

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 下列关于向量的运算不正确的是_____。

A. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; \checkmark$

B. $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2; \checkmark$

C. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]; \checkmark$

D. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}. \times$

2. 已知线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a =$ _____。

A. -1; B. 0; C. 1; D. 2.

3. 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 方程组 $Ax=b$ 有解, 则_____。A. $Ax=b$ 有唯一解时, $m=n$;B. $Ax=b$ 有唯一解时, A 的列向量线性无关;C. $Ax=b$ 有无穷多解时, $Ax=0$ 只有零解;D. $Ax=b$ 有无穷多解时, A 的列向量线性无关.4. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 - x_3 = 2a \\ x_3 - x_4 = 3a \\ x_4 - x_1 = 1 \end{cases}$ 有解的充分必要条件是 $a =$ _____。

A. -1; B. 1; C. $-\frac{1}{6}$; D. $\frac{1}{6}$.

5. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=19, |\vec{a}+\vec{b}|=24$, 则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$ _____。

A. 5; B. 6; C. 9; D. 22.

6. 设点 O 是 A, B, C 三点所确定的平面外一点, 则点 D 与 A, B, C 共面的充分必要条件是_____。

A. $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$, 其中 $\lambda + \mu + \nu = 0$;

B. $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$, 其中 $\lambda + \mu + \nu = 1$;

C. $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$, 其中 $\lambda + \mu + \nu = 2$;

D. $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$, 其中 $\lambda + \mu + \nu = 3$.

7. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, 则当 $\lambda =$ _____时两个向量 $\vec{a} + \lambda \vec{b}, \vec{a} - \lambda \vec{b}$ 互相垂直。

A. 0; B. $\pm \frac{1}{5}$; C. $\pm \frac{3}{5}$; D. ± 1 .

8. 已知点 D 与 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC 和 CA 上, 且 $BD = \frac{1}{3}BC, CE = \frac{1}{3}CA$, AD 与 BE 相交于 G , 则以下关系式正确的是_____。

A. $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$; B. $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AG}$; ~~C. $\overrightarrow{GE} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BE}$~~ D. $\overrightarrow{GE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{BE}$,

9. 已知点 $M_1(3, 4, -4), M_2(-3, 2, 4), M_3(-1, -4, 4)$ 和 $M_4(2, 3, -3)$, 则这四个点恰有_____个在以下曲线上。

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ y+z=0 \end{cases}$$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

10. 以下两个平面的位置关系为_____。

$$L_1: \begin{cases} x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad L_2: \begin{cases} 3x+y-z+13=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$$

A. 异面; B. 平行; ~~C. 相交但不重合~~ D. 重合.

二、填空题 (本题共 20 分, 每小题 4 分).

1. 已知两个点 $A(0,0,a)$ 和 $B(0,0,-a)$, 则到它们距离平方和为 $4a^2$ 的点的轨迹方程为_____。

2. 平行六面体共起点的 3 条棱分别由向量 $\vec{a} = (5,-3,2), \vec{b} = (-6,3,2), \vec{c} = (-8,6,-5)$ 构成, 则此平行六面体的体积为_____。

3. 直线 $L: \begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ 的对称式方程为_____。

4. 设四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的四个列向量线性无关且 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$, 则 $Ax = \beta$ 的解为_____。

5. 设 A 为三阶方阵, 并且 A 的列向量组的秩为 2, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组 $Ax = b$ ($b \neq 0$) 的解,

已知 $\alpha_1 + \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的通解为_____。

三、(本题 8 分)证明: 如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足等式 $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$, 则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面。

四、(本题共 10 分)求下列两条直线的公垂线方程:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{和} \quad L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}.$$

五、(本题共 10 分)证明: 两条直线

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{和} \quad L_2: \begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$$

位于同一平面上, 并求出这个平面的方程。

四、(本题共 10 分)求下列两条直线的公垂线方程：

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{和} \quad L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}.$$

五、(本题共 10 分)证明：两条直线

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{和} \quad L_2: \begin{cases} x=3t+7 \\ y=2t+2 \\ z=-2t+1 \end{cases}$$

位于同一平面上，并求出这个平面的方程。

六、(本题共 10 分)求线性方程组的通解：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

七、(本题共 12 分)设有方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = b \end{cases}$$

- 1) a, b 取何值时, 方程组有唯一解;
- 2) a, b 取何值时, 方程组无解;
- 3) a, b 取何值时, 方程组有无穷多解, 并求出通解。