Galerkin 有限元中分布积分公式的证明

李晓东[*]

[*] 中国地质大学（武汉）工程学院, 地球深部能源实验室

2021 年 6 月 15 日

1 二维泊松方程的分部积分

根据散度相关的理论，我们有：

$$\nabla \cdot (u\mathbf{V}) = u\nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla u \cdot \mathbf{V} \tag{1.0.1}$$

类似的，有：

$$\nabla \cdot (v\, c\nabla u) = \nabla \cdot (c\nabla u)\, v + c\nabla u \cdot \nabla v \tag{1.0.2}$$

根据 Gauss 公式，我们有：

$$\int_{\partial\Omega} (c\nabla u \cdot \vec{n})\, v ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v\, c\nabla u)\ dxdy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (c\nabla u)\, v\, dxdy + \int_{\Omega} c\nabla u \cdot \nabla v\, dxdy \tag{1.0.3}$$

所以有：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (c\nabla u)\, v\, dxdy = \int_{\partial\Omega} (c\nabla u \cdot \vec{n})\, v ds - \int_{\Omega} c\nabla u \cdot \nabla v\, dxdy \tag{1.0.4}$$

2 二维弹性方程的分布积分

根据散度相关理论，我们有：

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \tag{2.0.1}$$

这个公式展开之后可以得到验证

类似的，根据 Gauss 公式：

$$\int_{\partial\Omega} (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dxdy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v})\ dxdy = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v}\, dxdy + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}\, dxdy \tag{2.0.2}$$

所以有：

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v}\, dxdy = \int_{\partial\Omega} (\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dxdy - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}\, dxdy \tag{2.0.3}$$