工科高等代数期中考试参考答案(2018.11.17)

一、选择题

1. C　2.A　3.B　4.B　5.D　6.A　7.D　8.C　9.B　10. A

二、填空题

1. --2；　2.　22.5；　3.　$\alpha=\frac{1}{3}\pi$；　4. $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=-2+t\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=t\end{cases}$；　5.$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

三、证明：令 D 为 BC 边的中点，则$\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{DC}$。由重心定理知道 $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OD}$。同时又有$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}$和$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$。于是我们就有等式$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}=0$。

四、解：（方法一）将直线 L_1,L_2 的方程化为参数方程

$$L_1:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t-1\end{cases},\quad L_2:\begin{cases}x=t\\y=3t-4\\z=2t-1\end{cases}$$

设 L 与它们的交点分别为$M_1(t_1,2t_1,t_1-1),M_2(t_2,3t_2-4,2t_2-1)$，则$A,M_1,M_2$三点共线。由于$\overrightarrow{AM_1}\,/\!/\,\overrightarrow{AM_2}$，有$\frac{t_1-1}{t_2-1}=\frac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1}=\frac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}$，解得$t_1=0,t_2=2$。于是 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$=(1,1,2)。从而得到 L 的方程为L:$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$。

（方法二）用如下方法求 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$。令 $\boldsymbol{n}_1$ 为过 L_1 与 A 的平面的法向量，$\boldsymbol{n}_2$ 为过 L_2 与 A 的平面的法向量。令 t=0，分别得到 L_1 与 L_2 上的点 M_1(0,0,-1), M_2(0,-4,-1)，则有 $\boldsymbol{n}_1$=(1,1,2)×(1,2,1)=(-3,1,1)，$\boldsymbol{n}_2$=(1,5,2)×(1,3,2)=(4,0,-2)。显然 $\boldsymbol{s}$ 平行于 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$=(-2,-2,-4)，取 $\boldsymbol{s}$=(1,1,2)即可。

五、解：过直线 L 的平面束方程为：$(2+\lambda)x+\lambda y-(1+\lambda)z+5\lambda=0$，其法向量为$(2+\lambda, \lambda, -1-\lambda)$。已知平面的法向量为(7,-1,4)。依题意有 $7(2+\lambda)-\lambda-4(1+\lambda)=0$，得 $\lambda=-5$.于是所求方程为

$3x+5y-4z+25=0$。

六、解：L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$=(3,2,-2)和 $\boldsymbol{s}_2$=(6,-2,-1)。过 L_1 且平行于 L_2 的平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\ \boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$=(-6,-9,-18)，所以该平面为 Π：$2(x+5)+3(y+5)+6(z-1)=0$。取 L_2 上一点 A(3,2,3)，则两直线的距离 d 等于 A 到 Π 的距离。所以 $d=\frac{|2(3+5)+3(2+5)+6(3-1)|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=7$。

七、解：对未知数重新编号，使得方程组的增广矩阵成为如下矩阵并做初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&a&1&4\\1&1&b&3\\1&1&2b&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&b&3\\1&a&1&4\\1&1&2b&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&b&3\\0&a-1&1-b&1\\0&0&b&1\end{pmatrix}$$

因此，方程组有唯一解当且仅当 a-1≠0 且 b≠0。

由上述矩阵知道，当 b=0 时方程组无解；当 a=1 时，增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&1&b&3\\1&1&2b&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&b&3\\0&0&1-b&1\\0&0&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&b&3\\0&0&1&2\\0&0&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&b&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1-2b\end{pmatrix}$$

因此 $a=1$，$b\neq\frac{1}{2}$方程也无解。

而当 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$方程组有无穷多组解。此时原方程组的增广矩阵可通过初等行变换变为

$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，进而得到通解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$。