西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

平稳过程

言浬　特聘研究员
网络空间安全学院

2025年6月

严平稳过程

1. **定义：** 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程, 如果对于任意的常数h和任意正整数n, 及任意的n维随机向量$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$和$(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h))$具有相同的分布, 则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$具有平稳性, 并同时称此过程为严平稳过程。

平稳过程的参数集T, 一般为$(-\infty, +\infty)$, $[0, +\infty)$, $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $\{0, 1, 2, \cdots\}$, 以下如无特殊说明，均认为参数集$T=(-\infty, +\infty)$.

当定义在离散参数集上时, 也称过程为严平稳时间序列。

例. 设{X_n, n≥0}是独立同分布的随机变量序列, 且 $X_n \sim U(0,1)$,n=1,2,…, 讨论{X_n, n≥0}是否为严平稳时间序列，并求$E(X_n)$与$E(X_n X_m)$, n、m=0, 1, 2, ….

解：设$U(0,1)$的分布函数为$F(x)$,则对任意的正整数k,任意$0<n_1<n_2<\dots<n_k$,

$$\left(X_{n_1}, X_{n_2}, \cdots X_{n_k}\right) \quad \left(X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, \cdots X_{n_k+h}\right)$$

的分布函数均为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_k) = P(X_{n_1} \le x_1, \cdots, X_{n_k} \le x_k)$$

$$= P(X_{n_1+h} \le x_1, \cdots, X_{n_k+h} \le x_k) = \prod_{j=1}^{k} F(x_j)$$

可见，满足定义条件，故{X_n, n≥0}是严平稳时间序列。

因为$X_n \sim U(0,1)$，且相互独立，所以 $E(X_n)=1/2$，

$$E(X_n X_m) = \begin{cases} E(X_n^{\ 2}) & n=m \\ E(X_n)E(X_m) & n \ne m \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4} & n=m \\ \dfrac{1}{4} & n \ne m \end{cases}$$

定理 如果$\{X(t), t\in T\}$是严平稳过程，且对任意的$t\in T$，$E[X^2(t)]<+\infty$，则有

(1) $E[X(t)]=$常数，$t\in T$；

(2) $E[X(s)X(t)]$只依赖于$t-s$，而与$s, t\in T$的具体取值无关。

证：(1) 由*Cauchy-Schwarze*不等式

$$\{E[X(t)]\}^2\le E[X^2(t)]<+\infty,$$

所以$E[X(t)]$存在。

在严平稳过程的定义中，令$h=-s$，由定义$X(s)$与$X(0)$同分布，所以$E[X(t)]=E[X(0)]$为常数。一般记为μ_X.

（2） 由*Cauchy-Schwarze*不等式

$$\{E[X(s)X(t)]\}^2 \le E[X^2(s)]E[X^2(t)] < +\infty,$$

所以E[X(s)X(t)]存在。

$$E(X-aY)^2 \ge 0$$

$$EX^2 - 2aEXY + a^2EY^2 \ge 0$$

令$a = \dfrac{EXY}{EY^2}$

$$EX^2 - 2\frac{(EXY)^2}{EY^2} + \frac{(EXY)^2}{EY^2} \ge 0$$

$$EX^2 - \frac{(EXY)^2}{EY^2} \ge 0$$

$$\Longrightarrow (EXY)^2 \le EX^2 EY^2$$

(2) 由*Cauchy-Schwarze*不等式

$$\{E[X(s)X(t)]\}^2 \le E[X^2(s)]E[X^2(t)] < +\infty,$$

所以$E[X(s)X(t)]$存在。

在严平稳过程的定义中，令$h=-s$，由定义$(X(s),X(t))$与$(X(0),X(t-s))$同分布，即有$E[X(s)X(t)]=\boldsymbol{E}[X(0)X(t-s)]$

即$\boldsymbol{R}x(t,t+\tau)=\boldsymbol{E}[X(0)X(\tau)]=\boldsymbol{R}x(\tau)$

所以，$\boldsymbol{R}x(s,t)$只依赖于$t-s$，而与$s,t\in T$的具体取值无关。

进而，$Cx(\tau)=E\{[X(t)-\mu_x][X(t+\tau)-\mu_x]\}=Rx(\tau)-\mu_x^2$只与$\tau$有关；

$\sigma_x^2=C_x(0)=R_x(0)-\mu_x^2$ 为常数.

宽平稳过程

设$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程, 如果

（1） $E[X(t)]=\mu_x$（常数）， $t\in T$;

（2） 对任意的$t, t+\tau\in T$， $R_x(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$只依赖于$\tau$。

则称$\{X(t), t\in T\}$为宽平稳过程, 简称为平稳过程.

特别地，当T为离散参数集时，若随机序列$\{X_n(t)\}$满足$E(X_n^2)<+\infty$, 以及

（1） $E[X_n]=\mu_x$（常数）， $n\in T$;

（2） $R_x(m)=E[X_nX_{n+m}]$只与m有关。

称$\{X_n\}$为宽平稳随机序列或宽平稳时间序列。

2. 严平稳和宽平稳的关系

(1). 严平稳过程不一定是宽平稳过程，因为严平稳的过程不一定是二阶矩过程，但当严平稳过程是二阶矩过程时，则它一定是宽平稳过程。

(2). 宽平稳过程不一定是严平稳过程，但对于正态过程，两者是等价的

命题： {X(t)}为正态过程，则{X(t)}是严平稳过程$\Leftrightarrow${X(t)}是宽平稳过程。

证明： "$\Rightarrow$" 因高斯过程是二阶矩过程，由严平稳过程性质，显然成立。

"$\Leftarrow$" 由已知：$\mu_X(t)=\mu_X$，$R_X(t,t+\tau)$只与τ有关。

由严平稳过程定义，对任意的正整数n及任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，$t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h\in T$，要证：（$X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)$）与（$X(t_1+h),X(t_2+h),\ldots,X(t_n+h)$）同分布（*）。

而正态过程的分布由μ_X及$C_X(s,t)$决定，μ_X为常数。

$$R_X(t_i,t_j)=R_X(t_i+h,t_j+h)$$

$$C_X(t_i+h,t_j+h)=R_X(t_i+h,t_j+h)-\mu_X(t_i)\mu_X(t_j)$$

$$=R_X(t_i,t_j)-\mu_X^2=C_X(t_i,t_j)$$

即(*)式成立。

例1：（白噪声过程）设$\{X_n, n=0, \pm1, \cdots\}$是互不相关的时间序列，且$E[X_n]=0$, $D(X_n)=\sigma^2>0$, 讨论其平稳性.

解：因为$E[X_n]=0$,

$$E[X_nX_m]=\begin{cases}\sigma^2 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

故其均值函数$\mu_X(n)=0$为常数，其自相关函数 $\boldsymbol{R_X(n,m)}$只与$\boldsymbol{m-n}$有关，所以它是平稳时间序列。

例2：随机过程$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，a，$\omega_0$为常数，$\Theta$是在$(0, 2\pi)$上服从均匀分布的随机变量，则$\{X(t)\}$是平稳过程，并求其自相关函数.

解：由假设，Θ 的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}1/2\pi & 0<\theta<2\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

于是，X(t) 的均值函数为

$$E[X(t)]=E[a\cos(\omega_0 t+\Theta)]=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\Theta)\,d\theta=0$$

$$E[X(t)X(t+\tau)]=\frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos[\omega_0(t+\tau)+\Theta]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\cos\omega_0\tau\,d\theta+\int_0^{2\pi}\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\Theta]d\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cos\omega_0\tau$$

与t无关，可见{X(t)}为平稳过程，其自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2} a^2 \cos \omega_0 \tau \qquad -\infty < \tau < +\infty$$

一般地，设s(t)是一周期函数，Θ~U(0, T)称{X(t)=s(t+Θ)}为随机相位周期过程，则其为平稳过程。

$$E[s(t+\theta)]$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T s(t+\theta)d\theta \quad 令 t+\theta = x$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(x)dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^T s(x)dx + \frac{1}{T}\int_T^{t+T} s(x)dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^T s(x)dx + \frac{1}{T}\int_T^{t+T} s(x+T)dx \quad 令 x+T = y$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^T s(x)dx + \frac{1}{T}\int_0^t s(y)dy = \frac{1}{T}\int_0^T s(x)dx = C$$

如第11章ppt第22页所证，Rx(t, t+τ)只依赖于τ，和起始时间t无关。

例3：考虑随机电报信号，信号X(t)由只取 I 或-I的电流给出(图8-1画出了的一条样本曲线)．这里

$$P\{X(t)=+\mathrm{I}\}=p\{X(t)=-\mathrm{I}\}=1/2$$

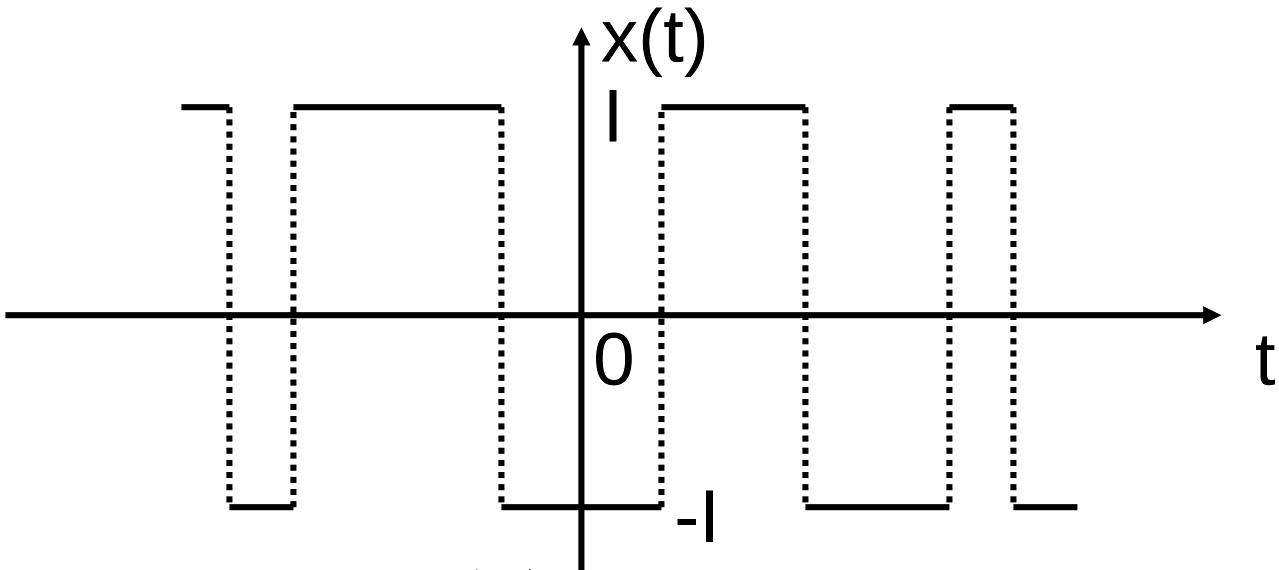


图 8-1

而正负号在区间(t, t+ρ)内变化的次数N(t, t+ρ)是随机的，且假设N(t, t+ρ)服从泊松分布, 亦即事件

$A_K \triangleq \{N(t,t+\rho)=k\}$ 的概率为

$$P(A_k)=\frac{(\lambda\rho)^k}{k!}e^{-\lambda\rho}, k=0,1,2,\cdots,$$

其中λ>0是单位时间内变号次数的数学期望, 试讨论X(t)的平稳性

解：显然，E[X(t)]=0。现在来计算E[X(t)X(t+τ)]，先设τ>0我们注意，如果电流在(t, t+τ)内变号偶数次，则X(t)和X(t+τ)必同号且乘积为I^2，因为事件

$\{X(t)X(t+\tau)=I^2\}$ 的概率为 $P(A_0)+P(A_2)+\cdots$，而事件

$\{X(t)X(t+\tau)=-I^2\}$ 的概率为 $P(A_1)+P(A_3)+\cdots$

$$E[X(t)X(t+\tau)]=I^2\sum_{k=0}^{\infty}P(A_{2k})-I^2\sum_{k=0}^{\infty}P(A_{2k+1})=I^2e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}-I^2e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=I^2e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}+I^2e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=I^2e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^{k}}{k!}=I^2e^{-2\lambda\tau}$$

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}$$

注意，上述结果与t无关，故若 τ <0时，只需令t'=t+ τ 则有

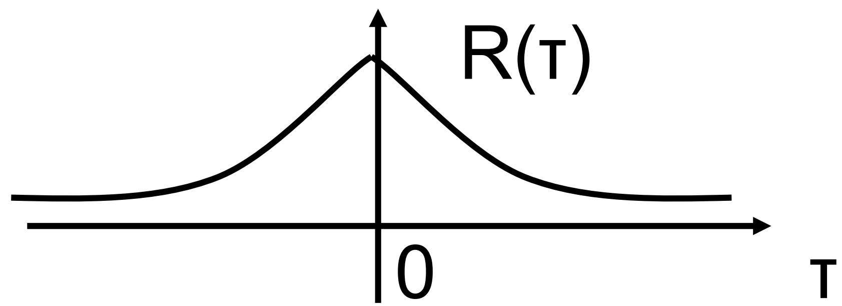
$$E[X(t)X(t+\tau)] = E[x(t'-\tau)x(t')] = E[x(t')x(t'+|\tau|)] = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$$

故这一过程的自相关函数为

$$E[X(t)X(t+\tau)] = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$$

它只与 τ 有关，因此随机电报信号X(t)是一平稳过程.

3. 自相关函数的性质



性质1. $R_X(0) \geq 0$；

证： $R_X(0)=E[X^2(t)] \geq 0$

性质2. $R_X(\tau)$ 为偶函数，即 $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$

证： $R_X(-\tau)=E[X(t)X(t-\tau)]= E[X(t-\tau)X(t)]= R_X(\tau)$

性质3. $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

证：由柯西-施瓦兹不等式

$$|R_X(\tau)|=|E[X(t)X(t+\tau)]| \leq \sqrt{E[X^2(t)]E[X^2(t+\tau)]}$$

$$=\sqrt{R_X(0)R_X(0)}=R_X(0)$$

性质4. 非负定性. 即对任意n， 任意实数$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 任意$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$有

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j)\, a_i a_j \ge 0$$

证：
$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j)\, a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} E[X(t_i)X(t_j)]\, a_i a_j$$

$$= E\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} X(t_i)X(t_j)\, a_i a_j \right\}$$

$$= E\left\{ [\sum_{i=1}^{n} X(t_i)\, a_i]^2 \right\} \ge 0$$

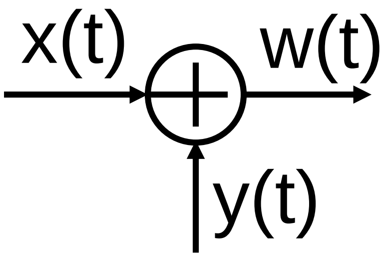
4. 平稳相关与互相关函数

（1）**定义**：设$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$，$t\in T$为两个平稳过程，如果它们的互相关函数$R_{XY}(t,t+\tau)$只是τ的函数，即$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau)$，则称$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$是平稳相关的，或称$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$是联合平稳过程。并称

$$RXY(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

为$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互相关函数。

例1： 如图所示，将两个平稳过程X(t)，Y(t)同时输入加法器中，加法器输出随机过程W(t)=X(t)+Y(t)，若X(t)与Y(t)平稳相关，则W(t)为平稳过程



证：$\mu_W(t)=E[X(t)]+E[Y(t)]=\mu_X+\mu_Y$ 为 常数

$E[W(t)W(t+\tau)]=E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}$

$=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t)Y(t+\tau)]+E[Y(t)X(t+\tau)]+E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)$

可见W(t)的自相关函数Rw(t, t+τ)只依赖于τ，所以 w(t)为平稳过程.

(2) 互相关函数的性质

性质1. $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$

证: $|R_{XY}(\tau)|^2 = \{E[X(t)Y(t+\tau)]\}^2$

$$\le E[X^2(t)]E[Y^2(t+\tau)] = R_X(0)R_Y(0)$$

性质2. $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$

证: $R_{XY}(-\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)] = E[Y(t)X(t+\tau)] = R_{YX}(\tau)$

例2：设X(t)=Asin(ωt+Θ)，Y(t)=Bsin(ωt+Θ−Φ)，A，B，Φ，ω为常数，Θ在(0，2π)上服从均匀分布，求$R_{XY}(\tau)$。

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

解：X(t)，Y(t)均为平稳过程.

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[A\sin(\omega t+\Theta)B\sin(\omega t+\omega\tau+\Theta-\Phi)]$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\Phi)\,d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau-\Phi)-\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta-\Phi)]\,d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cos(\omega\tau-\Phi)\cdot 2\pi=\frac{AB}{2}\cdot\cos(\omega\tau-\Phi)$$

所以，X(t)，Y(t)为联合平稳的。

同样的方法可算得

$$R_{YX}(\tau) = \frac{AB}{2} \cdot \cos(\omega\tau + \Phi)$$

平稳过程各态遍历性

- 随机过程{X(t),**t**∈**(-∞,+∞)**}的任一样本函数x(t)在区间[-T,T](T>0)上的函数均值为

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

- 在**t**∈**(-∞,+∞)**上的所有样本函数x(t)的平均值为

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

- 定义11.4.1 由前式定义的$\overline{x(t)}$称为随机过程X(t)对于参数t的平均，通常称为X(t)的时间平均

- 定义11.4.2 对与任意的t和实数τ，

$$\overline{X(t)X(t+\tau)}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$

称为随机过程X(t)的时间相关函数

- 例11.4.1 随机过程X(t)=acos(ω_0t+θ), -∞<t<+∞,a,ω_0是常数，$\theta \sim U(0,2\pi)$,求时间均值和时间相关函数

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{acos}(\omega_0 t + \theta)dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{asin\omega_0 Tcos\theta}{\omega_0 T} = 0$$

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a^2\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

- 例11.4.2 随机过程X(t)=acos(ω_0t+θ), -∞<t<+∞,a,ω_0是常数，$\theta \sim U(0,2\pi)$,试讨论X(t)的遍历性

$$E\big(X(t)\big) = E(a\cos(\omega_0 t + \theta)) = a\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)d\theta = 0$$

$$E(X(t)X(t+\tau)) = a^2\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

各态遍历性

- 平稳过程的数字特征可以由一个样本函数确定的这一性质称为各态历经性或遍历性
- 定义11.4.3 {X(t),t∈(-∞,+∞)}是平稳随机过程
  1. 如果$P\left(\overline{X(t)}=E\left(X(t)\right)=m_X\right)=1$，则称该过程均值具有遍历性
  2. 如果$P\left(\overline{X(t)X(t+\tau)}=R_X(\tau)\right)=1$，则称该过程自相关函数具有遍历性
  3. 均值和自相关函数具有遍历性的平稳过程称为遍历过程

- 引理 设随机过程{X(t),-∞<t<+∞}是一平稳过程，则它的时间均值$\overline{X(t)}$的数学期望和方差分别为

$$E\left(\overline{X(t)}\right)=E\left(\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right)=m_X=E(X(t))$$

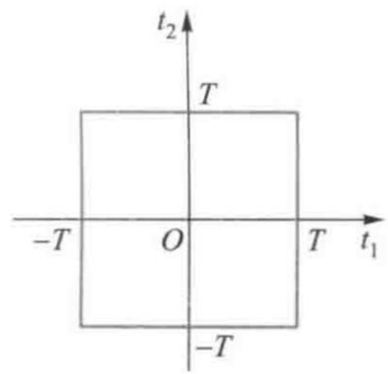
$$D\left(\overline{X(t)}\right)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_X(\tau)-m_X^2)d\tau$$

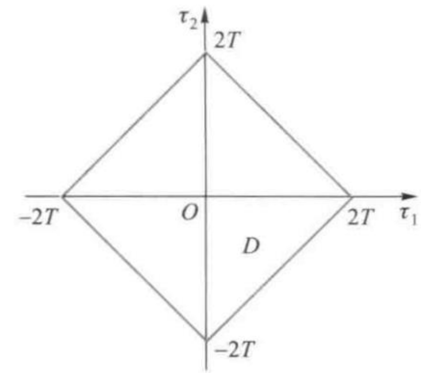
证 $D\left(\overline{X(t)}\right)=E(\overline{X(t)})^2-\left(E\left(\overline{X(t)}\right)\right)^2=E\left(\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right)^2-m_X^2$

$$=E(\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X(t)X(s)dsdt)-m_X^2$$

令$\tau = t - s, v = t + s \qquad t = \dfrac{\tau + v}{2}, s = \dfrac{v - \tau}{2}$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial \tau} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \dfrac{\partial s}{\partial \tau} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$





$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_X(t-s)\,ds\,dt = 4 * 1/2 \int_0^{2T}\int_0^{2T-\tau} R_X(\tau)\,dv\,d\tau$$

$$= 2\int_0^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{D\left(\overline{X(t)}\right)=E\left(\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t-s)dsdt\right)-m_X^2}$$

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t-s)dsdt=2\int_{0}^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)d\tau$$

于是

$$D\left(\overline{X(t)}\right)=\lim_{T\to+\infty}\int_0^{2T}\left(1/T-\tau/2T^2\right)R_X(\tau)d\tau-\int_0^{2T}\left(1/T-\tau/2T^2\right)m_X^2d\tau$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left(R_X(\tau)-m_X^2\right)d\tau$$

- 定理11.4.1(均值的遍历性定理)平稳过程{X(t),-∞<t<+∞}的均值具有遍历性的充要条件是

$$D\left(\overline{X(t)}\right)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_X(\tau)-m_X^2)d\tau=0$$

- 推论 若平稳过程{X(t),-∞<t<+∞}满足

$$\lim_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=m_X^2,\ \text{即}\lim_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$$

则{X(t),-∞<t<+∞}具有均值遍历性

- **证明** $\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > 0,$ 当 $\tau \geq T(\varepsilon)$ 时，有 $|C_X(\tau)| = \left|R_X(\tau) - m_X^2\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left|R_X(\tau)-m_X^2\right|\mathrm{d}\tau \qquad \boxed{\tau \in [0, 2T]}$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{T(\varepsilon)}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau + \int_{T(\varepsilon)}^{2T}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau\right] \qquad \boxed{C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\left[C_X(0)T(\varepsilon) + \varepsilon(2T - T(\varepsilon))\right] \qquad \boxed{|R_X(\tau)| \leq R_X(0)}$$

$$\leqslant \frac{T(\varepsilon)}{T}C_X(0) + 2\varepsilon < 3\varepsilon$$ 取 $$\boxed{T_0 = \max\left\{\frac{T(\varepsilon)}{2}, \frac{T(\varepsilon)C_X(0)}{\varepsilon}\right\}}$$

- 定理11.4.2(相关函数的遍历性定理)平稳过程{X(t),-∞<t<+∞}的自相关函数具有遍历性的充要条件是

$$\boxed{令Y_\tau(t)=X(t)X(t+\tau)}$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(R_\tau(\tau_1)-R_X^2(\tau))d\tau_1=0$$

其中 $R_\tau(\tau_1)=E(X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau_1+\tau))$

证明思路：$\boxed{R_X(\tau)=\overline{X(t)X(t+\tau)}\leftrightarrow E(Y_\tau(t))=\overline{Y_\tau(t)}\to 利用定理12.2}$

对固定的τ， 令$Y_\tau(t)=X(t)X(t+\tau)$, 且$\{Y_\tau(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，

$$E(Y_\tau(t))=R_X(\tau),\ \overline{Y_\tau(t)}=\overline{X(t)X(t+\tau)}$$

$$\boxed{D\left(\overline{Y(t)}\right) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(R_{Y_\tau}(\tau_1)-m_{Y_\tau}^2)d\tau_1 = 0}$$

故X(t)相关函数的遍历性等价于$Y_\tau(t)$的均值遍历性

$$(R_{Y_\tau}(\tau_1) = E(Y_\tau(t)Y_\tau(t+\tau_1))$$

$$= E(X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau_1+\tau)) = R_\tau(\tau_1)$$

- 在实际应用中通常只考虑t≥0的平稳过程，这时定理11.4.1的充要条件变为

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)(R_X(\tau)-m_X^2)d\tau = 0$$

说明1 遍历定理的重要价值

从理论上给出了如下保证:

一个平稳过程$X(t)$, 只要它满足如上定理便可以根据“以概率1成立”的含义, 从一次试验所得到的样本函数$x(t)$来确定出该过程的均值和自相关函数, 即 $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t=\mu_X$

和 $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=R_X(\tau).$

说明2 如果试验记录**$x(t)$**只在时间区间**$[0,T]$**给出，

则有下以无偏估计式: $\mu_X \approx \hat{\mu}_X = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t,$

$$R_X(\tau) \approx \hat{R}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

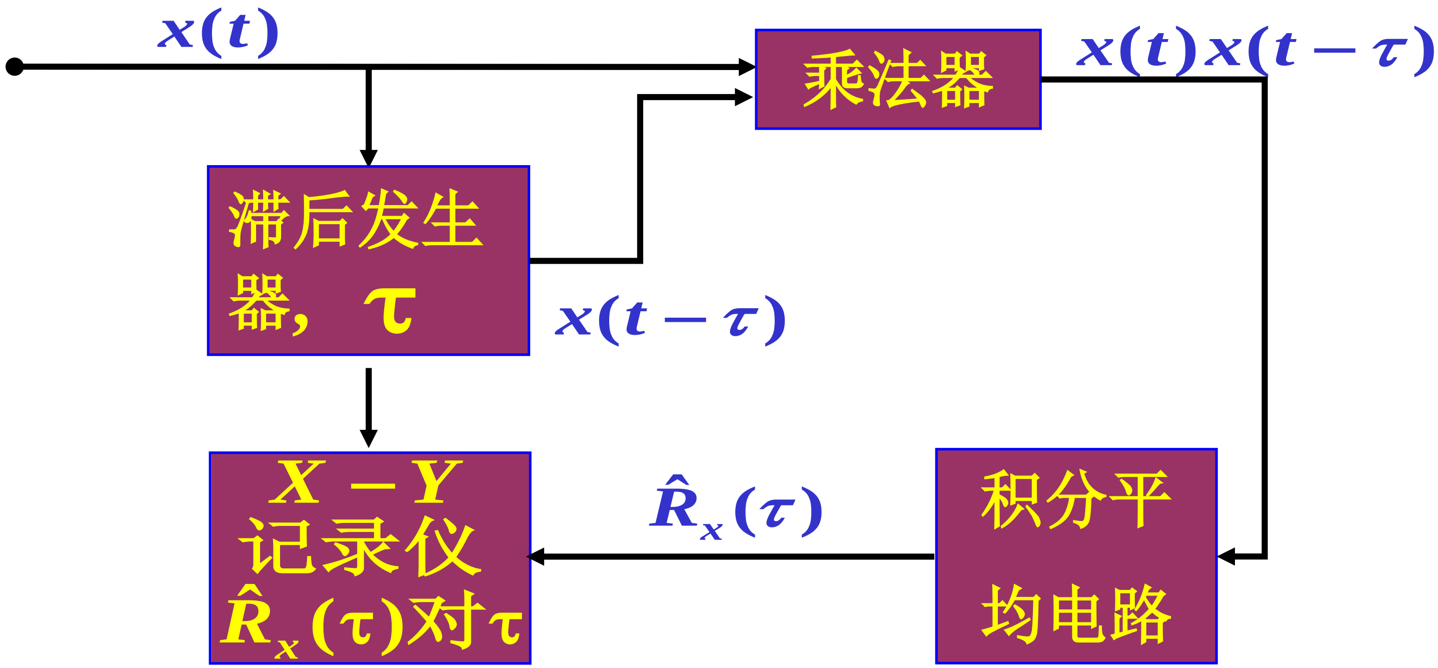
$$= \frac{1}{T-\tau}\int_\tau^T x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t,\ 0 \le \tau < T.$$

在实际中一般不可能给出**$x(t)$**表达式, 因而通常通过**模拟方法**或**数字方法**来测量或计算估计式的值.

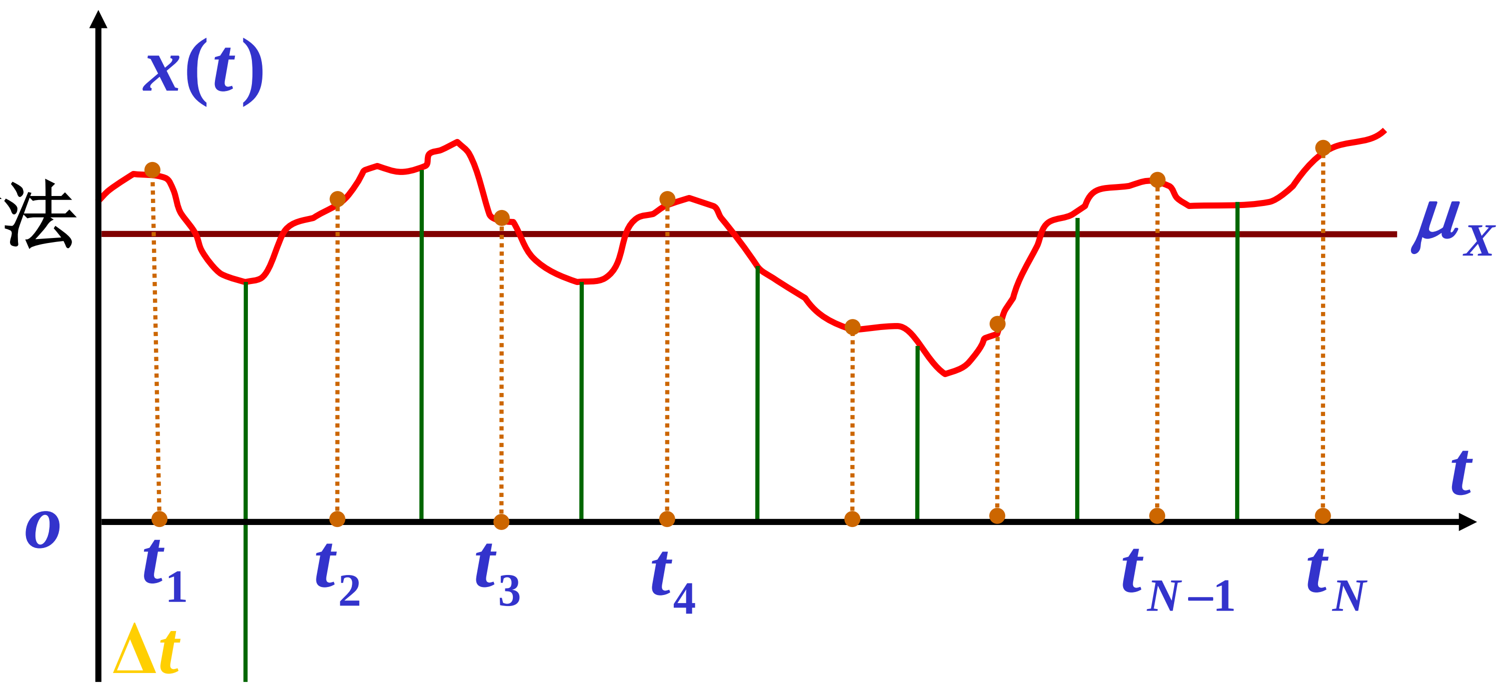
模拟自相关分析仪

这种仪器的功能是当输入样本函数 $x(t)$ 时，$X-Y$记录仪自动描绘出自相关函数的曲线.

方框图如图所示:



数字方法



把[0,T]等分为N个长为 $\Delta t = \dfrac{T}{N}$ 的小区间,

然后在时刻 $t_k = \left(k - \dfrac{1}{2}\right)\Delta t \ (k = 1, 2, \cdots, N)$ 对 $x(t)$ 取样,

得N个函数值 $x_k = x(t_k), k = 1, 2, \cdots, N$.

积分 $\mu_X \approx \hat{\mu}_X = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$ 可近似表示为基本区间Δt上的和， 则有无偏估计

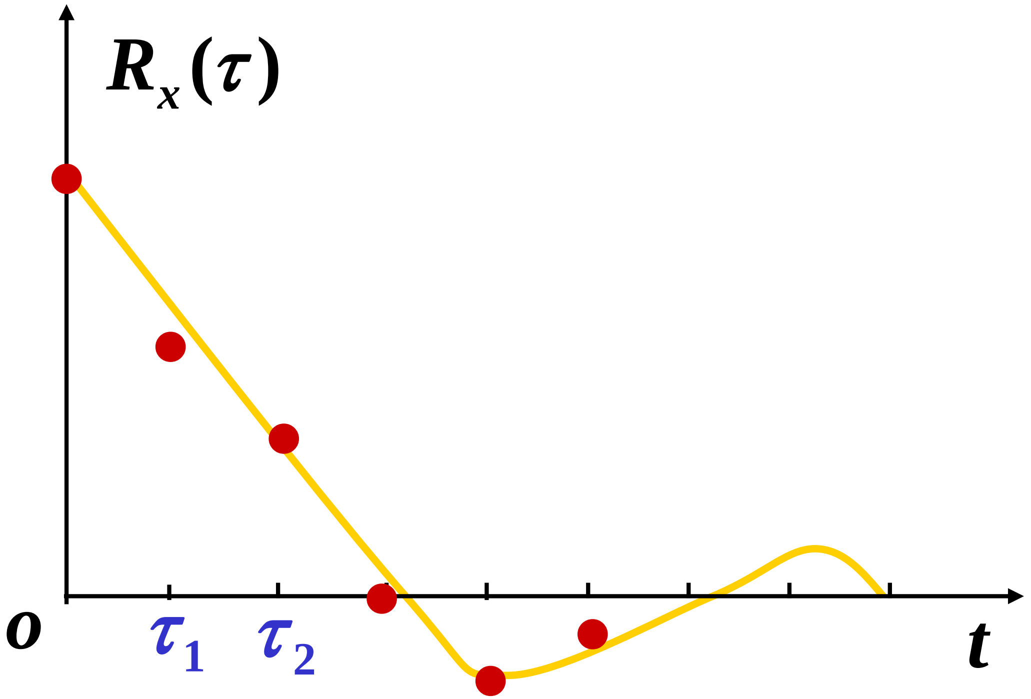
$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} x_k \Delta t = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k .$$

$\tau_T = r\Delta t$ 时,自相关函数的无偏估计

$$\hat{R}_X(\tau_r) = \frac{1}{T-\tau_r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r}\Delta t = \frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r}$$

$r = 0, 1, 2, \cdots, m, \quad m < N.$

由此估计式可算出自相关函数的一系列近似值，从而拟合出自相关函数的近似图形：



各态历经定理的条件是比较宽的, 工程中碰到的大多数平稳过程都能满足. 但要去验证它们是否成立却是十分困难的.

在实践中, 通常事先假定所研究的平稳过程具有各态历经性, 并从这个假定出发, 对由此而产生的各种资料进行分析处理, 看所得的结论是否与实际相符. 如果不符, 则要修改假设, 另作处理.