内容小结

已知总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，θ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本.构造统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其观测值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作为 θ 的估计值，称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的估计量.

用样本的原点矩代替总体的原点矩，求出未知参数的估计的方法称为矩估计法，简称矩法，用矩法求出未知参数的估计量称为矩估计量.

选取使得样本出现的概率最大的值为参数的估计值，这种估计方法称为最大似然估计法，相应的估计量称为最大似然估计量.

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量，否则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有偏估计量，并称 $E(\hat{\theta})-\theta$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 的偏差或者偏.若 $E(\hat{\theta})\neq\theta$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}[E(\hat{\theta})-\theta]=0$，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近无偏估计量.

若 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均为参数 θ 的无偏估计量，$D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的估计量，若对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量或一致估计量.若 $\lim\limits_{n\to\infty}E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=0$，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的均方相合估计量.

设总体分布中含有一个未知参数 θ，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体的样本，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，若统计量 $\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间，而 $\underline{\theta},\overline{\theta}$ 分别为置信下限、置信上限.

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的样本，$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是统计量.若对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，有 $P\{\theta>\underline{\theta}\}=1-\alpha$ 或 $P\{\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$，则区间 $(\underline{\theta},+\infty)$ 或 $(-\infty,\overline{\theta})$ 称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，而 $\underline{\theta}$ 是 θ 的单侧置信下限，$\overline{\theta}$ 是 θ 的单侧置信上限.

习题 7

1. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本，试求下列总体 X 的概率分布中未知参数的矩估计量：

(1) 总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，其中 $\lambda>0$ 未知；

(2) 总体 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 未知；

(3) 总体 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^k}{(k-1)!}x^{k-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 k 是已知正整数，β 未知；

(4) 总体 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{\theta}}, & x\geqslant a,\\ 0, & x<a\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，θ,a 是未知参数；

(5) 总体 X 服从二项分布 $B(m,p)$，其中 m 已知，$0<p<1$，p 为未知参数；

2. 试求 1 题中各未知参数的最大似然估计量.

3. 总体 X 服从几何分布 $Ge(p)$，其中 $0<p<1$，p 为未知参数.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自该总体的样本，试求 p 的最大似然估计量.

4. 随机地取 8 只活塞环，测得它们的直径为(单位：mm)：74.001，74.005，74.003，74.001，74.000，73.998，74.006，74.002.试求总体均值 μ 及方差 σ^2 的矩估计值，并求样本方差 s^2.

5. 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，现从该总体中抽得容量为 6 的样本，11.3，10.6，11.7，12.2，10.3，11.1.试求参数 a,b 的矩估计值及最大似然估计值.

6. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^{\beta}x^{-\beta-1}, & x>\alpha,\\ 0, & x\leqslant\alpha\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本.

(1) 当 $\alpha=1$ 时，求 β 的矩估计量；

(2) 当 $\beta=2$ 时，求 α 的最大似然估计量.

7. 设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
概率	θ	$\theta/2$	$\theta/2$	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\dfrac{1}{2}$ 是未知参数.现从该总体中抽取样本容量为 16 的样本，对应样本值为

样本值	-1	0	1	2
频数	3	2	5	6

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

8. 设总体 X 的均值 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$ 存在，(X_1,X_2,X_3) 为来自总体 X 的样本，试验证下面三个估计量

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$$