西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第八章 假设检验

言浬　特聘研究员
网络空间安全学院

2025年5月

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

8.1 假设检验的基本概念

什么是假设检验?

实际生活中，经常需要对某个问题做出判断。

例 刑事案件中，某嫌疑人是否是真正的案犯?

塑化剂到底对人的身体有无显著影响?

一般做法：先提出一个假设，再来找证据证实

例如：**无罪推定;**

有罪推定。

问题 数理统计中如何进行假设检验?

例(定货问题)

甲厂向乙厂订购一批产品，合同规定次品率不得超过 5%。现随机抽取 200 件进行检查，发现有 9 件次品，问甲方是否应接受这批产品?

- **分析** 抽样结论是次品率为 4.5%，能出厂

争议
乙厂：抽样结论为 4.5%，未超过 5%，合格
甲厂：抽样结果是随机的，有波动性，可能实际次品率超过 5%

- **假设** 产品不合格 $p \geq 5\%$

解 p 的区间估计为：

$$\left(\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{191\times0.045^2+9\times0.955^2}{199}\Rightarrow S=0.207$$

$$\alpha=0.05 \qquad u_{0.975}=1.96$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}=0.0287 \qquad (0.0163,\ 0.0737)$$

例(寿命问题)

据推测，矮个子比高个子寿命长。下表给出了美国11位自然死亡的总统的寿命，他们分属两类: 矮个子和高个子，试问这些数据是否符合上述推测?

高个子						
身高	185.5	188	188	188	188	189
寿命	78	67	56	63	64	83
矮个子						
身高	162.5	167.5	167.6	170	170	
寿命	85	79	67	90	80	

分析 高个子的平均寿命为68.5，
矮个子的平均寿命为80.2，有依据!

高个子						
身高	185.5	188	188	188	188	189
寿命	78	67	56	63	64	83

矮个子						
身高	162.5	167.5	167.6	170	170	
寿命	85	79	67	90	80	

可假设身高服从正态分布，

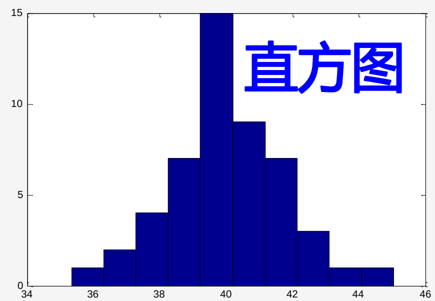
- **分析** 高个子身高 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

  矮个子身高 $X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

- **假设** $\mu_1 \ge \mu_2$ ？

例(测量问题) 一台测速雷达对某匀速运动物体进行测量，50次测量的结果如下，问该雷达的测量误差是否服从正态分布？

41.04，39.96，39.93，38.40，42.04，39.73，38.57，42.70，39.55，38.82
39.41，38.30，37.76，45.05，43.31，40.61，37.49，38.27，39.65，41.58
37.34，35.34，37.10，40.67，40.78，40.90，39.74，40.37，39.05，41.72
37.28，40.91，38.30，39.33，41.11，42.08，37.76，42.52，41.32，39.86
39.61，39.56，39.39，40.05，40.10，41.65，43.05，40.93，39.58，41.25



分析

假设测量值是随机变量，问题是根据数据对假设：X服从正态分布，做出拒绝还是接受的结论。

归纳 上述三个问题的特点：

- 都需要对总体提出某个假设；
- 都需要根据采样来对假设进行检验；
- 结论只有“接受”或“拒绝”两种；
- 问题不同，假设不同。

例1为单总体，总体分布形式已知，对参数作假设
例2为双总体，总体分布形式已知，对参数作假设
例3是直接对总体分布作假设

"拒绝"假设 **等价于** "接受"其对立结论

- **假设的提法**
  - H_0：原假设（零假设）
  - H_1：备择假设（对立假设）

例 (定货问题)

$H_0: p \geq 5\%$　　$H_1: p < 5\%$

例 (寿命问题)

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$　　$H_1: \mu_1 < \mu_2$

例 (测量问题)

$H_0: X$ 服从正态分布　$H_1: X$ 不服从正态分布

假设检验分类：

参数检验：

总体分布形式已知，对总体分布中的参数进行检验(订货问题、寿命问题)

非参数检验：

对总体分布的假设作检验(测量问题)

以下主要讨论参数检验问题！

问题 依据什么原理做出决策?

例（Fisher的女士品茶问题）： 一种饮料由牛奶和茶按照一定比例混合而成，可以先倒茶后倒牛奶（TM）或者反过来（MT）。某女士称，她可以鉴别是TM还是MT。

设计如下试验来确定她的说法是否可信。准备8杯饮料，TM和MT各半，把他们随机的排成一列让女士依次品尝，并告诉她TM和MT各半，然后请她说出哪4杯是TM，假设她全说对了。

Fisher 的推断过程：

引进一个假设 H：该女士并无鉴别能力

当H成立时，则全部说中的概率为：$1/C_8^4=1/70$

因此当女士全部挑对时，只有下列两种情形：

- H 不成立，即该女士具有鉴别能力；
- 发生了一个概率为1/70的事件。**小概率事件**

由“实际推断原理”，有理由承认第一种可能性，

也就是采样提供了一个显著不利于H的证据。

问题 如果该女士只说对三杯，则情况怎样?

若H 成立，则说对三杯以上的概率为：

$$\frac{C_4^3 C_4^1 + 1}{C_8^4} = 0.243$$

认为0.243不算小，不拒绝 H

此时，若拒绝 H 可能会犯错误

第一种情况下，拒绝 H 也可能犯错误。

总结：Fisher 的基本思想

- 有一个明确的假设 H
- 给定一个所能容忍的犯这类错误的上限
- 在此上限下，判断证据对拒绝 H 是否显著
- 只要证据对拒绝 H 不显著即接受 H

- **分析** 决策的依据是样本，样本取值有随机性，于是就存在犯错误的可能

若拒绝原假设，可能会 **“弃真”**，犯**第一类错误**

若接受原假设，可能会 **“取伪”**，犯**第二类错误**

I类风险： 犯第一类错误的概率；

II类风险： 犯第二类错误的概率；

直观：二者很难同时达到最小，如何折中？

检验原则一： 保护 H_0

提出“检验原则一”的原因：

(1) H_0 的内容很重要，或关乎检验者的利益

例如，订货问题中，H_0：产品不合格 (P>5%)?

例如，无罪推断中疑罪从无。

(2) “弃真”的后果大于“取伪”的后果

例如：新冠流行期间，一旦出现高烧，一般先假定为患者。

分析 H_0和H_1的地位不对称！

- **问题** "保护原假设"在数学上怎么表示?

分析 ⟷ 保护以下哪种决策状态?

	H0 为真	H1 为真
决策	接受 H0	拒绝 H1
决策	拒绝 H0	接受 H1

α 为预先给定的某充分小的数，一般取0.1, 0.05, 0.025, 0.01 等。

数学描述： $P\{拒H_0 \mid H_0真\}$必须充分小

即$P\{拒H_0 \mid H_0真\} < \alpha$ —— I 类风险

- **问题** 只管 I 类风险，不管 II 类风险。

以下讨论“检验原则一”下的假设检验问题 —**Fisher 显著性检验问题**。

称 α 为显著性水平

以后常用“在显著性水平 α 下的对 H 作显著性检验”这类术语.

例：女士品茶问题!

关于显著性检验的归纳理解

- 检验原则决定 H_0 与 H_1 的地位不对等，要注意提出假设的方法；
- 依“原则一”检验时，同时冒着I类和II类风险，但I类风险可控，而II类风险未知；
- 依“原则一”检验时，得出拒绝 H_0 的结论时可靠性相对高，反之可靠性相对较低！

问题 如何做出决策?

前提 $P\{拒H_0 \mid H_0真\} \le \alpha$

事件 很小的数

根据 小概率事件在一次实验中几乎不可能发生（女士品茶问题）

做出决策 等价于 找到拒绝H_0对应的事件

- **关键**

构造一个H_0为真时小概率事件，观察该事件在采样中是否发生，若发生则拒绝 H_0

H_0为真时的小概率事件发生对应 拒绝 H_0

步骤1 假设 H_0为真，构造一个统计量

例：女士品茶问题中对应“说对的杯数”

步骤2 根据此统计量来确定一个事件（等价于给出 H_0 的否定域）

- **要求** H_0为真时，该事件是小概率事件

例：女士品茶中，取$\alpha = 0.05$，则事件为

{说对的杯数大于等于4}

步骤3 进行实验，利用采样数据，判断小概率事件是否发生，若发生则拒绝 H_0

- **问题一**　如何构造统计量?
- **问题二**　如何构造事件（拒绝 H_0）？

例 某厂生产一种铆钉，直径标准定为 $\mu_0 = 2$ 厘米，现从该厂生产的铆钉中随机抽 100 个，测得直径的均值为 $\bar{x} = 1.978$ cm，设铆钉的直径从 $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.2$ cm，问该厂生产的铆钉是否合格? $(\alpha = 0.05)$

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$$

拒绝 H_0?　⟺　什么情况发生会对 H_0 不利?

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$E(\bar{X}) = \mu,\ D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

问题 什么情况发生会对 H_0 有利?

?

分析 $\bar{X}$ 的值应在 μ 附近波动

故 $|\bar{X} - \mu_0|$ 偏小对 H_0 有利!

因此，可求一**临界值** C

当 $|\bar{X} - \mu_0| \geq C$ 时拒绝 H_0

当 $|\bar{X} - \mu_0| < C$ 时接受 H_0

如何确定 C **?**

问题 如何确定未知参数C？

分析 决定未知参数 C 的条件为：

$$P\{拒H_0 \mid H_0真\} \le \alpha$$

$$拒绝\mathrm{H}_0 \iff |\bar{X}-\mu_0| \ge C$$

$$\mathrm{H}_0真 \iff \mu = \mu_0$$

$$P\{拒H_0 \mid H_0真\} = P\{|\bar{X}-\mu_0| \ge C \mid \mu=\mu_0\} \le \alpha$$

——概率方程

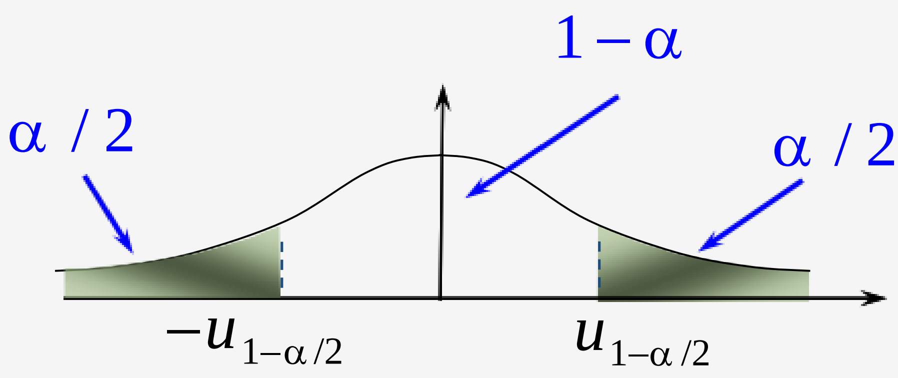
如何依据上述概率方程求解未知参数C?

- **问题** 如何依据上述概率方程求解C?

解 $\mu=\mu_0$ 成立时，显然 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$$|\bar{X}-\mu_0|\geq C \Longleftrightarrow \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}}$$

检验统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$



拒绝 H_0 时的事件 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{1-\alpha/2}$ —— 拒绝域

下一步，计算统计量，查正态分布的分位表，观察其值是否落在拒绝域内，

$$\bar{x} = 1.978\,cm, \quad \sigma = 0.02\,cm, \quad \mu_0 = 2\,cm,$$

$$n = 100, \quad u_{0.975} = 1.96,$$

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 1.1 < 1.96$$ 接收原假设！

若 $\bar{x} = 1.9$，则 $$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 5 > 1.96$$ 拒绝原假设！

归纳 假设检验的步骤：

1.根据问题，提出原假设 H_0 和备择假设 H_1;

2.构造检验统计量，其选取与原假设有关；

3.对于给定的显著水平，确定 H_0 的拒绝域；

4.抽样，判断样本观察值是否落在拒绝域内！

例 从甲地发送一个讯号到乙地，由于存在线路噪声干扰，使得甲地发送一个幅值为 μ 的讯号，而乙地收到的讯号是一个服从 $N(\mu, 4)$ 分布的随机变量。在测试中，甲地将同一讯号发送了 5 次，乙地收到的讯号值为

$$8.1,\ 9.3,\ 9.9,\ 8.5,\ 10.1$$

接收方有某种理由猜测甲地发送的讯号值为8，问这种猜测是否正确 $(\alpha = 0.05)$

解 $H_0: \mu = \mu_0 = 8 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$

$$\bar{x} = 9.18 \qquad n = 5 \qquad u_{0.975} = 1.96 \qquad \sigma = 2$$

$$\left|\bar{X} - \mu_0\right| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \Rightarrow \left|9.18 - 8\right| = 1.18 < 1.75$$

- **问题** 能否下结论说“接收方的猜测正确”？

  答：不能。

从题给数据所得结论是“接受 H_0”，而这个结论的II类风险有多大并不清楚。

故无法肯定接收方的猜测是“正确”的，只能认为接收方的猜测是“有理由”的。

$$|\bar{x}-\mu_0|=|9.18-8|=1.18<1.75$$

接收方也有理由猜测是9

需要进一步讨论的问题：

1.假设的类型

2.检验统计量的选取

与假设类型、总体分布、总体中其他参数的取值情况等有关

3.拒绝域的确定

以下只讨论正态分布的情况

例 某厂生产的固体燃料推进器燃烧率服从正态分布 $N(40, 2^2)$ (cm/s)，现用新方法生产了一批推进器，从中随机抽取 $n = 25$ 只，试验后算得 $\bar{x} = 41.25$，设新方法的总体方差不变，

问新方法燃烧率是否有显著提高？ $\alpha = 0.05$

问题 要检验如下哪个假设?

双边检验 $H_0: \mu = \mu_0 = 40, H_1: \mu \neq \mu_0$ ×

单边检验 $\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 = 40, H_1: \mu < \mu_0 & \times \\ H_0: \mu \leq \mu_0 = 40, H_1: \mu > \mu_0 & \surd \end{cases}$

提出假设：$H_0: \mu \le \mu_0 = 40, H_1: \mu > \mu_0$

- **分析** $X \sim N(\mu, 2^2)$

  $\bar{X}$ 的值应在 μ 附近波动

  若 H_0 成立，则 $\bar{X} - \mu_0$ 偏小于0！

因此，可求一**临界值** C

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \bar{X} - \mu_0 \ge C \text{ 时拒绝 } H_0 \\ \text{当 } \bar{X} - \mu_0 < C \text{ 时接受 } H_0\end{array}\right\}$$ **如何确定C？**

- **问题** 若H_0成立，是否有 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

答 不一定，只有 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- **问题** 如何确定拒绝域？形式：$\bar{X}-\mu_0 \geq C$

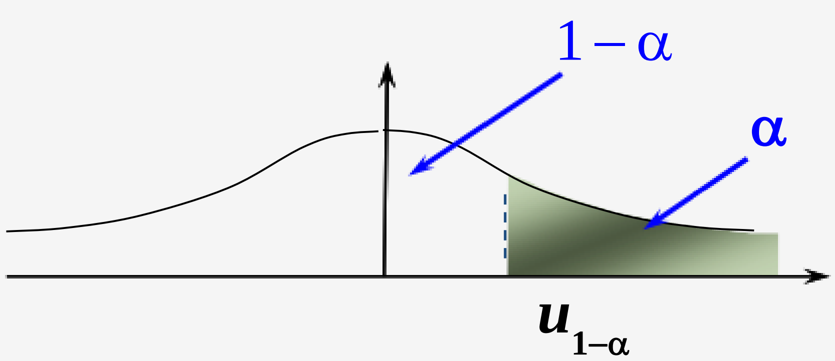
$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \,\Big|\, \mu \leq \mu_0\right\} = \left\{\frac{\bar{X}-\mu-(\mu_0-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \,\Big|\, \mu \leq \mu_0\right\}$$

$$\subset \left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \,\Big|\, \mu \leq \mu_0\right\}$$

故 $P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \le \mu_0\right\} \le P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu \le \mu_0\right\}$

$$= \alpha$$

因此拒绝域为: $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge u_{1-\alpha}$ $\boxed{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \ge u_{1-\alpha/2}}$



- **比较** 单边检验与双边检验

$$\begin{cases}\text{单边检验I类风险：} \le \alpha \\ \text{双边检验I类风险：} = \alpha\end{cases}$$

$$\bar{x} = 41.25,\quad n = 25,\quad \sigma = 2,\quad \mu_0 = 40,\quad u_{1-\alpha} = 1.65$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 3.125 > 1.65\text{，拒绝原假设}$$

综上总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，方差已知时，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(1) $H_0:\mu=\mu_0,\ H_1:\mu\neq\mu_0$ U 检验

拒绝域 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq u_{1-\alpha/2}$ I类风险 $=\alpha$

(2) $H_0:\mu\leq\mu_0,\ H_1:\mu>\mu_0$

拒绝域 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha}$ I类风险 $\leq\alpha$

(3) $H_0:\mu\geq\mu_0,\ H_1:\mu<\mu_0$

拒绝域为? $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_{\alpha}$ I类风险 $\leq\alpha$

8.2 单正态总体参数的假设检验

单正态总体的假设检验问题

均值检验:

1）方差已知：单边和双边

2）方差未知：单边和双边

方差检验:

1）均值已知：单边和双边

2）均值未知：单边和双边

- **问题** 若方差未知，上述检验该作何修改?

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

正态分布分位数 $\longrightarrow$ t 分布分位数

归纳 方差未知时的均值的检验方法

采取的统计量为 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

1) $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, 拒绝域为 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

2) $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$, 拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}(n-1)$

3) $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$, 拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha}(n-1)$

上述检验称为 T 检验

- **问题** 正态分布中方差的检验

背景：对某些研究指标，关心其波动程度

例 根据要求，某零件内径方差不得超过 0.50。已知内径服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现从中随机抽检 25 件，测得样本方差 $S^2=0.58$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问产品方差是否明显增大？(单位:mm)

- **分析** $S^2=0.58>0.5$

  方差增大？随机误差引起？

假设 $H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 0.50$; $H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2 = 0.50$

分析 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ S^2在σ^2附近波动

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$ 越小对 H_0 越有利

拒绝 H_0所对应的事件的基本形式为:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge C$$

问题 如何确定 C? $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 的分布未知?

回顾：均值单边检验中临界值的取法

正态总体均值单边检验 $H_0:\mu \le \mu_0$，$H_1:\mu > \mu_0$

$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ 分布未知，用 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 来考虑

类似地，考虑 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 的分布：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域 $\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge C\} = \{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \ge C\}$

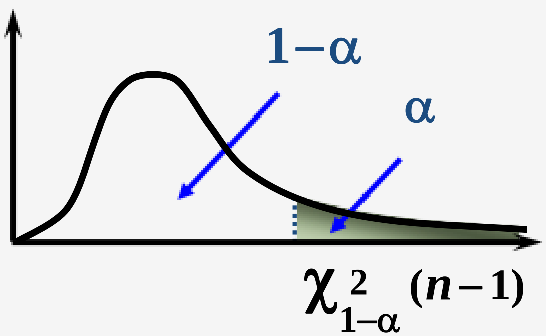
$$= \{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge C\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\}$$

则当 H_0 成立时，其I类风险为

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq C \mid \sigma < \sigma_0\} = P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq C\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \mid \sigma \leq \sigma_0\}$$

$$\leq P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq C\} = \alpha$$

故可令 $C = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$



拒绝域为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，此时I类风险：$\leq \alpha$

计算检验统计量

拒绝域为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

由数据计算得：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{24\times 0.58}{0.5} = 27.84$

查表得 $\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(24) = 36.415$，接受 H_0。

其他两种情况的拒绝域？

其他两种情况的拒绝域?

假设 $H_0:\sigma^2 \geq \sigma_0^2;\ H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$

检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 拒绝域 $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2(n-1)$

I类风险：$\leq \alpha$

假设 $H_0:\sigma^2 = \sigma_0^2;\ H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 拒绝域 $\chi^2 \leq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$

I类风险：$= \alpha$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

总结：正态总体均值和方差参数的假设检验

表1 正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中参数μ的假设检验方法

假设	统计量	拒绝域
$H_0:\mu\le\mu_0$， $H_1:\mu>\mu_0$ $H_0:\mu\ge\mu_0$， $H_1:\mu<\mu_0$ $H_0:\mu=\mu_0$， $H_1:\mu\ne\mu_0$ (方差已知)	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$U\ge u_{1-\alpha}$ $U\le u_{\alpha}$ $\lvert U\rvert\ge u_{1-\alpha/2}$
$H_0:\mu\le\mu_0$， $H_1:\mu>\mu_0$ $H_0:\mu\ge\mu_0$， $H_1:\mu<\mu_0$ $H_0:\mu=\mu_0$， $H_1:\mu\ne\mu_0$ (方差未知)	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T\ge t_{1-\alpha}(n-1)$ $T\le t_{\alpha}(n-1)$ $\lvert T\rvert\ge t_{1-\alpha/2}(n-1)$

总结：正态总体均值和方差参数的假设检验

表2 正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中参数 σ^2 的假设检验方法

假设	统计量	拒绝域
$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$ **(均值已知)**	$\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \ge \chi_{1-\alpha}^2(n)$ $\chi^2 \le \chi_{\alpha}^2(n)$ $\chi^2 \ge \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^2 \le \chi_{\alpha/2}^2(n)$
$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$ **(均值未知)**	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \ge \chi_{1-\alpha}^2(n\text{-}1)$ $\chi^2 \le \chi_{\alpha}^2(n\text{-}1)$ $\chi^2 \ge \chi_{1-\alpha/2}^2(n\text{-}1)$ 或 $\chi^2 \le \chi_{\alpha/2}^2(n\text{-}1)$

8.3 双正态总体参数的假设检验

一、问题的提出

当研究对象的外界条件发生变化时，需研究外界条件的变化是否对其产生了影响！

例 炼钢过程中不同操作工艺对产品合格率的影响；

不同的光谱测试仪对金属含量测定的影响；

不同制导方式对导弹落点精度的影响

设变化前的指标 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

变化后的指标 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

影响的体现：

1）均值的变化 $\mu_1 - \mu_2$

例如炼钢问题、金属含量测定问题

2）方差的变化 σ_1^2 / σ_2^2

例如导弹制导问题

二、关于均值差的检验

例 在平炉上进行一项试验以确定改变操作工艺是否会增加钢的合格率。炼钢时除操作工艺外，其它条件尽可能相同，两种试验交替进行，各炼10 炉，得结果如下

标准方法： $\bar{x} = 76.23 \quad S_1^2 = 3.325$

建议方法： $\bar{x} = 79.43 \quad S_1^2 = 2.225$

设两样本相互独立，分别来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$，其中μ_1, μ_2,σ^2均未知。

问建议的新方法能否提高合格率? $(\alpha = 0.05)$

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$

注意： μ_1, μ_2, σ^2的无偏估计分别为： $\bar{X}, \bar{Y}, S_w^2$

比较$\mu_1 - \mu_2$ ⇔ 比较$\bar{X} - \bar{Y}$ ⇔ 比较 $\dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

当$\mu_1 = \mu_2$时

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$ （所要统计量）

如何确定拒绝域? t取何值时对H_0有利?

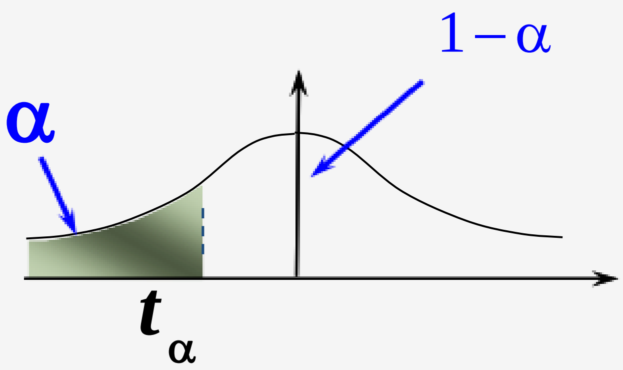
答: t偏大于0时有利,拒绝域的形式为:$t \le C$

分析: $\mathbf{P}\left(\left\{\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le C \mid \mu_1 \ge \mu_2\right\}\right)$

$$= \mathbf{P}\left(\left\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le C - \frac{(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \mid \mu_1 \ge \mu_2\right\}\right)$$

$$\le \mathbf{P}\left(\left\{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le C \mid \mu_1 \ge \mu_2\right\}\right) = \alpha$$

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-u_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$$



故 $C=t_\alpha(n_1+n_2-2)$

拒绝域为 $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le t_\alpha(n_1+n_2-2)$

I类风险 $\le\alpha$

查表$t_{0.05}(18)$=-1.7341，计算得t=-4.295，故拒绝H_0

思考： 1) $H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 的拒绝域?

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \le t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) \text{ 或 } \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \ge t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$$

2) $H_0: \mu_1 \le \mu_2$，$H_1: \mu_1 > \mu_2$ 的拒绝域?

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \ge t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$$

3) $H_0:\mu_1-\mu_2\ge\delta,\ H_1:\mu_1-\mu_2<\delta$ 的拒绝域?

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\le t_\alpha(n_1+n_2-2)$$

4) 若 $\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$，如何检验?

当 $\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$，但已知时，

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)\ (\mu_1-u_2=\delta)$$

当 $\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$，且均未知时如何办?

三、两总体下方差的假设检验

例 一台机床大修前曾加工了$n_1=10$件零件，加工尺寸的样本方差 $S_1^2=2500$，大修后加工了$n_2=12$件零件，加工尺寸的样本方差$S_2^2=400$。试问：机床大修后其加工精度是否有显著提高？$(\alpha=0.01)$

- **分析** 假设大修前、后的加工样本分别来自总体

$N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

需要检验： $H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$， $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

数学问题： 正态总体中$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知时检验

$$H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2,\quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

- **分析** 样本方差 S_1^2、S_2^2 分别是 σ_1^2、σ_2^2 的无偏估计

  当 H_0 真时，S_1^2 / S_2^2应偏小于1

又 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时，$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$，对给定的显著水平α，

其拒绝域为 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \ge F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

计算得: $S_1^2 / S_2^2 = 6.25$，查表得 $F_{0.99}(9,11) = 4.63$，故拒绝 H_0

思考

1）正态总体中均$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$未知时，

$H_0:\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ 的拒绝域?

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$$

2）正态总体中均$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$未知时，

$H_0:\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 的拒绝域?

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \text{ 或 } \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$$

8.4 非参数假设检验

一、问题的提出

问题一： 实际问题中，经常不能预知总体服从什么分布，需根据样本检验关于分布的假设?

——总体分布函数的假设检验

例 检验一次概率统计考试中学生成绩是否服从正态分布?

一、问题的提出

问题二：很多情况下，需要研究两个指标之间是否具有独立性?

——独立性检验

例 城市的大气污染是否与汽车尾气排放有关?

高血压是否与食盐摄入过多有关?

一、问题的提出

问题三：有些问题中，需要检验两个未知的总体是否服从同一分布?

——两总体相等的假设检验

例 检验河南和河北所种小麦的蛋白质含量有无显著差异。

以上问题均为非参数假设检验

二、总体分布函数的皮尔逊 χ^2 拟合检验

例 检验一次概率统计考试中学生成绩是否服从正态分布?

数学问题 设总体 $X \sim F(x)$ ($F(x)$未知）,检验

$$H_0: F(x) = F_0(x),\ H_1: F(x) \neq F_0(x)$$

其中 $F_0(x)$为某已知分布函数。

离散型总体

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为离散型总体 X 的样本，X 的分布律未知，要检验

$$H_0: P\{X = a_i\} = p_i$$

$$H_1: P\{X = a_i\} \neq p_i \quad (i = 1,\cdots,k)$$

其中 $a_i, p_i (1,2,\cdots,k)$ 均已知，且 $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

分析

记 n_i 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中取 a_i 值的个数

$$(i=1,\cdots,k)$$

1）频数 n_i 是v r.v，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$

2）若 H_0 成立，由大数定律有，$\dfrac{n_i}{n} \xrightarrow{P} p_i \quad (n \to +\infty)$

⇒ $|n_i - np_i|$ 应偏小

⇒ $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ 应偏小

(皮尔逊 χ^2 统计量)

- **问题：** 皮尔逊统计量 χ^2 服从什么分布?

定理 (Pearson)不论总体服从什么分布，当 H_0 为真时，$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ 的极限分布是 $\chi^2(k-1)$

① 一般当 $n \geq 50$ 就认为 $\chi^2 \sim \chi^2(k-1)$

② H_0 的拒绝域是 $\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

③ 对连续型总体可离散化处理

Pearson χ^2 拟合优度检验

连续型总体的离散化方法

设 X 为一维随机变量，适当选择常数

$$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$$

满足 $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < \infty$

将(-∞,∞)分成 k 个互不相交的区间:

$$I_1 = (-\infty, a_1), \cdots, I_j = [a_{j-1}, a_j), \cdots, I_k = [a_{k-1}, \infty)$$

并记 $a_0 = -\infty,\ a_k = \infty$

则前述讨论中 $p_i = F(a_i) - F(a_{i-1})$

注：要求 $p_i > 0$

n_i表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中落入I_i内的频数。

$(i = 1, 2, \cdots, k)$

注记1

若 $F_0(x)$ 中含未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ 就用MLE替代

$$F_0(x) = F_0(x; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_l)$$

Fisher 证明了对于满足一定条件的点估计，上述统计量的极限分布为 $\chi^2(k-l-1)$， 其中$k>l+1$。

此时，H_0的拒绝域是

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-l-1)$$

注记2

上述检验方法适合于一般的总体分布 $F_0(x)$

若总体分布为正态分布，其II类风险会比较高，此时可采用正态分布的偏度和峰度检验法等。

例 在π的前800位小数中数字 0,1,...,9 出现次数为

数字 a_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
次数 n_i	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

能否认为这10个数字是均匀出现的? $(\alpha = 0.05)$

解 设 X 表示从π的前1~800位小数中任取一数字,

依题意要检验 $H_0 : P\{X = i\} = 1/10 \quad (i = 1, \cdots, 9)$

计算得 $\chi^2 = 5.125$

$\chi^2_{0.95}(9) = 16.919$ 不拒绝 H_0.

例 某班60名同学，一次概率统计考试成绩为：

93 75 83 93 91 85 84 82 77 76
77 95 94 89 91 88 86 83 96 81
79 97 78 75 67 69 68 84 83 81
75 66 85 70 94 84 83 82 80 78
74 73 76 70 86 76 90 89 71 66
86 73 80 94 79 78 77 63 53 55

问考试成绩是否服从正态分布？ $(\alpha = 0.25)$

- **分析** 假设考试成绩是 r.v. X

  H_0：X 的分布函数是正态

解 $H_0: F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

按照优、良、中、及格、不及格将实轴划分为5个互不相交的区间，取 $a_1=60$, $a_2=70$, $a_3=80$, $a_4=90$ 在原假设成立的前提下，参数的极大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = 80,\ \hat{\sigma}^2 = 9.6^2$$

计算得 $\hat{p}_1 = \Phi\left(\dfrac{60-80}{9.6}\right) = \Phi(-2.08) = 0.0188$

$$\hat{p}_2 = 0.1304 \qquad \hat{p}_3 = 0.3508$$

$$\hat{p}_4 = 0.3508 \qquad \hat{p}_5 = 0.1492$$

进一步计算得

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 2 \qquad 60\hat{p}_1 = 1.128 \\ n_2 &= 6 \qquad 60\hat{p}_2 = 7.824 \end{aligned}\right\} \text{合并}$$

$$n_3 = 20 \qquad 60\hat{p}_3 = 21.048$$

$$n_4 = 21 \qquad 60\hat{p}_4 = 21.048$$

$$n_5 = 11 \qquad 60\hat{p}_5 = 8.952$$

$$\chi^2 = 0.622 \quad < \quad \chi^2_{0.75}(4-2-1) = 1.323$$

接受原假设

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-l-1)}$$

谢谢大家！