$$P\{N(s+t)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\cdots$$

则称随机过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$是强度为 λ 的泊松过程.

假设随机过程$\{W(t),t\geqslant 0\}$满足:(1) $W(0)=0$;(2) $\{W(t),t\geqslant 0\}$是独立增量过程;(3) 增量 $W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$ $(\sigma>0)$,则称随机过程$\{W(t),t\geqslant 0\}$是布朗运动或维纳过程.

习题 11

1. 设 ξ 是一个随机变量,$\xi\sim B(1,p)$,$0<p<1$,试求随机过程 $X(t)=t\xi,-\infty<t<+\infty$ 的

(1) 一维分布函数 $F_0(x),F_{-1}(x),F_1(x)$;

(2) 二维分布函数 $F_{0,1}(x_1,x_2),F_{-1,1}(x_1,x_2)$.

2. 设 ξ 是一个随机变量,$\xi\sim U[0,1]$,试求随机过程 $X(t)=t\xi,-\infty<t<+\infty$ 的一维分布函数.

3. 利用投掷一枚硬币的试验定义随机过程为

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{出现正面},\\ 2t, & \text{出现反面}\end{cases}$$

假设出现“正面”和“反面”的概率各为$\frac{1}{2}$,试求随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的

(1) 一维分布函数 $F_{1/2}(x),F_1(x)$;

(2) n 维分布律.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的正态 $N(0,\sigma^2)$ 随机变量,试求随机序列 $Y(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$n=1,2,\cdots$的一维概率密度.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量,服从参数为 λ 的泊松分布,试求随机序列 $Y(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,n=1,2,\cdots$的

(1) 一维分布律;

(2) 二维分布律.

6. 设 A,B 是两个相互独立的标准正态随机变量,试求随机过程 $X(t)=At+B,-\infty<t<+\infty$ 的一维和二维概率密度.

7. 设 X 是一个随机变量,其分布函数为 $F(x)$,试求随机过程 $X(t)\equiv X,-\infty<t<+\infty$ 的一维和 n 维分布函数.

8. 设$\{X(t),t\in T\}$是一随机过程,a 是任一实数,定义随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\leqslant a,\\ 0, & X(t)>a,\end{cases}\quad t\in T$$

试将 $Y(t)$的均值函数和自相关函数用 $X(t)$的一维分布函数 $F_t(x)$和二维分布函数 $F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)$表示出来.

9. 设随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$只有四条样本曲线 $X(t,\omega_1)=1,X(t,\omega_2)=-1,X(t,\omega_3)=\sin t$,$X(t,\omega_4)=\cos t$,且 $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{4},i=1,2,3,4$. 求此随机过程的均值函数与自相关函数.

10. 求随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的均值函数、自相关函数、自协方差函数、方差函数和标准差函数,

(1) 对第 1 题中的 $X(t)$;

(2) 对第 2 题中的 $X(t)$;

(3) 对第 3 题中的 $X(t)$;

(4) 对第 6 题中的 $X(t)$.

11. 求随机序列 $\{Y(n), n=1,2,\cdots\}$ 的均值函数和自协方差函数,

(1) 对第 4 题中的 $Y(n)$;

(2) 对第 5 题中的 $Y(n)$.

12. 设 X 和 Y 是随机变量,$E(X)=\mu_1, E(Y)=\mu_2, D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2, \rho(X,Y)=\rho$,试求随机过程 $Z(t)=X+Yt, -\infty<t<+\infty$ 的均值函数和自协方差函数.

13. 设随机变量 A 服从参数为 λ 的指数分布,试求随机过程 $X(t)=e^{-At}, t>0$ 的

(1) 一维概率密度;

(2) 均值函数;

(3) 自相关函数.

14. 设 $\{X(t), t\in T\}$ 是一个二阶矩过程,$\varphi(t)\,(t\in T)$ 是一个普通函数,$Y(t)=X(t)+\varphi(t)$,$Z(t)=\varphi(t)X(t)$,

(1) 证明 $\{Y(t), t\in T\}$ 和 $\{Z(t), t\in T\}$ 都是二阶矩过程;

(2) 用 $X(t)$ 的均值函数和自协方差函数分别表示 $Y(t)$ 和 $Z(t)$ 的均值函数、自协方差函数和互协方差函数.

15. 证明第 4 题中的随机序列 $\{Y(n), n=1,2,\cdots\}$ 是独立增量序列,也是正交增量序列.

16. 证明第 5 题中的随机序列 $\{Y(n), n=1,2,\cdots\}$ 是独立增量序列,但不是正交增量序列.

17. 设随机变量 $\xi\sim U[-\pi,\pi]$,$X(t)=\sin t\xi, Y(t)=\cos t\xi, T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,证明:随机过程 $X_T=\{X(t), t\in T\}$ 与 $Y_T=\{Y(t), t\in T\}$ 互不相关.

18. 在直线上做随机运动的质点,如果在某时刻质点位于整数 i,则下一步质点分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率向右移动一格到 $i+1$,或向左移动一格到 $i-1$,若以 $X(n)$ 表示时刻 n 时质点的位置,则 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程,称为随机游动,试证明这个过程是马尔可夫过程.

19. 设 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t, t\in T=(-\infty,+\infty)$,其中 A,B 是相互独立且同服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量,ω 是实常数,

(1) 证明 $X_T=\{X(t), t\in T\}$ 是正态过程;

(2) 求 $X_T=\{X(t), t\in T\}$ 的均值函数和自协方差函数.

20. 设 $X_T=\{X(t), t\geqslant0\}$ 和 $Y_T=\{Y(t), t\geqslant0\}$ 是两个相互独立的分别有强度 λ 和 μ 的泊松过程,试证明 $Z_T=\{X(t)+Y(t), t\geqslant0\}$ 是具有强度 $\lambda+\mu$ 的泊松过程.

21. 设 $\{N(t), t\geqslant0\}$ 为泊松过程,证明:若 $s<t$,则

$$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\}=C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n$$

22. 设通过某路口的汽车流可看作泊松过程,若在 1 分钟内没有车通过的概率为 0.2,求在 2 分钟内有多于 1 辆车通过的概率.

23. 设在时间区间 $(0,t]$ 来到某商店门口的顾客数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程,每个来到商店门口的顾客进入商店的概率为 p,不进入商店就离去的概率是 $1-p$,各个顾客进入商店与否相互独立,令 $X(t)$ 为 $(0,t]$ 内进入商店的顾客数,证明 $\{X(t), t\geqslant0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

24. 设 $\{N(t), t\geqslant0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程,$S_n\,(n\geqslant1)$ 表示事件 A 第 n 次出现的发生时刻,试求 (S_1,S_2) 的联合概率密度.

25. 设保险公司在 t_i 时发生理赔的金额为 X_i,各 X_i 相互独立同分布,其均值为 μ,方差为 σ^2,若在 $[0,t]$ 内发生理赔的次数 $N(t)\,(t\geqslant0)$ 是强度为 λ 的泊松过程,并且与 $\{X_i, i=1,2,\cdots\}$ 独立,试

求保险公司在$[0,t]$内将要支付的总理赔额 $Y(t)$ 的均值与方差.

26. 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是强度为 λ 的泊松过程,随机变量 T 服从参数为 μ 的指数分布,且与$\{N(t),t\geqslant 0\}$相互独立,试证明 $N(T)$ 服从几何分布

$$P\{N(T)=k\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k},\quad k=0,1,2,\cdots$$

27. 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是强度为 λ 的泊松过程,试求它的有限维分布律族.

28. 设$\{W(t),t\geqslant 0\}$是布朗运动,$a>0$ 是常数,试证明下列过程也为布朗运动:

(1) $X(t)=W(t+a)-W(a),t\geqslant 0$;

(2) $Y(t)=aW\left(\dfrac{t}{a^2}\right),t\geqslant 0$.

29. 设$\{W(t),0\leqslant t\leqslant 1\}$为布朗运动,令

$$X(t)=W(1)-W(1-t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

证明$\{X(t),0\leqslant t\leqslant 1\}$也为布朗运动.

30. 设$\{W(t),t\geqslant 0\}$是参数为 σ^2 的布朗运动,求下列过程的自协方差函数:

(1) $X(t)=W(t+a)-W(a),t\geqslant 0$,其中 $a>0$ 为常数;

(2) $X(t)=aW\left(\dfrac{t}{a^2}\right),t\geqslant 0$,其中 $a>0$ 为常数;

(3) $X(t)=W(t)+At,t\geqslant 0$,其中 A 为与$\{W(t),t\geqslant 0\}$相互独立的标准正态变量.

自测题 11

习题 11 参考答案