则称$<X(t)X(t+\tau)>$为随机过程 $X(t)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的时间相关函数。

如果$<X(t)>=m_X$(a.s.),称随机过程 $X(t)$ 具有数学期望的各态历经性;如果$<X(t)X(t+\tau)>=R_X(\tau)$(a.s.),称随机过程 $X(t)$ 具有相关函数的各态历经性。

习题 12

1. 设 X 是一个随机变量,$X(t)\equiv X,-\infty<t<+\infty$,

(1) 如果 X 服从参数为 λ 的泊松分布;

(2) 如果 X 服从标准柯西分布;

(3) 如果 X 服从自由度为 2 的 t 分布(见 6.4.1 小节),

试问:随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是否为严平稳过程? 是否为(宽)平稳过程?

2. 设 A 和 Θ 是两个相互独立的随机变量,$\Theta\sim U[0,2\pi]$,A 服从瑞利分布,其概率密度为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, & a>0,\\ 0, & a\leqslant 0\end{cases}$$

令 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta),-\infty<t<+\infty$,其中 ω_0 为常数,问此随机过程是否为平稳过程?

3. 设 Θ 是随机变量,$\Theta\sim U[-\pi,\pi]$,$X(t)=\sin t\Theta$,问:

(1) $\{X(t),t=1,2,3,\cdots\}$是否为平稳随机序列?

(2) $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是否为平稳随机过程?

4. 设 A 和 Θ 是相互独立的随机变量,$\Theta\sim U[-\pi,\pi]$,A 的概率密度 $f(a)$ 是偶函数,证明随机过程 $X(t)=\sin(At+\Theta),-\infty<t<+\infty$ 是平稳过程.

5. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是平稳随机过程,其均值为 m_X,自相关函数为 $R_X(\tau)$,试证明下列随机过程仍为平稳过程,并求其均值与自相关函数,

(1) $Y_T=\{aX(t)+b,t\in T\}$,其中 a,b 为常数;

(2) $Y_T=\{AX(t)+B,t\in T\}$,其中 A,B 是与 X_T 独立的随机变量,$E(A)=a,E(B)=b,D(A)=\sigma_1^2$,$D(B)=\sigma_2^2,\rho(A,B)=\rho$;

(3) $Y_T=\{X(t+a)-X(t),t\in T\}$,其中 a 为常数.

6. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 与 $Y_T=\{Y(t),t\in T\}$ 是相互独立的平稳随机过程,证明下列随机过程仍是平稳过程:

(1) $Z_T=\{X(t)+Y(t),t\in T\}$;

(2) $Z_T=\{X(t)Y(t),t\in T\}$.

7. 设 $h(x)$ 是周期为 l 的实值连续函数,Θ 是服从$[0,l]$上均匀分布的随机变量,证明 $X(t)=h(t+\Theta),-\infty<t<+\infty$ 是平稳随机过程,并求其均值与自相关函数.

8. 如果平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的自相关函数为 $R_X(\tau)$,$l>0$ 是常数,证明下述三个命题是等价的:

(1) $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是以 l 为周期的周期平稳过程,即对任何 t 都有 $P\{X(t+l)=X(t)\}=1$;

(2) $R_X(\tau)$是以 l 为周期的周期函数;

(3) $R_X(l)=R_X(0)$.

9. 设 A,B,Θ 是相互独立的随机变量,$E(A)=a,E(B)=b,D(A)=\sigma_1^2,D(B)=\sigma_2^2$, $\Theta\sim U[-\pi,\pi]$,ω_0 为常数,$X(t)=A\sin(\omega_0 t+\Theta)$,$Y(t)=B\cos(\omega_0 t+\Theta)$,试证明$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$与$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳相关的平稳过程.

10. 设$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是白噪声序列,$Y(n)=\sum\limits_{k=0}^{N}a_kX(n-k)$,其中 N 为自然数,a_0,

$a_1,\cdots,a_N$ 为常数,求 $\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 与 $\{Y(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 的互相关函数 $R_{XY}(m)$ 及 $R_{YX}(m)$.

11. 设 $X(t)$ 是雷达的发射信号,遇到目标后回波信号是 $aX(t-\tau_1)$,$a\ll1$,τ_1 是信号返回时间,回波信号必然伴有噪声,记为 $N(t)$,于是接收机收到的全信号为 $Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)$,假定$X(t)$ 和 $N(t)$ 平稳相关,

(1) 试求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$;

(2) 若 $N(t)$ 的数学期望为零,且与 $X(t)$ 相互独立,求 $R_{XY}(\tau)$.

12. 设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 和 $Y_T=\{Y(t),t\in T\}$ 是平稳相关的两个平稳过程,证明其互相关函数具有如下性质:

(1) $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$;

(2) $R_{XY}(\tau)\leqslant\sqrt{R_X(0)}\sqrt{R_Y(0)}$.

13. 设 X 是一随机变量,$E(X)=\mu$,$D(X)=\sigma^2$,证明随机过程 $X(t)\equiv X,-\infty<t<+\infty$ 是平稳过程,并求谱密度.

14. 已知平稳过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$,求其谱密度 $S_X(\omega)$:

(1) $R_X(\tau)=4\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos3\pi\tau$;

(2) $R_X(\tau)=4\mathrm{e}^{-3|\tau|}\cos^22\tau$;

(3) $R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{10}, & |\tau|\leqslant10,\\ 0, & |\tau|>10;\end{cases}$

(4) $R_X(\tau)=b\mathrm{e}^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$,其中 $a>0,b>0$,都是常数;

(5) $R_X(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}(\cos b\tau-ab^{-1}\sin b|\tau|)$,其中 $a>0,b>0$ 都是常数.

15. 设 A 和 Θ 是相互独立的随机变量,$E(A)=2$,$D(A)=4$,$\Theta\sim U[-\pi,\pi]$,ω_0 为常数,$X(t)=A\cos(\omega_0t+\Theta),-\infty<t<+\infty$,

(1) 证明 $X(t)$ 是平稳过程;

(2) 求 $X(t)$ 的谱密度.

16. 设 ξ 和 Θ 为相互独立的随机变量,$\Theta\sim U[0,2\pi]$,ξ 具有概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,$X(t)=\cos(\xi t+\Theta)$,

(1) 证明 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是平稳随机过程;

(2) 求其自相关函数及谱密度.

17. 设第 5 题中的 X_T 具有谱密度 $S_X(\omega)$,求 Y_T 的谱密度.

18. 已知平稳过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的谱密度 $S_X(\omega)$,试求其自相关函数 $R_X(\tau)$,下面的 $a>0,\sigma>0$ 是常数,

(1) $S_X(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant a,\\ 0, & |\omega|>a;\end{cases}$

(2) $S_X(\omega)=\begin{cases}a^2-\omega^2, & |\omega|\leqslant a,\\ 0, & |\omega|>a;\end{cases}$

(3) $S_X(\omega)=\begin{cases}8\delta(\omega)+2a\left(1-\dfrac{|\omega|}{a}\right), & |\omega|\leqslant a,\\ 0, & |\omega|>a;\end{cases}$

(4) $S_X(\omega)=\dfrac{1}{\omega^4+5\omega^2+6}$;

(5) $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+7}{\omega^4+5\omega^2+4}+4$;

(6) $S_X(\omega)=\begin{cases}\sigma^2, & a\leqslant|\omega|\leqslant 2a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

19. 设$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是白噪声序列,$Y(n)=X(n)-\theta X(n-1)$,其中$\theta$为常数,证明$\{Y(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是平稳序列,并求其自相关函数与谱密度.

20. 设平稳序列$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$具有谱密度$S_X(\omega)=\sigma^2[1+a_1^2+a_2^2+2(a_1a_2-a_1)\cos\omega-2a_2\cos 2\omega]$,$-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$,求其自相关函数.

21. 证明第 4 题中$X(t)$的谱密度为$S_X(\omega)=\pi f(\omega)$.

22. 求第 9 题中两个平稳过程的自谱密度和互谱密度.

23. 设随机变量$\Theta\sim U[0,2\pi]$,且与平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$相互独立,$\omega_0$为常数,记$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)$,谱密度为$S_X(\omega)$,令

$$Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta),-\infty<t<+\infty$$
$$Z(t)=X(t)\sin(\omega_0 t+\Theta),-\infty<t<+\infty$$

证明:

(1) $Y(t)$和$Z(t)$都是平稳过程,且自相关函数为

$$R_Y(\tau)=R_Z(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(\omega_0\tau)$$

(2) $Y(t)$和$Z(t)$的自谱密度为

$$S_Y(\omega)=S_Z(\omega)=\frac{1}{4}[S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)]$$

(3) $Y(t)$和$Z(t)$是平稳相关的,且其互相关函数为

$$R_{YZ}(\tau)=-R_{ZY}(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\sin(\omega_0\tau)$$

(4) $Y(t)$和$Z(t)$的互谱密度为

$$S_{YZ}(\omega)=-S_{ZY}(\omega)=\frac{\mathrm{i}}{4}[S_X(\omega+\omega_0)-S_X(\omega-\omega_0)]$$

24. 设平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$平稳相关,试证明:

$$\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]=\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)],$$
$$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]=-\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)].$$

25. 设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$是两个不相关的平稳过程,均值$m_X$和$m_Y$都不为零,定义

$$Z(t)=X(t)+Y(t),-\infty<t<+\infty$$

(1) 证明$Z(t)$是平稳过程,并求其自相关函数和自谱密度;

(2) 求互相关函数$R_{XY}(\tau)$和$R_{XZ}(\tau)$;

(3) 求互谱密度$S_{XY}(\omega)$和$S_{XZ}(\omega)$.

26. 设第 14 题中各平稳过程的均值$m_X=0$,试判断他们是否具有数学期望的各态历经性.

27. 设ξ是一个随机变量,$X(t)\equiv\xi,-\infty<t<+\infty$,

(1) 如果ξ的二阶矩存在,证明$X(t)$具有数学期望的各态历经性的充要条件是$D(\xi)=0$;

(2) 如果ξ的四阶矩存在,证明$X(t)$具有相关函数的各态历经性的充要条件是$E(\xi^4)=(E\xi^2)^2$.

28. 判断第 16 题中的平稳过程$X(t)$是否具有数学期望的各态历经性,是否具有相关函数的各态历经性.

29. 设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程,$a,b$是常数,且$a\neq0$,$Y(t)=aX(t)+b,-\infty<t<+\infty$,

（1）证明 $Y(t)$ 具有数学期望的各态历经性的充要条件是 $X(t)$ 具有数学期望的各态历经性；

（2）证明 $Y(t)$ 各态历经的充要条件是 $X(t)$ 各态历经.

30. 设有随机过程 $Z(t)=VX(t)Y(t)$，$-\infty<t<+\infty$，其中平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 及随机变量 V 三者相互独立，且 $m_X=0$，$m_Y=0$，$R_X(\tau)=2e^{-2|\tau|}\cos(\omega_0\tau)$（$\omega_0$ 为常数），$R_Y(\tau)=9+e^{-3\tau^2}$，$E(V)=2$，$D(V)=9$，

（1）证明 $Z(t)$ 是平稳过程，并求其均值、方差和相关函数；

（2）分别判断 $X(t)$，$Y(t)$，$Z(t)$ 是否具有数学期望的各态历经性.

自测题 12

习题 12 参考答案