

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

都是  $\mu$  的无偏估计量,并判断  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  作为  $\mu$  的估计量,哪一个最有效.

9. 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,试选择适当的常数  $C$ ,使  $C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计量.

10. 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布  $P(\lambda)$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的样本,试验证:对任何值  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha \bar{X} + (1-\alpha)S^2$  都是  $\lambda$  的无偏估计量.

11. 设总体  $X$  服从两点分布  $B(1, p)$  ( $0 < p < 1$ ).

(1) 若  $X_1$  是来自  $X$  的样本,试证:  $p^2$  不存在无偏估计量.

(2) 若  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ( $n \geq 2$ ) 是来自  $X$  的样本,试求  $p^2$  的一个无偏估计量.

12. 设总体  $X$  在  $[0, \theta]$  上服从均匀分布,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的样本,试证  $2\bar{X}$  和  $X_{(n)}$  都是  $\theta$  的相合估计量和均方相合估计量.

13. 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的样本,  $\theta$  是  $X$  的分布中包含的未知参数,  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是  $\theta$  的一个渐近无偏估计量,且  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0$ ,试证明:  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的相合估计量和均方相合估计量.

14. 设某种元件的寿命服从参数为  $\lambda > 0$  的指数分布,抽其 12 只进行寿命试验,试验结果为(单位:h):

20	640	1 750	50	1 110	1 660
640	2 410	890	970	1 520	750

试求:

(1) 参数  $\lambda$  和元件的平均寿命  $\mu$  的置信度为 0.9 的置信区间;

(2) 元件平均寿命  $\mu$  的置信度为 0.9 的置信下限及置信上限.

15. 在 105 次射击中,有 60 次命中目标,试求命中率的置信度为 0.95 的置信区间.

16. 设总体  $X$  服从泊松分布.参数  $\lambda > 0$  未知,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自总体  $X$  的样本,试在  $n$  充分大的条件下,求参数  $\lambda$  的置信度近似为  $1-\alpha$  的置信区间.

17. 对于方差  $\sigma^2$  已知的正态总体来说,问需要取容量  $n$  为多大的样本,才能使总体均值  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间长度不大于  $L$ ?

18. 某车间生产的螺杆直径服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,今随机地从中抽取 5 支测得直径为(单位:mm)

22.3	21.5	20.0	21.8	21.4
------	------	------	------	------

(1) 当  $\sigma = 0.3$  时,求  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间;

(2) 当  $\sigma$  未知时,求  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 当  $\sigma$  未知时,求  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信上限和置信下限.

19. 为了了解一台测量长度的仪器的精度,对一根长为 30 mm 的标准金属棒进行 6 次重复测量,测得结果如下(单位:mm)

30.1	29.9	29.8	30.3	30.2	29.6
------	------	------	------	------	------

假定测量值服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,

(1) 若仪器无系统偏差,即  $\mu = 30$ ,求  $\sigma^2$  的置信度为 0.95 的置信区间;

(2) 若  $\mu$  未知,求  $\sigma^2$  的置信度为 0.95 的置信区间.

20. 冷拔铜丝的折断力服从正态分布,从一批铜丝中任取 10 根试验折断力,得数据为:573, 572, 568, 577, 570, 572, 596, 584, 582, 570, 求标准差  $\sigma$  的置信度为 0.95 的置信区间和置信下限.

21. 设总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  为来自总体  $X$  的一组样本的观测值,样本方差  $s^2 = 2$ . 分别求  $\sigma^2$  和  $D\left(\frac{X^2}{\sigma^2}\right)$  的置信度为 0.95 的置信区间.

22. 设  $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$  和  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$  是分别来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的独立样本,在  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  都已知的情形下,求两总体均值差  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间、置信上限和置信下限.

23. 随机地从甲批导线中抽取 4 根,从乙批导线中抽取 5 根,测得其电阻(单位:  $\Omega$ )为:

甲批导线: 0.143 0.142 0.143 0.137

乙批导线: 0.140 0.142 0.136 0.138 0.140

设测试数据分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , 试求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 0.95 的置信区间.

24. 从某地区随机地选取男、女各 100 名,以估计男、女平均身高之差,测量并计算得男子身高的样本均值为 1.71 m, 样本标准差为 0.035 m, 女子身高的样本均值为 1.67 m, 样本标准差为 0.038 m, 试求男、女身高平均值之差的置信度为 0.95 的置信区间.

25. 设  $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$  和  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$  是分别来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的独立样本,在  $\mu_1$  和  $\mu_2$  都已知的情形,求方差比  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间、置信下限和置信上限.

26. 设两位化验员 A 和 B 独立地用相同的方法对某种聚合物含氯量各做 10 次测定,其测定值的样本方差分别为  $s_A^2 = 0.5419$ ,  $s_B^2 = 0.6065$ , 设  $\sigma_A^2$  和  $\sigma_B^2$  分别为 A 和 B 所测定的测定值总体的方差,总体均服从正态分布,求方差比  $\sigma_A^2 / \sigma_B^2$  的置信度为 0.95 的置信区间、置信下限和置信上限.

27. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  和  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  分别是来自于正态总体  $N(\mu_1, 25)$  和  $N(\mu_2, 25)$  的两个独立简单样本,为使  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 0.9 的置信区间长度不超过 2, 问样本容量  $n$  应取多大?

## 自测题 7



## 习题 7 参考答案

