西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第六章 参数估计

言浬　特聘研究员
网络空间安全学院

2025年4月

统计推断的基本问题
- 参数估计
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验
- 线性回归

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

6.1 点估计

什么是参数估计

参数通常是刻画总体某些概率特征的数量。

例如，正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 中的参数 μ 就是该分布的均值，参数 σ^2 是该分布的方差。

当该参数未知时，从总体中抽取一个样本，用某种方法对该未知参数进行估计，这就是参数估计。

例如，假设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，若参数 μ 与 σ^2 未知。

先从该总体中抽样得到样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，然后构造样本函数，求出未知参数 μ 与 σ^2 的估计值或取值范围，这就是参数估计。

点估计　区间估计

假设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，其中分布函数 F 的表达式已知，但参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 未知.

若记 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，则总体分布可记为：

$$X \sim F(x;\theta)$$

参数θ 的取值范围称为参数空间，记为Θ.

例如　$X \sim B(1, p)$，p为未知参数，则参数空间为：

$$\Theta = \{ p \mid 0 < p < 1 \}.$$

又如　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2为未知参数，则参数空间为：

$$\Theta = \{ (\mu, \sigma^2) \mid -\infty < \mu < \infty, \ \sigma^2 > 0 \}$$

点估计的思想

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X\sim F(x;\theta_1,\ldots,\theta_m)$ 的一个样本，$\theta_1,\ldots,\theta_m$ 是未知参数。

构造 m 个：

$$\text{随机变量}\begin{cases}\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \vdots\\ \hat{\theta}_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{cases}$$

当把样本观测值 x_1，x_2，…，x_n代入上述统计量里，就得到 m 个数值:

$$\text{数值}\begin{cases}\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \quad\vdots\\ \hat{\theta}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

称 $\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ_k 的估计量 ($k=1,2,\ldots,m$);

称 $\hat{\theta}_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ_k 的估计值 ($k=1,2,\ldots,m$)。

6.1.1 矩估计

- **问题** 1) 如何构造统计量?

  2) 如何评价统计量?

- **常用的点估计方法**

  矩估计法

  极大似然估计法

  最小二乘估计法

  贝叶斯方法

6.1.1 矩估计

矩估计的思想

假设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 未知。且总体的 m 阶矩存在：

$$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=E(X^k)\quad (k=1,2,\cdots,m)$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，则由辛钦大数定律，有：

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m),\quad n\to\infty.$$

因此当***n***较大时有:

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \approx \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m).\ (k=1,2,\cdots,m)$$

令

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = A_1 \\ \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = A_2 \\ \quad\vdots \\ \mu_m(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) = A_m \end{cases}$$

用样本矩k阶矩
作为
总体矩k阶矩
的估计量

其解 $\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 θ_k 的矩估计量

(***k*** =**1, 2, …,** ***m***).

6.1.1 矩估计

例 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim P(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ 的一个样本，求未知参数 λ 的矩估计量。

解 因为总体 $X \sim P(\lambda)$，所以有

$$E(X) = \lambda$$

由矩估计原理，用样本一阶矩，即样本均值 $\bar{X}$ 代替总体均值 $E(X)$，得到

$$\bar{X} = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = X$$

命题 不论总体 X 服从什么分布，若其期望 μ 和方差 σ^2 的存在，则 μ 和 σ^2 的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \triangleq \tilde{S}^2$$

例 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，求未知参数 μ, σ^2 的矩估计量。

解 因为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的期望是 μ，方差是 σ^2，所以由上命题得到 μ, σ^2 的矩估计量分别为：

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \triangleq \tilde{S}^2$$

例 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体 $X \sim B(m, p)$ 的一个样本，求未知参数 p 的矩估计量.

解 因为总体 $X \sim B(m, p)$ 的一阶矩为：

$$E(X) = mp$$

令
$$mp = \bar{X}$$

求得 p 的矩估计量： $\hat{p} = \dfrac{1}{m}\bar{X}$

- **问题** 若 m，p 都未知，如何求 m，p 的矩估计?

例 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 的一个样本，求未知参数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的矩估计量。

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S}, \ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S}$$

注 随机产生 $U(0,1)$ 的随机数40个：

0.4387,	0.3816,	0.7655,	0.7952,	0.1869,	0.4898,	0.4456,	0.6463,	0.7094,	0.7547,
0.2760,	0.6797,	0.6551,	0.1626,	0.1190,	0.4984,	0.9597,	0.3404,	,0.5853,	0.2238,
0.7513,	0.2551,	0.5060,	0.6991,	0.8909,	0.9593,	0.5472,	0.1386,	0.1493,	0.2575
0.8407,	0.2543,	0.8143,	0.2435,	0.9293,	0.3500,	0.1966,	0.2511,	0.6160,	0.4733

算得： $\bar{x} = 0.5059275,\ \tilde{s} = 0.2573$

计算得到 a, b 的矩估计值：

$$\hat{a} = \bar{x} - \sqrt{3}\tilde{s} = 0.0602,\ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{3}\tilde{s} = 0.9516$$

矩估计法小结

1) 原理直观；

2) 只用到总体矩，方法简单，若总体矩不存在，则无法使用矩估计法；

3) 矩估计基于大数定律，所以通常在大样本情况下，才有较好的效果.

例 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自总体 X 的样本，总体 X 服从参数为 θ 的 Cauchy 分布，其密度函数为：

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

则 θ 的矩估计不存在。

6.1.2 最大似然估计

Fisher的极大似然思想

随机试验有多个可能结果，但在一次试验中，有且只有一个结果会出现。

如果在某次试验中，结果 ω 出现了，则认为该结果（事件$\{\omega\}$）发生的概率P$\{\omega\}$最大。

例如：字“鼢”读什么音?

- **问题** 如何将Fisher的极大似然思想应用于参数估计?

假设总体 X 是离散型随机变量，其分布律为:

$$P\{X = a_k\} = p_k(\theta) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

其中 θ $(\theta \in \Theta)$ 是未知参数.

6.1.2 最大似然估计

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本。

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本观测值。?

即事件 $\{X_1 = x_1, \; X_2 = x_2, \; \ldots, \; X_n = x_n\}$ 发生了。

由 Fisher 的极大似然思想可以得到:

概率 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}$ 最大。

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}$$

$$=P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\ldots P\{X_n = x_n\}$$

$$=P\{X = x_1\}P\{X = x_2\}\ldots P\{X = x_n\} = \boldsymbol{L(\theta)}$$

$$\boxed{P\{\, X = a_k\} = p_k(\theta) \quad (\, k = 1, 2, \ldots\,)}$$

定义1 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X}$ 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。

1) 若 $\boldsymbol{X}$ 是离散型总体，其分布律为:

$$\boldsymbol{P\{X = a_k\} = p_k(\theta)\ \ (k = 1, 2, \ldots)}$$

令 $L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}, \theta \in \Theta$

2) 若 $\boldsymbol{X}$ 是连续型总体，其密度为 $\boldsymbol{f(x;\theta)}$。

令 $L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), \theta \in \Theta$

称 $\boldsymbol{L(\theta)}$ 为似然函数。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X\sim B(1, p)}$ 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。试写出似然函数。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X\sim N(\mu, \sigma^2)}$ 的样本， $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。试写出似然函数。

定义2 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ 是样本观测值。

$L(\theta)\ (\theta \in \Theta)$ 是似然函数。若存在统计量

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

使得:

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计量，简记为**MLE (Maximum Likelihood Estimate).**

极大似然估计求解的一般过程

1) 根据总体分布的表达式，写出似然函数:

$$L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\quad(\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\in\Theta)$$

2) 因为 $L(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 与 $\ln L(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 有相同的极值点，称 $\ln L(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 为对数似然函数，记为 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$。求出 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$.

3) 求出 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 的极大值点，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 即为 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 的 MLE.

关于 3) 的说明

若 $l(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_m)$ 关于 θ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) 可导，则称

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial l(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)}{\partial \theta_1} = 0 \\
\dfrac{\partial l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)}{\partial \theta_2} = 0 \\
\quad\vdots \\
\dfrac{\partial l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)}{\partial \theta_m} = 0
\end{cases}
$$

为对数似然方程组。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X \sim B(1, p)}$ 的样本，$\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$是样本观测值。试求未知参数 $\boldsymbol{p}$ 的极大似然估计。

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ 的样本，$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ 是样本观测值。试求未知参数 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2$ 的极大似然估计。

例 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自总体 $X \sim f(x;\theta,c)$ 的样本观测值，其中

$$f(x;\theta,c)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}(x-c)}, & x\ge c,\\ 0, & x<c\end{cases}$$

试求未知参数θ，c 的极大似然估计。

解 似然函数为

$$L(\theta,c)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta,c)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}(x_i-c)}$$

$$=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}n(\bar{x}-c)},\quad c\le x_{(1)}.$$

对数似然函数为

$$l(\theta,c)=\ln L(\theta,c)=-n\ln\theta-\frac{n}{\theta}(\bar{x}-c),\quad c\le x_{(1)}.$$

对数似然方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(\theta,c)}{\partial \theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{n}{\theta^2}(\overline{x} - c) = 0 \\ \dfrac{\partial l(\theta,c)}{\partial c} = \dfrac{n}{\theta} = 0 \end{cases}$$

- **问题** 怎么解上对数似然方程组?

$$\frac{\partial l(\theta,c)}{\partial c} = \frac{n}{\theta} > 0 \Longrightarrow$$ $l(\theta, c)$ 关于 c 严格单调增加

似然函数

$$L(\theta,c)=\theta^{-n}e^{\frac{-1}{\theta}n(\bar{x}-c)},c\le x_{(1)}$$

c 的极大似然估计为 $\hat{c}=x_{(1)}$

将 c 的极大似然估计代入对数似然方程

$$\frac{\partial l(\theta,c)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n}{\theta^2}(\bar{x}-c)=0$$

得到 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\bar{x}-x_{(1)}$

- **问题** 未知参数的极大似然估计唯一吗?

例 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim U(\theta-1, \theta+1)$ 的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本观测值。试求 θ 的极大似然估计。

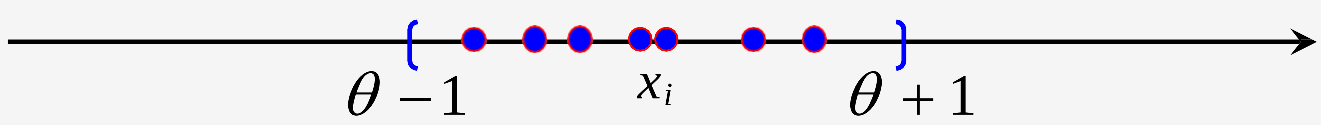
6.1.2 最大似然估计

解 因为总体的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{if } \theta-1<x<\theta+1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=2^{-n} \qquad \theta\in ?$$



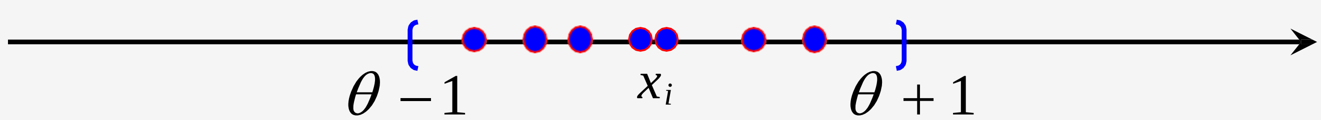
6.1.2 最大似然估计

解 因为总体的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{if } \theta-1<x<\theta+1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=2^{-n} \qquad x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}+1$$



即当 $x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}+1$ 时，似然函数 $\boldsymbol{L(\theta)}$ 取得最大值 2^{-n} 。

所以区间 $(x_{(n)}-1,\ x_{(1)}+1)$ 内任一点都是 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计。

极大似然估计的不变性

设 $\hat{\theta}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，

且有单值反函数：

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})$$

则 $u(\hat{\theta})$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的极大似然估计。

例 假设袋中有黑球和白球，其中白球所占比例为 $p(0 < p < 1)$ 未知。每次有放回地从袋中随机摸取 1 个球出来观测其颜色后放回，共摸了 m 个球，其中白球个数记为X。共重复了 n 次这样的试验，得到样本观察值为$x_1, x_2, \ldots, x_n$，试求

(1) p 的极大似然估计；

(2) 袋中白球和黑球数之比 $\boldsymbol{R}$ 的极大似然估计。

解 (1) 先求 $\boldsymbol{p}$ 的极大似然估计

因为总体 $\boldsymbol{X \sim B(m, p)}$，所以似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}$$

$$=p^{n\bar{x}}(1-p)^{n(m-\bar{x})}\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}$$

对数似然函数为

$$l(p)=\ln L(p)=n\overline{x}\ln p+n(m-\overline{x})\ln(1-p)+\ln\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}$$

对数似然函数方程

$$\frac{dl(p)}{dp}=\frac{n\overline{x}}{p}-\frac{n(m-\overline{x})}{1-p}=0$$

解得未知参数 $\boldsymbol{p}$ 的极大似然估计为 $\hat{p}=\dfrac{\overline{x}}{m}$

(2) 求白球和黑球数之比 **R** 的极大似然估计因为白球和黑球数之比

$$R = \frac{p}{1-p}$$

所以由极大似然估计的不变性，有

$$\hat{R} = \frac{\hat{p}}{1-\hat{p}} = \frac{\overline{x}}{m-\overline{x}}$$

- 问题 矩估计有不变性吗?

谢谢大家！