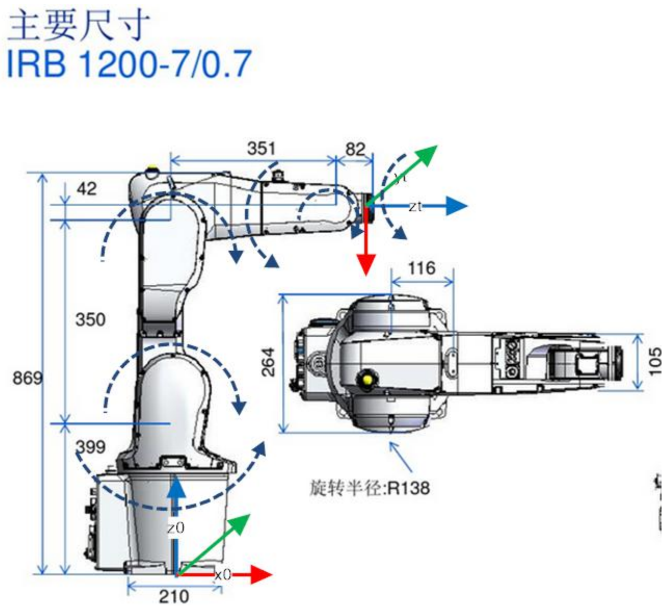
机器人运动学分析

一、DH 参数的定义($\boldsymbol{d},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}$)



DH参数约束描述

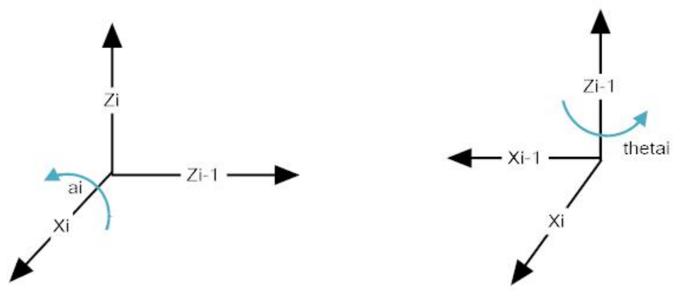
$d-x$ 轴的垂直距离：沿 Zi，从 Xi 到 Xi+1 的距离，或是从 Zi 原点到 Zi 和 Zi+1 公共法线；

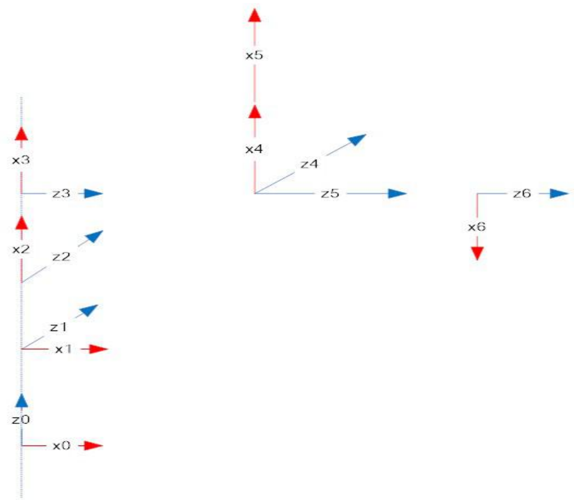
$\theta-x$ 轴的夹角：沿 Zi，从 Xi 旋转到 Xi+1 的角度；

$r-z$ 轴的垂直距离：沿 Xi+1，从 Zi 到 Zi+1 的距离，或是表述为沿着 Zi 的旋转半径的大小；

α $-z$ 轴的夹角：沿 Xi+1，从 Zi 旋转到 Zi+1 的角度，或表述为使得 Zi 朝向期望的旋转方向；

注意：在确定 Z 轴的时候，先让手指弯曲方向与关节角度正方向一致。正负方向的规定：关节角度θ的正方向定义，从 Z 轴正向看原点 逆时针旋转为正，按右手规则约定，扭角α角度的正负定义类似，如下图所示：





以 ABB1200-07 为例，建立坐标系如上，可得 DH 参数表：

DH	d	θ	r	α	offset
0(1-0)	D1	θ_0	0	-90	0
1(2-1)	0	θ_1	L2	0	-90
2(3-2)	0	θ_2	L3	-90	0
3(4-3)	D4	θ_3	0	90	0
4(5-4)	0	θ_4	0	-90	0
5(6-5)	D6	θ_5	0	0	± 180

关于 offset 项是叠加在θ上面的偏置量，可以理解为机器人处于零位时，驱动轴和传动轴依然存在夹角。

二、运动学正解

1. 连杆的 A 矩阵

从上可得关节 i-1 与关节 i 之间的变换矩阵如下：

$$ {}^{i-1}_{i}T = A_i = Rot(z,\theta_i) * Trans(0,0,d_i) * Trans(r_i,0,0) * Rot(x,\alpha_i) $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & r_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & r_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

其中，$s\theta_i$表示 $\sin(\theta_i)$, $c\theta_i$ 表示 $\cos(\theta_i)$，

$$ A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & L_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$A_3=\begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & L_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & L_3s\theta_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4=\begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & D_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5=\begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_6=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_6^0T=A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

代入 DH 参数可得

$${}_6^0T=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

使用 matlab 计算符号表达式，并简化可得如下结果：

$$\begin{aligned} n_x = {} & \sin(q6)*(\cos(q4)*\sin(q1) - \sin(q4)*\cos(q1)*\cos(q2+q3)) + \cos(q6) \\ & *(\cos(q5)*(\sin(q1)*\sin(q4) + \cos(q4)*\cos(q1)*\cos(q2+q3)) \\ & - \sin(q5)*\cos(q1)*\sin(q2+q3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_y = {} & -\sin(q6)*(\cos(q1)*\cos(q4) + \sin(q4)*\sin(q1)*\cos(q2+q3)) - \cos(q6) \\ & *(\cos(q5)*(\cos(q1)*\sin(q4) - \cos(q4)*\sin(q1)*\cos(q2+q3)) \\ & + \sin(q5)*\sin(q1)*\sin(q2+q3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_z = {} & \sin(q2 + q3)*\sin(q4)*\sin(q6) - \cos(q6)*(\cos(q2 + q3)*\sin(q5) + \sin(q2 \\ & + q3)*\cos(q4)*\cos(q5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_x = {} & \cos(q6)*(\cos(q4)*\sin(q1) - \sin(q4)*\cos(q1)*\cos(q2+q3)) - \sin(q6) \\ & *(\cos(q5)*(\sin(q1)*\sin(q4) + \cos(q4)*\cos(q1)*\cos(q2+q3)) \\ & - \sin(q5)*\cos(q1)*\sin(q2+q3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_y = {} & \sin(q6)*(\cos(q5)*(\cos(q1)*\sin(q4) - \cos(q4)*\sin(q1)*\cos(q2+q3)) \\ & + \sin(q5)*\sin(q1)*\sin(q2+q3)) - \cos(q6)*(\cos(q1)*\cos(q4) \\ & + \sin(q4)*\sin(q1)*\cos(q2+q3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_z = {} & \sin(q6)*(\cos(q2 + q3)*\sin(q5) + \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\cos(q5)) + \sin(q2 \\ & + q3)*\cos(q6)*\sin(q4) \end{aligned}$$

$a_x = -\sin(q5)*(\sin(q1)*\sin(q4) + \cos(q4)*\cos(q1)*\cos(q2+q3)) - \cos(q5)*\cos(q1)*\sin(q2+q3)$

$a_y = \sin(q5)*(\cos(q1)*\sin(q4) - \cos(q4)*\sin(q1)*\cos(q2+q3)) - \cos(q5)*\sin(q1)*\sin(q2+q3)$

$a_z = \sin(q2 + q3)*\cos(q4)*\sin(q5) - \cos(q2 + q3)*\cos(q5)$

$$\begin{aligned} p_x = {} & L2*\cos(q1)*\cos(q2) - D4*\sin(q2 + q3)*\cos(q1) - D6*\sin(q2 + q3) \\ & *\cos(q1)*\cos(q5) + L3*\cos(q1)*\cos(q2+q3) - D6*\sin(q1) \\ & *\sin(q4)*\sin(q5) - D6*\cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)*\cos(q4)*\sin(q5) \\ & + D6*\cos(q1)*\cos(q4)*\sin(q2)*\sin(q3)*\sin(q5) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_y = {} & \mathrm{L2} * \cos(\mathrm{q2}) * \sin(\mathrm{q1}) - \mathrm{D4} * \sin(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}) * \sin(\mathrm{q1}) - \mathrm{D6} * \sin(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}) \\
& * \cos(\mathrm{q5}) * \sin(\mathrm{q1}) + \mathrm{L3} * \sin(\mathrm{q1}) * \cos(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}) + \mathrm{D6} * \cos(\mathrm{q1}) * \sin(\mathrm{q4}) \\
& * \sin(\mathrm{q5}) + \mathrm{D6} * \cos(\mathrm{q4}) * \sin(\mathrm{q1}) * \sin(\mathrm{q2}) * \sin(\mathrm{q3}) * \sin(\mathrm{q5}) - \mathrm{D6} \\
& * \cos(\mathrm{q2}) * \cos(\mathrm{q3}) * \cos(\mathrm{q4}) * \sin(\mathrm{q1}) * \sin(\mathrm{q5})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_z = {} & \mathrm{D1} - \mathrm{D4} * \cos(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}) - \mathrm{L3} * \sin(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}) - \mathrm{L2} * \sin(\mathrm{q2}) + (\mathrm{D6} * \sin(\mathrm{q2} \\
& + \mathrm{q3}) * \sin(\mathrm{q4} + \mathrm{q5}))/2 - \mathrm{D6} * \cos(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}) * \cos(\mathrm{q5}) - (\mathrm{D6} * \sin(\mathrm{q4} \\
& - \mathrm{q5}) * \sin(\mathrm{q2} + \mathrm{q3}))/2
\end{aligned}
$$

姿态角使用 RPY 表示。

2. 根据各轴角度确定姿态

2.1 正反手姿态

由旋转矩阵的坐标变换公式，有

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_x^{'} \\ p_y^{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \end{vmatrix}$$

已知$\begin{vmatrix} p_x \\ p_y \end{vmatrix}$和$\theta$，求$\begin{vmatrix} p_x^{'} \\ p_y^{y} \end{vmatrix}$，因为旋转矩阵的逆等于旋转矩阵的转置，所以有

$$\begin{vmatrix} p_x^{'} \\ p_y^{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \end{vmatrix}$$

可得

$$p_x^{'} = p_x \cos\theta + p_y \sin\theta$$

如果$p_x^{'} \geq 0$，反手姿态 lefty，反之为 righty 姿态；
几何意义是：腕部中心点的坐标在第 1 轴中心线（连杆坐标的 Z 轴方向）的左边，可以从$Y^{'}$轴正方向观察点在$X^{'}$轴上的正负；

2.2 上下肘姿态

$$\angle threshold = \tan^{-1}\frac{D_4}{L_3}$$

在反手 lefty 姿态下，若有

$$q_3 \leq -\left|\angle threshold\right|$$

则机械手处于下肘姿态，反之是上肘姿态。
在正手姿态下，判断条件刚好与之相反，若有

$$q_3 > -\left|\angle threshold\right|$$

则机械手处于下肘姿态，反之是上肘姿态；

2.3 腕翻转姿态

在反手 lefty 姿态下，若有

$$q_5 > 0$$

则机械手处于不翻转姿态，反之是翻转姿态。
在正手姿态下，判断条件刚好与之相反，若有

$$q_5 < 0$$

则机械手处于不翻转姿态，反之是翻转姿态；

2.4 四轴形态和六轴形态

若

$$|q_4| > \pi$$

则是双圈姿态，否则为单圈姿态。
同理
若

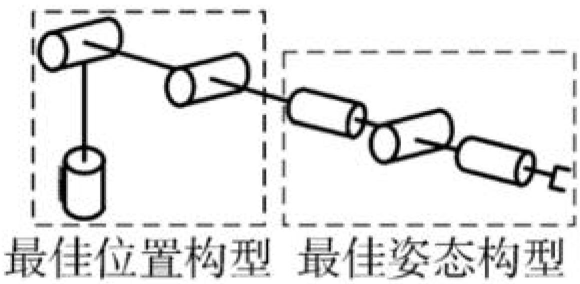
$$|q_6| > \pi$$

则是双圈姿态，否则为单圈姿态。

三、 运动学逆解：位置

已知机器人末端的位姿，有

$$ {}_6^0T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



六自由度最佳构型

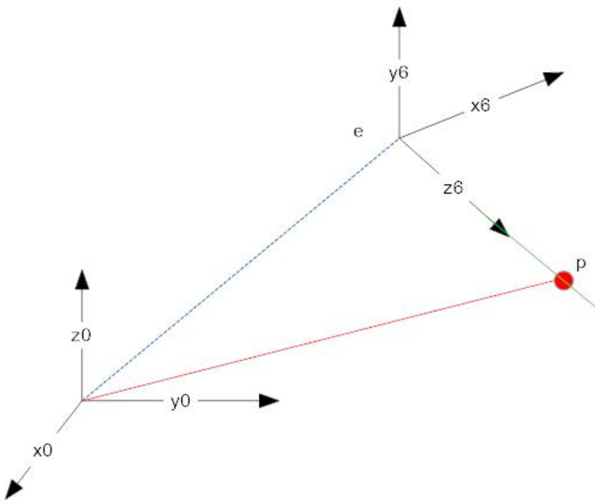
反向运动学问题，可描述为给定机械手末端的位姿，即位置和姿态，反求各个关节的角度。因为机器人模型最后三个关节相交于一点（第五关节的中心点），满足 Pieper 准则，因此模型存在封闭解。

求解思路：根据手腕的位置，采用平面几何方法计算出前三个关节的值，尽管可以求得多组封闭解，但是单纯采用几何法计算关节角，会受机械臂构型影响较大，逆解算法无法通用，从而对开发其余构型机械臂的逆解算法参考价值不大。代数法虽然耗时多，但是通用性

好。

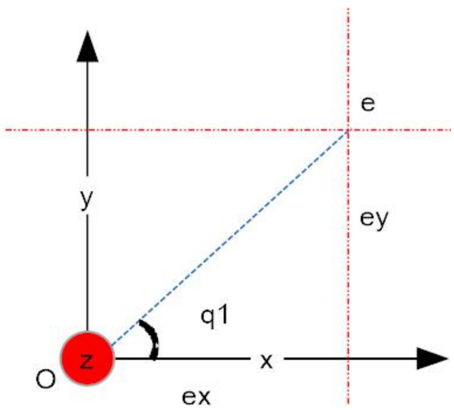
机器人的一个空间位置姿态，可能会存在多种关节角，如果采用几何法求解，且考虑不充分，可能会造成求解结果变少的情况。另外，利用手腕姿态，可求出后三个关节（手腕关节）的值。获得的解有可能并不唯一，最后根据约束条件，对所获得的解进行筛选，排除不在约束条件内部的解，可以根据路径最短原则或是姿态初始值选取最优解。

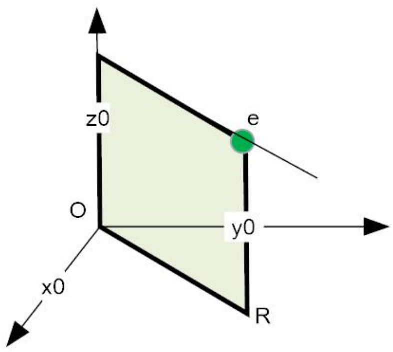
3. 求手腕中心位置 e



$\vec{a}$，表示机械手末端坐标系 Z 轴与基座坐标系 xyz 的夹角余弦，由上图可得：

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oe} + D6 * \vec{a}$$
$$\overrightarrow{oe} = \overrightarrow{op} - D6 * \vec{a}$$
$$e_x = p_x - D6 * a_x$$
$$e_y = p_y - D6 * a_y$$
$$e_z = p_z - D6 * a_z$$





把腕部中心点 e 投影到 XOY 平面上，得到点 e，如上图，可计算关节 1 的角度为：

$$q_{11} = \tan^{-1}\frac{e_y}{e_x}$$

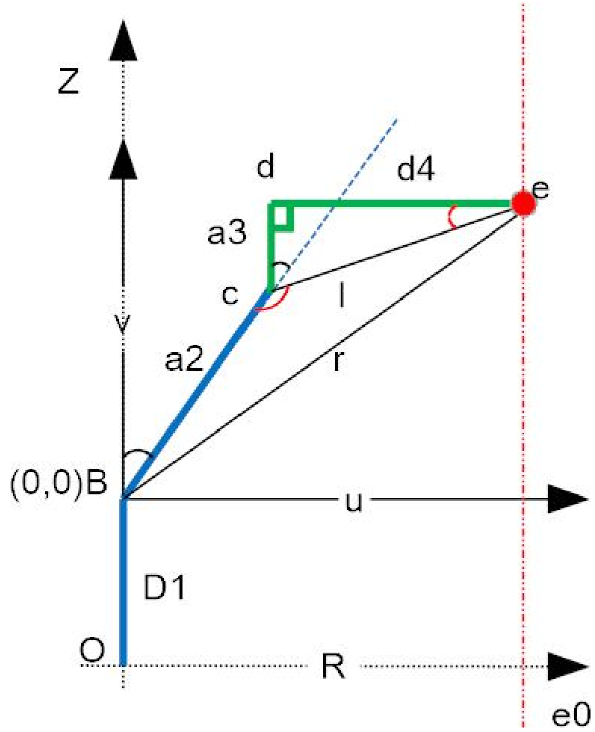
对于同一点 e，q1 有两个解，此二解差 180 度，根据后面 q2q3 的正负号，**当 q2 大于 0，则**

上解为 right shoulder，即 righty 正手，反之称为 left shoulder 解 lefty 反手，如下表示：

$$q_{12} = \pi + \tan^{-1}\frac{e_y}{e_x}$$

2、EOZ 平面投影

再把机械手投影到 EOZ 竖直平面，该平面垂直于 XOY 平面，EOZ 平面的 OR 矢量与 XOY 平面的 OE 重合，并定义为新坐标系的 U 轴，同理定义 V 轴方向与 Z 轴同向，如下图所示：



由图可得，e 点在 UBV 平面上的坐标为$[e_u,e_v]$，且e_u与 XOY 平面上 OE 长度相等，

$$e_u = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} - L_1$$

此处，针对 ABB 机器人模型有 $L_1 = 0$。

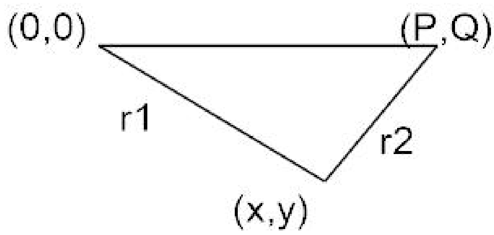
$$e_v = e_z - D1$$

因此，BE 长度等于，

$$r = \sqrt{e_u^2 + e_v^2}$$

3、辅助点坐标计算公式推导

已知平面点$[x,y]$，距离原点为r_1，距离点$[P,Q]$为r_2，其中r_1，r_1，$[P,Q]$都说已知量，求$[x,y]$的计算公式。



解：
建立联立方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = {r_1}^2 & (1) \\ (x-P)^2 + (y-Q)^2 = {r_2}^2 & (2) \end{cases}$$

化简方程组，并设

$$tp = P^2 + Q^2 + {r_1}^2 - {r_2}^2$$

$$a = \frac{tp}{2P}$$

$$b = \frac{-Q}{P}$$

可得 $x = a + by$

把结果代入方程组（2）式，有

$$(b^2+1)y^2 + 2aby + (a^2 - {r_1}^2) = 0$$

令 $\mathrm{A} = b^2 + 1$, $B = 2ab$, $C = a^2 - {r_1}^2$，可解得

$$y = \frac{-\mathrm{B} \pm \sqrt{B^2 - 4\mathrm{AC}}}{2A}$$

再把 y 代入方程组（1）式，可得 x。
这个计算结果用于姿态的取舍，如果 y 为正，则 Elbow 状态为 above/up，上肘。

4、辅助点 c 在 UV 平面上的坐标$[c_u,c_v]$

从投影图上可知

$\overrightarrow{BC} = r_1$，$\overrightarrow{CE} = r_2$ ，其中$r_1 = a_2$ ，$r_2 = l = \sqrt{a_3^2 + d_4^2}$

而 E 点坐标为$[e_u,e_v]$，代入公式的$[P,Q]$，如下

$$P = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$Q = e_z - D1$$

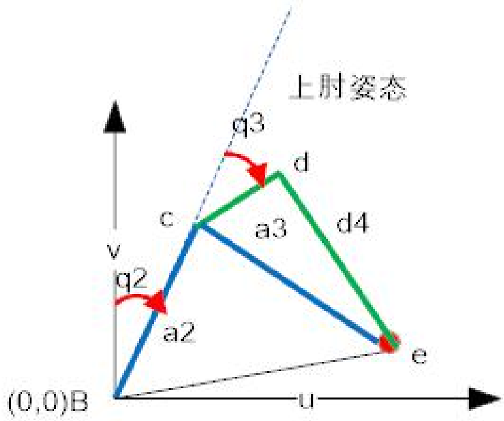
利用公式 3，可得

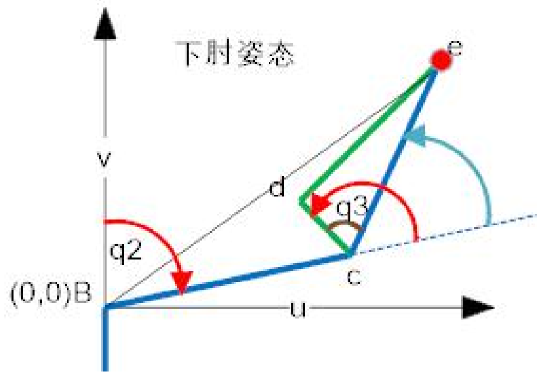
$$c_v = \frac{-\mathrm{B} \pm \sqrt{B^2 - 4\mathrm{AC}}}{2A}$$

先取$c_v \geq 0$，（上肘 elbow above），**即当给定姿态为上肘时，取c_v的大值代入方程。**
带入$c_u = a + bc_v$，可求得c_u，该值用于在给定姿态下，选取合适的关节角度q_2。

5、解关节角度 q2

当在第一个关节角度 q1 为正手时，234 关节在平面上构成上肘姿态和下肘姿态的几何图，分别如下所示。





由 ZOE 投影图，利用余弦定理有

$$\alpha = \angle CBE = \cos^{-1}\frac{r_1^2 + P^2 + Q^2 - r_2^2}{2r_1\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\varphi = \angle EBU = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$$

$$q_{21} = \frac{\pi}{2} - \varphi - a \quad \text{上肘位形}$$

$$q_{22} = \frac{\pi}{2} - \varphi + a \quad \text{下肘位形}$$

如果$c_u < 0$，则$q_{21} ==- | q_{21}|$或是$q_{22} ==- | q_{22}|$。
注意，角度α的计算方法，可以采用如下方式进行，

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + P^2 + Q^2 - r_2^2}{2r_1\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1 - (cosa)^2}}{cosa}$$

C 函数 ATAN2(a,b)的取值范围介于 -pi 到 pi 之间，与 ATAN 的 pi/2 不同之处；

6、解关节角度 q3

从上图可知，有

$$\beta = \angle BCE = \cos^{-1}\frac{r_1^2 + r_2^2 - (P^2 + Q^2)}{2r_1r_2}$$

$$\angle DCE = \tan^{-1}\frac{d_4}{a_3}$$

上肘姿态 $q_{31} = \pi - (\angle DCE + \beta)$， $c_v > 0$
下肘姿态 $q_{32} =- (\pi + \angle DCE - \beta)$， $c_v < 0$

7、上肘姿态与下肘姿态（elbow up 和 elbow down）

C 点习惯使用上肘，从上面公式可知，C 点坐标会有两个解，C 点如果在 BE 线左侧即上肘姿态，反之称为下肘姿态，请注意在不同姿态时，q_2q_3的方向定义。一般情况下，q_2q_3的正负取值也受第一个关节角度q_1的影响，如果q_1取反手姿态，则q_2要取负值。**为便于验证算法的正确性，可以先把 D6 设为 0；**

8、解的组合

约定第一个关节的范围是-180 到 180 时，有四个组合，分别是

$$\begin{cases} q_{11},q_{21},q_{31} & 正手，上肘姿态 \\ q_{11},q_{22},q_{32} & 正手，下肘姿态 \\ q_{21},-q_{21},q_{32} & 反手，下肘姿态 \\ q_{21},-q_{22},q_{31} & 反手，上肘姿态 \end{cases}$$

如果第一个关节的运动范围小于 180，则只有两组有效解；若大于 180，小于 360，则有四个解，如果大于 360 度，则有解的数量会相应增加；

四、 运动学逆解：姿态

已知目标位姿和前三个关节角度$q_1q_2q_3$，求解$q_4q_5q_6$ 。若干顺规的旋转矩阵如下所示：
6 种只绕两条轴的旋转（Proper Euler Angle）：XYX, YXY, XZX, ZXZ, YZY, ZYZ；
6 种绕三条轴的旋转（Tait-Bryan Angle）：XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX；

Proper Euler angles	Tait-Bryan angles
$X_1Z_2X_3=\begin{bmatrix} c_2 & -c_3s_2 & s_2s_3 \\ c_1s_2 & c_1c_2c_3-s_1s_3 & -c_3s_1-c_1c_2s_3 \\ s_1s_2 & c_1s_3+c_2c_3s_1 & c_1c_3-c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	$X_1Z_2Y_3=\begin{bmatrix} c_2c_3 & -s_2 & c_2s_3 \\ s_1s_3+c_1c_3s_2 & c_1c_2 & c_1s_2s_3-c_3s_1 \\ c_3s_1s_2-c_1s_3 & c_2s_1 & c_1c_3+s_1s_2s_3 \end{bmatrix}$
$X_1Y_2X_3=\begin{bmatrix} c_2 & s_2s_3 & c_3s_2 \\ s_1s_2 & c_1c_3-c_2s_1s_3 & -c_1s_3-c_2c_3s_1 \\ -c_1s_2 & c_3s_1+c_1c_2s_3 & c_1c_2c_3-s_1s_3 \end{bmatrix}$	$X_1Y_2Z_3=\begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3+c_3s_1s_2 & c_1c_3-s_1s_2s_3 & -c_2s_1 \\ s_1s_3-c_1c_3s_2 & c_3s_1+c_1s_2s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
$Y_1X_2Y_3=\begin{bmatrix} c_1c_3-c_2s_1s_3 & s_1s_2 & c_1s_3+c_2c_3s_1 \\ s_2s_3 & c_2 & -c_3s_2 \\ -c_3s_1-c_1c_2s_3 & c_1s_2 & c_1c_2c_3-s_1s_3 \end{bmatrix}$	$Y_1X_2Z_3=\begin{bmatrix} c_1c_3+s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2-c_1s_3 & c_2s_1 \\ c_2s_3 & c_2c_3 & -s_2 \\ c_1s_2s_3-c_3s_1 & c_1c_3s_2+s_1s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
$Y_1Z_2Y_3=\begin{bmatrix} c_1c_2c_3-s_1s_3 & -c_1s_2 & c_3s_1+c_1c_2s_3 \\ c_3s_2 & c_2 & s_2s_3 \\ -c_1s_3-c_2c_3s_1 & s_1s_2 & c_1c_3-c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	$Y_1Z_2X_3=\begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1s_3-c_1c_3s_2 & c_3s_1+c_1s_2s_3 \\ s_2 & c_2c_3 & -c_2s_3 \\ -c_2s_1 & c_1s_3+c_3s_1s_2 & c_1c_3-s_1s_2s_3 \end{bmatrix}$
$Z_1Y_2Z_3=\begin{bmatrix} c_1c_2c_3-s_1s_3 & -c_3s_1-c_1c_2s_3 & c_1s_2 \\ c_1s_3+c_2c_3s_1 & c_1c_3-c_2s_1s_3 & s_1s_2 \\ -c_3s_2 & s_2s_3 & c_2 \end{bmatrix}$	$Z_1Y_2X_3=\begin{bmatrix} c_1c_2 & c_1s_2s_3-c_3s_1 & s_1s_3+c_1c_3s_2 \\ c_2s_1 & c_1c_3+s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2-c_1s_3 \\ -s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$
$Z_1X_2Z_3=\begin{bmatrix} c_1c_3-c_2s_1s_3 & -c_1s_3-c_2c_3s_1 & s_1s_2 \\ c_3s_1+c_1c_2s_3 & c_1c_2c_3-s_1s_3 & -c_1s_2 \\ s_2s_3 & c_3s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$Z_1X_2Y_3=\begin{bmatrix} c_1c_3-s_1s_2s_3 & -c_2s_1 & c_1s_3+c_3s_1s_2 \\ c_3s_1+c_1s_2s_3 & c_1c_2 & s_1s_3-c_1c_3s_2 \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 \end{bmatrix}$

1、求以手腕坐标系为参考的姿态向量

1.1 方法一（解析法）

根据 DH 参数的 A 矩阵公式，有

$$ {}^3_6T = A_4A_5A_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 & -D_6c_4s_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & -s_4s_5 & -D_6s_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & c_5 & D_4 + D_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1) $$

且已知${}^0_6T = A_1A_2A_3A_4A_5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$以及$q_1q_2q_3$，可先求得$A_1A_2A_3$

再计算

$$ {}^3_6T = (A_1A_2A_3)^{-1}\left({}^0_6T\right) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) $$

可利用旋转矩阵是正交单位阵的特性，它的逆阵等于它的转置，有

$$ R^T = (R^{-1}) $$

即

$$ (A_1A_2A_3)^{-1} = (A_1A_2A_3)^T $$

（1）和（2）建立等式，有

$$ \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 & -D_6c_4s_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & -s_4s_5 & -D_6s_4s_5 \\ c_6s_5 & -s_5s_6 & c_5 & D_4 + D_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

利用齐次矩阵中位置分量相等的代数方法，可求得

$$ q_4 = \tan^{-1}\frac{m_{23}}{m_{13}} $$

$$ s_5 = \pm\sqrt{m_{13}^2 + m_{23}^2} $$

$$ q_5 = \tan^{-1}\frac{s_5}{c_5} = \tan^{-1}\left(\frac{\pm\sqrt{m_{13}^2 + m_{23}^2}}{m_{33}}\right) $$

$$ q_6 = \tan^{-1}\left(\frac{-m_{32}}{m_{31}}\right) $$

若出现$m_{33} - 1 = 0$，即在奇异点处，$q_5 = 0$，$c_5 = 1$，则

$$ \begin{bmatrix} c_{46} & -s_{46} & 0 & 0 \\ s_{46} & c_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ m_{21} = \sin(q_4 + q_6) $$

$$m_{11} = \cos(q_4 + q_6)$$

有

$$q_4 + q_6 = \tan^{-1}\left(\frac{m_{21}}{m_{11}}\right) + k\pi \quad (k \in Z)$$

求得结果，代入检验，取 $k = 1$，故

$$q_4 + q_6 = \tan^{-1}\left(\frac{m_{21}}{m_{11}}\right) + \pi$$

按各轴的权重，优先移动小轴的原则，故

$$q_4 = q_{4\_}actual$$

$$q_5 = 0$$

$$q_6 = \tan^{-1}\left(\frac{m_{21}}{m_{11}}\right) + \pi - q_4$$

至此，八组解求解完毕。

1.2 常用公式

	Equations	Solutions
1	$a\sin\theta + b\cos\theta = c$	$\theta = A\tan2(a,b) \mp A\tan2\left(\sqrt{a^2+b^2-c^2},\ c\right)$
2	$a\sin\theta + b\cos\theta = 0$	$\theta = A\tan2(-b\ ,\ a)$ or $\theta = A\tan2(b\ ,-a)$
3	$\cos\theta = a$ and $\sin\theta = b$	$\theta = A\tan2(b,\ a)$
4	$\cos\theta = a$	$\theta = A\tan2\left(\mp\sqrt{1-a^2}\ ,\ a\right)$
5	$\sin\theta = a$	$\theta = A\tan2\left(a,\ \mp\sqrt{1-a^2}\right)$

Table 2. Some trigonometric equations and solutions used in inverse kinematics

1.3 结果验证

上面的结果是利用反三角函数求出，由于反三角函数的周期性，周期是π或是 2π，故存在多解，需要把求得的解依次组合后，分别代入上面原等式，如果等式成立，则解的组合合法，反之剔除。接着继续检验各关节角度是否超过限位。经验证后，在反手 lefty 形态下，可得如下解的组合：

不翻转 Non-Flip 的解为

$$q_{41} = \pi + q_4$$

$$q_{51} = |q_5|$$

$$q_{61} = \pi + q_6$$

翻转 Flip 的解为

$$q_{42} = q_4$$

$$q_{52} = -|q_5|$$

$$q_{62} = q_6$$

如果是正手形态 righty 形态，解的形式全部对调。

注意两点：

1、$s_5 = 0$ 时，机械系统处于奇异点位形，需要特殊处理；

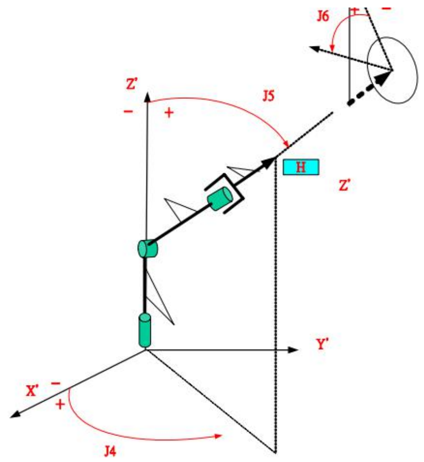
2、多个解中，可以使用姿态向量的绝对距离最短原则来选取解，即路径最短原则选取最优解；

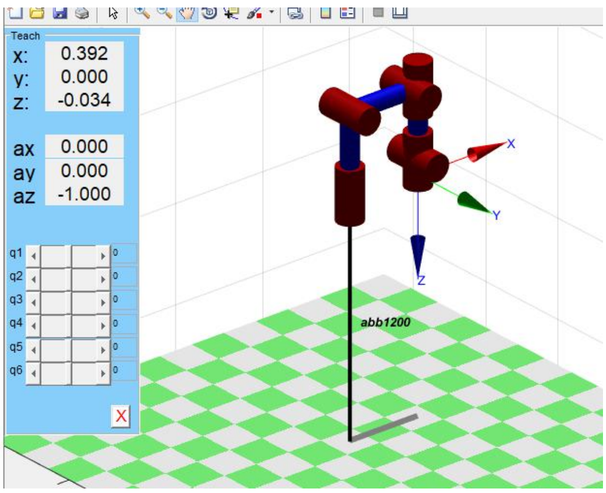
1.4 方法二（几何法）

在维基百科可以查到 ZYZ 顺规的欧拉角旋转矩阵如下：

$$Z_4Y_5Z_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & c_4s_5 \\ c_4s_6 + c_5c_6s_4 & c_4c_6 - c_5s_4s_6 & s_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

该矩阵仅考虑三个角度的旋转，不考虑扭角，它与 TCP 目标位姿的齐次矩阵元素基本相同，但是个别元素的符号有差异，估计是 DH 参数的扭角 a 引起；根据旋转矩阵逆的几何含义，旋转矩阵的逆阵可以把新向量转回原来的向量。





说明：首先使用$(A_1A_2A_3)^{-1}$方法，求解在实际腕关节坐标系下的目标姿态矩阵，腕关节坐标应该是如右上图所示，即参考系为（xw,yw,zw）=（x,-y,-z），z 轴和 y 轴方向与基座坐标系的方向相反，原因是 DH 参数扭角的存在；

再者，假设把目标姿态矩阵，按如下规则进行旋转，先绕基座坐标系 Z 轴，反向旋转q_1角度，因为是左乘，接着绕固定的基座坐标系 y 轴，反向旋转第二轴和第三轴的关节角度总和$q_2 + q_3$，此时，新的腕关节坐标与基座坐标系方向相同。

综上，按如下方法得到的旋转矩阵，就是目标姿态相对于新的腕关节坐标（*xw',yw',zw'*）=（x,y,z）的旋转矩阵，相当于实际腕关节坐标系绕 X 轴旋转了 180 度；

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 & -D_6c_4s_5 \\ -c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_5s_4s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & D_6s_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & -c_5 & -D_4 - D_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = Rot(y, -q2-q3) * Rot(z, -q1) * \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_6s_4 - c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ -c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_5s_4s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 \\ -c_6s_5 & s_5s_6 & -c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \tan^{-1}\left(\frac{m_{23}}{-m_{13}}\right)$$

$$s_5 = \pm\sqrt{1 - c_5^2}$$

$$q_5 = \tan^{-1}\left(\frac{s_5}{c_5}\right)$$

$$q_6 = \tan^{-1}\left(\frac{-m_{32}}{m_{31}}\right)$$

其余分析同方法一类似，主要是目标姿态旋转矩阵所参考的坐标系不同，导致使用旋转矩阵的元素符号有所差异，但在使用代数法进行求解时，结果是一样的。

五、 总结

1、在计算运动学逆解时，对于符合 pieper 准则结构的机器人，每一个目标位姿，若关节角度运动范围限制为正负 180 度时，最多有八个解析解。但是，如果有个别轴的运动范围超过 180 度，则解的个数会超过八个。

2、奇异点问题的处理，当第五轴接近 0 时，即第四轴和第六轴成一直线，自由度退化，导致逆解失败，物理现象是从 A 点移动到 B 点，距离很短，但是第四轴产生过速暴走现象。奇异点规避算法可以查询其它相关文献，例如根据操作度提前判断奇异点的产生，降速改变机器人的末端姿态，或是不降速重新规划轨迹。

2021 年 9 月 8 日星期三