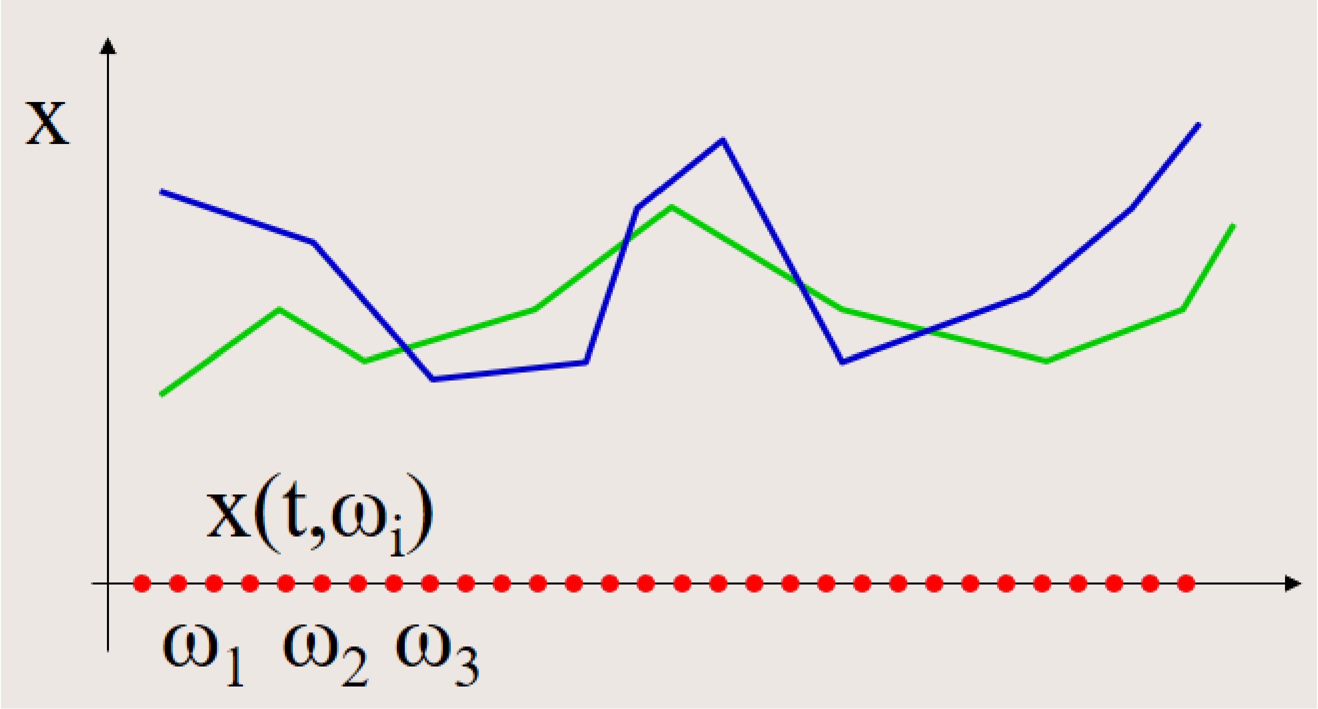
随机过程的基本概念

言浬　特聘研究员
网络空间安全学院

2025年6月

随机变量 $\omega \rightarrow x(\omega)$

随机变量族 $(t,\ \omega) \rightarrow x(t,\omega)=x(t,\ \omega)$



- **定义10.1.1 Ω样本空间，T为一给定的集合，若对每个$t\in T$，$X(t,\omega)$是定义在Ω 的随机变量，则称随机变量族$\{X(t,\omega), t\in T\}$为随机过程，简记为**

  $\{X(t), t\in T\}$或$\{X_t(\omega), t\in T\}$

- **$X(t)$的所有可能的取值的集合称为状态空间或相空间，记为S。**

- 从数学上看，随机过程$\{X(t,\omega),\ t\in T\}$是定义在$T\times\Omega$上的二元函数。

- 对固定的t，$X(t,\omega)$ 是$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量；

- 对固定的ω，$X(t,\omega)$ 是定义在T上的普通函数，称为随机过程的一个样本函数或样本轨道。

- **按参数T和状态空间S分类**

  （1）T和S都是离散的

  （2）T是连续的，S是离散的

  （3）T是离散的，S是连续的

  （4）T和S都是连续的

- **按 X_t 的概率特性分类**

  正交增量过程

  独立增量过程

  马尔可夫过程

  平稳随机过程

随机过程的概率特征

- **随机过程{X(t)，t∈T}的有限维分布函数族**
- **随机过程{X(t)，t∈T}，对于固定的t,随机变量的X(t)的分布函数**

$$F_X(x;t) = P(X(t) \leq x)$$

- **称为随机过程{X(t)，t∈T}的一维分布函数**

- **对于任意的n∈N，任意的t_i∈T,n维随机变量(X(t_1),X(t_2), …, X(t_n))的联合分布函数**

$$F_X(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=P(X(t_1)\le x_1,\dots,X(t_n)\le x_n)$$

- **全体**$\{F_X(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)，n\ge 1\}$称为**随机过程{X(t)，t∈T}的有限维分布族**

有限维分布函数族的性质

(1)对称性

$$F_X(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=F_X\left(x_{j_1},\dots,x_{j_n};t_{j_1},\dots,t_{j_n}\right)$$

其中$j_1,\dots,j_n$为1,…,n的任意排列

(2)相容性

$$F_X(x_1,\dots,x_m,+\infty,\dots,+\infty;t_1,\dots,t_m,t_{m+1},\dots,t_n)=F_X(x_1,\dots,x_m;t_1,\dots,t_m)$$

m<n

- 例10.2.1设随机过程$X(t) = te^{Y}, t > 0$其中Y服从参数为λ的指数分布，求$X(t)$的一维分布函数

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{\lambda y}, y > 0 \\ 0, y \le 0 \end{cases}$$

- 于是

$$F_{\mathrm{X}}(x;t) = P(X(t) \le x) = P\left(te^{Y} \le x\right) = P(Y \le \ln(x/t))$$

$$= F_Y\ (\ln(x/t)) = 1 - (t/x)^{\lambda}$$

$$F_{\mathrm{X}}(x;t) = \begin{cases} 1 - (t/x)^{\lambda}, x > t \\ 0, x \le t \end{cases}$$

例 11.5　设随机过程 X_T 只有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1)=k\cos t, X(t,\omega_2)=k\sin t, \quad -\infty<t<+\infty$$

其中 $k(>0)$ 为常数，$P(\omega_1)=\dfrac{1}{3}$，$P(\omega_2)=\dfrac{2}{3}$，求 X_T 的一维分布函数 $F_0(x)$ 和二维分布函数 $F_{0,\pi/2}(x_2,x_2)$.

随机过程的数字特征

设{X(t)，t∈T}是随机过程，定义

- **均值函数**

$$m_X(t) = EX(t), t \in T$$

- **方差函数**

$$D_X(t) = E[(X(t) - EX(t))^2], \quad t \in T$$

- **自协方差函数**

$$C_X(t_1, t_2) = E([X(t_1) - E(X(t_1)][X(t_2) - E(X(t_2)])$$

- **自相关函数**

$$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)X(t_2))$$

- **自相关系数函数**

$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{C_X(t_1,t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)}\sqrt{D_X(t_2)}}$$

有关系式

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2$$
$$=D(X)$$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$D_X(t)=C_X(t,t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)$$

- 例10.2.2 设随机过程$X(t) = A\cos(t), -\infty < t < +\infty$,其中A是随机变量，起分布为{1,2,3}上的均匀分布，求$X(t)$的均值函数，自相关函数及协方差函数

- 均值函数

$$
\begin{aligned}
E(X(t)) &= E(A\cos(t)) \\
&= \cos(t)EA \\
&= \cos(t)(1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}) \\
&= 2\cos(t)
\end{aligned}
$$

- 自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) \\
&= E(A\cos(t_1)A\cos(t_2)) \\
&= E(A^2)\cos(t_1)\cos(t_2) \\
&= \cos(t_1)\cos(t_2)(1\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}) \\
&= \frac{14}{3}\cos(t_1)\cos(t_2)
\end{aligned}
$$

- 协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$
$$=\frac{14}{3}\cos(t_1)\cos(t_2)-4\cos(t_1)\cos(t_2)$$

- 例10.2.3 设随机过程$X(t)=\mathrm{a}\cos(\omega_0 t+Y)$, $t\in(-\infty,+\infty)$,其中a，ω_0是大于0的常数，Y为(0,2π)上的均匀分布，求$X(t)$的均值及自相关函数

$$m_X(t)=E(\mathrm{a}\cos(\omega_0 t+Y))=\int_0^{2\pi}\mathrm{a}\cos(\omega_0 t+y)\frac{1}{2\pi}dy=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E(\mathrm{a}\cos(\omega_0 t_1+Y)\,\mathrm{a}\cos(\omega_0 t_2+Y))$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{a}^2\cos(\omega_0 t_1+y)\cos(\omega_0 t_2+y)\frac{1}{2\pi}dy$$

$$=\frac{\mathrm{a}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}1/2(\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2y)+\cos(\omega_0(t_1-t_2)))\,dy$$

$$=\frac{\mathrm{a}^2}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2))$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\&\cos(\alpha-\beta)\\&=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}}$$

例 设X(t)=Ycos(θt)+Zsin(θt), t>0, Y, Z相互独立，EY=EZ=0, DY=DZ=σ2。求{X(t), t>0}的均值函数和协方差函数。

解

$$m_X(t) = EX(t) = E[Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t)]$$

$$= \cos(\theta t)EY + \sin(\theta t)EZ = 0$$

$$C_X(s,t) = E[(X(s) - EX(s))(X(t) - EX(t))]$$

$$= E[X(s)X(t)] - EX(s)EX(t)$$

$$= E[X(s)X(t)]$$

$$= E[(Y\cos(\theta s) + Z\sin(\theta s))(Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t))]$$

$$= E[\cos(\theta s)\cos(\theta t)Y^2 + \sin\theta(s+t)YZ$$

$$+ \sin(\theta s)\sin(\theta t)Z^2]$$

$$= \cos(\theta s)\cos(\theta t)E(Y^2) + \sin\theta(s+t)E(YZ)$$

$$+ \sin(\theta s)\sin(\theta t)E(Z^2)$$

$$= \cos(\theta s)\cos(\theta t)DY + \sin(\theta s)\sin(\theta t)DZ$$

$$= \cos(\theta s)\cos(\theta t)\sigma^2 + \sin(\theta s)\sin(\theta t)\sigma^2$$

$$= \sigma^2\cos[(s-t)\theta]$$

设{X(t)，t∈T}，{Y(t)，t∈T}是两个随机过程，二阶矩函数存在，定义

- 二阶矩过程　**一、二阶矩函数存在**

$$E[X^2(t)] < +\infty$$

- 互协方差函数

$$C_{XY}(s,t) = E[(X(s) - EX(s))(Y(t) - EY(t))]$$

$$s,t \in T$$

- 互相关函数

$$R_{XY}(s,t) = E[X(s)Y(t)], \quad s,t \in T$$

有关系式

$$C_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - m_X(s)m_Y(t), \quad s,t \in T$$

例 设$X(t)=Y+Zt,\ t>0$，$Y, Z \overset{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ 求$\{X(t), t>0\}$的一、二维概率密度族。

解 因Y, Z为正态随机变量，则其线性组合X(t)也是正态随机变量，且$X \sim N(0, 1+t^2)$

$$m_X(t)=E(Y+Zt)=EY+tEZ=0$$

$$D_X(t)=D(Y+Zt)=DY+t^2DZ=1+t^2$$

$$C_X(s,t)=E\big(X(s)X(t)\big)-m_X(s)m_X(t)=E[(Y+Zs)(Y+Zt)]$$

$$=E[Y^2+ZYs+YZt+Z^2st]$$

$$=1+st$$

$$\rho_X(s,t)=\frac{C_X(s,t)}{\sqrt{D_X(s)}\sqrt{D_X(t)}}=\frac{1+st}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}$$

随机过程{*X*(*t*), *t* >0}的一维概率密度

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right\},\ t>0$$

随机过程{$X(t)$, $t>0$}的二维概率密度

$$f_{s,t}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)(1-\rho^2)}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+s^2}-2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}+\frac{x_2^2}{1+t^2}\right]\right\}$$

$$s,t>0$$

例 设$X(t)=g_1(t+\varepsilon)$,$Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$,
$g_1(t)$,$g_2(t)$是周期为L的函数,ε~$U(0, L)$
求互相关函数$R_{XY}(t, t+\tau)$。

解
$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$=E[g_1(t+\varepsilon)g_2(t+\tau+\varepsilon)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)f_\varepsilon(x)dx$$
$$=\frac{1}{L}\int_0^L g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{t}^{t+L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_{t}^{L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv + \int_{L}^{t+L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_{t}^{L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv\right.$$

$$\left. + \int_{0}^{t} g_1(v+L)g_2(v+L+\tau)dv\right]$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv = R_{XY}(\tau)$$

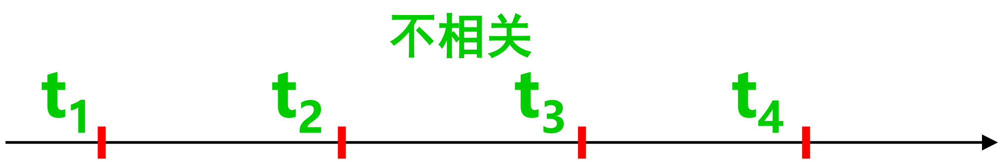
几个重要的随机过程

- 设有随机过程$\{X(t), t\in T\}$，若对任意的$t\in T$，$X(t)$的均值和方差都存在，则称$\{X(t), t\in T\}$为二阶矩过程

- 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，对任意正整数n和$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$，（$X(t_1)$，$X(t_2)$，…，$X(t_n)$）是n维正态分布随机变量，则称$\{X(t), t\in T\}$是正态过程或高斯过程。

几种重要的随机过程

- 设{X(t)，t $\in$T}是随机过程，且EX(t)=0, $EX^2(t)<+\infty$，若对任意的$t_1< t_2 \le t_3 < t_4\in T$, 有$E[(X(t_2)-X(t_1))(X(t_4)-X(t_3))]=0$，则称{X(t)，t $\in$T }为正交增量过程。



定理：若{X_t，t$\in$T}是正交增量过程，X(0)=0则

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X^2(\min(s,t))$$

- 设{$X(t)$，$t \in T$}是随机过程，对任意正整数n和$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$, 随机变量$X(t_2)-X(t_1)$，$X(t_3)-X(t_2)$, …, $X(t_n)-X(t_{n-1})$是相互独立的，则称{$X(t)$，$t \in T$ }是独立增量过程或可加过程。

- **定理：若{X_t，$t\in T$}是独立增量过程，且$EX(t)=0$，$EX^2(t)<+\infty$，则{X_t，$t\in T$ }是正交增量过程。**

- 设$\{X(t), t\in T\}$是独立增量过程，若任意$s<t$，随机变量$X(t)-X(s)$的分布仅依赖于$t-s$，则称$\{X(t), t\in T\}$是平稳独立增量过程。

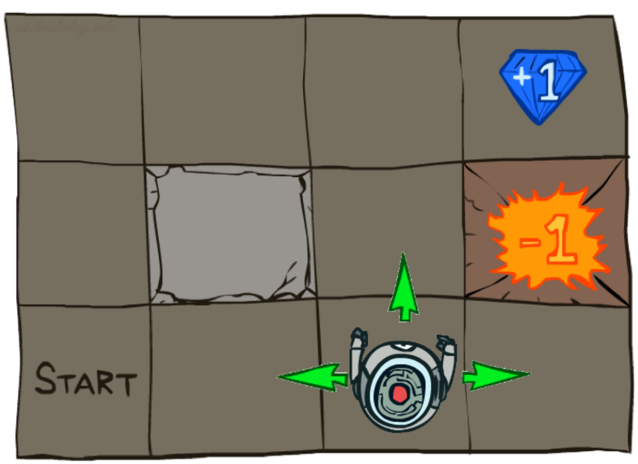
维纳过程和泊松过程是平稳独立增量过程

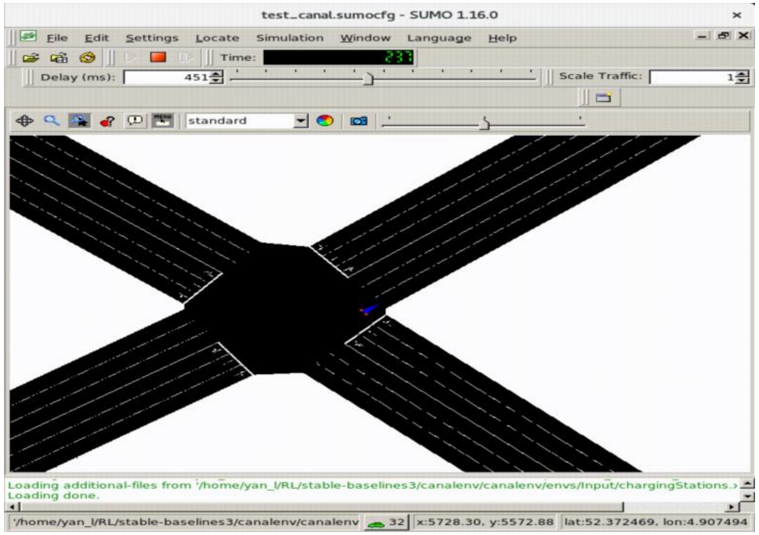
- 设{X(t)，t ∈T}是随机过程，T∈[0,+∞),对任意正整的n个时刻$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$以及s>0, $t_n+s\in T$，有

$$P(X(t_n+s)\le x|X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_n)=x_n)$$

$$=P(X(t_n+s)\le x|X(t_n)=x_n)$$

- 则称X(t)是马尔可夫过程
  - 当T={1,...,n},状态空间为可列集,则称为马氏链





https://github.com/liyan2015/SUMO-RL-MobiCharger

- 设$\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$是随机过程，如果

(1)$W(0)=0$

(2)$W(t)$是平稳独立增量过程

(3)对任意s, t, 增量$W(t)-W(s) \sim N(0,\sigma^2|t-s|)$, $\sigma^2>0$

- 则称$\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$为维纳过程，或布朗运动。

定理： 设$\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，则

(1)对任意$t\in(-\infty, +\infty)$, $W(t) \sim N(0, \sigma^2|t|)$

(2)对任意$-\infty < a < s, t < +\infty$,

$E[(W(s)-W(a)) (W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a, t-a)$

$R_W(s, t)=\sigma^2\min(s, t)$

定理：若$\{X_t$，$t\in T\}$是正交增量过程，$X(0)=0$则

$$C_X(s,t) = R_X(s,t) = \sigma_X^2(\min(s,t))$$

证 (1) 由定义，显然成立。

(2)不妨设$s \le t$，则

$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]$

$=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s)+W(s)-W(a))]$

$=E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(s))]$

$+E[(W(s)-W(a))^2]$

$=E[W(s)-W(a)]E[W(t)-W(s)]+D[W(s)-W(a)]$

$=\sigma^2(s-a)$

若 $t \le s$， 则

$E[(W(s)-W(a))\,(W(t)-W(a))]=\sigma^2(t-a)$，所以

$E[(W(s)-W(a))\,(W(t)-W(a))]=\sigma^2 \min(s-a,t-a)$

若取$a = 0$，则

$R_W(s, t)=E[W(s)W(t)]$

$=E[(W(s)-W(0))(W(t)-W(0))]$

$=\sigma^2 \min(s, t)$

注：维纳过程也是正交增量过程（$EX(t)=0$, $EX^2(t)=\sigma^2|t|<+\infty$），还是马尔可夫过程

- 设N(t)表示时间[0,t)内某随机事件A出现的次数，则称随机过程{N(t),t≥0}为计数过程，计数满足：

1. N(t)取非负整数
2. 对于任意的s,t>0,s<t,有N(s)≤N(t)
3. 对于任意的s,t>0,s<t,过程增量N(t)-N(s)表示在时间间隔[s,t)内事件A出现的次数

泊松过程

- 设{N(t), t≥0}为计数过程，若它满足

1. N(0)=0
2. 是独立增量过程，即对任意有限个 $0=t_0<t_1<\ldots<t_n$,增量 $N(t_1)-N(0), N(t_2)-N(t_1), \ldots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立
3. 增量平稳性，即对任意的s,t>0,k≥0,有

$$P(N(t+s)-N(s)=k)=P(N(t)=k)$$

4. 对任意t>0和充分小的Δt，有

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)$$

- 则称计数过程{N(t), t≥0}是强度为λ的泊松过程

- 定理10.4.1若计数过程{N(t), t≥0}是强度为λ的泊松过程，则对任意的s,t>0有

$$P(N(t+s)-N(s)=k)=P(N(t)=k)$$

$$=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k=0,1,2,\ldots,$$

- 即过程增量$N(t+s)-N(s)$服从参数为λt的泊松分布

证： 由增量平稳性，有

$$P(N(t+s)-N(s)=n)=P(N(t)=n)\triangleq P_n(t)$$

(1)$n=0$时，因为$\{N(t+\Delta t)=0\}=\{N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$， 于是

$$P_0(t+\Delta t)=P(N(t)=0, N(t+\Delta t)-N(t)=0)$$

$$=P(N(t)=0)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)$$

$$=P_0(t)P_0(\Delta t)$$

此外

$$P_0(\Delta t)=P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)=1-(\lambda\Delta t+o(\Delta t))$$

$$\boxed{\begin{gathered}P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\\ P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)\end{gathered}}$$

于是，得到

$$\boxed{P_0(t+\Delta t) = P_0\ (t)P_0(\Delta t) \qquad P_0(\Delta t) = 1-(\lambda\Delta t + o(\Delta t))}$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = \frac{P_0(t)(P_0(\Delta t)-1)}{\Delta t} = -(\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t})$$

令$\Delta t\ \to 0$，得到

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$P_0(0) = P(N(t)=0) = 1$$

积分求解微分方程，得到

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P_1(\Delta t)=P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\\ &P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t) \qquad P_0(\Delta t)=1-(\lambda\Delta t+o(\Delta t))\end{aligned}}$$

(2) $n>0$时

$$\{N(t+\Delta t)=n\}=\{N(t)=n,N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$$
$$\cup\{N(t)=n-1,N(t+\Delta t)-N(t)=1\}$$
$$\cup\left(\bigcup_{l=2}^{n}\{N(t)=n-l,N(t+\Delta t)-N(t)=l\}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)\\ &P_0(\Delta t)=1-(\lambda\Delta t+o(\Delta t))\end{aligned}}$$

于是有

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)\big(\underbrace{1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)}_{P_0(\Delta t)}\big)+P_{n-1}(t)\big(\underbrace{\lambda\Delta t+o(\Delta t)}_{P_1(\Delta t)}\big)+o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘$e^{\lambda t}$得到方程

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\left(P_n'(t)+\lambda P_n(t)\right)=\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right)=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$P_n(0)=P(N(0)=n)=0$$

当$n=1$时，有

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1(t))=\lambda e^{\lambda t}P_0(t)=\lambda，P_1(0)=0 \qquad \boxed{P_0(t)=e^{-\lambda t}}$$

解得

$$P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_2(t)\right)=\lambda e^{\lambda t}P_1(t)=\lambda^2 t \rightarrow P_2(t)=\frac{\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}}{2!}$$

重复归纳得

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

因为 $N(t) = N(t) - N(0) \sim Poisson(\lambda t)$

$$m(t) = E(N(t)) = \lambda t$$

$$D(t) = D(N(t)) = \lambda t$$

所以泊松过程是二阶矩过程，由独立增量性，当0<s<t时，

$$C(s,t) = Cov\big(N(s), N(t)\big) = Cov(\overbrace{N(s), N(t) - N(s)}^{\text{相互独立}} + N(s))$$

$$= Cov\big(N(s), N(s)\big) = D(N(s)) = \lambda s$$

从而得到

$$C(s,t) = \lambda \min(\mathrm{s}, \mathrm{t})$$

$$R(s,t) = C(s,t) + m(s)m(t) = \lambda \min(\mathrm{s}, \mathrm{t}) + \lambda^2 st$$

$\lambda = \frac{E(N(t))}{t}$ 表示单位时间内的事件发生次数，即强度

- $\{N(t), t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，记$S_0=0, S_n(n>0)$表示事件A在第n次发生的时刻，随机变量S_n则为t=0开始直至事件A第n次出现所需的等待时间，对任意的t≥0，n≥0，有$\{N(t)\geq n\}=\{S_n\leq t\}$

$$F_{S_n}(t)=P(S_n\leq t)=P(N(t)\geq n)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

得到密度函数

$$f_{S_n}(t)=\frac{\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, t>0$$

- 特别的，事件首次出现的等待事件S_1服从指数分布

$$f_{S_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$$

- 令T_n=S_n-S_{n-1}(n=1,2,...)为事件A第n-1次出现与第n次出现之间的事件间隔

$$T_1 = S_1, \text{故} T_1 \sim \exp(\lambda)$$

$$P(T_2 \le t | T_1 = s) = 1 - P(T_2 > t | T_1 = s) = 1 - P(\text{事件在}[s, s+t)\text{内不发生} | T_1 = s)$$

$$= 1 - P(N(s+t) - N(s) = 0 | N(s) = 1)$$

$$= 1 - P(N(t) = 0)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

- T_2与T_1独立也服从exp(λ),重复之前的步骤，可知

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

- $T_1,\ldots, T_n$相互独立
- 定理10.4.2 计数过程{N(t), t≥0}是强度为λ的泊松过程的充要条件是其时间间隔序列{T_n,n≥1}是相互独立且服从参数为λ的指数分布

- {N(t), t≥0}是强度为λ的泊松过程，则在已知N(t)=n的条件下，到达时间$S_1,S_2,\dots,S_n$的联合概率密度为

$$f(t_1,\dots,t_n|N(t)=n)=\frac{n!}{t^n},0<t_1<\cdots<t_n<t$$

设$0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$，取$h_i$充分小，使得$t_i + h_i < t_{i+1}$，则：

$$P(t_i < S_i \le t_i + h_i, i = 1,2,\cdots,n | N(t) = n)$$

$$= \frac{P(N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, N(t_{i+1}) - N(t_i + h_i) = 0, 1 \le i \le n)}{P(N(t) = n)}$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t - \sum_{i=1}^{n} h_i)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^{n} h_i$$

n维联合概率密度为：

$$f(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{P(t_i < S_i \le t_i + h_i, i = 1,2,\cdots,n | N(t) = n)}{\prod_{i=1}^{n} h_i} = \frac{n!}{t^n}$$

- 设$X_1,\ldots X_n$是独立同分布的非负随机变量，其密度函数为$f(x)$,$X_{(1)}<\ldots<X_{(n)}$为其顺序统计量,则顺序统计量的联合概率密度为

$$f(x_1,\ldots,x_n)=n!\prod_{k=1}^{n}f(x_k),\ 0<x_1<\cdots<x_n$$

- 特别的当X_i为$(0,t)$上的均匀分布

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{n!}{t^n},0<x_1<\cdots<x_n<t$$

- 设某火车站来到的乘客数服从强度为λ的Poisson过程,火车t时刻离开车站，求在[0,t]到达车站的乘客等待时间总和的期望值

解：$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)$ $\qquad E(X(t))=E\left[E(X(t))\mid N(t)=n)\right]$

$$E(X(t)\mid N(t)=n)$$

$$=E(\sum_{k=1}^{n}(t-S_k)\mid N(t)=n)$$

$$=nt-E(\sum_{k=1}^{n}S_k\mid N(t)=n)$$

$$=nt-E(\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}\mid N(t)=n)$$

$$=nt-E(\sum_{i=1}^{n}X_i\mid N(t)=n)$$

$$=nt-\frac{t}{2}n=\frac{nt}{2}$$

$$E\left[E(X(t))\mid N(t)=n)\right]$$

$$=E(\frac{N(t)t}{2})$$

$$=\frac{\lambda tt}{2}=\frac{\lambda t^2}{2}$$