西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第七章 参数估计

言浬　特聘研究员
网络空间安全学院

2025年4月

参数估计

统计推断的基本问题

- 参数估计
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验
- 线性回归

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

7.1 点估计

什么是参数估计

参数通常是刻画总体某些概率特征的数量。

例如，正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 中的参数 μ 就是该分布的均值，参数 σ^2 是该分布的方差。

当该参数未知时，从总体中抽取一个样本，用某种方法对该未知参数进行估计，这就是参数估计。

例如，假设总体 $X \sim N(\mu，\sigma^2)$，若参数 μ 与 σ^2 未知。

先从该总体中抽样得到样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，然后构造样本函数，求出未知参数 μ 与 σ^2 的估计值或取值范围，这就是参数估计。

点估计　区间估计

假设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，其中分布函数 F 的表达式已知，但参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 未知.

若记 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，则总体分布可记为：

$$X \sim F(x;\theta)$$

参数θ 的取值范围称为参数空间，记为Θ.

例如 $X \sim B(1, p)$，p为未知参数，则参数空间为：

$$\Theta = \{ p \mid 0 < p < 1 \}.$$

又如 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2 为未知参数，则参数空间为：

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) \mid -\infty < \mu < \infty, \ \sigma^2 > 0\}$$

点估计的思想

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X\sim F(x;\theta_1,\ldots,\theta_m)$ 的一个样本，$\theta_1,\ldots,\theta_m$ 是未知参数。

构造 m 个:

$$\text{随机变量}\begin{cases}\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)\\ \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\\ \vdots \\ \hat{\theta}_m(X_1, X_2, \cdots, X_n)\end{cases}$$

当把样本观测值 x_1，x_2，…，x_n代入上述统计量里，就得到 m 个数值:

数值 $\begin{cases} \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$

称 $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ_k 的估计量 ($k = 1,2,\ldots,m$);

称 $\hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 θ_k 的估计值 ($k = 1,2,\ldots,m$)。

- **问题** 1) 如何构造统计量?

  2) 如何评价统计量?

- **常用的点估计方法**

  矩估计法

  极大似然估计法

  最小二乘估计法

  贝叶斯方法

7.1.1 矩估计

矩估计的思想

假设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 未知。且总体的 m 阶矩存在：

$$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=E(X^k)\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体 X 的一个样本，则由辛钦大数定律，有：

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m),\quad n\to\infty.$$

因此当n较大时有:

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \approx \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m).\ (k=1,2,\cdots,m)$$

令

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = A_1 \\ \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = A_2 \\ \quad\vdots \\ \mu_m(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = A_m \end{cases}$$

用样本矩k阶矩
作为
总体矩k阶矩
的估计量

其解 $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为 θ_k 的矩估计量

(k =1, 2, …, m).

例 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ 的样本，求未知参数 λ 的矩估计量。

解 因为总体 $X \sim P(\lambda)$，所以有

$$E(X) = \lambda$$

由矩估计原理，用样本一阶矩，即样本均值 $\bar{X}$ 代替总体均值 $E(X)$，得到

$$\bar{X} = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

命题 不论总体 X 服从什么分布，若其期望 μ 和方差 σ^2 存在，则 μ 和 σ^2 的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \triangleq \tilde{S}^2$$

修正的样本方差

例 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，求未知参数 μ, σ^2 的矩估计量。

解 因为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的期望是 μ，方差是 σ^2，所以由刚才的命题得到 μ, σ^2 的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \triangleq \tilde{S}^2$$

例 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体 $X \sim B(m, p)$ 的样本，求未知参数 p 的矩估计量.

解 因为总体 $X \sim B(m, p)$ 的一阶矩为:

$$E(X) = mp$$

令

$$mp = \bar{X}$$

求得 p 的矩估计量: $\hat{p} = \dfrac{1}{m}\bar{X}$

- **问题** 若 m, p 都未知，如何求 m，p 的矩估计?

例 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 的样本，求未知参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的矩估计量。

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S}, \ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S}$$

注 随机产生 $U(0,1)$ 的随机数40个：

0.4387,	0.3816,	0.7655,	0.7952,	0.1869,	0.4898,	0.4456,	0.6463,	0.7094,	0.7547,
0.2760,	0.6797,	0.6551,	0.1626,	0.1190,	0.4984,	0.9597,	0.3404,	,0.5853,	0.2238,
0.7513,	0.2551,	0.5060,	0.6991,	0.8909,	0.9593,	0.5472,	0.1386,	0.1493,	0.2575
0.8407,	0.2543,	0.8143,	0.2435,	0.9293,	0.3500,	0.1966,	0.2511,	0.6160,	0.4733

算得： $\bar{x}=0.5059275,\ \tilde{s}=0.2573$

计算得到 a,b 的矩估计值：

$$\hat{a}=\bar{x}-\sqrt{3}\tilde{s}=0.0602,\ \hat{b}=\bar{x}+\sqrt{3}\tilde{s}=0.9516$$

矩估计法小结

1) 原理直观;

2) 只用到总体矩，方法简单，若总体矩不存在，则无法使用矩估计法;

3) 矩估计基于大数定律，所以通常在大样本情况下，才有较好的效果.

例 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 X 的样本，总体 X 服从参数为 θ 的 Cauchy 分布，其密度函数为：

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

则 θ 的矩估计不存在。

7.1.2 最大似然估计

Fisher的极大似然思想

随机试验有多个可能结果，但在一次试验中，有且只有一个结果会出现。

如果在某次试验中，结果 ω 出现了，则认为该结果（事件$\{\omega\}$）发生的概率P$\{\omega\}$最大。

例如：字“鼿”读什么音?

- **问题** 如何将Fisher的极大似然思想应用于参数估计?

假设总体 X 是离散型随机变量，其分布律为:

$$P\{ X = a_k\} = p_k(\theta) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

其中 θ $(\theta \in \Theta)$ 是未知参数.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本。

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本观测值。?

即事件 $\{X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad \ldots, \quad X_n = x_n\}$ 发生了。

由 Fisher 的极大似然思想可以得到:

概率 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}$ 最大。

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}$$

$$= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\ldots P\{X_n = x_n\}$$

$$= P\{X = x_1\}P\{X = x_2\}\ldots P\{X = x_n\} = \boldsymbol{L(\theta)}$$

$$\boxed{P\{X = a_k\} = p_k(\theta) \quad (k = 1, 2, \ldots)}$$

定义1 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X}$ 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。

1) 若 $\boldsymbol{X}$ 是离散型总体，其分布律为:

$$\boldsymbol{P\{X = a_k\} = p_k(\theta) \quad (k = 1, 2, \ldots)}$$

令 $L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}, \theta \in \Theta$

2) 若 $\boldsymbol{X}$ 是连续型总体，其密度为 $\boldsymbol{f(x;\theta)}$。

令 $L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), \theta \in \Theta$

称 $\boldsymbol{L(\theta)}$ 为似然函数。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X \sim B(1, p)}$ 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。试写出似然函数。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ 的样本， $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。试写出似然函数。

定义2 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。

$L(\theta)\ (\theta \in \Theta)$ 是似然函数。若存在统计量

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

使得:

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计量，简记为**MLE (Maximum Likelihood Estimate).**

极大似然估计求解的一般过程

1) 根据总体分布的表达式，写出似然函数:

$$L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\quad(\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\in\Theta)$$

2) 因为 $L(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 与 $\ln L(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 有相同的极值点，称 $\ln L(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 为对数似然函数，记为 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$。求出 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$.

3) 求出 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 的极大值点，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 即为 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 的 **MLE.**

关于 3) 的说明

若 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 关于 θ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) 可导，则称

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)}{\partial\theta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)}{\partial\theta_m} = 0 \end{cases}$$

为对数似然方程组。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{B}(\mathbf{1}, \boldsymbol{p})$ 的样本，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 是样本观测值。试求未知参数 $\boldsymbol{p}$ 的极大似然估计。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ 的样本，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 是样本观测值。试求未知参数 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2$ 的极大似然估计。

例 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自总体 $X \sim f(x;\theta,c)$ 的样本观测值，其中

$$f(x;\theta,c)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}(x-c)}, & x \geq c,\\ 0, & x < c\end{cases}$$

试求未知参数θ，c 的极大似然估计。

解 似然函数为

$$L(\theta,c)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta,c)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}(x_i-c)}$$

$$=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}n(\bar{x}-c)},\quad c\le x_{(1)}.$$

对数似然函数为

$$l(\theta,c)=\ln L(\theta,c)=-n\ln\theta-\frac{n}{\theta}(\bar{x}-c),\quad c\le x_{(1)}.$$

对数似然方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(\theta,c)}{\partial\theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{n}{\theta^2}(\overline{x}-c) = 0 \\ \dfrac{\partial l(\theta,c)}{\partial c} = \dfrac{n}{\theta} = 0 \end{cases}$$

- 问题 怎么解上述对数似然方程组?

$$\frac{\partial l(\theta,c)}{\partial c} = \frac{n}{\theta} > 0 \Longrightarrow$$ $l(\theta, c)$ 关于 c 严格单调增加

似然函数

$$L(\theta,c)=\theta^{-n}e^{\frac{-1}{\theta}n(\bar{x}-c)},c\le x_{(1)}$$

c 的极大似然估计为 $\hat{c}=x_{(1)}$

将 **c** 的极大似然估计代入对数似然方程

$$\frac{\partial l(\theta,c)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n}{\theta^2}(\bar{x}-c)=0$$

得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\bar{x}-x_{(1)}$

- **问题** 未知参数的极大似然估计唯一吗?

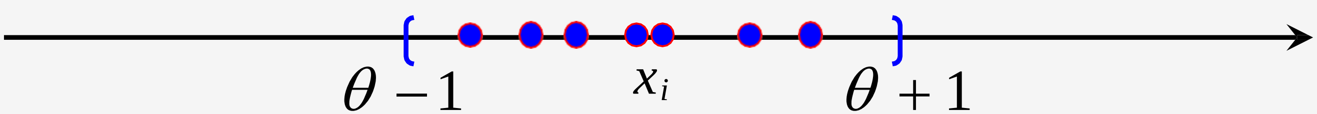
例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X \sim U(\theta-1, \theta+1)}$ 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。试求 θ 的极大似然估计。

解 因为总体的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{if } \theta-1<x<\theta+1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=2^{-n} \quad \theta\in ?$$



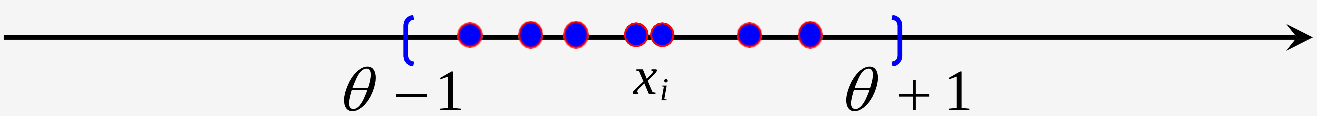
7.1.2 最大似然估计

解 因为总体的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{if } \theta-1<x<\theta+1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=2^{-n} \qquad x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}+1$$



即当 $x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}+1$ 时，似然函数 $\boldsymbol{L(\theta)}$ 取得最大值 2^{-n} 。

所以区间 $(x_{(n)}-1,\ x_{(1)}+1)$ 内任一点都是 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计。

极大似然估计的不变性

设 $\hat{\theta}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，

且有单值反函数：

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})$$

则 $u(\hat{\theta})$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的极大似然估计。

例 假设袋中有黑球和白球，其中白球所占比例为 $p(0 < p < 1)$ 未知。每次有放回地从袋中随机摸取 1 个球出来观测其颜色后放回，共摸了 m 个球，其中白球个数记为X。共重复了 n 次这样的试验，得到样本观察值为$x_1, x_2, \ldots, x_n$，试求

(1) p 的极大似然估计；

(2) 袋中白球和黑球数之比 $\boldsymbol{R}$ 的极大似然估计。

解 (1) 先求 p 的极大似然估计

因为总体 $X \sim B(m, p)$，所以似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}$$

$$=p^{n\bar{x}}(1-p)^{n(m-\bar{x})}\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}$$

对数似然函数为

$$l(p)=\ln L(p)=n\overline{x}\ln p+n(m-\overline{x})\ln(1-p)+\ln\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}$$

对数似然函数方程

$$\frac{dl(p)}{dp}=\frac{n\overline{x}}{p}-\frac{n(m-\overline{x})}{1-p}=0$$

解得未知参数 $\boldsymbol{p}$ 的极大似然估计为 $\hat{p}=\dfrac{\overline{x}}{m}$

(2) 求白球和黑球数之比 $\boldsymbol{R}$ 的极大似然估计

因为白球和黑球数之比

$$R = \frac{p}{1 - p}$$

所以由极大似然估计的不变性，有

$$\hat{R} = \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = \frac{\overline{x}}{m - \overline{x}}$$

- 问题 矩估计有不变性吗?

7.1.3 抽样分布定理

样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ⇨ 总体 $X \sim F(x)$

↑

$\boxed{\text{统计量 } g(X_1, X_2, \dots, X_n)}$

问题

统计量 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从什么分布?

本讲主要介绍在正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 下，样本均值、样本方差 S^2 及其函数的分布.

定理1 设 X_1, X_2, …, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则有

1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$;

2) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立;

3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

其中 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

定理2 设 X_1，X_2, …, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

由定理1有 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

设 $X \sim N(0, 1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

定理3 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本；

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，

且两个样本相互独立，则有

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n-1,\ m-1)$$

其中 S_1^2，S_2^2 分别是两个样本的样本方差.

设 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)$$

定理4 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本；$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且两个样本相互独立，则有

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

其中 $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分别是两个样本的样本均值和样本方差，且

$$S_\omega^2 = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}, \quad S_\omega = \sqrt{S_\omega^2}$$

证明 由定理 1 知

$$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}), \quad \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

另外又有

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

由 χ^2 分布的可加性有

$$\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n+m-2)$$

因为 $\bar{X},\bar{Y}$ 与 S_1^2, S_2^2 相互独立，由 t 分布定义有：

$$\frac{\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}/(n+m-2)}}\sim t(n+m-2)$$

由 χ^2 分布的可加性有

$$\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n+m-2)$$

因为 $\bar{X},\bar{Y}$ 与 S_1^2, S_2^2 相互独立，由 t 分布定义有:

$$\frac{\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\cancel{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\cancel{\sigma}^2}/(n+m-2)}}\sim t(n+m-2)$$

由 χ^2 分布的可加性有

$$\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n+m-2)$$

因为 $\bar{X},\bar{Y}$ 与 S_1^2,S_2^2 相互独立，由 t 分布定义有:

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$$

例 从总体 $N(20, 16)$ 抽取了样本容量为25的样本，求样本均值落在 18与22之间的概率。

解 由定理1有 $\bar{X} \sim N(20, \frac{16}{25}) \Rightarrow \frac{\bar{X}-20}{4/5} \sim N(0,1)$

由此得到

$$P\{18 < \bar{X} < 22\} = P\left\{\frac{18-20}{4/5} < \frac{\bar{X}-20}{4/5} < \frac{22-20}{4/5}\right\}$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(-2.5)$$

$$= 2\Phi(2.5) - 1 = 0.9876$$

例 设 X_1，X_2，…，X_{10} 是来自总体 $N(0，4)$ 的独立同分布样本，试确定常数 C，使得

$$P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > C\} = 0.05.$$

例 设 X_1, X_2, …, X_n, X_{n+1} 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的独立同分布样本，记作

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

试证：

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1).$$

定理1的结论1）： $\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$

定理1的结论3）： $\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}$

例 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $N(0, 1)$ 的独立同分布样本，试确定常数C，使得

$$P\left\{ \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2} > C \right\} = 0.95.$$

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

7.2 估计量的评选标准

回顾

设总体 $X \sim U(a, b)$，a, b 是未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X 的一个样本。

用矩估计法，得到a, b 的矩估计量为：

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S}, \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S}$$

用极大似然估计法，得到a, b 的MLE为：

$$\hat{a} = \min_{1 \le i \le n}\{X_i\} = X_{(1)} \ , \quad \hat{b} = \max_{1 \le i \le n}\{X_i\} = X_{(n)}$$

7.2 估计量的评选标准

对同一个参数，不同方法得到的估计量可能不同。

- **问题** 1) 应该选用哪一个估计量?

  2) 用什么标准来评价一个估计量的好坏?

- **常用标准**

  1) 无偏性

  2) 有效性

  3) 相合性

1) 无偏性

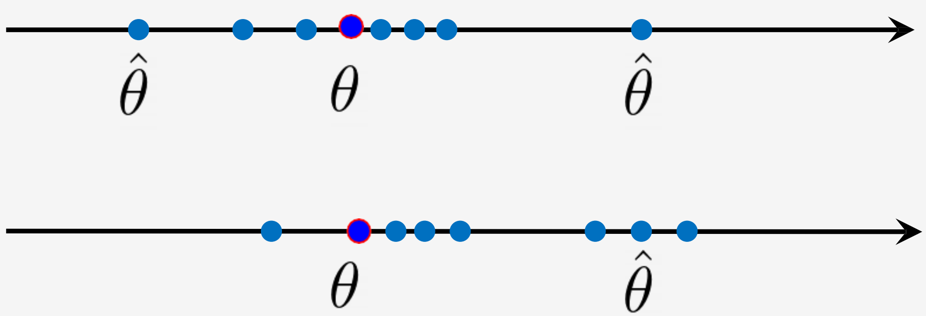
设总体 $X \sim F(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$，$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 X 的一个样本。

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的估计量。

- **问题** 直观上看，一个“好”的估计量应满足什么条件?

估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是随机变量

估计值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 会有“波动性”



- **问题** 直观上看，哪一个估计量好些?

定义1 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体

$X \sim F(x;\theta) \quad (\theta \in \Theta)$ 的一个样本。

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的估计量，

且期望 $E(\hat{\theta})$ 存在。

若对任意的 $\theta \in \Theta$，都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

例 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$存在，$\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots,$ $\boldsymbol{X_n}$ 是来自X 的一个样本。

试证明，无论总体 X 服从什么分布，样本 k阶矩

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 都是 μ_k 的无偏估计量.

特别

样本均值 $\bar{X}$ 总是总体期望 $\mu = E(X)$ 的无偏估计量.

例 设 $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$ 是来自总体 X 的样本，且总体的方差 $D(X)$ 存在。证明

1) 样本方差 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量。

2) $\tilde{S}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 不是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量。

证明： 由公式:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2}$$

得到

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)$$

$$=nE(X^2)-n\{D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2\}$$

$$=nE(X^2)-n[E(X)]^2-D(X)=(n-1)D(X)$$

故有:

$$E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=D(X)$$

所以样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量。

因为

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2$$

所以

$$E(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}E(S^2) = \frac{n-1}{n}D(X) \neq D(X)$$

即 $\tilde{S}^2$ 不是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量.

$\tilde{S}^2$ 不是总体方差 $D(X)$ 的无偏估计量. 但有

$$\lim_{n\to+\infty} E(\tilde{S}^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} D(X) = D(X)$$

即 $\tilde{S}^2$ 是总体方差 $D(X)$ 的渐近无偏估计量.

定义2 若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$，但有

$$\lim_{n\to+\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近无偏估计量.

例 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则估计量

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

分别是 μ, σ^2 的无偏估计量.

例 设总体 $X \sim EXP(\theta)$，密度函数为：

$$f(x:\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\qquad (\theta>0)$$

$\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ 是总体 X 的样本，证明：

$\bar{X}$ 与 $nX_{(1)}$ 均为θ的无偏估计量。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是正态总体 $X \sim N(\mu，\sigma^2)$ 的样本，试确定常数k，使得

$$k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|$$

是 σ 的无偏估计.

解 因为

$$E\left[k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|\right]=k\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\bar{X}|)$$

而 $X_i - \bar{X} = \frac{1}{n}[-X_1 - X_2 - \cdots + (n-1)X_i - \cdots - X_n]$

服从正态分布.

$$E(X_i - \bar{X}) = 0$$

$$D(X_i - \bar{X}) = \frac{1}{n^2}[D(X_1) + \cdots + (n-1)^2 D(X_i) + \cdots + D(X_n)]$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

所以有 $X_i - \bar{X} \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$

从而有

$$Z_i = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

由此得到

$$E|Z_i| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

综合上述结果，有

$$E\left[k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|\right]=k\sum_{i=1}^{n}E(|X_i-\bar{X}|)$$

$$=k\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sum_{i=1}^{n}E\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{|X_i-\bar{X}|}{\sigma}\right)$$

$$=k\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sum_{i=1}^{n}E(|Z_i|)=k\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}n\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$=k\sigma\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}=\sigma\Rightarrow\boxed{k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}}$$

关于无偏性的一些说明

1) 无偏性是对估计量的一个最常见的要求，通常也 是 “好” 估计的标准之一.

2)若 $E(\hat{\theta}) = a\theta + b$，$a, b$ 是常数，则 $\dfrac{\hat{\theta} - b}{a}$ 为 θ 的无偏估计量.

3) 无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，由估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 得到的估计值的平均恰好是θ。

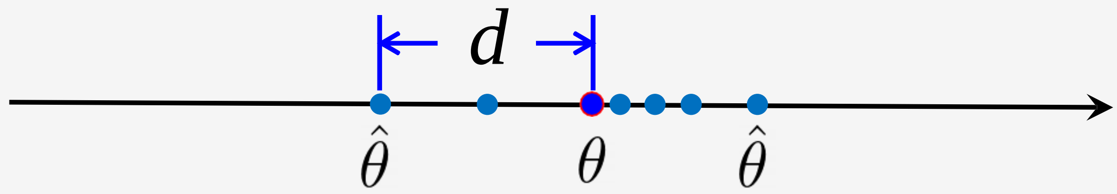
------没有系统误差.

无偏估计

若对任意的 $\theta\in\Theta$， 都有

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。



样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$\longrightarrow$ 估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim F(x;\theta)$ 的一个样本。

$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量.

直观上看，一个“好”的估计量，其误差

$$|\hat{\theta}-\theta|$$

绝对值运算不方便

应该小.

随机变量

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim F(x;\theta)$ 的一个样本。

$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量.

直观上看，一个“好”的估计量，其误差

$$\boxed{E(\hat{\theta}-\theta)^2}$$

应该小.

均方误差

$$E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2 = E\left\{\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]+\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]\right\}^2$$

$$= E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2$$

$$+2\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]+\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2$$

$$= E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2+\left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2$$

若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，则有：

$$E(\hat{\theta}-\theta)^2 = E[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]^2 = D(\hat{\theta})$$

2) 有效性

定义2 设

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

$$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

都是 θ 的无偏估计量，若有

$$D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例 设总体 $X \sim EXP(\theta)$，密度函数为：

$$f(x:\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\qquad (\theta>0)$$

$\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_n}$ 是总体 X 的样本，已知 $\bar{X}$ 与 $nX_{(1)}$ 均为 θ 的无偏估计量，问这两个估计量中哪个更有效?

解 因为指数分布 $EXP(\theta)$ 的数字特征是

$$E(X)=\theta,\quad D(X)=\theta^2$$

所以有

$$E(\bar{X})=\theta,\quad D(\bar{X})=\frac{\theta^2}{n}$$

因为 $X_{(1)}$ 服从参数为 θ/n 的指数分布，所以有

$$E(X_{(1)})=\frac{\theta}{n}\qquad D(X_{(1)})=(\frac{\theta}{n})^2$$

$$D(nX_{(1)})=\theta^2 \;\Rightarrow\; \bar{X} \text{ 较 } nX_{(1)} \text{有效}$$

产生 $X \sim EXP(\theta)$ (θ =4)的样本，样本容量为 n=40。

8.9486	**1.7001**	**2.8195**	**0.9987**	**1.3417**	**0.4049**	**0.4620**	**4.3845**
1.4339	**6.4818**	**13.9547**	**1.1825**	**2.7724**	**2.9365**	**0.4005**	**1.9781**
1.9272	**0.6059**	**0.8652**	**2.2016**	**6.7948**	**5.7096**	**0.4818**	**14.2070**
2.8542	**7.1369**	**0.0862**	**1.3548**	**2.7688**	**3.0108**	**11.2791**	**1.5311**
12.6395	**10.5553**	**2.6030**	**9.3433**	**0.8028**	**0.8058**	**1.3005**	**7.5921**

θ ($\theta = 4$) 的两个无偏估计值是：

$$\bar{x} = 4.0164 \qquad nx_{(1)} = 3.4480$$

重复产生样本容量为 40 的 $X \sim EXP(\theta)$ (θ =4) 的样本 20 次，则可得到 θ 的无偏估计值 $\bar{x}$ 20个，无偏估计值 $nx_{(1)}$ 也是 20 个

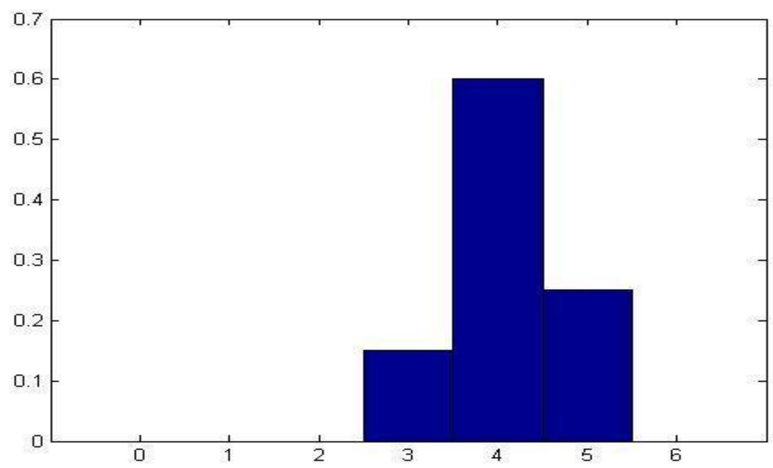
3.9087, 3.7937, 4.1877, 4.4015, 3.1399, 3.7808, 3.0470, 3.6807, 4.6275, 4.5048
4.6566, 4.7191, 3.8288, 4.4179, 4.9774, 3.7875, 3.6706, 3.8232, 4.1565, 3.2278

$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\overline{x}^{(i)} = 4.0169$$

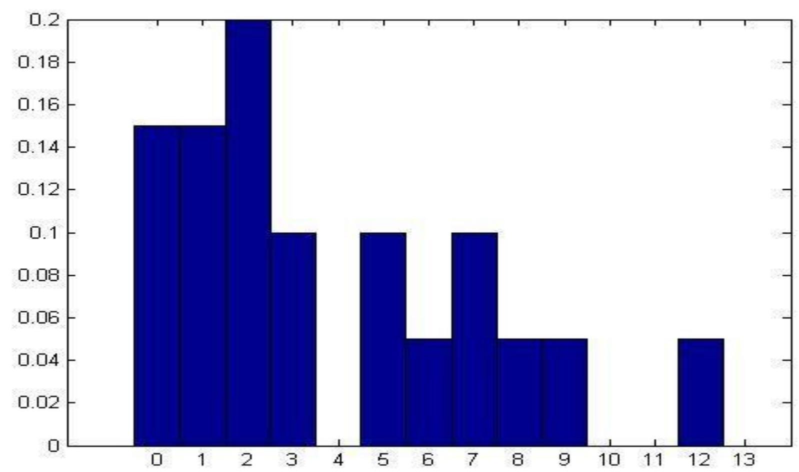
2.5703, 0.1472, 5.0964, 6.9163, 9.0218, 1.0104, 1.6287, 1.6161, 11.9018, 2.5159

0.0814, 0.7393, 4.7748, 5.7961, 1.9422, 7.0430, 7.6257, 0.4802, 1.7463, 0.6162

$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} nx_{(1)}^{i} = 3.6635$$



$\overline{x}$ 的直方图



$nx_{(1)}$ 的直方图

例 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体 X 的样本，且总体的方差 $D(X)$ 存在。

1) 设常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 满足: $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$,

证明: $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量;

2) 证明 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 较 $\hat{\mu}_1$ 有效.

算术平均比加权平均有效

3) 相合性

定义3 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量，

若对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geq\varepsilon\}=0$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量.

随着样本容量 n 的增加，估计量与未知参数真值的绝对误差较大的可能性越来越小

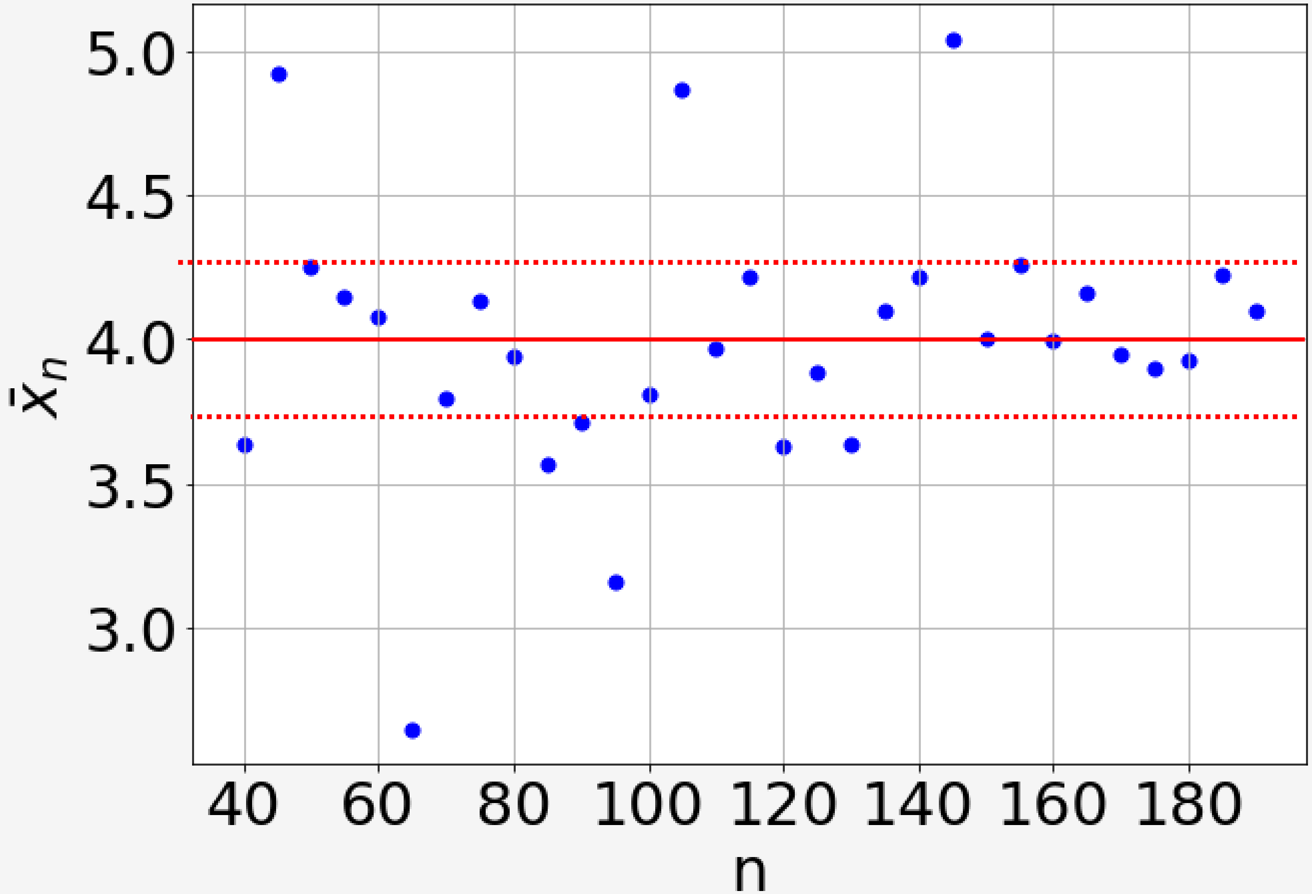
产生 $X \sim EXP(\theta)\ (\theta = 4)$的样本，样本容量分别为 n=40，45，50，55，…，190.

可计算得到 θ 在不同样本容量下的无偏估计值

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3.6373	4.9192	4.2534	4.1501	4.0769	2.6506	3.7957	4.1315	3.9426
3.5650	3.7101	3.1572	3.8059	4.8649	3.9652	4.2126	3.6263	3.8813
3.6348	4.1001	4.2145	5.0413	3.9987	4.2544	3.9972	4.1618	3.9442
3.8982	3.9283	4.2238	4.0956					

θ 在不同样本容量下的无偏估计值 $\bar{x}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$



相合性的相关结论

1) 样本 k 阶矩是总体 k 阶矩的相合估计量;

----大数定律证明

2) 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，且 $\lim\limits_{x\to\infty} D(\hat{\theta})=0$ ，

则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量;

----切比雪夫不等式证明

3) 矩估计量一般是相合估计量。

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

7.3 区间估计

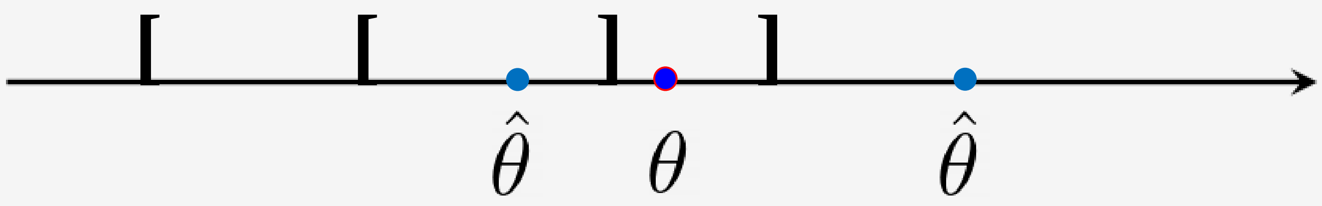
7.3 区间估计

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量.

随机变量

常数

不同样本值 x_1, x_2, ..., x_n 算得的 θ 的估计值不同.



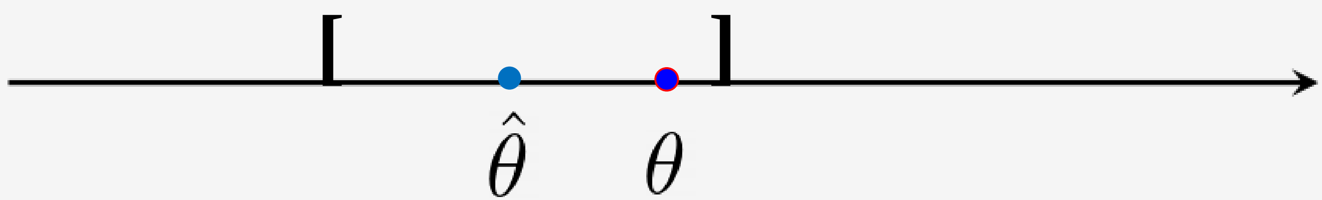
点估计方法的局限

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量。

1) 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ，有多高的精度?

2) 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ，有多高的可信度?

3) 未知参数 θ 落在什么范围内?



希望根据所给的样本确定一个**随机区间**，使其包含参数真值的**概率**达到指定的要求。

区间估计的定义

定义1 设总体 $X \sim F(x;\theta)$，θ 是待估计参数，若对给定的 α ($0< \alpha <1$)，存在两个统计量：

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

使得 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} = 1 - \alpha$，$\theta \in \Theta$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。$\underline{\theta}, \bar{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 称为置信度或置信水平.

区间估计的几点说明

1) 置信区间的区间长度 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 反映了估计的精度。$\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 越小，估计精度越高。

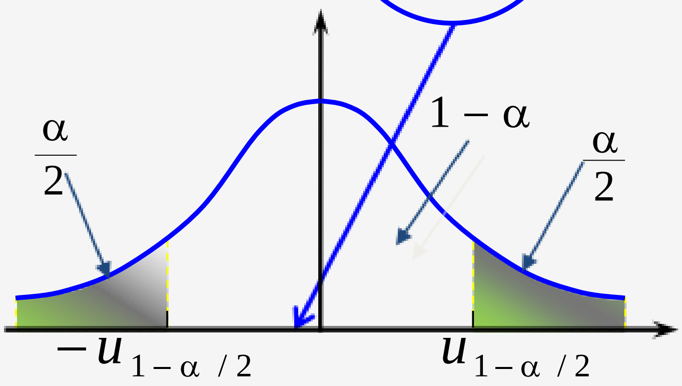
2) α 反映了估计的可信度。α 越小，$1-\alpha$ 越大，估计的可信度越高；但通常会导致 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 增大，从而导致估计的精度降低。

3) α 给定后，置信区间的选取不唯一，通常选取 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 最小的区间。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解 μ 的无偏估计为 $\bar{X}$，且

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$



例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解 μ 的无偏估计为 $\bar{X}$，且

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}) \Longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

由此可得 $P\{-u_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

即 $P\{\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

所以 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

若取 $n=16$，$\alpha=0.05$，查表得到 $u_{1-\alpha/2}=1.96$

则 μ 的置信度为 95% 的置信区间为

$$(\bar{X}-0.49,\ \bar{X}+0.49)$$

$(\bar{X}-0.49, \quad \bar{X}+0.49)$ —— μ 的置信区间

$\bar{X}-0.49$ —— μ 的置信下限

$\bar{X}+0.49$ —— μ 的置信上限

$1-\alpha$ —— 置信度（置信水平）

若得到一样本值，计算得到 $\bar{x}=1.5$

则可得到一个区间：$(1.01, \quad 1.99)$

它可能包含也可能不包含 μ 的真值

置信区间的含义

反复抽取容量为 16 的样本，每次都可以根据样本观测值$x_1, x_2, \ldots, x_n$算得样本均值 $\bar{x}$，得到一个区间

$$(\bar{x} - 0.49, \quad \bar{x} + 0.49)$$

此区间可能包含未知参数 μ 的真值，也可能没包含。

而包含未知参数 μ 的区间个数约占95%，不包含未知参数 μ 的区间个数约占5%.

分位数的选取

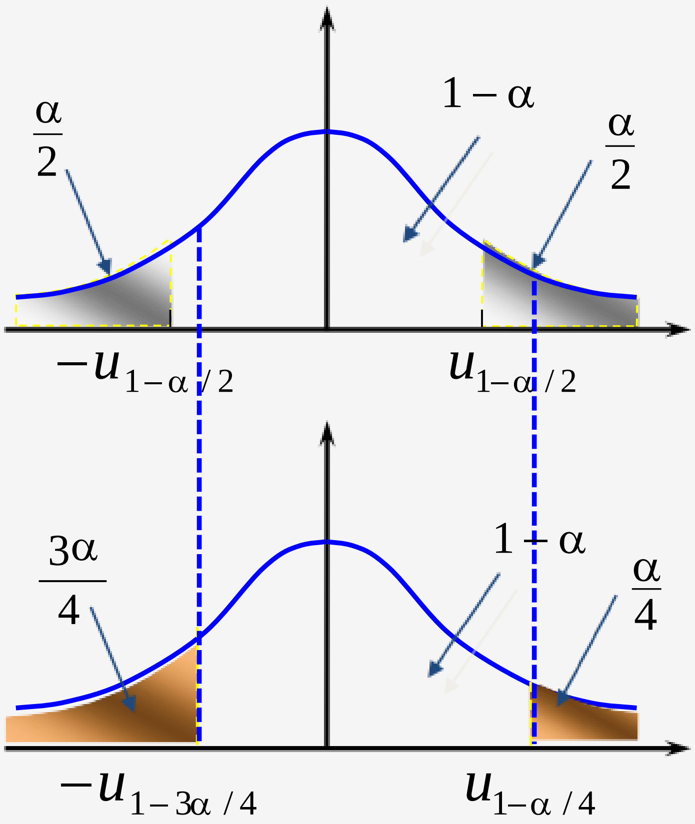
- **问题** 分位数为什么选取 $u_{1-\alpha/2}$?

当置信区间为 $(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$时,

区间长度为:

$$2\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$$

此时长度最短，即精度最高.



若取$\alpha = 0.05$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} - (-u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2\times 1.96$$
$$= 3.92$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{4}} - (-u_{1-\frac{3\alpha}{4}}) = 2.24 + 1.78$$
$$= 4.02$$

- 选取原则 对称原则.

求解置信区间的一般过程

1) 构造样本的一个函数:

$g(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ — 称为枢轴变量

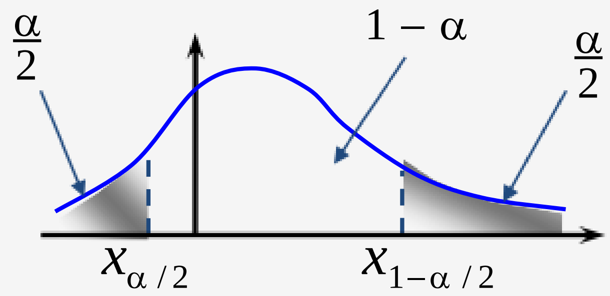
它含有待估参数θ，不含其它未知参数，其分布已知，且分布不依赖于待估参数 (常由θ的点估计出发考虑)。

例如 $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{1}{n})$

$$\Longrightarrow \quad g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

2) 对给定的置信度$1-\alpha$，确定$g(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$的分布的两个分位数：$x_{\alpha/2}$， $x_{1-\alpha/2}$，使得

$$P\{x_{\alpha/2}<g(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<x_{1-\alpha/2}\}=1-\alpha$$



3) 解 $x_{\alpha/2}<g(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)<x_{1-\alpha/2}$得置信区间

$$(\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),\quad \bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n))$$

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中参数 σ^2 已知，μ 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

思考 若已知 $\sigma^2 = 25$，$n = 16$，且由样本观测值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 计算样本均值 $\bar{x} = 1$，得到 μ 的置信区间 $(\bar{x} - 2.45, \bar{x} + 2.45)$，问该置信区间的置信度是多少?

正态总体参数的区间估计

一、一个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

1、方差 σ^2 未知，μ 的置信区间

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

因为 μ 的 MLE 是 $\bar{X}$，选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

正态总体参数的区间估计

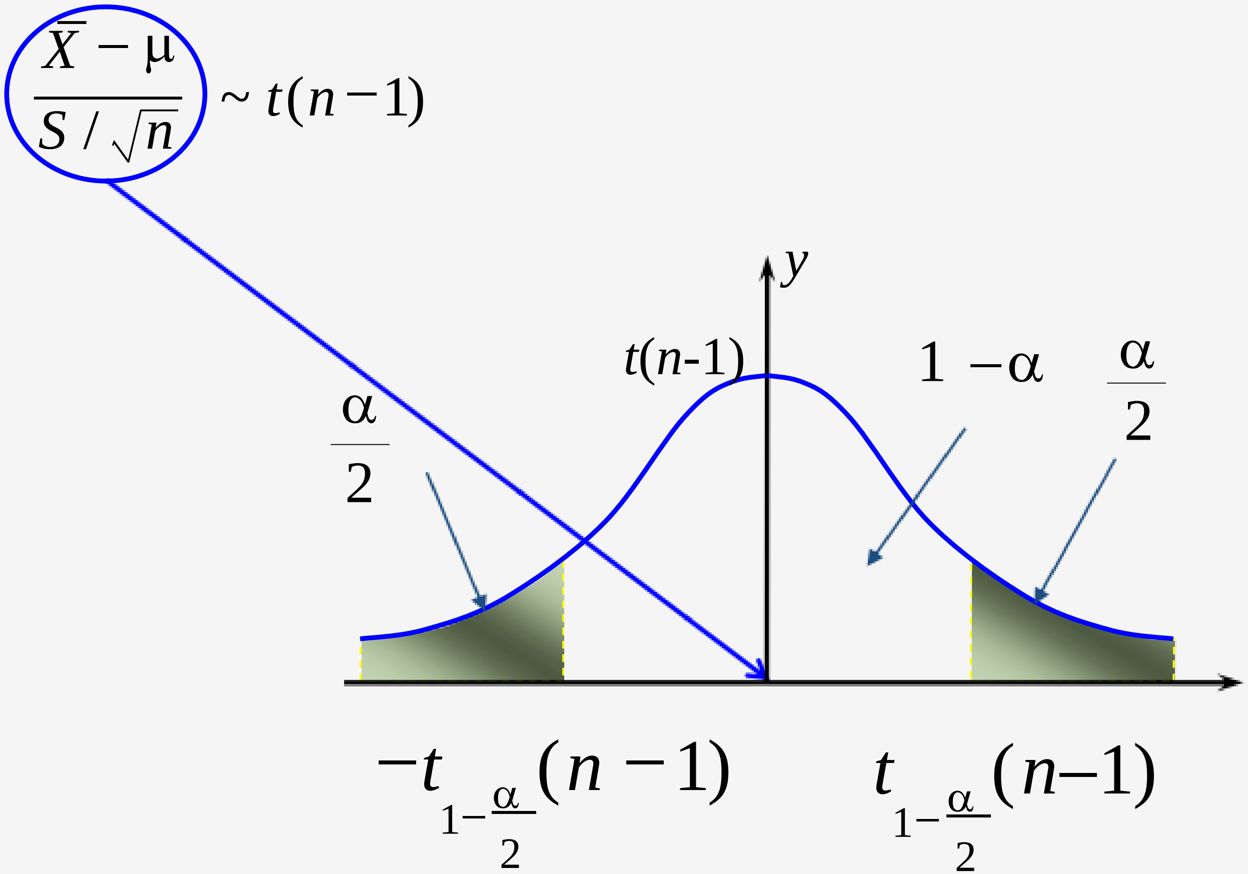
一、一个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

1、方差 σ^2 未知，μ 的置信区间

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

因为 μ 的 MLE 是 $\bar{X}$，选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
y
t(n-1)
$1-\alpha$
$\frac{\alpha}{2}$
$\frac{\alpha}{2}$
$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

即有 $P\left\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

解 $-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

得 μ 的置信度为1−α的置信区间为

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

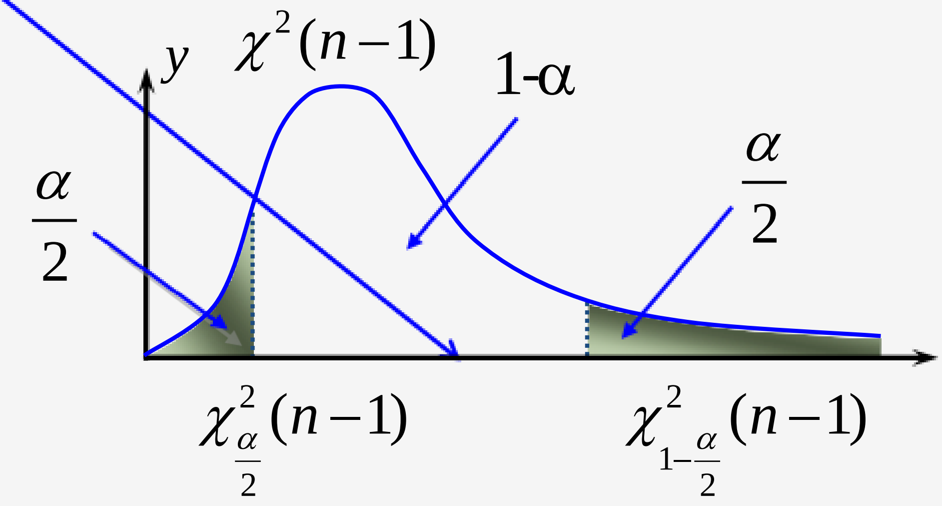
2、μ 未知，方差 σ^2 的置信区间

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ 未知，求 σ^2 的置信度为1−α的置信区间。

σ^2 的 MLE 是 $\tilde{S}^2$，选取枢轴变量

$$\frac{n\tilde{S}^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

即有$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

解 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

得 σ^2 的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

例 需要评估某轮胎厂生产的汽车轮胎的使用寿命。随机抽取了12只轮胎，实验测得它们的使用寿命(单位：万公里)如下：

4.61，5.02，4.38，5.2，4.85，4.6
4.58，4.7，5.1，4.68，4.72，4.32

假设汽车轮胎的使用寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。求未知参数 μ，σ^2 的置信度为95%的置信区间。

二、两个正态总体的情形

设研究对象的某指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。

如果外界条件发生了变化，则要研究外界条件的变化是否对该指标产生了影响。

设变化前指标 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，变化后指标 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

若外界条件的变化对指标产生影响，则应反映在参数 $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ 的改变上。

故有必要求 $\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计。

假设:

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,

$Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$ 是来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,

两个样本相互独立

$\bar{X}, S_1^2; \bar{Y}, S_2^2$ 分别是两个样本的样本均值和样本方差。

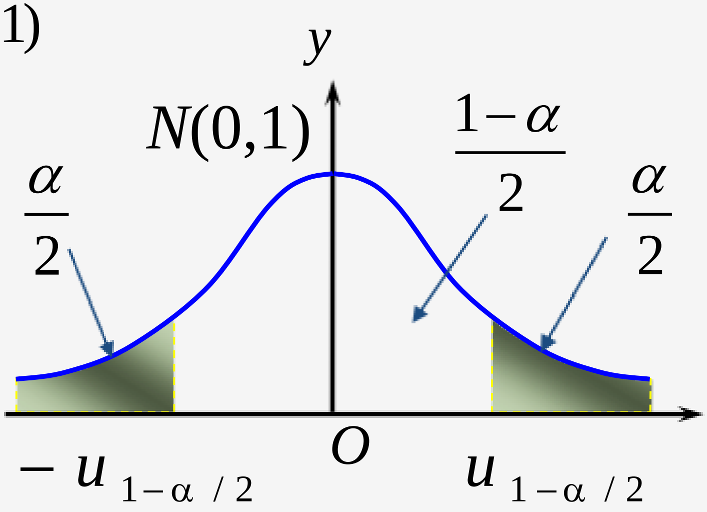
置信度为$1-\alpha$。

1、σ_1^2,σ_2^2 已知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

μ_1,μ_2 的 MLE 分别为 $\bar{X},\bar{Y}$

选取枢轴变量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$



1、σ_1^2,σ_2^2 已知，μ_1-μ_2 的置信区间

μ_1,μ_2 的 MLE 分别为 $\bar{X},\bar{Y}$

选取枢轴变量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

所以有 $P\{|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}|<u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$

解

$$\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}\right|<u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

得 μ_1-μ_2 的置信度为 1–α 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\quad (\bar{X}-\bar{Y})+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

2、σ_1^2,σ_2^2未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，μ_1-μ_2的置信区间

μ_1,μ_2 的 MLE 分别为 $\bar{X},\bar{Y}$

选取枢轴变量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$$

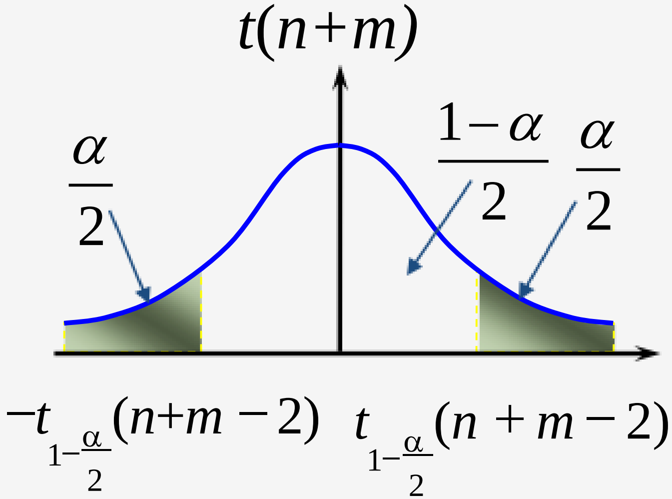
其中

$$S_\omega^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

即有

$$P\{|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\}=1-\alpha$$

解 $$|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$$



即有

$$P\{|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\}=1-\alpha$$

解 $|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$

得 μ_1-μ_2 的置信度为 1−α 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}t_{t-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right)$$

3、μ_1、μ_2未知，方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

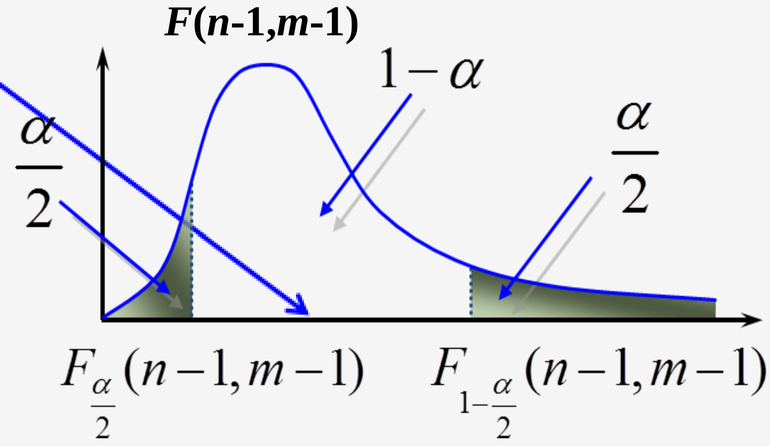
σ_1^2, σ_2^2的 MLE 分别为 $\tilde{S}_1^2, \tilde{S}_2^2$

$$\tilde{S}_1^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2, \quad \tilde{S}_2^2 = \frac{m-1}{m} S_2^2$$

选取枢轴变量

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n-1, \ m-1)$$

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$



$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

即有

$$P\{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1) < \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\} = 1-\alpha$$

由此可得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}, \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)} \right)$$

单侧置信区间的定义

定义2 设总体 $X \sim F(x;\theta)$，θ 是待估计参数，若对给定的 α ($0< \alpha <1$)，存在一个统计量：

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \text{（或 } \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \text{）}$$

使得 $P\{\underline{\theta} < \theta\} = 1 - \alpha$ （或 $P\{\theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha$ ）

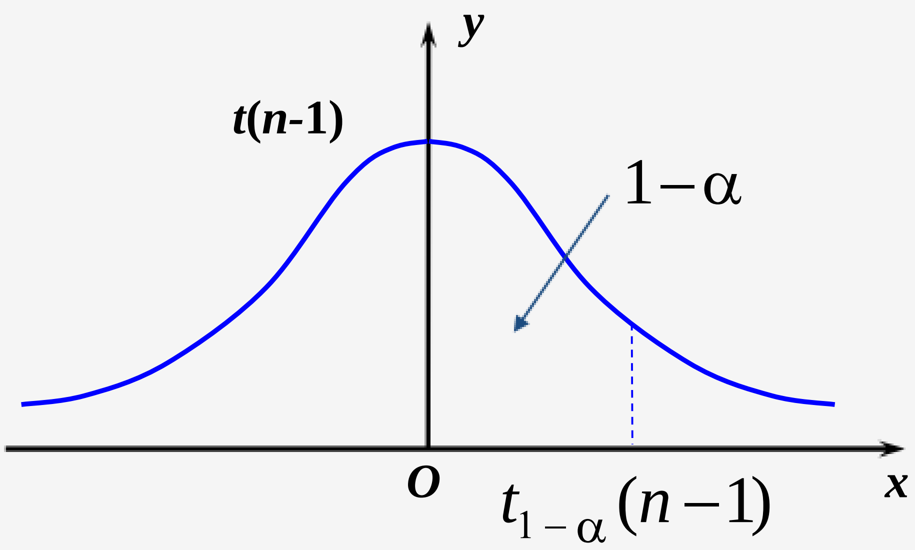
则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$（或 $(-\infty, \overline{\theta})$）为 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间。

$\underline{\theta}$ -- 单侧置信下限　$\overline{\theta}$ -- 单侧置信上限

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限。

μ 的 MLE 为 $\bar{X}$，选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限。

μ 的 MLE 为 $\bar{X}$，选取枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

即有 $P\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1)\} = 1-\alpha$

由此得到 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

双侧置信区间与单侧置信区间的联系

双侧置信区间

$$\left(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad +\infty\right)$$

$$\left(-\infty,\quad \bar{X}+t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)},\quad +\infty\right)$$

$$\left(-\infty,\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right)$$

谢谢大家！