Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

# Телекоммуникационные технологии

Лабораторная работа №1,2:
"Сигналы телекомуникационных систем.
Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция"

**Работу выполнил:**
Сергеев А.А.
Группа: 33531/2
**Преподаватель:**
Богач Н.В.

Санкт-Петербург
2019

# Содержание

# 1 Цель работы

Получить представление о спектрах телекоммуникационных сигналов.

# 2 Постановка задачи

1. Для сигналов, построенных в лабораторной работе № 1, выполните расчет преобразования Фурье. Перечислите свойства преобразования Фурье.
2. С помощью функции корреляции найдите позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получите пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислите корреляцию прямым методом, воспользуйтесь алгоритмом быстрой корреляции, сравните время работы обоих алгоритмов.
3. Быстрая корреляция

# 3 Теоретический раздел

## 3.1 Сигнал. Виды сигналов

Сигнал – это функция, несущая сообщение (данные) о физических свойствах, состоянии или поведении какой-либо физической системы, объекта или среды.
Спектр сигнала – это результат разложения сигнала на более простые в базисе ортогональных функций. В качестве разложения обычно используются преобразование Фурье и другие.
Виды сигналов:

1. Аналоговый сигнал
2. Дискретный сигнал
3. Цифровой сигнал

Сигналы можно классифицировать:

1. По точности:
    - детерминированные: сигнал полностью известен
    - случайные: в любой момент времени сигнал представляет собой случайную величину
2. Сигнал с интегрируемым квадратом $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt < \infty$
3. По периодичности:
    - сигналы с периодом T
    - непериодичные
4. Сигналы конечной длительности (отличны от нуля только на ограниченном промежутке времени)
5. Тестовые:
    - гармонические: $s(t) = A\cos{(\omega t + \phi)}$
    - функция Дирака: дельта-функция $\delta(t)$
    - функция Хевисайда: функция единичного скачка $\sigma(t)$

Анализ – это один из ключевых компонентов обработки сигналов. Основной целью анализа определяют сравнение сигналов друг с другом для определения их сходств и различий.
Выделяют три основные составляющие анализа сигналов:

1. измерение числовых параметров сигналов
2. разложение сигнала на элементарные составляющие
3. количественное измерение степени «похожести» различных сигналов

### 3.2 Ряд Фурье. Преобразование Фурье

Ряд Фурье — представление произвольной функции $f$ с периодом $\tau$ в виде ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{\tau} x + \theta_k\right)$$

. Этот ряд может быть также записан в виде $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{f}_k e^{i2\pi\frac{k}{\tau}x}$,
где $A_k$ – амплитуда $k$-го гармонического колебания,
$2\pi\frac{k}{\tau} = k\omega$ – круговая частота гармонического колебания,
$\theta_k$ – начальная фаза $k$-го колебания,
$\widehat{f}_k$ – $k$-я комплексная амплитуда.
Разложение функции в ряд Фурье является мощным инструментом при решении самых разных задач благодаря тому, что ряд Фурье прозрачным образом ведёт себя при дифференцировании, интегрировании, сдвиге функции по аргументу и свёртке функций.
Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in L_2([-\pi, \pi])$ называют функциональный ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$,
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$,
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$,
числа $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, ...)$ называются коэффициентами Фурье функции $f$.
Определим прямое и обратное преобразование Фурье:
прямое $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2x\pi i}dx$
обратное $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{2x\pi i}d\omega$
С помощью обратного преобразования можно получить изначальный сигнал, то есть до и после – взаимозаменяемы и несут одну и ту же информацию. Однако потеря участка начального сигнала во времени может внести сильные изменения в спектр, в то время как потеря информации о некоторых частотах может быть не так значительна.

### 3.3 Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим сигналы: $f(t)$ и $g(t)$. Их спектральные функции: $\dot{F}(\omega)$ и $\dot{G}(\omega)$ соответственно.

- Линейность: линейная комбинация преобразованных равна результату преобразования линейных комбинаций. Если $s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, то $\dot{S}(\omega) = \alpha\dot{F}(t) + \beta\dot{G}(t)$

- Задержка сигнала: можно двигать сигнал по оси времени, это изменит его фазовый спектр на известную величину $\tau$.
  Если $s(t) = f(t-\tau)$, то $\dot{S}(\omega) = \dot{F}(\omega)e^{-j\omega\tau}$.

- Масштабирование: спектр исходной функции изменяется в ширине обратно пропорционально сигналу.
  Если $s(t) = f(\alpha t)$,то $\dot{S}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\dot{F}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$.

- Спектр свертки: произведение спектров может сказать о том, как система воздействует на сигнал.

  $$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(\omega)\dot{G}(\omega)$$

- Умножение сигнала на гармоническую функцию: в итоге имеем слагаемые уменьшенной амплитуды, разнесенных на частоту гармоники в разные стороны от начального спектра. Если мы хотим отрезать какую-то часть частот, это удобно использовать.
  $s(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \phi_0)$

- Спектр сигнала: в радиотехнике это результат разложения сигнала на более простые в базисе ортогональных функций. В качестве разложения обычно используем преобразование Фурье.
  $\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2}e^{i\phi_0}\dot{F}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-i\phi_0}\dot{F}(\omega + \omega_0)$

## 3.4 Корреляция сигналов

Корреляция применяется для измерения степени схожести двух сигналов. Взаимная корреляция:

$$r_{12}(i) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)x_1(n+i)$$

где $n$ – временные отсчеты, $i$ – задержка (число отсчетов, на которые сигнал $x_2$ отстает от сигнала $x_1$). Для непрерывных сигналов с периодом $T$ функция взаимной корреляции определяется следующим образом:

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)x_2(\tau+t)dt$$

Для сигналов конечной длительности:

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(\tau+t)dt$$

Теорема о корреляции:

$$r_{12} = \frac{1}{N}F_D^{-1}[\overline{X}_1(k)X_2(k)]$$

где $X_1(k) = F_D[x_1(n)]$, $X_2(k) = F_D[x_2(n)]$, $F_D$ и $F_D^{-1}$ – прямое и обратное ДПФ, которые вычисляются с использованием алгоритма БПФ.
Если число элементов в последовательностях $x_1(n)$ и $x_2(n)$ достаточно велико, то быстрой корреляцией ответ будет получен быстрее, чем при расчете с помощью взаимной корреляции.

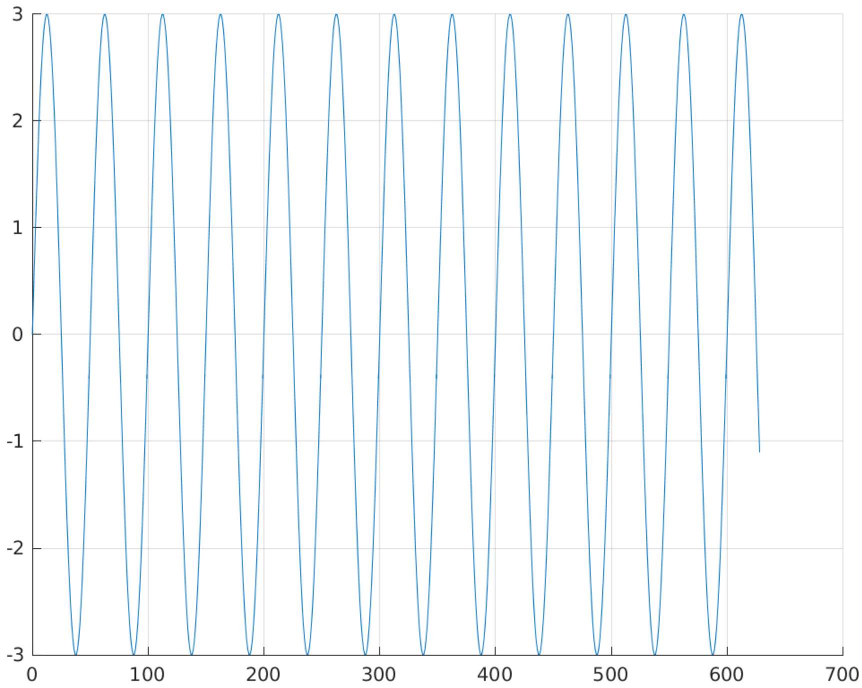
# 4 Ход работы

## 4.1 Сигналы и их спектры

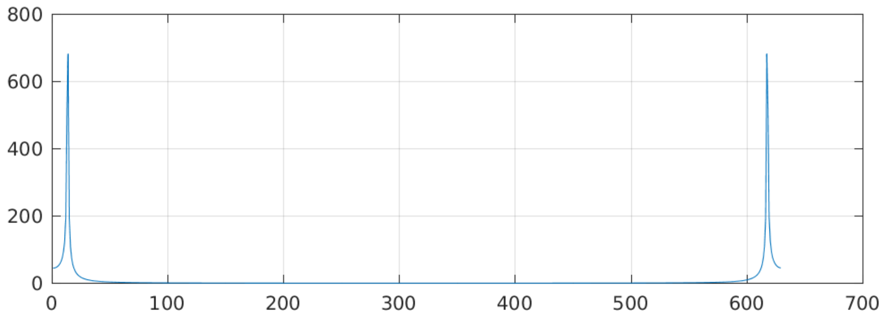
### 4.1.1 Синусоидальный сигнал. Спектр синусоидального сигнала

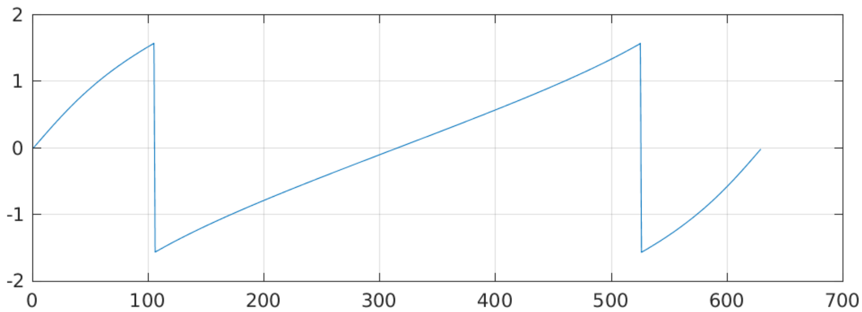
```
function sin_sig
    global amplitude frequency time fs tau
    %инусоидальныйс сигнал
    y = amplitude * sin(2 * pi * frequency * time);
    draw_img(time * fs, y)

    %спектр синусоидального сигнала
    sp = abs(fft(y));
    fplot = 0:1/tau:fs;
    draw_img(fplot, sp)
    draw_spectrums(time, y)
end
```

Синусоидальный сигнал




Спектр синусоидального сигнала

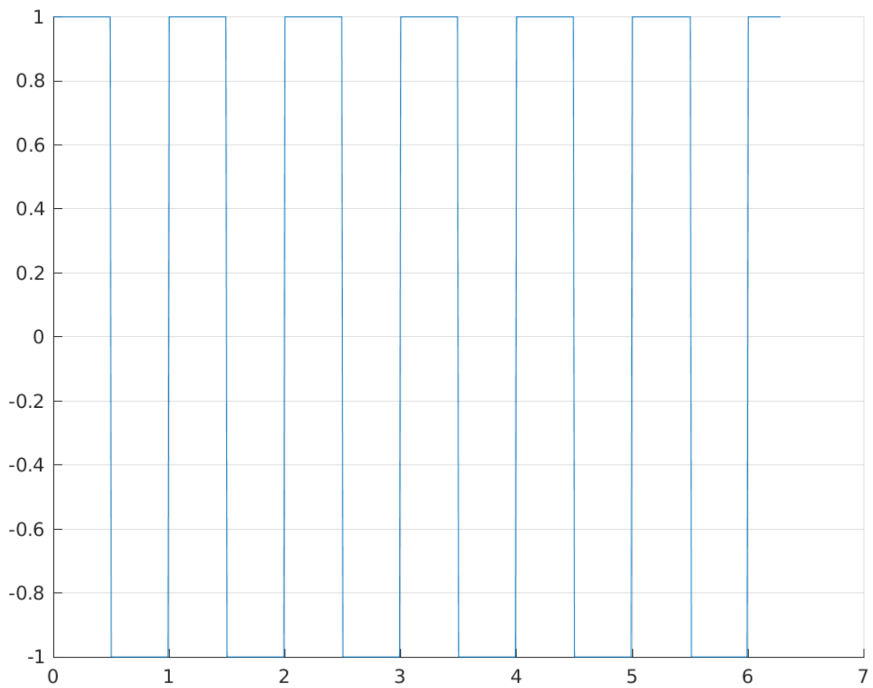


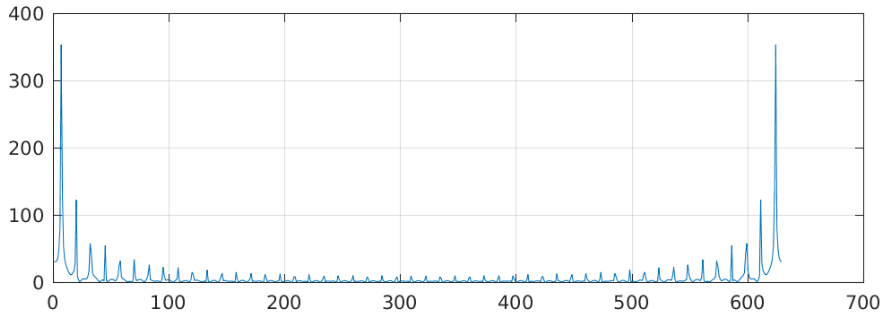
### 4.1.2 Прямоугольный сигнал. Спектр прямоугольного сигнала

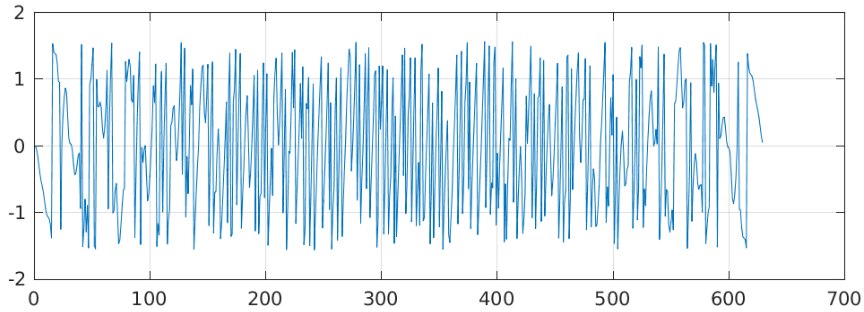
```
function square_sig
    global amplitude frequency time fs tau

    %прямоугольный сигнал
    duty = 50;
    amp = 1;
    x = amp*square(2*pi*time, duty);
    draw_img(time,x);

    %спектр прямоугольного сигнала
    sp = abs(fft(x));
    draw_img(time, sp);
    draw_spectrums(time, x)
end
```

Прямоугольный сигнал




Спектр прямоугольного сигнала

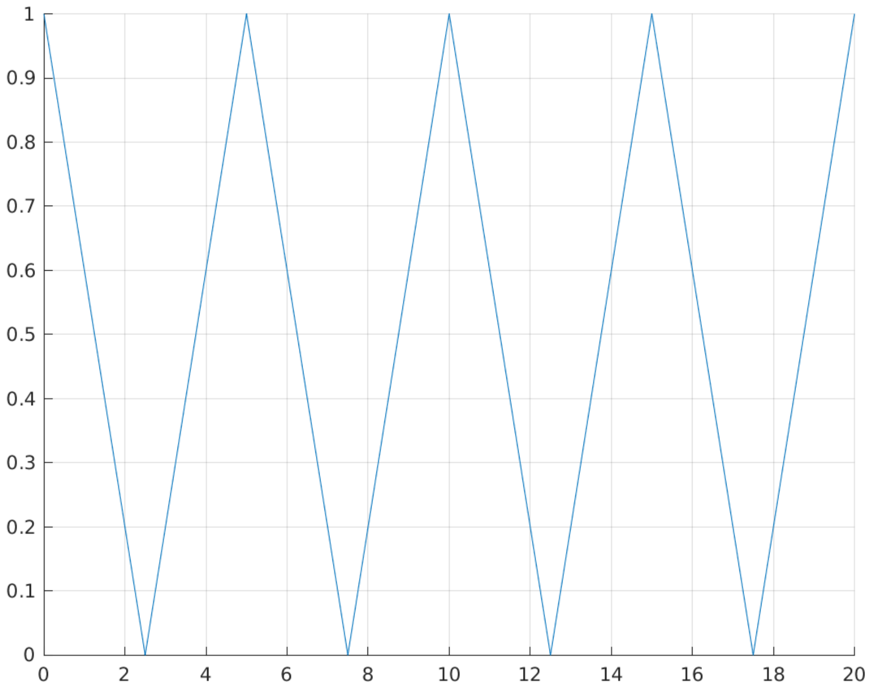


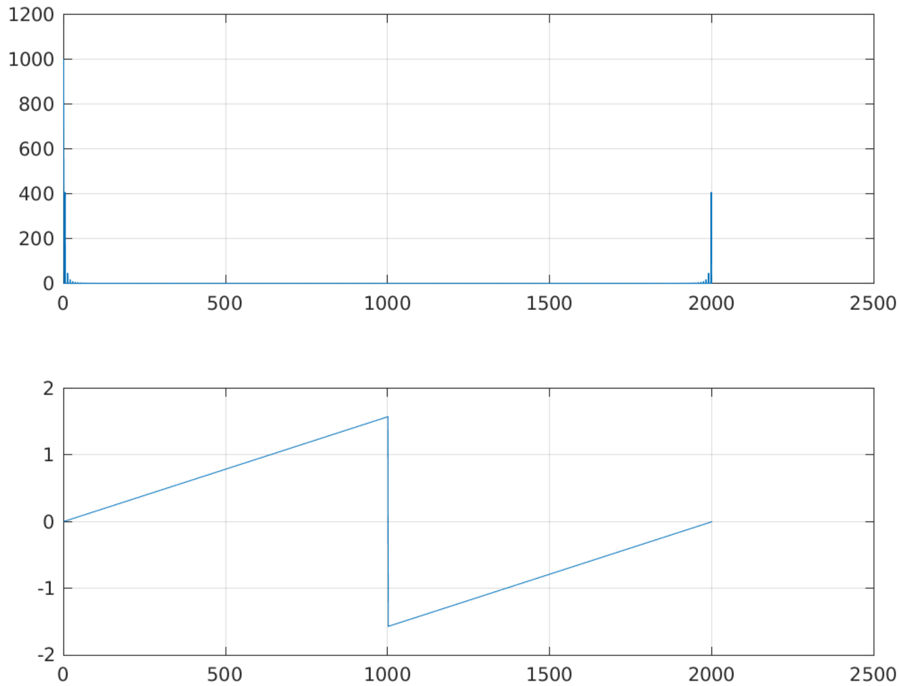

### 4.1.3 Треугольный сигнал. Спектр треугольного сигнала

```
function triangle_sig
    global amplitude frequency time fs tau

    %треугольный сигнал
    tau   = 5;
    T     = tau ;
    N     = 5;
    d     = (0:(N-1)) * T;
    fs    = 1/100;
    time  = 0:fs:(N-1)*T; %время
    A     = 1;
    s     = A * pulstran(time, d, 'tripuls', tau);
    draw_img(time,s);
    sp1   = fft(s,2500);

    %спектр треугольного сигнала
    draw_img(abs(sp1));
    draw_spectrums(time,s);
end
```

Треугольный сигнал




Спектр треугольного сигнала



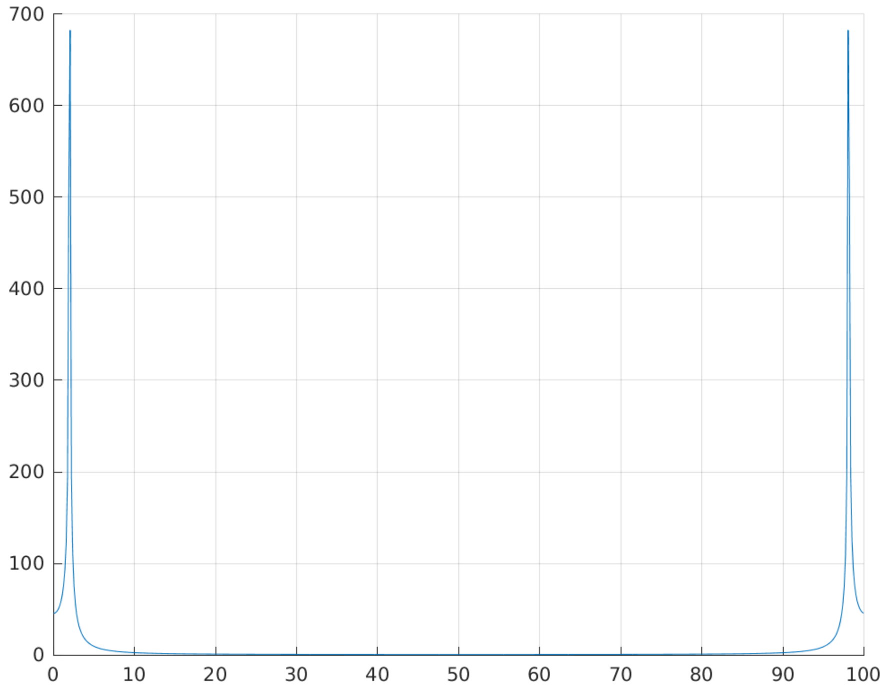

## 4.2 Преобразования Фурье для сигналов

Зададим различные сигналы так же, как делали это в лабораторной работе 1. Затем посмотрим их спектры. Формирование сигналов происходит по тому же принципу что в лабораторной работе 1. Затем получим преобразование Фурье для всех заданных сигналов и построим графики самих функций, амплитудные спектры и фазовые:

```
function [ ] = draw_spectrums(t, sig)
    temp_figure = figure;
    hold on
        %% Signal
        Fs = 8e3 ;
        FN = 2^nextpow2(length(t));
        %% Spectrum
        spc = fft(sig) ;
        subplot(2, 1, 1) ;
        %% Amplitude spectrum
        plot(abs(spc));
        grid
        subplot(2, 1, 2);
        %% Phase spectrum
        plot(atan(imag(spc)./real(spc)));
        grid
    hold off
    print_figure(temp_figure);
end
```

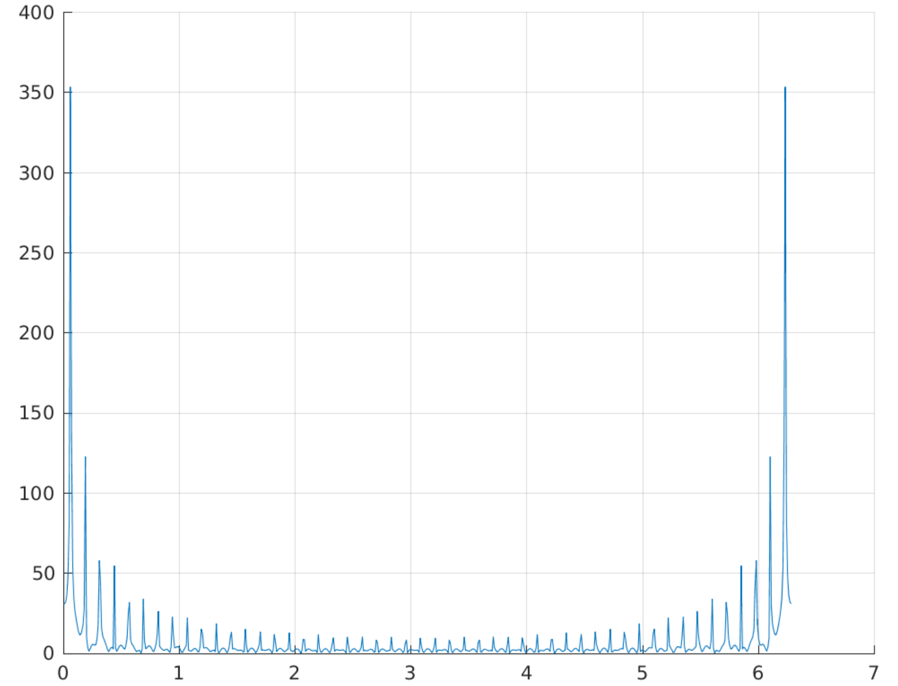
### 4.2.1 Синусоидальный сигнал

Амплитудный и фазовый спектры синусоидального сигнала:



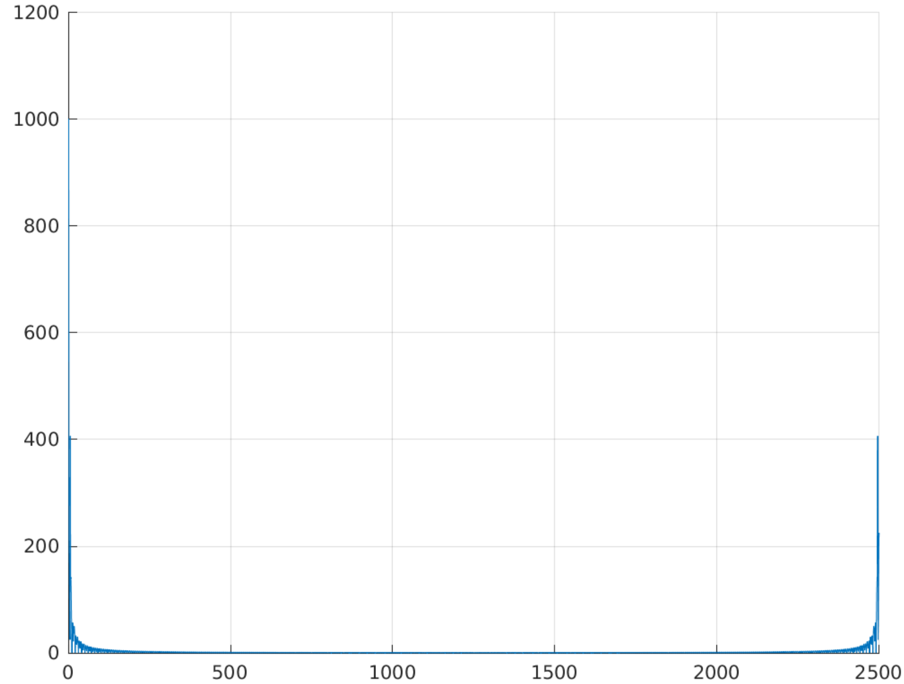
### 4.2.2 Прямоугольный сигнал

Амплитудный и фазовый спектры прямоугольного сигнала:




### 4.2.3 Треугольный сигнал

Амплитудный и фазовый спектры треугольного сигнала:



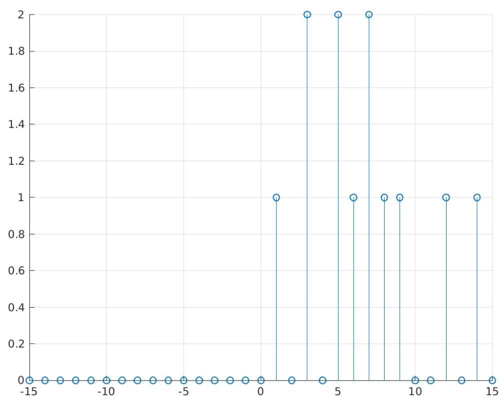
## 4.3 Корреляция прямым методом и быстрая корреляция

Сравним время вычисления с помощью обычной корреляции ($xcorr$) и быстрой корреляции (см. формулу в теор. разделе).

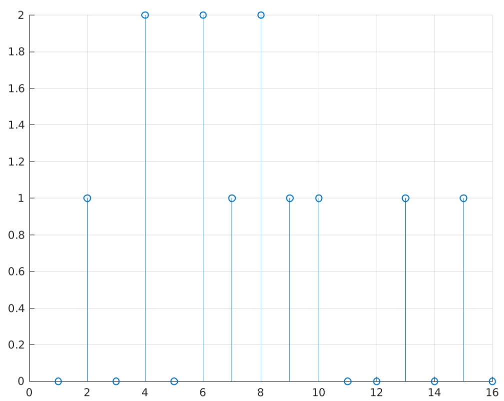
```
function normal_correlation
    global signal sin_signal;
    tic;
    [cross, lags] = xcorr(signal, sin_signal);
    time = toc;

    draw_stem(lags, cross);
    disp('Normal correlation: ');
    disp(time);
end
```

```
function fast_correlation
    global signal sin_signal;
    tic;
    fast_corr = ifft(fft(signal).*conj(fft(sin_signal, length(signal))));
    time = toc;

    draw_stem(fast_corr);
    disp('Fast correlation: ');
    disp(time);
end
```

Обычная корреляция:




Быстрая корреляция:




Время вычисления обычной корреляции 0.2245, быстрой – 0.0069.

# 5 Вывод

В результате работы , были промоделированы синусоидальный, прямоугольный и треугольный сигналы В зависимости от известных параметров и требований сигналы подразделяются на группы:

1. Если сигнал известен полностью, то он является детерминированным.

2. Если в любой момент времени сигнал представляет собой случайную величину, то он называется случайным.

3. Сигналы, у которых есть период, являются периодическими.

Преобразование Фурье нашло широкое применение в телекоммуникационных технологиях. При исследовании сигналов его использование позволяет совершать переход из временной области в частотную и наоборот. Рассматривая сигналы во времени, мы не всегда можем определить все необходимые нам их характеристики. В то время как их частотное представление позволяет идентифицировать недостающий ряд параметров.
Так же были исследованы функции корреляции прямым и быстрым методами, и была найдена позиция синхропосылки в сигнале.