

# 概率论

——科学逻辑

E. T. Jaynes 著

明夷船 译



# 1 可信推理



## 2 量化规则

概率论，不过是生活约化而成的计算。

拉普拉斯，1819

问题已被形式化了，这是我们所作的公设在数学上的必然结果。这些公设可粗略描述如下：

- (I) 命题的可信性由实数表示；
- (II) 定性符合常识；
- (III) 一致性。

本章仅基于这些公设推导与推断相关的量化规则。所得结果，曾经有着一段漫长、复杂又令人难以置信的历史。这段历史充满着广义科学方法论方面的教训（见某些章尾部的评注部分）。

### 2.1 乘法规则

我们首先为逻辑乘  $AB$  的可信性分别与  $A$  与  $B$  的可信性之间的关系找出一个一致性的规则。我们在意的其实是  $AB|C$ 。由于推理过程本身有些微妙，这要求我们从一些不同的视角去审视。

先考虑将  $AB$  为真的裁决打碎为对  $A$  与  $B$  所作的更为基本的裁决。机器人可以

- (1) 裁决  $B$  为真； ( $B|C$ )
- (2) 认可  $B$  为真，裁决  $A$  为真。 ( $A|BC$ )

或者，等同地，

- (1) 裁决  $A$  为真； ( $A|C$ )
- (2) 认可  $A$  为真，裁决  $B$  为真。 ( $B|AC$ )

上面，在每种情况中，我们给出了每一步骤相应的可信性。

现在，解释一下第 1 个过程。为了命题  $AB$  为真， $B$  必须为真。因而，必须考虑  $B|C$  的可信性。此外，若  $B$  为真，则需要进一步保证  $A$  为真，因此还需要考虑  $A|BC$  的可信性。但是若  $B$  为假，则无需裁决  $A$ ，亦即无需裁决  $A|\overline{B}C$ ，便可知晓  $AB$  为假；若机器人先推理  $B$ ，那么， $A$  的可信性仅在  $B$  为真时才值得考虑。因此，机器人在有了  $B|C$  与  $A|BC$  的情况下，就不需要  $A|C$  了，因为  $A|C$  并未给它带来更多的信息。

类似地， $A|B$  与  $B|A$  是不需要的；无论  $A$  与  $B$  在缺乏  $C$  的情况下多么可信，都与机器人在知道  $C$  为真的情况下所作的裁决无关。例如，若机器人知晓地球是圆的，那么在裁决与现在的宇宙学相关的问题时，它就可以忽略那些在它尚不知地球是圆的之时需要考虑的观点。

由于逻辑乘法运算遵循交换律,  $AB = BA$ , 因此上文中的  $A$  与  $B$  毫无疑问, 可以互换; 亦即  $A|C$  与  $B|AC$  的知识也能用于确定  $AB|C = BA|C$ 。对于  $AB$ , 机器人必定能从这两个过程中得到相同的可信性, 这是我们的一致性条件之一, 即公设 (IIIa)。

可以用更明确的形式来描述。 $(AB|C)$  可以是  $B|C$  与  $A|BC$  的某个函数:

$$(AB|C) = F[(B|C), (A|BC)] \quad (2.1)$$

现在, 如果上述推理尚不完全清晰, 那么就审视一下其他的替代形式。例如, 可以假设

$$(AB|C) = F[(A|C), (B|C)] \quad (2.2)$$

是容许的形式。但是, 很容易揭示, 这种形式的关系无法满足公设 (II) 的那些定性条件。给定  $C$ , 命题  $A$  或许非常可信, 命题  $B$  或许可信, 但是  $AB$  可能依然非常可信或非常不可信。

例如, 下一个遇到的人, 蓝眼睛, 这相当可信, 黑头发, 这也相当可信; 这两样生理特征同时出现于此人身上, 也没什么不合理之处。不过, 左眼睛是蓝色的, 这相当可信, 右眼睛是褐色的, 也相当可信, 但是若它们同时为真, 那就极为不可信。如果使用这种形式的公式, 那么就没法考虑这些情况。用这种形式的函数, 我们的机器人无法像人类那样去作推理, 它甚至连定性的推理都做不到。

还有一些其他的可能的形式。尝试所有的可能形式的方法——“穷举证明”——可像下面这样进行。先引入一些实数

$$u = (AB|C), \quad v = (A|C), \quad w = (B|AC), \quad x = (B|C), \quad y = (A|BC). \quad (2.3)$$

如果  $u$  被表示成  $u, v, x, y$  中两个或更多个实数的函数, 那么有 11 种可能的形式。可以写出每一种可能, 将它置于各种极端条件下, 如同褐色眼睛与蓝色眼睛那样 (抽象描述:  $A$  蕴含了  $B$  为假<sup>1</sup>)。其他极端条件有,  $A = B$ ,  $A = C$ ,  $C \Rightarrow \bar{A}$ , 等。Tribus (1969) 作了冗长乏味的分析, 发现只有两种可能的形式, 在某种极端的情况下, 遵循着定性符合常识这一公设, 它们分别是  $u = F(x, y)$  与  $u = F(w, v)$ , 这正是之前我们推理出来的那两种函数形式。

现在, 运用第 1 章讨论的量化要求。给定的先验信息的任何变化  $C \rightarrow C'$ , 以及  $B$  变得更可信,  $A$  没有变化,

$$B|C' > B|C \quad (2.4)$$

$$A|BC' = A|BC \quad (2.5)$$

根据常识,  $AB$  只会变得更可信, 而不是更不可信:

$$AB|C' \geq AB|C \quad (2.6)$$

当且仅当  $A|BC$  为不可能时, 相等关系成立。同样, 给定先验信息  $C''$ , 以及

$$B|C'' = B|C \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> 译注:  $A \Rightarrow \bar{B}$

## 2.1 乘法规则

$$A|BC'' > A|BC \quad (2.8)$$

就会有

$$AB|C'' \geq AB|C \quad (2.9)$$

当且仅当  $B|C$  为不可能时，相等关系成立（即使此时未去定义  $A|BC$ ， $AB|C''$  依然不可能为真）。此外，函数  $F(x, y)$  必须是连续的，不然，(2.1) 右侧的某个可信性的微小递增可能会导致  $AB|C$  的大幅递增。

总之， $F(x, y)$  必须是  $x$  与  $y$  的连续的单调递增函数。若假设它可微（并非必须如此；见 (2.13) 的讨论），便有

$$F_1(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \geq 0 \quad (2.10.a)$$

仅当  $x$  表示不可能时，上式中的相等关系成立；还有，

$$F_2(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial y} \geq 0 \quad (2.10.b)$$

后文会继续使用这些符号，无论  $F$  是什么样的函数， $F_i$  表示  $F$  的第  $i$  个参数对应的微分。

接下来，我们动用公设 (IIIa)，“结构上”的一致性。假设想获得  $(ABC|D)$  的可信性，即三个命题同时为真的可信性，由于布尔运算遵循结合律  $ABC = (AB)C = A(BC)$ ，因此有两种方式来做此事。若规则具有一致性，一定能从这两种顺序的运算中获得相同的结果。首先，可以将  $BC$  视为单一的命题，利用 (2.1)：

$$(ABC|D) = F[(BC|D), (A|BCD)] \quad (2.11)$$

然后，对可信性  $(BC|D)$  应用 (2.1)，可得：

$$(ABC|D) = F\{F[(C|D), (B|CD)], (A|BCD)\} \quad (2.12.a)$$

不过，也可以在一开始将  $AB$  视为单一的命题，这样就可以从另一种顺序推出不同的结果：

$$(ABC|D) = F[(C|D), (AB|CD)] = F\{(C|D), F[(B|CD), (A|BCD)]\} \quad (2.12.b)$$

若我们寻找的这个规则是要用于表示推理的一致性方法，那么 (2.12.a) 与 (2.12.b) 必定恒等。在这种情况下，我们的机器人所作的一致性推理，其必要条件可表示为一个函数方程，

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \quad (2.13)$$

在数学里，这个方程历史悠久，源起于 N. H. Abel (1826) 的研究。Aczél (1966) 在他的讲述函数方程的巨著中，贴切地成这个方程为“关联方程” (Associativity Equation)，并列举了 98 份讨论或使用这个方程的参考文献。Aczél 在不假设函数可微的条件下，求出了通解 (??)，见下文。不过，他的书中 (Aczél, 1987)，用了 11 页的篇幅证明此解的存在。在此，我们给出 R. T. Cox (1961) 在假设函数可微的前提下给出的更短的证明；也可参考附录 B 中的讨论。

显然, (2.13) 有一个平凡解,  $F(x, y) = \text{常数}$ 。但是这个解违背了单调性要求 (2.10), 并且毫无用处可言。除非 (2.13) 有一个非平凡解, 不然, 这条路就走不通了; 因此, 必须寻求最为广义的非平凡解。先定义一些缩写

$$u \equiv F(x, y), \quad v \equiv F(y, z) \quad (2.14)$$

现在, 依然认为  $(x, y, z)$  是互不依赖的变量, 待求解的函数方程可写为

$$F(x, v) = F(u, z) \quad (2.15)$$

分别对  $x$  与  $y$  求微分, 按照 (2.10) 的记法, 可得

$$\begin{aligned} F_1(x, v) &= F_1(u, z)F_1(x, y) \\ F_2(x, v)F_1(y, z) &= F_1(u, z)F_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

从这两个方程中消除  $F_1(u, z)$ , 可得

$$G(x, v)F_1(y, z) = G(x, y) \quad (2.17)$$

其中,  $G(x, y) \equiv F_2(x, y)/F_1(x, y)$ 。显然, (2.16) 的左部一定是不依赖  $z$ 。可将 (2.17) 等价地写为

$$G(x, v)F_2(y, z) = G(x, y)G(y, z) \quad (2.18)$$

用  $U$  与  $V$  分别表示 (2.17) 与 (2.18) 的左部, 可以得出  $\partial V/\partial y = \partial U/\partial z$ 。因而  $G(x, y)G(y, z)$  必定不依赖  $y$ 。具有这一性质的最一般性的函数  $G(x, y)$  为

$$G(x, y) = r \frac{H(x)}{H(y)} \quad (2.19)$$

其中,  $r$  为常数,  $H(x)$  为任意函数。基于  $F$  的单调性, 可确定  $G > 0$ , 因此需要  $r > 0$ , 至于  $H(x)$  的正负则无关大体。应用 (2.19), 则 (2.17) 与 (2.18) 变成:

$$F_1(y, z) = \frac{H(v)}{H(y)} \quad (2.20)$$

$$F_2(y, z) = r \frac{H(v)}{H(z)} \quad (2.21)$$

关系  $dv = dF(y, z) = F_1 dy + F_2 dz$  可化为

$$\frac{dv}{H(v)} = \frac{dy}{H(y)} + r \frac{dz}{H(z)} \quad (2.22)$$

或者化为积分形式

$$w[F(y, z)] = w(v) = w(y)w'(z) \quad (2.23)$$

其中

$$w(x) = \exp \left\{ \int^x \frac{dx}{H(x)} \right\} \quad (2.24)$$