西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第五章 数理统计的基本概念

言浬　特聘研究员

2025年4月

从宿舍到教室需要花多少时间?

相信大家心里对此都有一个大概的“数”.

- **问题** 你是怎么得到这个“数”的?

这就是一个典型的统计思维过程

数据 ⇒ 归纳 ⇒ 结果

数理统计就是一个归纳推断过程

数理统计是以概率论为基础，关于实验数据的收集、整理、分析与推断的一门科学与艺术

- **问题** 什么是实验数据?

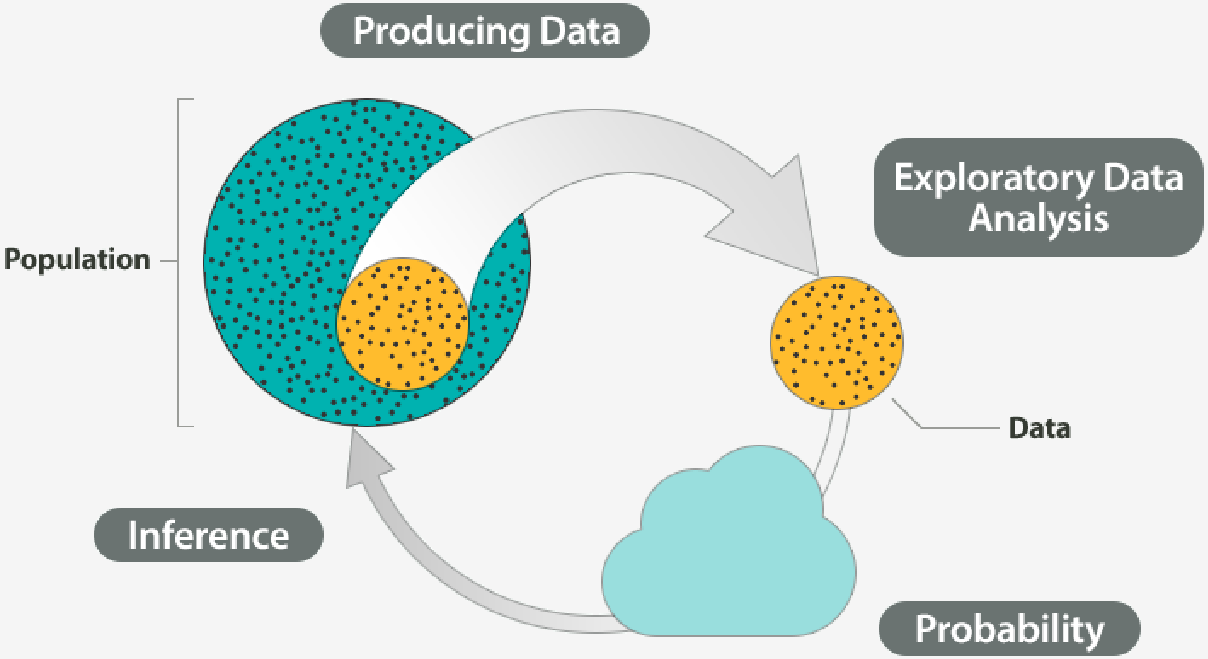
  科学试验, 或对某事物、现象进行观察获得的数据称为试验数据

- **特点** 数据受随机因素的影响

  --可以通过某种概率分布来描述

概率与统计

统计推断：研究如何有效分析已获得的随机数据



从样本中得到数据 ⇨ 对数据进行分析 ⇨ 根据概率推断样本特性

- 2016

T
ri

- 皮尤

One likely … when certain kinds of pe… rtunity outreach to all parts of the electorate. We know that some groups – including the less

统计学案例II

- 对三组各100个零件进行有损抽样检查，结果如下：

A. 抽样10个零件，合格率0.5;

B. 抽样50个零件，合格率0.5;

C. 抽样90个零件，合格率0.5。

- 哪组未抽样零件的合格率在 [0.4,0.6] 区间的概率最高?

问题 实验数据的处理过程?

数据 收集, 整理, 分析, 推断

《 数理统计 》围绕这四个过程来进行研究

本讲主要介绍数据“收集”和“整理”环节中的一些相关概念

5.1 总体与样本

- **总体** 研究对象的全体称为总体
- **个体** 总体中的每一个具体对象称为个体

例 分析某班级学生的英语考试成绩

总体 -- 该班级所有学生的英语考试成绩

个体 -- 每一个学生的英语考试成绩

例 分析某工厂生产的灯泡的使用寿命

总体 -- 该厂生产的所有灯泡的使用寿命

个体 -- 每一个灯泡的使用寿命

总体 研究对象的数量指标 X

$$X \sim F(x)$$

个体 总体 X 的可能取值

例 分析某工厂生产的灯泡的使用寿命

总体 -- 该厂生产的所有灯泡的使用寿命 X

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

个体 -- 每一个灯泡的使用寿命，即 X 的一个可能取值

问题 如果对总体完全了解的情况下，能否对个体进行预测?

5.1 总体与样本

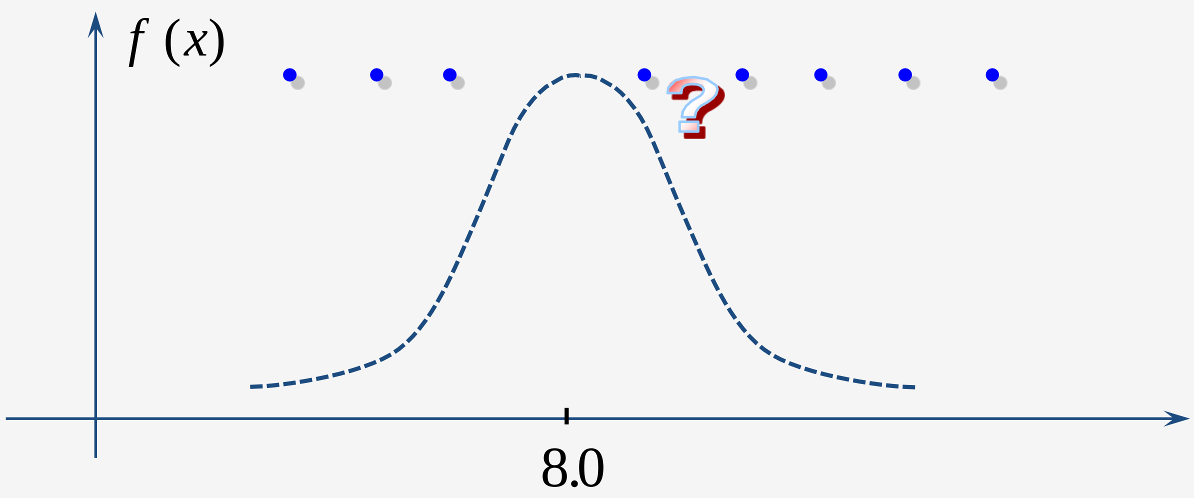
问题 如果知道部分个体的值, 能否预测总体?

灯泡寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\mu = ?\ \sigma^2 = ?$

例 设某台机床加工的零件的长度 $X \sim N(\mu, 0.1)$
实测了其中 8 个零件, 得到它们的测量值为

$$8.3,\quad 7.7,\quad 8.6,\quad 8.0,\quad 8.6,\quad 7.7,\quad 8.6,\quad 8.0$$



定义1 从总体 X 中抽取的部分个体，得到的数量指标 X_1，X_2，…，X_n，若满足下条件：

(1) $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$, …, $\boldsymbol{X}_n$ 与 $\boldsymbol{X}$ 同分布；

(2) $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，… ，$\boldsymbol{X}_n$ 相互独立.

则称 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$, …, $\boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X}$ 的一个简单随机样本，简称样本.

对样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 进行观测后, 得到的观测值: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为样本观测值.

注:

观测前: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是随机变量;

观测后: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是具体的数据.

样本的联合分布

设总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, 则样本 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, …, $\boldsymbol{X}_n$ 的联合分布函数为:

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n\}=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

若总体 $\boldsymbol{X}$ 的密度函数为 $f(x)$, 则样本 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, …, $\boldsymbol{X}_n$ 的联合密度函数为:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

样本的联合分布

若总体 X 的分布律为:

$$P\{X=a_k\}=p_k,\quad k=1,2,\ldots$$

则样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的联合分布律为:

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \qquad, X_n=x_n\}$$

$$=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}$$

例 设 X_1, X_2, …, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则样本的联合密度函数为：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $B(1, p)(0<p<1)$ 的样本, 则样本的联合分布律为:

$$P\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} p^{(1-x_i)}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} p^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$$

5.1 总体与样本

总体、样本、样本值的关系

总体（理论分布）

?

样本 → 样本值

对样本的一些认识

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim F(x)$的样本

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一堆“杂乱无章”的数据;

2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 包含总体的相关“信息”；

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是对总体进行推断的依据；

4. 观测前, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 *i.i.d.* 随机变量,
   观测后, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是具体的数据.

5.2 常用的统计量

- **统计推断的基础：收集数据**

从总体 $X \sim F(x)$中抽取样本：

$$\boxed{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n}$$

“杂乱无章”的数据 | **包含了有用的“信息”**

- **问题**

如何提炼出有用的“信息”？

例 设某班级英语考试后，全班同学的成绩分别为： X_1， X_2， …， X_n

- **问题** 你除了希望知道自己的成绩外，还关心哪个成绩?
- **问题** 如何评价该班级的英语整体学习情况?

$$\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

--对样本进行“整理”后得到的数据

数据的整理：统计量

定义2 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体$X \sim F(x)$的样本，$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是n元实值连续函数，若函数$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$不含未知参数，则称随机变量 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为**统计量**

例 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ，σ^2均未知。则下列中哪些是统计量?

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad \min\{X_1,X_2,\quad ,X_n\}$$

常用统计量

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的样本, 则称

(1) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值

(2) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 为样本方差

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ 为样本标准差

(3) $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 为样本的 **k** 阶原点矩

(4) $B_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$ 为样本的 **k** 阶中心矩

(5) 将样本 X_1, X_2, …, X_n 按由小到大的顺序排成

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$$

则称统计量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 为顺序统计量

称 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 为样本极小值

称 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \quad , X_n\}$ 为样本极大值

称 $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ 为样本极差

样本均值与样本方差的数字特征

命题1 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来总体 X 的样本，且总体的均值与方差存在，记为

$$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2$$

则有

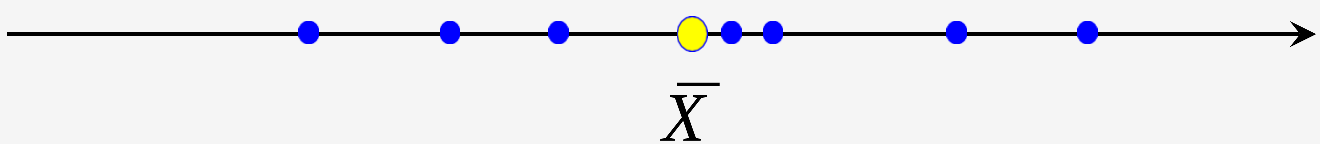
(1) $E(\bar{X})=\mu,\quad D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}\sigma^2$

(2) $E(S^2)=\sigma^2$

样本均值与样本方差的含义

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ — 是观测数据 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的平均值

是观测数据 X_1，X_2，…，X_n 的“中心”

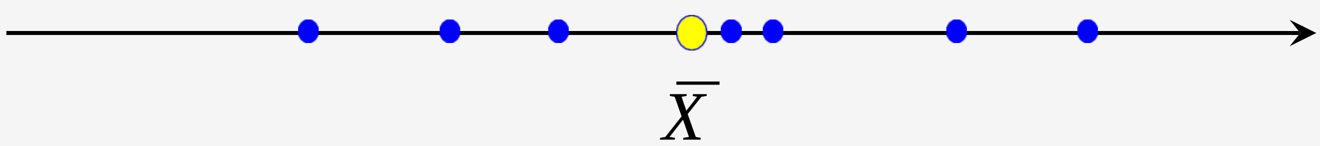


样本均值与样本方差的含义

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

—— 反映了观测数据 X_1，X_2，…，X_n 与观测数据中心点的偏离程度

反映了观测数据 X_1，X_2，…，X_n 的离散程度



问题

下结果说明了什么?

$$E(\bar{X})=\mu,\quad D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(S^2)=\sigma^2$$

5.3 常见的抽样分布

数据收集 ⇒ 样本、样本观测值

—包含了总体的有用信息

数据整理 ⇒ 统计量

—提炼数据中包含的信息

统计量 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是随机变量

- **确定统计量的分布是概率统计的基本问题之一**

定义1 统计量 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布称为抽样分布

本讲主要介绍与标准正态总体相关的抽样分布：

χ^2-分布　　t - 分布　F - 分布

一、χ^2 – 分布

定义1 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$，则称随机变量

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

χ^2-分布的密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}, & x>0\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$$

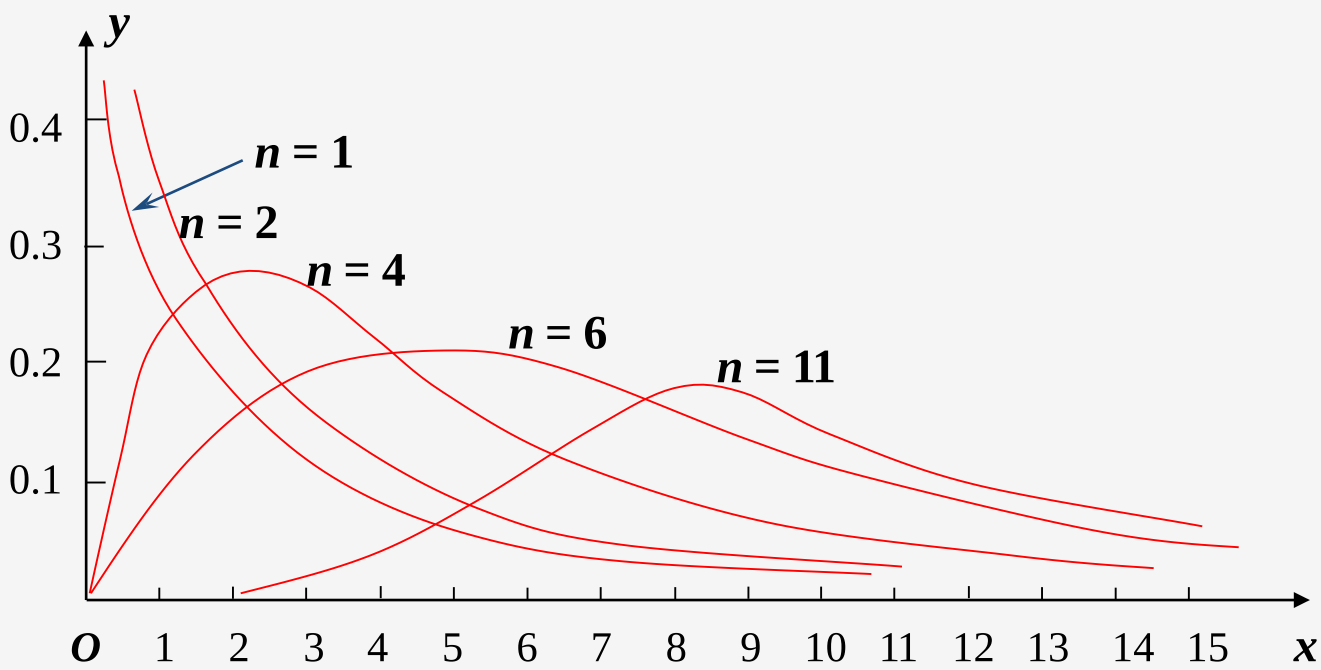
其中

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,\ \ x>0$$

称为 Γ 函数，具有性质

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\quad \Gamma(1)=1,\quad \Gamma(n+1)=n!$$

χ^2-分布密度函数的图像



χ^2-分布的性质

1. 可加性

若 $Y_1 \sim \chi^2(n)$, $Y_2 \sim \chi^2(m)$，且 Y_1, Y_2 相互独立，则有

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n+m)$$

推广：若 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ 相互独立，且

$$Y_i \sim \chi^2(n_i) \quad (i=1,2,\cdots,k)$$ 则有

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i^2 \sim \chi^2(\sum_{i=1}^{k} n_i)$$

2. 数字特征

若 $Y \sim \chi^2(n)$，则有 $E(Y)=n$，$D(Y)=2n$，

证明 存在独立同分布的 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$，都服从标准正态分布 $\boldsymbol{N}(0, 1)$，使得

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) \\ &= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2) = nE(X_1^2) = n \end{aligned}$$

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

$$D(Y)=D(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$$
$$=D(X_1^2)+D(X_2^2)+\cdots+D(X_n^2)=nD(X_1^2)$$

$$D(X_1^2)=E(X_1^4)-[E(X_1^2)]^2=E(X_1^4)-1$$

$$E(X_1^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$
$$=3E(X_1^2)=3$$

$$D(Y)=nD(X_1^2)=n(3-1)=2n$$

二、t 分布

定义3 设 $X \sim N(0, 1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则称随机变量

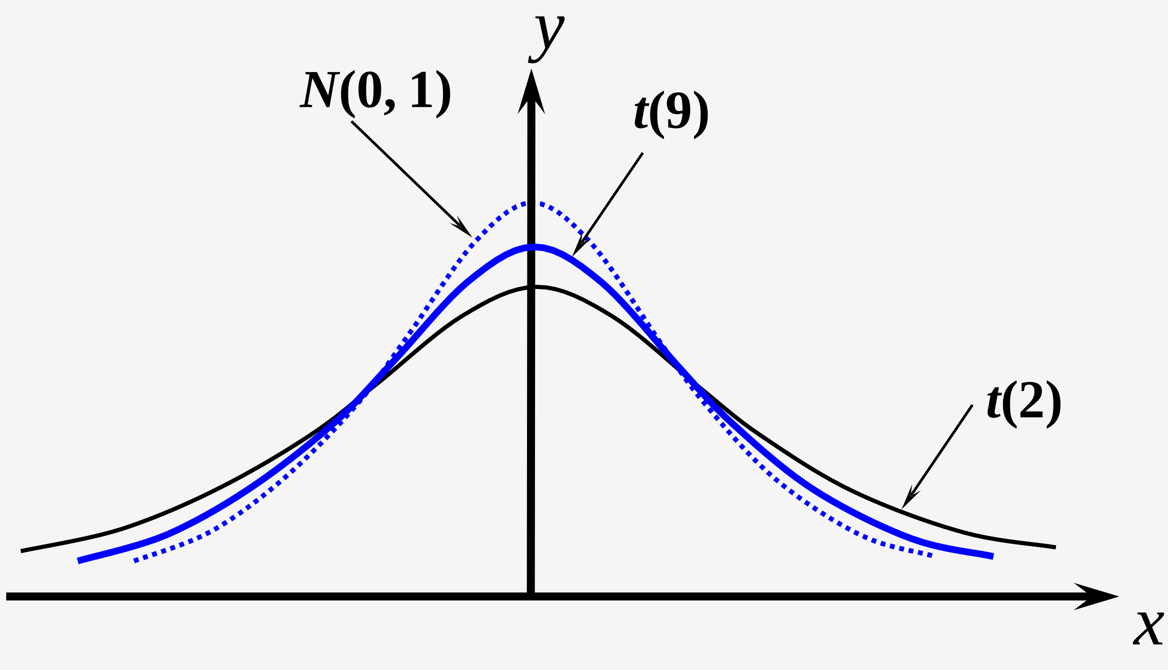
$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布，记为

$$T \sim t(n)$$

t 分布的密度函数及其图形

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$



三、F 分布

定义4 设 $X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则称随机变量

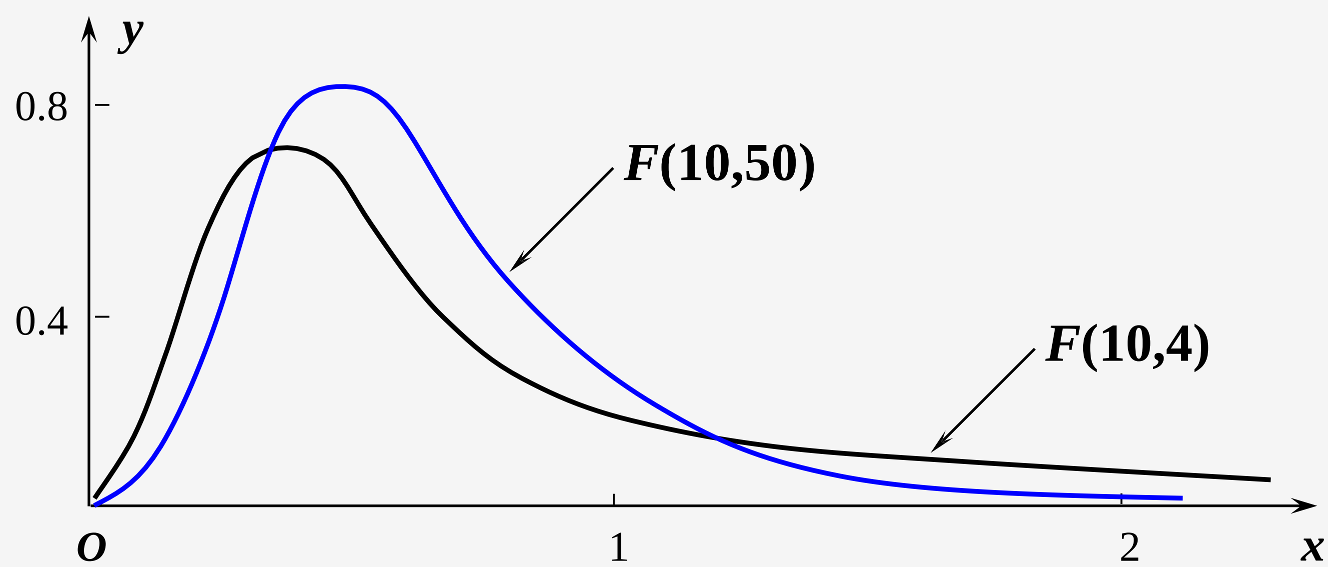
$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

服从自由度为 (m,n) 的 F 分布，记为

$$F \sim F(m,n)$$

F 分布的密度函数及其图形

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{F(m,n)[(m+n)/2]}{F(m,n)(m/2)F(m,n)(n/2)}m^{\frac{n_1}{2}}n^{\frac{n_2}{2}}\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$



F 分布的一个重要性质

若 $F \sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{F} \sim F(m,n)$

事实上，因 $F \sim F(m,n)$，所以由 F 分布定义知，存在

$X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，使得

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

所以有 $\dfrac{1}{F} = \dfrac{Y/n}{X/m} \sim F(n,m)$

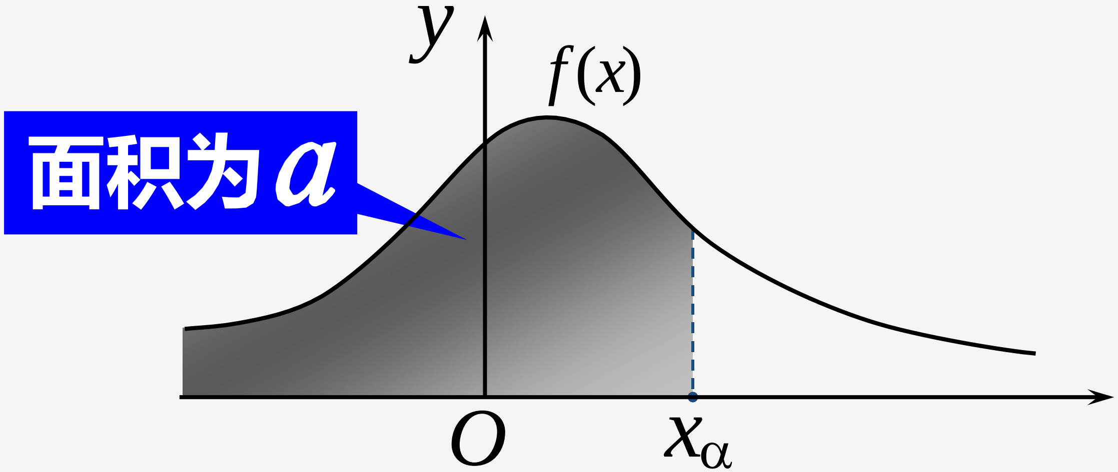
四、分位点

定义4 设连续型随机变量 $X \sim f(x)$，对给定的$0<\alpha<1$，存在一个实数 x_α，使得

$$P\{X \le x_\alpha\} = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)dx = \alpha$$

则称 x_α 为密度函数 $f(x)$ 的 α 分位点

x_α 为密度函数 $f(x)$ 的α 分位点



1. 标准正态分布 $N(0,1)$ 的 α 分位点记为 u_α

$$\Phi(u_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \alpha$$

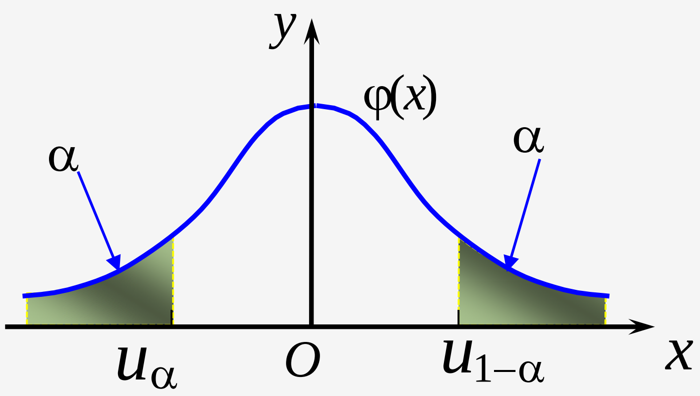
$$\boxed{u_\alpha = -u_{1-\alpha}}$$

查标准正态分布表

$u_{0.975} = 1.96$

$u_{0.95} = 1.645$

$u_{0.05} = -1.645$



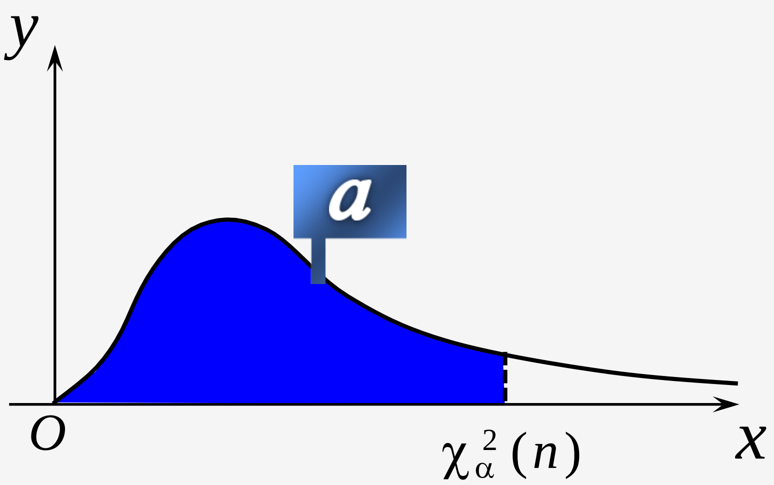
$(0 < \alpha < 0.5)$

2. $\chi^2(n)$分布的 α 分位点记为$\chi_\alpha^2(n)$.

查 χ^2分布表

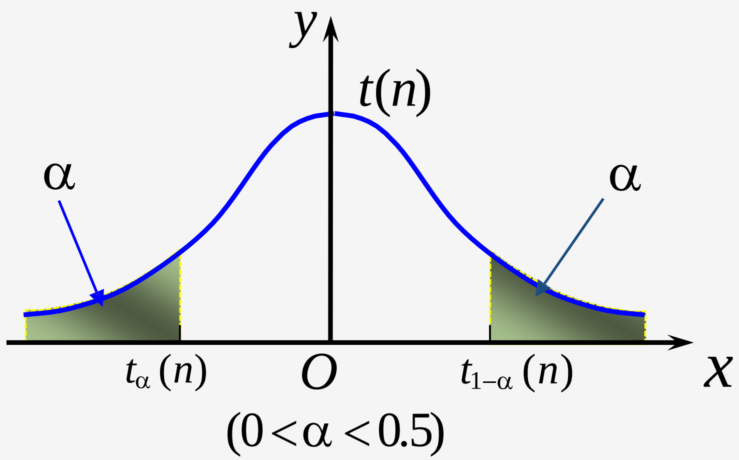
$\chi_{0.05}^2(10) = 3.940$

$\chi_{0.95}^2(10) = 18.307$



3. $t(n)$ 分布 α 分位点记为 $t_\alpha(n)$

$\boxed{t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)}$



查 t 分布表

$t_{0.975}(10) = 2.2281$

$t_{0.95}(18) = 1.7341$

$t_{0.05}(20) = -t_{0.95}(20) = -1.7247$

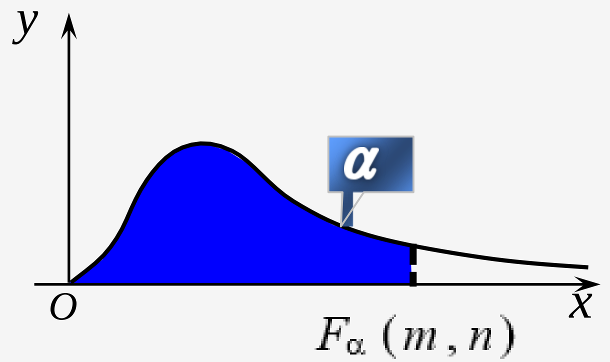
当 $n > 45$ 时, $t_\alpha(n) \approx u_\alpha$

4. $F(m, n)$分布的α分位点记为$F_\alpha(m,n)$.

查 $F(m, n)$ 分布表

$F_{0.95}(10,20) = 2.35$

$$F_{0.05}(15,10) = \frac{1}{F_{0.95}(10,15)} = \frac{1}{2.54}$$



若 $\boldsymbol{F \sim F(m, n)}$，则

$$\frac{1}{F} \sim F(n,m) \Longrightarrow \boxed{F_\alpha(m,n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}}$$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

谢谢大家！