仇人不超过 $n-1$ 个，证明亚瑟王的谋士摩林能够让这些骑士围着圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻**

> **解：** 以骑士为顶点，如果两个骑士是友好的，那么两个骑士之间连一条边，得到的图记为 G
>
> 原问题转换为：判断图 G 是否为哈密尔顿图
>
> 由题知：$\delta(G) \geq 2n-1-(n-1) = n$
>
> 根据 **定理 45 (Dirac 1952)：** 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G，如果 G 中有：$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，那么 G 是 H 图，图 G 一定是哈密尔顿图
>
> 所以亚瑟王的谋士摩林能够让这些骑士围着圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻