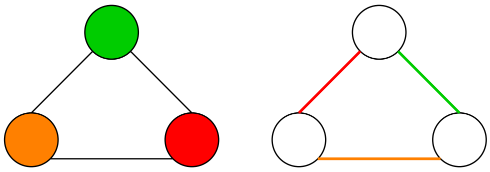
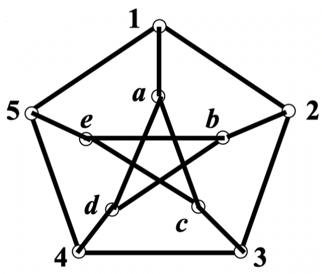
图论作业 4

一、填空题

1. 长度至少为 3 的奇圈的点色数和边色数分别为 3 **和** 3

> **考点：** 点色数 + 边色数
>
> 

2. 彼得森图的点色数和边色数分别为 3 **和** 4

> 
>

3. 已知树 T 的度序列为 $(1,1,1,2,2,2,3)$，则 T 的点色数和边色数分别为 2 **和** 3

> **考点：** 二部图点色数 + 边色数
>
> 二部图的点色数和边色数分别为 2 和最大度
>
> 一棵树肯定是二部图

4. 方体 Q_6 的点色数和边色数分别为 2 **和** 6

> **考点：** 二部图点色数 + 变色数
>
> 二部图的点色数和边色数分别为 2 和最大度
>
> n 方体是 n 正则二部图

5. 设 G 的阶数为 n，覆盖数为 β，则其独立数为 $n-\beta$

> **考点：** 独立数 + 覆盖数 = 阶数
>
> **定理 117 (Gallai)：** 对任意的 n 阶图 G，有 $\alpha(G)+\beta(G)=n$

6. 完全图 $K_{m,n}$ $(m \geq n)$ 的独立数和覆盖数分别为 m **和** n

> **考点：** 二部图独立数、覆盖数
>
> 独立数 $=\max(m,n)$
>
> $|V|=m+n$

7. 已知树 T 的阶数为 n，则其色多项式为 $k(k-1)^{n-1}$

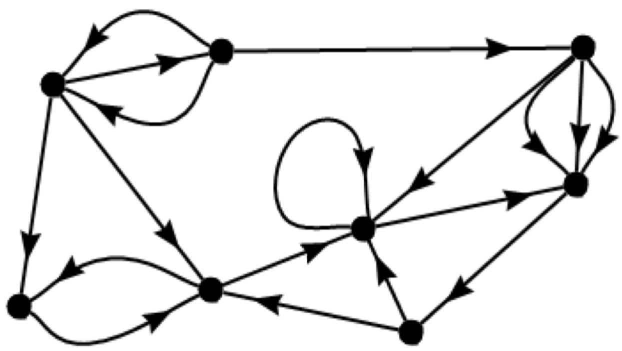
> **考点：** 树的色多项式 (知道即可)
>
> **注意：** 树的色多项式绝对不会考
>
> G 是具有 n 个点的树，则 $P_k(G)=k(k-1)^{n-1}$

8. 拉姆齐数 $R(3,3)=$ 6

注意： 考的概率很小

Ramsey 数 只需知道 $R(3,3)=6$; $R(4,4)=18$

9. 图中强连通分支的个数为 3



注意 (重要)： 判断一个有向图有多少强连通分支和单向连通分支；只能从特殊的点出发

左上角两个顶点只有出去的，没有进来的，两个点构成一个强连通分支

右上角顶点单独为一个强连通分支

剩余五个顶点被一条有向闭途径连接起来，所以在一个强连通分支中

10. 高为 h 的完全二元树至少有 $h+1$ 片树叶

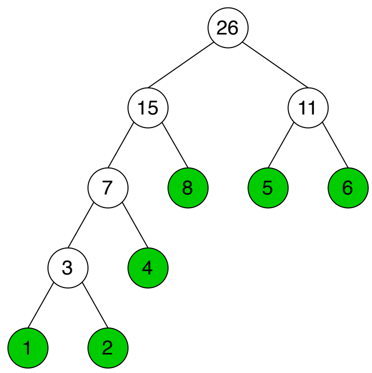
叶子节点出现的越晚，叶子节点越多

例： 二元完全树 $(m=2)$，则分支点数为 $i=t-1$，边数之和为 $m(T)=2(t-1)$。另外，高度为 h 的二元完全树最少有 $h+1$ 片叶子

11. 树叶带权分别为 $1,2,4,5,6,8$ 的最优二元树权值为 62

考点： 哈夫曼编码

$W=(1+2)\times 4+4\times 3+(5+6+8)\times 2=62$



12. 设 m 元完全树有 t 片树叶，i 个分支点，则其总度数为 $2(t+i-1)$ **或** $2mi$

定理 121: 设 $D=(V,E)$ 是一个有向图，则有 $\sum_{v\in V} d^+(v)=\sum_{v\in V} d^-(v)=|E|$

总度数 $=\sum_{v\in V} d^+(v)+\sum_{v\in V} d^-(v)=2|E|$

对于树，边数 = 顶点数 - 1

顶点数 = 树叶 + 分支点 = $t+i$

所以：$=\sum_{v\in V} d^+(v)+\sum_{v\in V} d^-(v)=2|E|=2(t+i-1)$

> 出度全部由于分支点，因为树叶的出度为 0，所以：$\sum_{v\in V} d^{+}(v) = mi$
>
> 所以：$\sum_{v\in V} d^{+}(v) + \sum_{v\in V} d^{-}(v) = 2mi$

13. 对具有 m 条边的简单图定向，能得到 2^m 个不同的定向图

> 无环图即可
>
> (感觉不会考🐶)

二、不定性选择题

1. **下列说法错误的是 (DG)**

- A. 在正常着色下，图 G 的每个色组在 G 的补图中导出的子图是完全图
- B. 若图 G 非连通，则图 G 的补图必为连通图
- C. 图 G 与其补图具有相同的频序列
- D. 存在 14 阶的自补图 ❌
- E. 所有 4 阶图的补图都是可平面图
- F. 存在 6 阶可平面图 G，其补图也是可平面图
- G. 存在 8 阶外可平面图 G，其补图也是外可平面图 ❌

> **考点：** 关于补图的知识点
>
> **F 相关结论 (不会考)：** **定理 91：** 至少有 9 个点的简单可平面图的补图是不可平面的，而 9 是这种数目中最小的一个
>
> **G 相关结论 (不会考)：** **定理 84：** 每个至少有 7 个顶点的外可平面的补图不是外可平面图，且 7 是这个数目的最小者
>
> A 正确：正常着色 (点着色)，原图中每个色组中的点肯定无边相连，所以补图中一定是完全图
>
> B 正确
>
> C 正确：**定理 6：** 一个 n 阶图 G 和它的补图有相同的频序列；注意是频序列，不是度序列
>
> D 错误：**定理 1：** 若 n 阶图 G 是自补的（即 $G \simeq \overline{G}$），则 $n \equiv 0, 1 \pmod 4$
>
> E 正确：K_4 是可平面图，任何一个 4 阶简单图一定是一个可平面图；所以 4 阶图的补图也一定是可平面图
>
> F 正确：对于阶数小于 9 的简单可平面图，补图依然是可平面图
>
> G 错误

2. **关于完全图 K_n，下列说法错误的是 (B)**

- A. 点色数为 n
- B. 边色数为 n ❌
- C. 点连通度为 $n-1$
- D. 边连通度为 $n-1$
- E. 是临界图
- F. 是唯一可着色图

> **考点：** 对完全图的理解
>
> **注意：** E 和 F 涉及到第七章最后一节课讲的内容，不作要求 (临界图、唯一可着色图、不含三角形的 k 色图、完美图等等)
>
> A 显然正确
>
> B 错误：根据奇偶分成两种情况
>
> C 正确 D 正确：关于完全图，需要记住无点割，有边割
>
> E 正确：完全图是临界图
>
> F 正确：完全图是唯一可着色图

3. **设 G 是唯一 k $(k \geq 2)$ 可着色图，下列说法正确的是 (ABCDE)**

- A. 最小度 $\delta(G) > k-1$
- B. 图 G 是 $k-1$ 连通的
- C. 在 G 的任一正常 k 着色中，G 的任意两个色组的并导出的子图是连通的
- D. 在 G 的任一正常 k 着色中，G 的任意 l 个色组的并导出的子图是 l 连通的
- E. 若 G 是 $k-1$ 正则的，则 G 必为 K_k

> **注意：**本题涉及的知识点不考

4. **下列说法正确的是 (ABCDE)**

- A. 图 G 的独立集是其补图的团
- B. 点子集 S 是 G 的独立集当且仅当 S 的补集是 G 的覆盖
- C. 若图 G 没有孤立点，则 G 的边独立数与边覆盖数之和等于图 G 的阶数
- D. 若图 G 是偶图，则图 G 的边独立数等于点覆盖数
- E. 若图 G 是没有孤立点的偶图，则图 G 的点独立数等于边覆盖数

> A 正确：图 G 的独立集即为各不相邻的顶点，其补图一定都相邻，故为团
>
> B 正确：**定理 116：**给定图 $G=(V,E)$ 且 $S \subseteq V$，则 S 是 G 的独立集当且仅当 $V \setminus S$ 是 G 的覆盖
>
> C 正确：**定理 118 (Gallai)：**对任意不含孤立点的 n 阶图 G，有 $\alpha'(G)+\beta'(G)=n$
>
> D 正确：对于二部图，无论是否有孤立点，图 G 的边独立数等于点覆盖数（最重要，必须掌握）
>
> E 正确：**定理 119:** 设 G 是无孤立点的偶图，则 G 中最大独立集包含的顶点数等于最小边覆盖包含的边数

5. **下列说法正确的是 (BE)**

- A. 在有向图中，顶点的出度之和等于边数的两倍 ❌
- B. 在有向欧拉图中，各点的度数必为偶数
- C. 在有向图的邻接矩阵中，所有元素之和等于边数的两倍 ❌
- D. 在无环有向图的关联矩阵中，各行元素之和均等于 0 ❌
- E. 在无环有向图的关联矩阵中，所有元素之和等于 0

> **考点：**有向图
>
> A 错误：**定理 121:** 设 $D=(V,E)$ 是一个有向图，则有 $\sum\limits_{v \in V} d^+(v) = \sum\limits_{v \in V} d^-(v) = |E|$
>
> B 正确：出度 = 入度；度数 = 出度 + 入度 = 2 * 出度
>
> C 错误：有向图的邻接矩阵中，行和 = 顶点的出度，列和 = 顶点的入度；所有元素之和 = 出度之和 = 入度之和 = 边数
>
> D 错误：关联矩阵每一列恰有一个「1」和一个「-1」，第 i 行的 1 的个数等于 $d^+(v_i)$，-1 的个数等于 $d^-(v_i)$
>
> E 正确：每一列和均为 0，所以列和也为 0

6. **对于有向图，下列说法错误的是 (D)**

- A. 有向图 D 中任意一顶点只能处于 D 的某一个强连通分支中
- B. 在有向图 D 中，顶点 v 可能处于 D 的不同的单向连通分支中
- C. 有向连通图中顶点间的强连通关系是等价关系
- D. 有向连通图中顶点间的单向连通关系是等价关系 ❌
- E. 强连通图的所有顶点必然处于某一有向闭途径中

> A 正确：**定理 123:** 有向图 $D=(V,E)$ 的每个点位于且仅位于 D 的一个强 (弱) 连通分支中
>
> B 正确：‼️ 注：有向图 D 的某个顶点，可能会分属于 D 的若干个单向连通分支。因为单向连通关系不是等价关系
>
> C 正确
>
> D 错误：见选项 B 分析

E 正确：**定理 122:** 有向图 $D=(V,E)$ 是强连通的当且仅当 D 中存在含有所有顶点的有向闭途径

三、解答题

1. **现有 5 个人 A,B,C,D,E 被邀请参加桥牌比赛。比赛的规则是：① 每一场比赛由两个 2 人组进行对决；② 要求每个 2 人组 (X,Y) 都要与其它 2 人组 (U,V) 进行对决。若每个人都要与其他任意一个人组成一个 2 人组，且每个组在同一天不能有多于一次的比赛，则最少需要安排多少天比赛？**

考点：「点着色」和「边着色」应用题

注意 1： ✨ 考试注意识别到底是「点着色」还是「边着色」

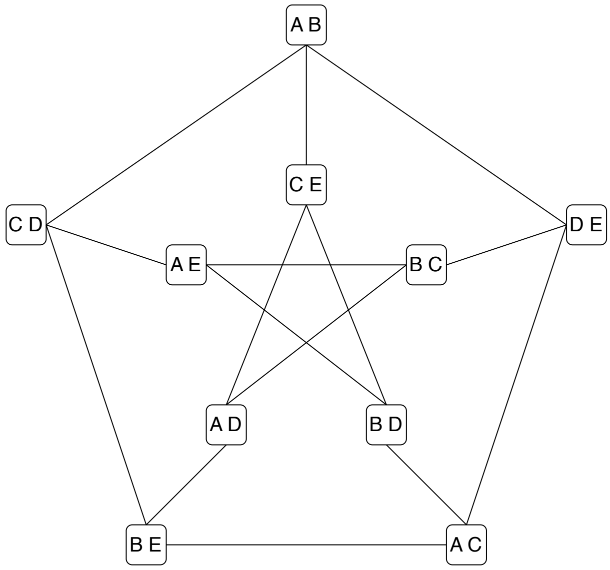
注意 2： 考试不会超过本题的难度

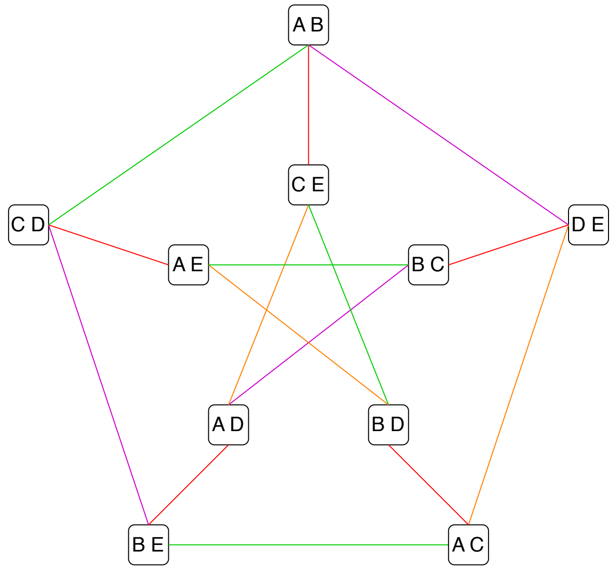
本题：「边着色」

分析：以每个二人组为顶点（共 10 个），两个二人组连一条线当且仅当四个人互不相同时

解： 如果两个二人组涉及到四个不同的人，这两个二人组之间连一条边，那么每一场比赛就转换成图中的一条边

原问题就转换成求该图的边色数





显然这个图为彼得森图，彼得森图的边色数是 4

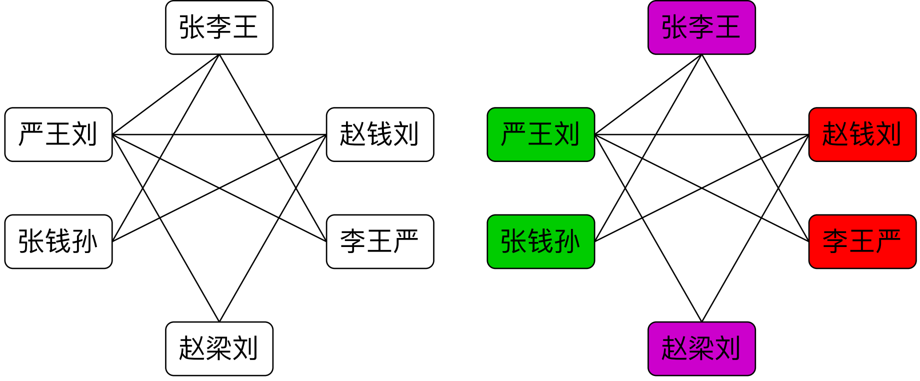
所以最少需要安排 4 天的比赛

2. **有 6 名博士生要进行论文答辩，答辩委员会成员分别是**
$A_1=$ 张教授，李教授，王教授；$A_2=$ 赵教授，钱教授，刘教授
$A_3=$ 严教授，王教授，刘教授；$A_4=$ 赵教授，梁教授，刘教授
$A_5=$ 张教授，钱教授，孙教授；$A_6=$ 李教授，王教授，严教授
要使教授们参加答辩不至于发生时间冲突，至少安排几次答辩时间段？请给出一种最少时间段下的安排

考点： 点色数和边色数应用题

注意： ✨ 考试注意识别到底是「点着色」还是「边着色」

解： 以博士生为顶点，如果两名博士生有相同的答辩委员会成员，则连接一条边，他们的答辩时间就不能安排在一起，必须错开



如上图，点色数为 3。所以，至少安排 3 次答辩时间段

3. **(19 年考过) 设 T 是一棵二元完全树，已知树叶数为 $t\ (t \geq 2)$，求 T 的边数**

解： 假设有 x 个分支点，那么出度之和为 $2x$

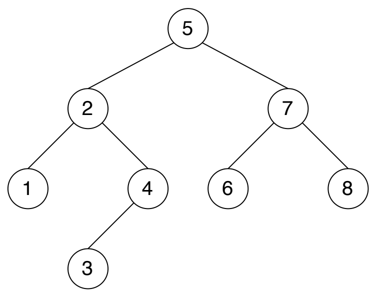
出度之和 = 边数 $= t + x - 1 = 2x$

得 $x = t - 1$

所以 $m = 2t - 2$

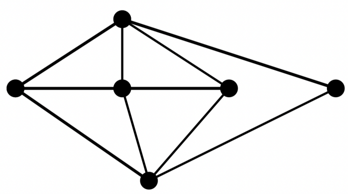
4. **设 T 是 8 阶二元有序树，已知 T 的先序遍历和中序遍历分别为 52143768 与 12345678。构造树 T 并求其后序遍历**

解：



后序遍历：13426875

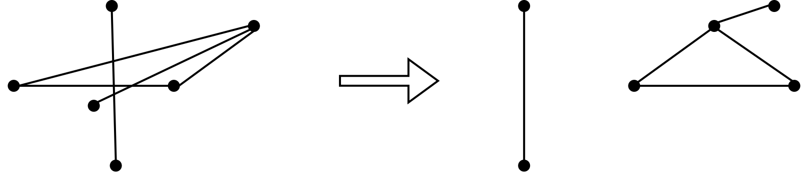
5. **求下图的色多项式及色数**

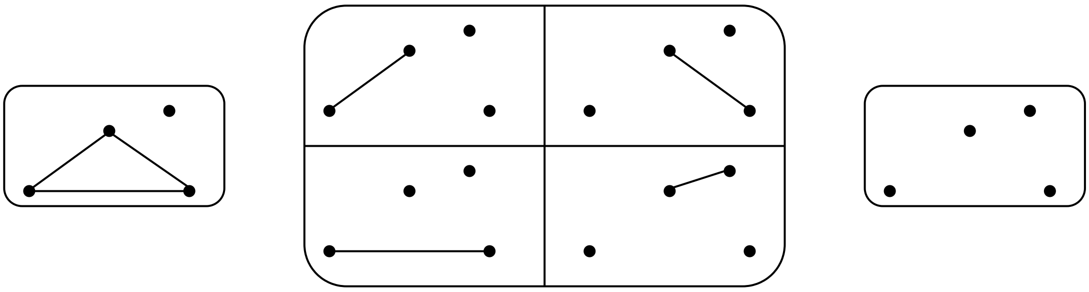


注意 1： 使用的方法肯定是「递推计数法」或「理想子图法」

注意 2： 先不要纠结使用什么方法，先画出补图，再决定方法

解： 画出 G 的补图





求出补图的伴随多项式：$h(\overline{G},x)=(x+x^2)(x^2+4x^3+x^4)=x^3+5x^4+5x^5+x^6$

将 $x^i=[k]_i$ 代入伴随多项式中得到 $P_k(G)$：

$$\begin{aligned}P_k(G)&=[k]_3+5[k]_4+5[k]_5+[k]_6\\&=k(k-1)(k-2)+5k(k-1)(k-2)(k-3)\\&\quad+5k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\\&\quad+k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)\end{aligned}$$

扩展： 根据色多项式求原图的的点色数

方法： 使 $P_k(G)>0$ 最小的 k 值，从 $k=1,2,3\cdots$ 一个一个的试

当 $k=1$ 时，$P_k(G)=0$

当 $k=2$ 时，$P_k(G)=0$

当 $k=3$ 时，$P_k(G)=6>0$

所以原图的点色数为 3