

概率论

——科学逻辑

E. T. Jaynes 著

明夷船 译

1

可信推理

量化规则

概率论，不过是生活约化而成的计算。

拉普拉斯，1819

问题已被形式化了，这是我们所作的公设在数学上的必然结果。这些公设可粗略描述如下：

- (I) 命题的可信性由实数表示；
- (II) 定性符合常识；
- (III) 一致性。

本章仅基于这些公设推导与推断相关的量化规则。所得结果，曾经有着一段漫长、复杂又令人难以置信的历史。这段历史充满着广义科学方法论方面的教训（见某些章尾部的评注部分）。

2.1 乘法规则

我们首先为逻辑乘 AB 的可信性分别与 A 与 B 的可信性之间的关系找出一个一致性的规则。我们在意的其实是 $AB|C$ 。由于推理过程本身有些微妙，这需要我们从一些不同的视角去审视。

先考虑将 AB 为真的裁决打碎为对 A 与 B 所作的更为基本的裁决。机器人可以

- (1) 裁决 B 为真； ($B|C$)
- (2) 认可 B 为真，裁决 A 为真。 ($A|BC$)

或者，等同地，

- (1) 裁决 A 为真； ($A|C$)
- (2) 认可 A 为真，裁决 B 为真。 ($B|AC$)

上面，在每种情况中，我们给出了每一步骤相应的可信性。

现在，解释一下第 1 个过程。为了命题 AB 为真， B 必须为真。因而，必须考虑 $B|C$ 的可信性。此外，若 B 为真，则需要进一步保证 A 为真，因此还需要考虑 $A|BC$ 的可信性。但是若 B 为假，则无需裁决 A ，亦即无需裁决 $A|\overline{B}C$ ，便可知晓 AB 为假；若机器人先推理 B ，那么， A 的可信性仅在 B 为真时才值得考虑。因此，机器人在有了 $B|C$ 与 $A|BC$ 的情况下，就不需要 $A|C$ 了，因为 $A|C$ 并未给它带来更多的信息。

类似地， $A|B$ 与 $B|A$ 是不需要的；无论 A 与 B 在缺乏 C 的情况下多么可信，都与机器人在知道 C 为真的情况下所作的裁决无关。例如，若机器人知晓地球是圆的，那么在裁决与现在的宇宙学相关的问题时，它就可以忽略那些在它尚不知地球是圆的之时需要考虑的观点。

由于逻辑乘法运算遵循交换律, $AB = BA$, 因此上文中的 A 与 B 毫无疑问, 可以互换; 亦即 $A|C$ 与 $B|AC$ 的知识也能用于确定 $AB|C = BA|C$ 。对于 AB , 机器人必定能从这两个过程中得到相同的可信性, 这是我们的一致性条件之一, 即公设 (IIIa)。

可以用更明确的形式来描述。 $(AB|C)$ 可以是 $B|C$ 与 $A|BC$ 的某个函数:

$$(AB|C) = F[(B|C), (A|BC)] \quad (2.1)$$

现在, 如果上述推理尚不完全清晰, 那么就审视一下其他的替代形式。例如, 可以假设

$$(AB|C) = F[(A|C), (B|C)] \quad (2.2)$$

是容许的形式。但是, 很容易揭示, 这种形式的关系无法满足公设 (II) 的那些定性条件。给定 C , 命题 A 或许非常可信, 命题 B 或许可信, 但是 AB 可能依然非常可信或非常不可信。

例如, 下一个遇到的人, 蓝眼睛, 这相当可信, 黑头发, 这也相当可信; 这两样生理特征同时出现于此人身上, 也没什么不合理之处。不过, 左眼睛是蓝色的, 这相当可信, 右眼睛是褐色的, 也相当可信, 但是若它们同时为真, 那就极为不可信。如果使用这种形式的公式, 那么就没法考虑这些情况。用这种形式的函数, 我们的机器人无法像人类那样去作推理, 它甚至连定性的推理都做不到。

还有一些其他的可能的形式。尝试所有的可能形式的方法——“穷举证明”——可像下面这样进行。先引入一些实数

$$u = (AB|C), \quad v = (A|C), \quad w = (B|AC), \quad x = (B|C), \quad y = (A|BC). \quad (2.3)$$

如果 u 被表示成 u, v, x, y 中两个或更多个实数的函数, 那么有 11 种可能的形式。可以写出每一种可能, 将它置于各种极端条件下, 如同褐色眼睛与蓝色眼睛那样 (抽象描述: A 蕴含了 B 为假¹)。其他极端条件有, $A = B$, $A = C$, $C \Rightarrow \bar{A}$, 等。Tribus (1969) 作了冗长乏味的分析, 发现只有两种可能的形式, 在某种极端的情况下, 遵循着定性符合常识这一公设, 它们分别是 $u = F(x, y)$ 与 $u = F(w, v)$, 这正是之前我们推理出来的那两种函数形式。

现在, 运用第 1 章讨论的量化要求。给定的先验信息的任何变化 $C \rightarrow C'$, 以及 B 变得更可信, A 没有变化,

$$B|C' > B|C \quad (2.4)$$

$$A|BC' = A|BC \quad (2.5)$$

根据常识, AB 只会变得更可信, 而不是更不可信:

$$AB|C' \geq AB|C \quad (2.6)$$

当且仅当 $A|BC$ 为不可能时, 相等关系成立。同样, 给定先验信息 C'' , 以及

$$B|C'' = B|C \quad (2.7)$$

¹ 译注: $A \Rightarrow \bar{B}$

2.1 乘法规则

$$A|BC'' > A|BC \quad (2.8)$$

就会有

$$AB|C'' \geq AB|C \quad (2.9)$$

当且仅当 $B|C$ 为不可能时，相等关系成立（即使此时未去定义 $A|BC$ ， $AB|C''$ 依然不可能为真）。此外，函数 $F(x, y)$ 必须是连续的，不然，(2.1) 右侧的某个可信性的微小递增可能会导致 $AB|C$ 的大幅递增。

总之， $F(x, y)$ 必须是 x 与 y 的连续的单调递增函数。若假设它可微（并非必须如此；见 (??) 的讨论），便有

$$F_1(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \geq 0 \quad (2.10)$$

仅当 x 表示不可能时，上式中的相等关系成立。后文会继续使用这些符号，无论 F 是什么样的函数， F_i 表示 F 的第 i 个参数对应的微分。

接下来，我们动用公设 (IIIa)，“结构上”的一致性。假设想获得 $(ABC|D)$ 的可信性，即三个命题同时为真的可信性，由于布尔运算遵循结合律 $ABC = (AB)C = A(BC)$ ，因此有两种方式来做此事。若规则具有一致性，一定能从这两种顺序的运算中获得相同的结果。首先，可以将 BC 视为单一的命题，利用 (2.1)：

$$(ABC|D) = F[(BC|D), (A|BCD)] \quad (2.11)$$

然后，对可信性 $(BC|D)$ 应用 (2.1)，可得：

$$(ABC|D) = F\{F[(C|D), (B|CD)], (A|BCD)\} \quad (2.12.a)$$

不过，也可以在一开始将 AB 视为单一的命题，这样就可以从另一种顺序推出不同的结果：

$$(ABC|D) = F[(C|D), (AB|CD)] = F\{(C|D), F[(B|CD), (A|BCD)]\} \quad (2.12.b)$$

若我们寻找的这个规则是要用于表示推理的一致性方法，那么 (2.12) 与 (2.12.b) 必定恒等。在这种情况下，我们的机器人所作的一致性推理，其必要条件可表示为一个函数方程，

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \quad (2.13)$$

在数学里，这个方程历史悠久，源起于 N. H. Abel (1826) 的研究。Aczél (1966) 在他的讲述函数方程的巨著中，贴切地成这个方程为“关联方程” (Associativity Equation)，并列举了 98 份讨论或使用这个方程的参考文献。Aczél 在不假设函数可微的条件下，求出了通解 (??)，见下文。

