

一. 选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $m < n$ 是齐线性方程组 $AX=0$ 有非零解的()
A. 充分条件; B. 等价条件; C. 充要条件; D. 必要条件
2. 矩阵 A 经过初等行变换变成 B , 则方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ ()
A. 都有非零解 B. 必有相同解; C. 解集不相同; D. 解集不确定
3. 若向量 $b \neq 0$, 向量 a 在 b 上的投影(数) a_b 为 ()
A. $a_b = \frac{a \cdot b}{|a|}$; B. $a_b = a \cdot b$; C. $a_b = \frac{a \cdot b}{|b|}$; D. $a_b = |b| \cos \theta$
4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ ()
A. $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; B. $|\vec{a}||\vec{b}|$; C. $2|\vec{a}||\vec{b}|$; D. 0
5. 设 $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a} + t\vec{b} \perp \vec{a} - t\vec{b}$, 则常数 $t =$ ()
A. ± 2 ; B. ± 4 ; C. 1; D. 4
6. 向量 $b = (4, -3, 4)$ 在 $a = (2, 2, 1)$ 上的投影(数)为 ()
A. 4; B. 2; C. -2; D. -4
7. 已知 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ ()
A. 4; B. 7; C. -7; D. -4
8. 两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角余弦为 ()
A. 0.2; B. 0.4; C. -0.1; D. 0.5
9. 点 $A(3, 2, 3)$ 到平面 $2(x+5) + 3(y+5) + 6(z-1) = 0$ 的距离 $d =$ ()
A. 7; B. 6; C. 5; D. 3
10. 设 $a \times b + b \times c + c \times a = 0$, 则 $(a \times b) \cdot c =$ ()
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3

二.填空题 (共 20 分, 每小题 4 分).

1. 向量 $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (6, 4, 11)$ 的混合积 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$ _____

2. 设 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 正交, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + 2|\vec{a} \times \vec{b}| - (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 =$ _____

3. 将 xOy 面上双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转的旋转面方程是 _____

4. 方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 的通解为 _____

5. 设 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, $abc \neq 0$, 则三角形 $\triangle ABC$ 面积为 _____

三.计算题 (共 15 分).

1. 设非零向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 互相垂直, 且 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, 求系数 x, y, z

2. 设 $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}$ 互相正交, 且 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$, 令 $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

(1) 求模长 $|\vec{s}|$, (2) 求 \vec{s} 与 \vec{c} 的夹角 θ

3. 设 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, $abc \neq 0$. (1) 求平面 ABC 的方程; (2) 求原点到平面 ABC 的距离

四.计算题 (共 12 分).

1. $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (1, -1, 1), \vec{c} = (6, 4, 11)$, 求 x, y 使 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

2. 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影直线

五.(8 分)求两条异面直线 $L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{1}$ 和 $L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{2}$ 的距离 d

四.计算题 (共 12 分).

1. $\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (1, -1, 1), \vec{c} = (6, 4, 11)$, 求 x, y 使 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

2. 求直线 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影直线

五.(8 分)求两条异面直线 $L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{1}$ 和 $L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{2}$ 的距离 d

六.(7分) 设 M_1 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任一点, 且直线的方向向量为 \vec{s} .

证明: 点 M_1 到直线 L 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{M_1M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$.

七. (8 分) 讨论 b 取何值时方程组有解, 并求通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + bx_4 = 1 \\ x_1 + bx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$