(3) 正态总体的抽样分布

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,$\overline{X}$与S^2分别为样本均值与样本方差,则

① $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$;② $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$;③ $\overline{X}$与S^2相互独立.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,$\overline{X}$与S^2分别为样本均值与样本方差,则

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$是分别来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$的样本,且两样本相互独立,

$$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i,S_{1n_1}^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,S_{2n_2}^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

则

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中$S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_{1n_1}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^2}{n_1+n_2-2}$.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$是分别来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本,且两样本相互独立,$S_{1n_1}^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,S_{2n_2}^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$,则

$$F=\frac{\dfrac{S_{1n_1}^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_{2n_2}^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\sigma_2^2S_{1n_1}^2}{\sigma_1^2S_{2n_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

习题 6

1. 设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自X的样本,试写出$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度.

2. 设总体X在区间$[a,b]$上服从均匀分布,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自X的样本,试写出$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度.

3. 设总体X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(X_1,X_2,X_3)是来自X的样本,试写出(X_1,X_2,X_3)的概率密度.

4. 设总体X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自X的样本,试写出$(X_1,

$X_2,\cdots,X_n$)的分布律.

5. 为了研究玻璃产品在集装箱运输过程中的损坏情况，现随机抽取 20 个集装箱检查其产品损坏的件数，记录结果为 1,1,1,1,2,0,0,1,3,1,0,0,2,4,0,3,1,4,0,2.试写出样本频率分布，再写出经验分布函数并画出其图像.

6. 下面是 100 个学生身高(单位:cm)的测量情况，试作出学生身高的样本频率直方图，并用直方图估计学生身高在 160 与 175 之间的概率.

身高	[154,158]	(158,162]	(162,166]	(166,170]	(170,174]	(174,178]	(178,182]
学生数	10	14	26	28	12	8	2

7. 设从总体 X 抽得一个容量为 10 的样本，其值为 2.4,4.5,2.0,1.0,1.5,3.4,6.6,5.0,3.5,4.0,试计算样本均值、样本方差、样本标准差、样本二阶中心矩及样本二阶原点矩.

8. (1) 从总体 X 中抽取容量为 n 的样本，其观测值的频数分布为

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\cdots$	x_l^*
m_i	m_1	m_2	$\cdots$	m_l

($m_1+m_2+\cdots+m_l=n$),试写出计算样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2 的公式;

(2) 从总体 X 中抽取一个样本，其观测值的频数分布为

x_i^*	1	3	6	26
m_i	8	40	10	2

求样本均值、样本方差及样本标准差.

9. 样本均值和样本方差的简化计算如下:设来自总体 X 的样本($X_1,X_2,\cdots,X_n$)的样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$ 和 S_X^2,作变换 $Y_i=\dfrac{X_i-a}{c}$,得样本($Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$),它的样本均值和样本方差记为 $\overline{Y}$ 和 S_Y^2.

(1) 试证:$\overline{X}=a+c\overline{Y}$,$S_X^2=c^2S_Y^2$;

(2) 如果总体 X 的均值 $E(X)=\mu$ 和方差 $D(X)=\sigma^2$ 存在，试求 $E(\overline{Y})$ 和 $E(S_Y^2)$.

10. 从总体 $X\sim N(9,9)$ 中分别抽取容量为 50 的两组样本，求两组样本均值之差的绝对值小于 0.6 的概率.

11. ($X_1,X_2,\cdots,X_n$)是来自总体 X 的样本，设总体 X 的分布分别为(1) 二项分布 $B(m,p)$;(2) 参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$;(3) 区间[a,b]上的均匀分布;(4) 参数为 λ 的指数分布;(5) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,试求 $E(\overline{X})$,$D(\overline{X})$,$E(S^2)$.

12. 设 $\overline{X}_n$ 和 S_n^2 为样本($X_1,X_2,\cdots,X_n$)的样本均值和样本方差，增加一次抽样得 X_{n+1},记样本($X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$)的样本均值和样本方差为 $\overline{X}_{n+1}$ 和 S_{n+1}^2,求证:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2+n(\overline{X}_n-a)^2$ 对任何常数 a 都成立;

(2) $\overline{X}_{n+1}=\overline{X}_n+\dfrac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)$,$S_{n+1}^2=\dfrac{n-1}{n}S_n^2+\dfrac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2$.

13. 样本($X_1,X_2,\cdots,X_n$)的样本均值和样本方差分别记为 $\overline{X}_n$ 和 S_X^2,样本($Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$)的样本均值和样本方差分别记为 $\overline{Y}_m$ 和 S_Y^2,现将两个样本合并在一起，以 $\overline{Z}_{n+m}$ 和 S_Z^2 记合并后样本的样

本均值和样本方差，试证：

$$\bar{Z}_{n+m}=\frac{n\bar{X}_n+m\bar{Y}_m}{n+m}$$

$$S_Z^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-1}+\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}(\bar{X}_n-\bar{Y}_m)^2$$

14. 若从总体中抽取容量为 13 的样本值：-2.1,3.2,0,-0.1,1.2,-4,2.22,2.01,1.2,-0.1,3.21,-2.1,0. 试写出这个样本值的顺序统计量、样本$\frac{2}{3}$分位数及样本极差.

15. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自该总体的样本，试求样本均值 $\bar{X}$ 的分布律.

16. 设总体 X 服从参数为 α,λ 的 Γ 分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自此总体的样本，试求样本均值 $\bar{X}$ 的概率密度.

17. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，求 $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 的概率分布.

18. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的样本，求统计量 $Y=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^2+\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=m+1}^{n}X_i\right)^2$ 的抽样分布.

19. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，S^2 是样本方差，求(1) $P\left\{0.3<\frac{S^2}{\sigma^2}<2.114\right\}$；(2) $D(S^2)$.

20. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，求统计量(1) $Y_1=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$；(2) $Y_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的概率密度.

21. 已知随机变量 $X\sim t(n)$，求证 $X^2\sim F(1,n)$.

22. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，试求下列统计量的概率分布：

$$(1)\ Y_1=\frac{\sqrt{m}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}};\quad (2)\ Y_2=\frac{m\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}.$$

23. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1})$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，试求统计量

$$Y=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

的抽样分布.

24. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$是分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的两个独立样本，试证明

$$F=\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}$$

服从自由度为(n_1,n_2)的 F 分布.

25. 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的样本，试证明 $Y=2\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从自由度为 $2n$ 的χ^2 分布.

26. 设(X_1,X_2)是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$的样本，求统计量 $Y=\left(\dfrac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$ 的概率分布.

27. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体 $U(0,1)$的样本，试证明 $Y=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i)$ 服从自由度为 $2n$ 的χ^2 分布.

自测题 6

习题 6 参考答案