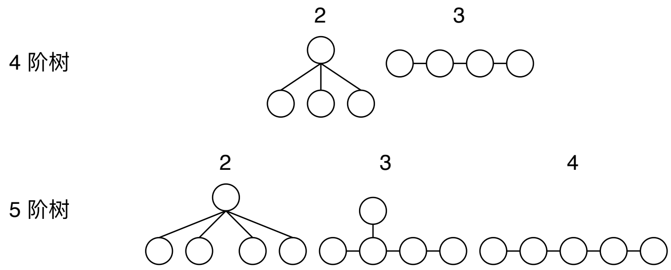
图论作业 1

一、填空题

1. 非同构的 4 阶和 5 阶树的个数分别为 2 **和** 3

> **方法：** 按照树中存在的最长路进行枚举 (从 2 开始)
>
> **注意：** 对于 $n \geq 2$ 的树来说，路的最短长度为 2
>
> 
>

2. n 阶 k 正则图 G 的补图的边数为 $[n(n-1)-nk]/2$

> **考点一：** 完全图每个点的度数是 $(n-1)$ ✨
>
> **考点二：** 一个图和其补图的并是完全图 $\Rightarrow$ 一个点在原图和补图中的度数和为 $(n-1)$
>
> 图 G 是 k 正则，那么图 G 的补图为 $(n-1-k)$ 正则。故补图的度数之和为 $d(\overline{G})=n(n-1-k)$
>
> 根据握手定理：$m=d(\overline{G})/2=n(n-1-k)/2$

3. 设图 $G=(n,m)$ 中各顶点度数均为 3，且 $2n=m+3$，则 n = 6**，m =** 9

> **考点：** 握手定理
>
> 根据握手定理：$2m=3n$

4. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且

$$A^2=\begin{pmatrix}3&1&1&2&0\\1&2&1&1&1\\1&1&3&0&2\\2&1&0&2&0\\0&1&2&0&2\end{pmatrix}$$

则图 G 的边数为 6

> **考点：** 邻接矩阵的性质
>
> **定理 10：** 令 G 是一个有推广邻接矩阵 A 的 p 阶标定图，则 A^n 的 i 行 j 列元素 $a_{ij}^{(n)}$ 等于由 v_i 到 v_j 的长度为 n 的途径的数目
>
> 推论：设 A 为简单图 G 的邻接矩阵，则：A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数。A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍 **（考过填空）**

5. 设 G 是一个完全 l 部图，n_i 是第 i 部分的顶点数，则它的边数为 $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq l} n_in_j$

> **考点：** 完全多部图的概念与结构
>
> 完全 l 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_l}$ 的点数：$\sum\limits_{i=1}^{l} n_i$；边数：$\sum\limits_{1\leq i<j<\leq l} n_in_j$ **（考过填空）**

6. 设 G 是 n 阶简单图，且不含完全子图 K_3，则其边数一定不会超过 $\lfloor n^2/4\rfloor$

> **考点：** Turán 定理

> **定理 18 (Turán)**：若 G 是 n 阶简单图，并且不包含 K_{l+1}，则边数 $m(G) \le m(T_{l,n})$。此外，仅当 $G \cong T_{l,n}$ 时，$m(G) = m(T_{l,n})$
>
> ✨ 计算公式：$K_{l+1} \notin G$，则 $m(T_{l,n}) = C_l^2(n/l)^2$
>
> - **例**：n 阶简单图 G，$K_3 \notin G$，则 G 最多有 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 条边 $\Rightarrow m(G) \le m(T_{2,n}) = C_2^2(n/2)^2 = (n/2)^2$
> - **例**：9 阶简单图 G，$K_4 \notin G$，则 G 最多有 27 条边 $\Rightarrow m(G) \le m(T_{3,9}) = C_3^2(9/3)^2 = 3 \times (9/3)^2 = 27$

7. 设 n 阶图 G 是具有 k 个分支的森林，则其边数为 $n-k$

> 树的边数 = 顶点数 - 1
>
> 森林的边数 = 顶点数 - 连通分支数

8. 一棵树有 n_i 个度为 i 的结点，$i = 2, 3, \cdots, k$，则它有 $\sum\limits_{i=2}^{k} n_i(i-2)+2$ 个度数为 1 的顶点

> **考点**：握手定理 + 树的性质（边数 = 顶点数 - 1）
>
> $m = n - 1$，其中 $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$
>
> 由握手定理：$2m = d(T) = \sum\limits_{i=1}^{k}(i \times n_i)$
>
> 故：$2(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 1) = \sum\limits_{i=1}^{k}(i \times n_i)$
>
> 整理得：$n_1 = 2 + (3-2)n_3 + (4-2)n_4 + \cdots + (k-2)n_k = \sum\limits_{i=2}^{k} n_i(i-2)+2$

9. 完全图 K_5 的生成树的个数为 $5^{5-2} = 125$

> **定理 27**：$\tau(K_n) = n^{n-2}$

二、不定项选择题

1. **关于图的度序列，下列命题正确的是（ABCD）**

- A. 同构的两个图的度序列相同
- B. 非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列当且仅当 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ 是偶数
- C. 如果正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$是一棵树的度序列且 $n \ge 2$，那么序列中至少有两个 1
- D. 正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是非平凡树的度序列当且仅当 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)$
- E. 若图 G 的顶点度数之和大于等于图 H 的顶点度数之和，则图 G 度优于图 H ❌
- F. 如果非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是简单图的度序列，那么在同构意义下只能确定一个图 ❌

> **考点**：度序列 && 图序列
>
> **关系**：简单图的度序列简称图序列
>
> **注意**：判断非负整数序列是否为简单图的度序列暂无好的方法，只有等价转换的方法
>
> A 显然正确（已经默认递增或递减排列）
>
> B 正确：**定理 3**：非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列的充分必要条件是：$\sum d_i$ 为偶数
>
> C 正确：**定理 20**：每棵非平凡树至少有两片树叶
>
> D 正确：存在一棵非平凡树，以该序列为度序列的充要条件 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1) = 2m \Rightarrow$ 握手定理
>
> E 错误：先有度弱或度优，才有度数之和小于或大于；反过来不成立
>
> F 错误：不止确定一个图

2. **对于序列 $(7, 5, 4, 3, 3, 2)$，下列说法正确的是（BD）**

- A. 可能是简单图的度序列 ❌

- B. 一定不是简单图的度序列
- C. 只能是简单图的度序列
- D. 只能是非简单图的度序列
- E. 不是任意图的度序列

> **考点：** 度序列 && 图序列
>
> 对于简单图，顶点的最大度 $\leq$ 顶点数 - 1
>
> A 错 B 对 C 错：对于该题，长度为 6，说明有 6 个点，同时最大度为 7，显然不是简单图！！
>
> D 对 E 错：**定理 3：** 非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列的充分必要条件是：$\sum d_i$ 为偶数

3. **下列说法错误的是（ACE）**

- A. 若一个图中存在闭途径，则一定存在圈
- B. 偶图中不存在奇圈
- C. 若图 G 不含三角形，则 G 为偶图
- D. 图的顶点之间的连通关系一定是等价关系
- E. 存在每个顶点的度数互不相同的非平凡简单图

> A 错误：
>
> 闭途径（$u \to v \to u$），但不存在圈
>
> B 正确：**定理 9：** 一个图是偶图当且仅当它不包含奇圈
>
> C 错误：可能存在长度不为 3 的奇圈，如 5，7 等等
>
> D 正确：即便在有向图中，也存在弱连通
>
> E 错误：**定理 5：** 一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同

4. **关于简单图 G 的邻接矩阵 A，下列说法错误的是（C）**

- A. 矩阵 A 的行和等于该行对应顶点的度数
- B. 矩阵 A 的所有元素之和等于该图边数的 2 倍
- C. 矩阵 A 的所有特征值之和等于该图边数的 2 倍
- D. 矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍
- E. 矩阵 A^2 的主对角线的元素之和等于该图边数的 2 倍
- F. 若 G 是非连通图，则 A 相似于某个准对角矩阵

> **考点：** 简单图邻接矩阵的性质
>
> A 正确：矩阵 A 的「行和」或「列和」等于该「行」或「列」对应顶点的度数
>
> B 正确：所有元素之和等于度数之和，根据握手定理判断正确
>
> C 错误：矩阵的所有特征值之和等于矩阵的迹；矩阵的迹又是矩阵主对角线上的元素之和；对于简单图，邻接矩阵主对角线元素均为 0
>
> D 正确：所有特征值的平方和等于 A^2 的所有特征值之和；A^2 的迹就是主对角线之和，也就是图的所有度数之和，就等于边数的两倍
>
> E 显然正确
>
> F 正确：无法解释，因为不懂！！！😭😭😭

5. **图 $G = (n, m)$ 一定是树的是（BDE）**

- A. 连通图
- B. 无回路但任意添加一条边后有回路的图
- C. 每对顶点间都有路的图
- D. 连通且 $m = n - 1$
- E. 无圈且 $m = n - 1$

考点： 树的基本性质

A 错误：树是连通的**无圈图**

B 正确：回路是边不重圈的并；无回路肯定无圈，加一条边有回路，肯定就有圈

C 错误：每对顶点间存在**唯一**的一条路

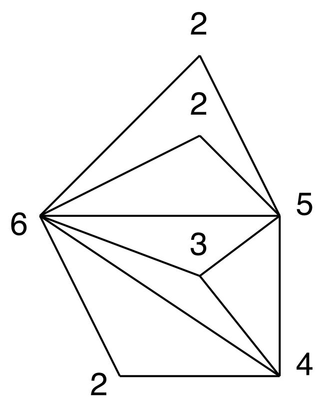
D E 显然正确

三、解答题

1. **设无向图 G 有 10 条边，3 度与 4 度顶点各 2 个，其余顶点度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点？在顶点数最少的情况下，写出 G 的度序列，该度序列是一个图序列吗？**

> **考点：** 握手定理 + 图序列
>
> **解：** 由于求顶点数量最少，故假设 0 度顶点为 0 个，1 度顶点为 0 个，同时设 2 度顶点有 d_2 个
>
> 根据握手定理得：$10\times 2=2\times d_2+2\times 3+2\times 4$；解得：$d_2=3$
>
> 所以 G 中至少有 7 个顶点；图 G 的度序列为 $(4,4,3,3,2,2,2)$
>
> 根据 Havel-Hakimi 定理，可得下面推导过程：
>
> $\pi_1=(3,2,2,1,2,2)\Rightarrow\pi_1=(3,2,2,2,2,1)$
>
> $\pi_2=(1,1,1,2,1)\Rightarrow\pi_2=(2,1,1,1,1)$
>
> $\pi_3=(0,0,1,1)$
>
> 显然 π_3 是可图的，所以 $(4,4,3,3,2,2,2)$ 是可图的

2. **证明整数序列 $(6,3,4,2,2,5,2)$ 是简单图的度序列，并构造一个对应的简单图。**

> **考点：** 图序列
>
> **注意：** 利用等价转换的方法，前提需要对度序列排序（递减）
>
> **证明：** 根据 Havel-Hakimi 定理，首先排序 $\pi=(6,5,4,3,2,2,2)$
>
> $\pi_1=(4,3,2,1,1,1)\rightarrow\pi_2=(2,1,0,0,1)$
>
> 显然 π_2 是可图的，因此 $(6,3,4,2,2,5,2)$ 是可图的
>
> 
>

3. **设 G 与其补图的边数分别为 m_1 和 m_2，求 G 的阶数。**

> **解：** 设图 $H=G\bigcup\overline{G}$，图 G 的阶数为 n
>
> 显然图 H 为完全图 K_n
>
> 根据握手定理得：$n(n-1)=2(m_1+m_2)$

> 解得：$n=\frac{1\pm\sqrt{1+8(m_1+m_2)}}{2}$ ，其中正整数解即为所求

4. **设 G 为 n 阶简单图，$n>2$ 且 n 为奇数，G 与其补图中度数为奇数的顶点个数是否相等？并给出理由。**

> **解：** 由补图定义知，任意点 v 在图 G 及其补图 $\overline{G}$ 中的度数之和为 $n-1$，即：$d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=n-1$
>
> 因此，若 G 中有 b_i 个度为奇数的顶点，其度数为 d_i，则这 b_i 个顶点在 $\overline{G}$ 中的度数为 $n-1-d_i$
>
> 因为 n 为奇数，故 $n-1$ 为偶数，所以 $n-1-d_i$ 为奇数
>
> 综上所述，G 与其补图中度数为奇数的顶点个数相等

5. **证明：任何一个人群中至少有两个人认识的朋友数相同。**

> **注意：** 此类题目考试中经常出现
>
> **证明：** 以人为顶点，如果两个人相识，对应的顶点之间连一条边，得到的图记为 G
>
> 显然图 G 是简单图
>
> 当一个人的朋友数等于他在图中对应顶点的度数
>
> 因为简单图中一定存在度数相等的顶点，所以在任何一个人群中至少有两个人认识的朋友数相同

6. **证明：若 k 正则二部图具有二分类 $V=V_1\cup V_2$，则 $|V_1|=|V_2|$。**

> **证明：** 对于二部图来说，因为边是建立在顶点集的二部划分之间的，所以边数既等于 V_1 中顶点的度数之和，也等于 V_2 中顶点的度数之和
>
> 故有：$k\times|V_1|=m=k\times|V_2|$
>
> 所以：$|V_1|=|V_2|$
>
> **注意：** 梳理 k 正则二部图结论

7. **证明：若图 G 的直径大于 3，则图 G 的补图的直径小于 3**

> 摆烂吧！！！
>
> 不会！！！！
>
> 考试难度远远低于本题。。。
>
> 所以 哈哈哈哈哈
>
> 放弃吧！！！！！