



西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

随机过程的基本概念

言涇 特聘研究员
网络空间安全学院

2025年6月

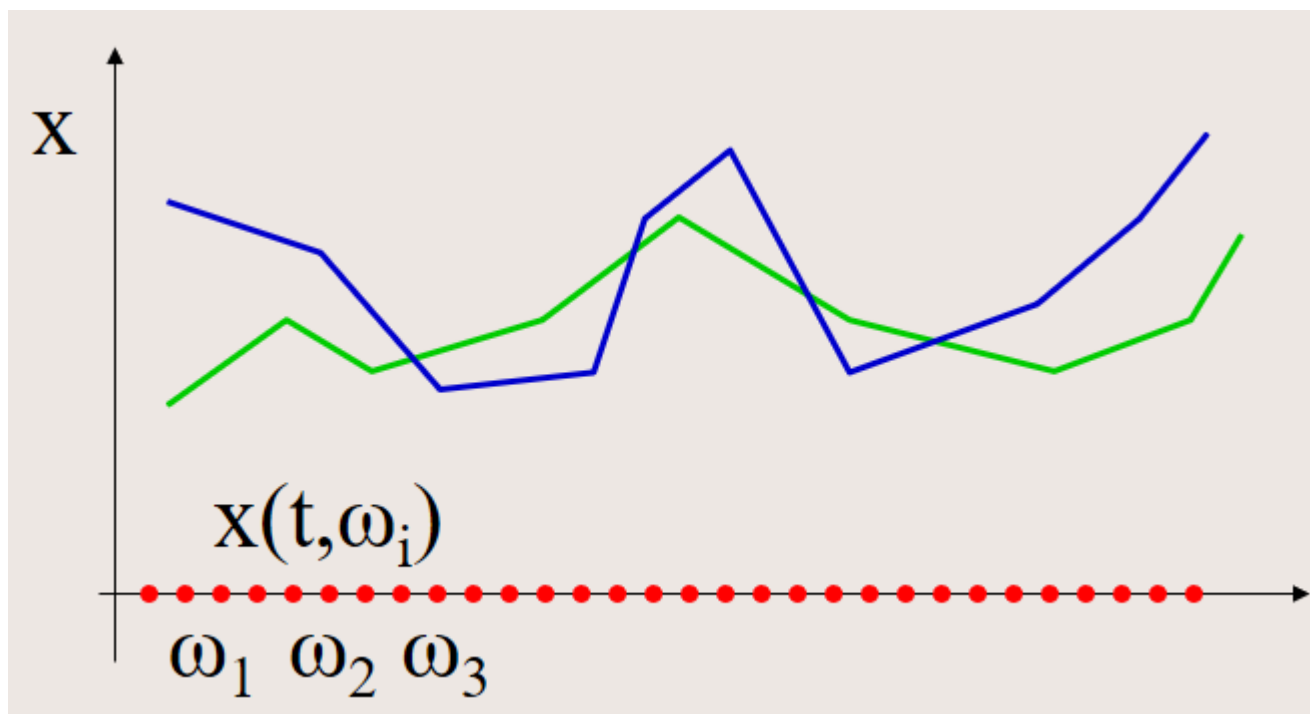


随机变量

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

随机变量族

$$(t, \omega) \rightarrow x(t, \omega) = X(t, \omega)$$





- **定义10.1.1** Ω 样本空间, T 为一给定的集合, 若对每个 $t \in T$, $X(t, \omega)$ 是定义在 Ω 的随机变量, 则称随机变量族 $\{X(t, \omega), t \in T\}$ 为随机过程, 简记为 $\{X(t), t \in T\}$ 或 $\{X_t(\omega), t \in T\}$
- $X(t)$ 的所有可能的取值的集合称为状态空间或相空间, 记为 S 。



- 从数学上看，随机过程 $\{X(t, \omega), t \in T\}$ 是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数。
- 对固定的 t ， $X(t, \omega)$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量；
- 对固定的 ω ， $X(t, \omega)$ 是定义在 T 上的普通函数，称为随机过程的一个样本函数或样本轨道。



- **按参数T和状态空间S分类**
 - (1) T和S都是离散的
 - (2) T是连续的, S是离散的
 - (3) T是离散的, S是连续的
 - (4) T和S都是连续的

- **按 X_t 的概率特性分类**
 - 正交增量过程
 - 独立增量过程
 - 马尔可夫过程
 - 平稳随机过程



- 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布函数族
- 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 对于固定的 t , 随机变量的 $X(t)$ 的分布函数

$$F_X(x; t) = P(X(t) \leq x)$$

- 称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一维分布函数



- 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 任意的 $t_i \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 的联合分布函数

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

- 全体 $\{F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), n \geq 1\}$ 称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布族



■ 有限维分布函数族的性质

(1) 对称性

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_X(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n})$$

其中 j_1, \dots, j_n 为 $1, \dots, n$ 的任意排列

(2) 相容性

$$F_X(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) = F_X(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m)$$

$$m < n$$



- 例10.2.1 设随机过程 $X(t) = te^Y, t > 0$ 其中 Y 服从参数为 λ 的指数分布，求 $X(t)$ 的一维分布函数

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

- 于是

$$F_X(x; t) = P(X(t) \leq x) = P(te^Y \leq x) = P(Y \leq \ln(x/t))$$

$$= F_Y(\ln(x/t)) = 1 - (t/x)^\lambda$$

$$F_X(x; t) = \begin{cases} 1 - (t/x)^\lambda, & x > t \\ 0, & x \leq t \end{cases}$$



例 11.5 设随机过程 X_t 只有两条样本曲线

$$X(t, \omega_1) = k \cos t, X(t, \omega_2) = k \sin t, \quad -\infty < t < +\infty$$

其中 $k(>0)$ 为常数, $P(\omega_1) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_2) = \frac{2}{3}$, 求 X_t 的一维分布函数 $F_0(x)$ 和二维分布函数 $F_{0, \pi/2}(x_1, x_2)$.



设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程, 定义

■ 均值函数

$$m_X(t) = EX(t), t \in T$$

■ 方差函数

$$D_X(t) = E[(X(t) - EX(t))^2], t \in T$$

■ 自协方差函数

$$C_X(t_1, t_2) = E([X(t_1) - E(X(t_1))][X(t_2) - E(X(t_2))])$$



■ 自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$$

■ 自相关系数函数

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)}\sqrt{D_X(t_2)}}$$

有关系式

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} Cov(X, X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= D(X) \end{aligned}$$

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$D_X(t) = C_X(t, t) = R_X(t, t) - m_X^2(t)$$



- 例10.2.2 设随机过程 $X(t) = A\cos(t)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 A 是随机变量, 起分布为 $\{1, 2, 3\}$ 上的均匀分布, 求 $X(t)$ 的均值函数, 自相关函数及协方差函数

- 均值函数

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(A\cos(t)) \\ &= \cos(t)EA \\ &= \cos(t)\left(1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3}\right) \\ &= 2\cos(t) \end{aligned}$$

- 自相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) \\ &= E(A\cos(t_1)A\cos(t_2)) \\ &= E(A^2)\cos(t_1)\cos(t_2) \\ &= \cos(t_1)\cos(t_2)\left(1 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{14}{3}\cos(t_1)\cos(t_2) \end{aligned}$$



■ 协方差函数

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= \frac{14}{3} \cos(t_1) \cos(t_2) - 4 \cos(t_1) \cos(t_2) \end{aligned}$$



- 例10.2.3 设随机过程 $X(t) = a\cos(\omega_0 t + Y)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, 其中 a , ω_0 是大于0的常数, Y 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布, 求 $X(t)$ 的均值及自相关函数

$$m_X(t) = E(a\cos(\omega_0 t + Y)) = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega_0 t + y) \frac{1}{2\pi} dy = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E(a\cos(\omega_0 t_1 + Y) a\cos(\omega_0 t_2 + Y))$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} a^2 \cos(\omega_0 t_1 + y) \cos(\omega_0 t_2 + y) \frac{1}{2\pi} dy \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1/2 (\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2y) + \cos(\omega_0(t_1 - t_2))) dy \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$



例 设 $X(t) = Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t)$, $t > 0$,
 Y, Z 相互独立, $EY = EZ = 0$,
 $DY = DZ = \sigma^2$ 。求 $\{X(t), t > 0\}$ 的均值函数和协方差函数。

解

$$\begin{aligned} m_X(t) &= EX(t) = E[Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t)] \\ &= \cos(\theta t)EY + \sin(\theta t)EZ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_X(s, t) &= E[(X(s) - EX(s))(X(t) - EX(t))] \\ &= E[X(s)X(t)] - EX(s)EX(t) \\ &= E[X(s)X(t)] \end{aligned}$$



$$= E[(Y \cos(\theta s) + Z \sin(\theta s))(Y \cos(\theta t) + Z \sin(\theta t))]$$

$$= E[\cos(\theta s) \cos(\theta t) Y^2 + \sin \theta(s + t) YZ$$

$$+ \sin(\theta s) \sin(\theta t) Z^2]$$

$$= \cos(\theta s) \cos(\theta t) E(Y^2) + \sin \theta(s + t) E(YZ)$$

$$+ \sin(\theta s) \sin(\theta t) E(Z^2)$$

$$= \cos(\theta s) \cos(\theta t) DY + \sin(\theta s) \sin(\theta t) DZ$$

$$= \cos(\theta s) \cos(\theta t) \sigma^2 + \sin(\theta s) \sin(\theta t) \sigma^2$$

$$= \sigma^2 \cos[(s - t)\theta]$$





设 $\{X(t), t \in T\}$, $\{Y(t), t \in T\}$ 是两个随机过程, 二阶矩函数存在, 定义

■ 二阶矩过程 一、二阶矩函数存在

■ 互协方差函数

$$E[X^2(t)] < +\infty$$

$$C_{XY}(s, t) = E[(X(s) - EX(s))(Y(t) - EY(t))]$$

$$s, t \in T$$

■ 互相关函数

$$R_{XY}(s, t) = E[X(s)Y(t)], \quad s, t \in T$$

有关系式

$$C_{XY}(s, t) = R_{XY}(s, t) - m_X(s)m_Y(t), \quad s, t \in T$$



例 设 $X(t)=Y+Zt, t>0, Y, Z \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$
求 $\{X(t), t>0\}$ 的一、二维概率密度族。

解 因 Y, Z 为正态随机变量，则其线性组合 $X(t)$ 也是正态随机变量，且 $X \sim N(0, 1+t^2)$

$$m_X(t) = E(Y + Zt) = EY + tEZ = 0$$

$$D_X(t) = D(Y + Zt) = DY + t^2 DZ = 1 + t^2$$

$$\begin{aligned} C_X(s, t) &= E(X(s)X(t)) - m_X(s)m_X(t) = E[(Y + Zs)(Y + Zt)] \\ &= E[Y^2 + ZYs + YZt + Z^2st] \\ &= 1 + st \end{aligned}$$



$$\rho_X(s, t) = \frac{C_X(s, t)}{\sqrt{D_X(s)}\sqrt{D_X(t)}} = \frac{1 + st}{\sqrt{(1 + s^2)(1 + t^2)}}$$

随机过程 $\{X(t), t > 0\}$ 的一维概率密度

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right\}, \quad t > 0 \end{aligned}$$



随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的二维概率密度

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)(1-\rho^2)}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+s^2} - 2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}} + \frac{x_2^2}{1+t^2}\right]\right\}$$
$$s, t > 0$$



例 设 $X(t)=g_1(t+\varepsilon), Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$,
 $g_1(t), g_2(t)$ 是周期为 L 的函数, $\varepsilon \sim U(0, L)$
求互相关函数 $R_{XY}(t, t+\tau)$ 。

解

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= E[g_1(t+\varepsilon)g_2(t+\tau+\varepsilon)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)f_{\varepsilon}(x)dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{L} \int_t^{t+L} g_1(v) g_2(v + \tau) dv \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_t^L g_1(v) g_2(v + \tau) dv + \int_L^{t+L} g_1(v) g_2(v + \tau) dv \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_t^L g_1(v) g_2(v + \tau) dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t g_1(v + L) g_2(v + L + \tau) dv \right] \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L g_1(v) g_2(v + \tau) dv = R_{XY}(\tau) \end{aligned}$$



几个重要的随机过程

- 设有随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若对任意的 $t \in T$ ， $X(t)$ 的均值和方差都存在，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程
- 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程，对任意正整数 n 和 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ ， $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 是 n 维正态分布随机变量，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是正态过程或高斯过程。



- 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程，且 $EX(t)=0$ ， $EX^2(t) < +\infty$ ，若对任意的 $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \in T$ ，有 $E[(X(t_2)-X(t_1))(X(t_4)-X(t_3))]=0$ ，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为正交增量过程。



定理：若 $\{X_t, t \in T\}$ 是正交增量过程， $X(0)=0$ 则

$$C_X(s, t) = R_X(s, t) = \sigma_X^2(\min(s, t))$$



- 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程，对任意正整数 n 和 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ ，随机变量 $X(t_2) - X(t_1)$ ， $X(t_3) - X(t_2)$ ， \dots ， $X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是独立增量过程或可加过程。
- **定理：**若 $\{X_t, t \in T\}$ 是独立增量过程，且 $EX(t) = 0$ ， $EX^2(t) < +\infty$ ，则 $\{X_t, t \in T\}$ 是正交增量过程。



- 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是独立增量过程，若任意 $s < t$ ，随机变量 $X(t) - X(s)$ 的分布仅依赖于 $t - s$ ，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是平稳独立增量过程。

维纳过程和泊松过程是平稳独立增量过程

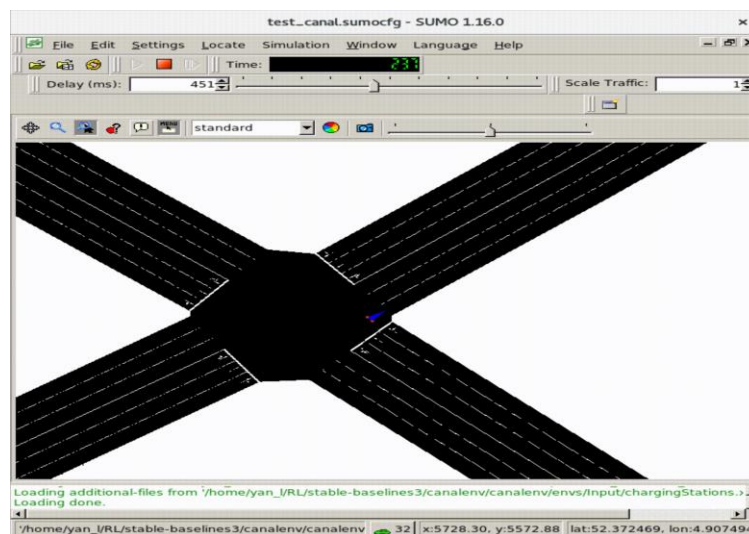
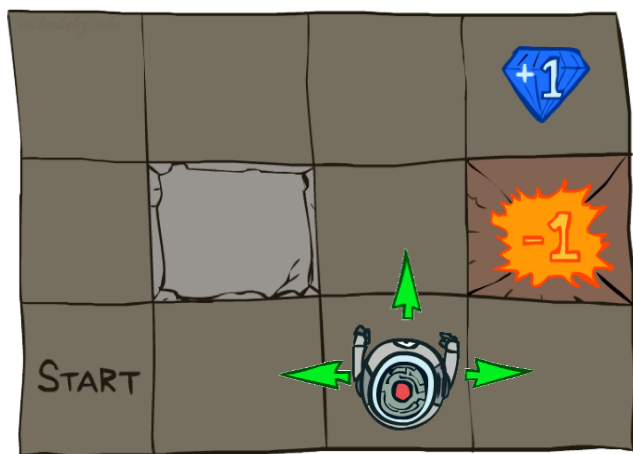


- 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程, $T \in [0, +\infty)$, 对任意正整的 n 个时刻 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ 以及 $s > 0, t_n + s \in T$, 有

$$P(X(t_n + s) \leq x | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n)$$

$$= P(X(t_n + s) \leq x | X(t_n) = x_n)$$

- 则称 $X(t)$ 是马尔可夫过程
 - 当 $T = \{1, \dots, n\}$, 状态空间为可列集, 则称为马氏链





- 设 $\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是随机过程，如果
 - (1) $W(0)=0$
 - (2) $W(t)$ 是平稳独立增量过程
 - (3) 对任意 s, t , 增量 $W(t)-W(s) \sim N(0, \sigma^2 |t-s|)$, $\sigma^2 > 0$
- 则称 $\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为维纳过程，或布朗运动。



定理： 设 $\{W(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，则

(1) 对任意 $t \in (-\infty, +\infty)$, $W(t) \sim N(0, \sigma^2 |t|)$

(2) 对任意 $-\infty < a < s, t < +\infty$,

$$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))] = \sigma^2 \min(s-a, t-a)$$

$$R_W(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$$

定理： 若 $\{X_t, t \in T\}$ 是正交增量过程， $X(0)=0$ 则

$$C_X(s, t) = R_X(s, t) = \sigma_X^2 (\min(s, t))$$

证 (1) 由定义，显然成立。



(2)不妨设 $s \leq t$, 则

$$E[(W(s)-W(a)) (W(t)-W(a))]$$

$$=E[(W(s)-W(a)) (W(t)-W(s)+W(s)-W(a))]$$

$$=E[(W(s)-W(a)) (W(t)-W(s))]$$

$$+E[(W(s)-W(a))^2]$$

$$=E[W(s)-W(a)]E[W(t)-W(s)]+D[W(s)-W(a)]$$

$$=\sigma^2(s-a)$$



若 $t \leq s$, 则

$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2(t-a)$, 所以

$E[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))]=\sigma^2\min(s-a,t-a)$

若取 $a = 0$, 则

$$R_W(s, t)=E[W(s)W(t)]$$

$$=E[(W(s)-W(0))(W(t)-W(0))]$$

$$=\sigma^2\min(s, t)$$

注: 维纳过程也是正交增量过程 ($EX(t)=0, EX^2(t)=\sigma^2 | t| < +\infty$),
还是马尔可夫过程



- 设 $N(t)$ 表示时间 $[0, t)$ 内某随机事件 A 出现的次数，则称随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程，计数满足：
 1. $N(t)$ 取非负整数
 2. 对于任意的 $s, t > 0, s < t$, 有 $N(s) \leq N(t)$
 3. 对于任意的 $s, t > 0, s < t$, 过程增量 $N(t) - N(s)$ 表示在时间间隔 $[s, t)$ 内事件 A 出现的次数



- 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程，若它满足
 1. $N(0)=0$
 2. 是独立增量过程，即对任意有限个 $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 增量 $N(t_1)-N(0), N(t_2)-N(t_1), \dots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ 相互独立
 3. 增量平稳性，即对任意的 $s, t > 0, k \geq 0$, 有

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = P(N(t) = k)$$



4. 对任意 $t > 0$ 和充分小的 Δt , 有

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

- 则称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程



- 定理10.4.1若计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，则对任意的 $s, t > 0$ 有

$$P(N(t + s) - N(s) = k) = P(N(t) = k)$$

$$= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

- 即过程增量 $N(t + s) - N(s)$ 是参数为 λt 的泊松分布



证： 由增量平稳性， 有

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = P(N(t) = n) \triangleq P_n(t)$$

(1) $n = 0$ 时， 因为 $\{N(t + \Delta t) = 0\} = \{N(t) = 0, N(t + \Delta t) - N(t) = 0\}$ ， 于是

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= P(N(t) = 0, N(t + \Delta t) - N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0)P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t)P_0(\Delta t) \end{aligned}$$

此外

$$P_0(\Delta t) = P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) = 1 - (\lambda\Delta t + o(\Delta t))$$

$$\begin{aligned} P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) &= \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) &= o(\Delta t) \end{aligned}$$



$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) \quad P_0(\Delta t) = 1 - (\lambda\Delta t + o(\Delta t))$$

于是，得到

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \frac{P_0(t)(P_0(\Delta t) - 1)}{\Delta t} = -(\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t})$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，得到

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$P_0(0) = P(N(t) = 0) = 1$$

积分求解微分方程，得到

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$



(2) $n > 0$ 时

$$P_1(\Delta t) = P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t) \quad P_0(\Delta t) = 1 - (\lambda \Delta t + o(\Delta t))$$

$$\{N(t + \Delta t) = n\} = \{N(t) = n, N(t + \Delta t) - N(t) = 0\}$$

$$\cup \{N(t) = n - 1, N(t + \Delta t) - N(t) = 1\}$$

$$\cup \left(\bigcup_{l=2}^n \{N(t) = n - l, N(t + \Delta t) - N(t) = l\} \right)$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t)$$

$$P_0(\Delta t) = 1 - (\lambda \Delta t + o(\Delta t))$$

于是有

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) \underbrace{(1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))}_{P_0(\Delta t)} + P_{n-1}(t) \underbrace{(\lambda \Delta t + o(\Delta t))}_{P_1(\Delta t)} + o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$



两边同乘 $e^{\lambda t}$ 得到方程

$$e^{\lambda t}(P'_n(t) + \lambda P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

$$P_n(0) = P(N(0) = n) = 0$$

当 $n = 1$ 时, 有

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda, \quad P_1(0) = 0 \quad \boxed{P_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

解得

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_2(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda^2 t \rightarrow P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}}{2!}$$

重复归纳得

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$



因为 $N(t) = N(t) - N(0) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$m(t) = E(N(t)) = \lambda t$$

$$D(t) = D(N(t)) = \lambda t$$

所以泊松过程是二阶矩过程，由独立增量性，当 $0 < s < t$ 时，
相互独立

$$\begin{aligned} C(s, t) &= \text{Cov}(N(s), N(t)) = \text{Cov}(N(s), \overbrace{N(t) - N(s)}^{\text{相互独立}} + N(s)) \\ &= \text{Cov}(N(s), N(s)) = D(N(s)) = \lambda s \end{aligned}$$

从而得到

$$C(s, t) = \lambda \min(s, t)$$

$$R(s, t) = C(s, t) + m(s)m(t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$$

$\lambda = \frac{E(N(t))}{t}$ 表示单位时间内的事件发生次数，即强度



- $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，记 $S_0=0, S_n (n > 0)$ 表示事件 A 在第 n 次发生的时刻，随机变量 S_n 则为 $t=0$ 开始直至事件 A 第 n 次出现所需的等待时间，对任意的 $t \geq 0, n \geq 0$ ，有 $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

得到密度函数

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, t > 0$$



- 特别的，事件首次出现的等待事件 S_1 服从指数分布

$$f_{S_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

- 令 $T_n = S_n - S_{n-1} (n=1, 2, \dots)$ 为事件A第 $n-1$ 次出现与第 n 次出现之间的事件间隔

$$T_1 = S_1, \text{ 故 } T_1 \sim \exp(\lambda)$$

$$\begin{aligned} P(T_2 \leq t | T_1 = s) &= 1 - P(T_2 > t | T_1 = s) = 1 - P(\text{事件在 } [s, s+t) \text{ 内不发生} | T_1 = s) \\ &= 1 - P(N(s+t) - N(s) = 0 | N(s) = 1) \\ &= 1 - P(N(t) = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$



- T_2 与 T_1 独立也服从 $\exp(\lambda)$, 重复之前的步骤, 可知

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

- T_1, \dots, T_n 相互独立
- 定理10.4.2 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程的充要条件是其时间间隔序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ 是相互独立且服从参数为 λ 的指数分布



- $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，则在已知 $N(t) = n$ 的条件下，到达时间 S_1, S_2, \dots, S_n 的联合概率密度为

$$f(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < \dots < t_n < t$$



设 $0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$ ，取 h_i 充分小，使得 $t_i + h_i < t_{i+1}$ ，则：

$$\begin{aligned} & P(t_i < S_i \leq t_i + h_i, i = 1, 2, \dots, n | N(t) = n) \\ &= \frac{P(N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, N(t_{i+1}) - N(t_i + h_i) = 0, 1 \leq i \leq n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t - \sum_{i=1}^n h_i)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{n!}{t^n} \prod_{i=1}^n h_i \end{aligned}$$

n 维联合概率密度为：

$$f(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{P(t_i < S_i \leq t_i + h_i, i = 1, 2, \dots, n | N(t) = n)}{\prod_{i=1}^n h_i} = \frac{n!}{t^n}$$



- 设 X_1, \dots, X_n 是独立同分布的非负随机变量, 其密度函数为 $f(x)$, $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ 为其顺序统计量, 则顺序统计量的联合概率密度为

$$f(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{k=1}^n f(x_k), 0 < x_1 < \dots < x_n$$

- 特别的当 X_i 为 $(0, t)$ 上的均匀分布

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < x_1 < \dots < x_n < t$$



- 设某火车站来到的乘客数服从强度为 λ 的Poisson过程,火车 t 时刻离开车站, 求在 $[0,t]$ 到达车站的乘客等待时间总和的期望值



解: $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} (t - S_k) \quad E(X(t)) = E[E(X(t) | N(t) = n)]$

$$\begin{aligned} & E(X(t) | N(t) = n) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^n (t - S_k) | N(t) = n\right) \\ &= nt - E\left(\sum_{k=1}^n S_k | N(t) = n\right) \\ &= nt - E\left(\sum_{i=1}^n X_{(i)} | N(t) = n\right) \\ &= nt - E\left(\sum_{i=1}^n X_i | N(t) = n\right) \\ &= nt - \frac{t}{2}n = \frac{nt}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E[E(X(t) | N(t) = n)] \\ &= E\left(\frac{N(t)t}{2}\right) \\ &= \frac{\lambda t t}{2} = \frac{\lambda t^2}{2} \end{aligned}$$