

概率论

——科学逻辑

E. T. Jaynes 著

明夷船 译

1 可信推理

逻辑学所关心的问题，要么是肯定或否定的，要么是完全不确定的。总之，（应当庆幸）没什么问题需要推理。世上真正的逻辑应该是概率计算——关乎可能性的量化运算，它存在甚至应该存在于理性者的思维之中。

James Clerk Maxwell, 1850

在漆黑的夜晚，一名警察在空无一人街道上巡逻。突然，他听到了警铃惊响，循声望去，街对面一家珠宝店的窗户洞开，一位蒙面的绅士，肩负一袋昂贵的珠宝，向外爬出。警察不假思索，立即断定此人绝非善类。他是基于什么得出这一结论的呢？

1.1 演绎推理与可信推理

警察的结论显然不是通过从证据出发的逻辑推导而得到。任何犯罪，皆能为之编造出完美的无罪辩护。譬如，那位绅士可能是珠宝店的主人。当天夜里，他从一个化妆舞会回家，发现没带钥匙。当他走到自己的店铺时，一辆驶过的卡车扔出一块石头击破了窗户。他为了保护自己的财产不得已而上演了警察所看到的一幕。

尽管警察的推理过程并非逻辑推导，但是我们得承认他的结论在一定程度上也是正确的。警察看到的那一幕，不能作为证据，去证明那位绅士犯罪，但是却能够让自己的结论看上去更为可信。这种推理方式或许是我们的本能。有些事，例如今天是否下雨，由于缺乏足够的信息，无法进行演绎推理，但是又必须当机立断。这样的事情在我们的清醒的时间里几乎无时无刻不在发生。

这种推理貌似寻常，其过程却非常微妙。尽管相关的讨论已经延续了 24 个世纪，但迄今依然没有令人满意的答案。在这本书里，我们会汇报一些有用且令人鼓舞的新的进展，即使用明确的定理去代替那些不靠谱的直觉判断，并且使用一些非常基本且近乎无法避免的理性标准所确定的规则代替那些特设的过程。

有关这些问题的所有讨论，始于几个例子，它们反映了演绎推理与可信推理的对立。演绎推理（证明式推理），亦即亚里士多德的工具论，总是能够归结为两个强三段论的反复运用，即

$$\begin{array}{l} \text{若 } A \text{ 为真, 则 } B \text{ 为真} \\ \hline A \text{ 为真} \\ \hline \text{所以, } B \text{ 为真} \end{array} \quad (1.1)$$

与

$$\begin{array}{r}
 \text{若 } A \text{ 为真, 则 } B \text{ 为真} \\
 \hline
 B \text{ 为假} \\
 \hline
 \text{所以, } A \text{ 为假}
 \end{array}
 \quad (1.2)$$

这就是我们乐意时时使用的推理方式，但是很不幸，大部分情况下我们缺乏这种推理所需要的信息，只好退而求其次，使用弱三段论：

$$\begin{array}{r}
 \text{若 } A \text{ 为真, 则 } B \text{ 为真} \\
 \hline
 B \text{ 为真} \\
 \hline
 \text{所以, } A \text{ 更可信}
 \end{array}
 \quad (1.3)$$

证据不足以证明 A 为真，但是若 A 的结果之一得到确证，我们就会对 A 为真更有信心。例如，设

$A \equiv$ 最晚上午十点下雨。

$B \equiv$ 上午十点之前多云。

在上午 9:45 看到云，并不能断定将会下雨。我们的常识是服从弱三段论的，它会督促我们改变计划与行动，因此如果那些云足够黑，我们就会相信会下雨。

这个例子也揭示了大前提，「若 A 则 B 」表示 B 仅仅是 A 的逻辑结果，并非必须是因果意义上的物理结果—— B 晚于 A 方有效。上午十点下雨并非上午 9:45 多云的物理原因。无论如何，但是正确的逻辑关系并非错误的因果指向（多云 \Rightarrow 雨），而是（雨 \Rightarrow 多云）这种非因果但正确的指向。

之所以在一开始便强调逻辑联系，是因为关于推断¹的一些讨论与应用陷入了严重的误区。这些误区正是由于未能辨清逻辑蕴含与物理因果之间的区别而造成的。Simon 与 Rescher (1996) 深入分析了二者的区别。他们注意到，像表达物理因果那样解释逻辑蕴含的所有尝试，都会因为缺乏第二种三段论这样的逆否形式而失败。也就是说，如果我们尝试将大前提解释为「 A 是 B 的物理原因」，那么就很难接受「非 B 是非 A 的物理原因」。在第 3 章中可以看到，以物理因果的形式来解释可信推断，也没有取得更好的进展。

另一个弱三段论，其大前提未变，

$$\begin{array}{r}
 \text{若 } A \text{ 为真, 则 } B \text{ 为假} \\
 \hline
 A \text{ 为假} \\
 \hline
 \text{所以, } B \text{ 更不可信}
 \end{array}
 \quad (1.4)$$

那位警察的推理并非来自上述的弱三段论，而是来自更弱的三段论：

$$\begin{array}{r}
 \text{若 } A \text{ 为真, 则 } B \text{ 更可信} \\
 \hline
 B \text{ 为真} \\
 \hline
 \text{所以, } A \text{ 更可信}
 \end{array}
 \quad (1.5)$$

¹ 译注：注意推断与推理的区别

且不论这一论证外在的弱点，依循它，警察的结论就会有着很强的说服力。有某种东西让我们相信，在特定情况下，这种论证有着几乎与演绎推理同样有力。

这些例子展现了，在可信推理中，大脑不仅要判断事物变得更可信还是更不可信，还要以某种方式估算可信程度。上午十点下雨可信程度要依赖于上午 9:45 的云层的黑暗程度。并且，大脑会像利用这个问题的具体的新数据那样利用旧的信息；我们尽力回忆过去与多云和雨有关的经验来决定该做什么，也依据昨晚的天气预报来决定该做什么。

要阐明警察的确要用到他们过去所累积的经验，必须改变一下他们的经验。假设像那样的事件每天晚上都被每位警察碰到——绅士每次都能证明自己是完全无罪的。很快，警察就会主动忽略这样的琐事。

因此，我们的推理极为仰仗先验信息，借助它完成新问题中的可信程度估计。这种推理过程常于不知不觉甚至瞬间完成；我们将其称为常识。这一称谓掩盖了它的复杂性。

数学家 George Pólya 为可信推理写了三卷书，给出了丰富有趣的例子，并表明可信推理是基于确定的规则进行的（尽管在他的著作中，它们表现为定性的形式）。上述的弱三段论均出现于第三卷书。我们强烈建议读者能查阅 Pólya 的著作，它是本书中许多观点的源头。在后文中，我们会表明 Pólya 原则是可以量化的，并且这种量化规则非常有用。

显然，上文所述的演绎推理具有这样的性质，通过两种强三段论所形成的推理链，可以得出像前提条件那样确定的结论。若使用其他类别的推理，诸如上述的三种弱三段论，结论的可靠性会在不同的推理阶段而发生变化。但是若使用这些弱三段论的量化形式，在许多情况下，我们的结论能够达到演绎推理的确定程度（就像警察的那个例子让我们所期待的那样）。Pólya 指出，甚至一个研究纯数学的数学家实际上大部分时间也是在使用这些更弱的推理方式。当然，在公布一个新定理时，数学家将会努力发明一个论证，使之服从强三段论；但是初步导出定理的推理过程几乎总是包含着更弱的推理形式（例如，对类比所引发的猜想的探究）。S. Banach（被 S. Ulam 引用，1957）的评论表达了类似的观点：好的数学家看到的是定理之间的相似之处；伟大的数学家看到的是相似之处之间的相似之处。

1.2 类比于物理学

在物理学中，很快就会发现世界超级复杂，不可能一下分析清楚，除非是将它剖分为一些小片，逐一研究。惟有如此，我们才能取得进展。有时会发明一种数学模型，它能够重现这些小片的某些特征，此时就会觉得取得了一些进展。此类模型被称为物理理论。随着知识的推进，所发明的模型越来越好，它们重现了现实中越来越多的特征，并且越来越精确。没人知道这个过程会不会自然终止，或无休止地进行下去。

在试图理解常识的过程中，我们会采用类似的思路。我们不打算一口吃成胖子，但是一旦能够构造出理想的能够重现有关常识的部分特征的数学模型，我们就会感到有所进步。我们期盼这样的模型在未来能够被更完美的模型取代，也知道这一探索过程会不会自然终止。

我们的工作与物理学的相似之处不仅仅是探索方法。经常性地，我们所熟悉的东西让我们感到非常难以理解。那些不为常人所知的现象（诸如铁与镍的紫外光谱的不同）能够通过数学形式精确的描述，然而所有现代科学，在遇到如何描述一枚草叶的生长这种寻常的现象时，则全然无用。因此，我们不会对这个模型寄予过多厚望，必须做好心理准备，在构造任何一种像样的模型时，心智活动的最为寻常的特征都有可能成为最大的困难。

还有更多的相似之处。在物理学中，令我们习以为常的是，知识所取得的任何一点进步都会产生巨大但不可预料的实用价值。伦琴发现了X光，令医疗诊断重要革新成为可能。麦克斯韦所发现的旋度方程的第二项（译者注：应该是位移电流），令瞬时通信呼之欲出。

我们为常识建立的数学模型也具备这种实用特征。任何成功的模型，哪怕它只能重现常识的少量特征，也会有力扩展某一应用领域中的常识。在该领域内，它让我们能够求解一些推断方面的问题。若没有它的帮助，对于这些被复杂细节卷裹的问题，我们没有任何头绪去解决。

1.3 会思考的计算机

许多人热衷于宣称，永远也不可能造出替代人脑的机器——人脑能干的许多事，机器永远也做不到。冯·诺依曼于1948年在普林斯顿所作的一次报告中对这一言论给出了巧妙的回应，我有幸聆听了那场报告。作为对来自听众的代表性问题（那个问题是「不过是一台机器，它不可能真正思考，对吧？」）的回答，他说：你坚持有的事是一台机器做不到的。如果你能将一台机器做不到的那件事精确地告诉我，那么我总能制造一台专门来做那件事的机器。

原则上，一台机器无法完成的运算正是那些我们无法详尽描述的运算，或不能在有限步骤下完成的运算。可能有人会提到歌德尔不完备性，不可判定性，以及永不停机的图灵机等。要回答这类质疑，只需指出这些东西是因人脑的存在而生。正如冯·诺依曼所言，要制造会思考的机器，最根本的限制在于我们未能确切的理解「思维」的构成。

然而在我们对常识的研究中，我们将会触摸到一些与思维机制有关的非常清晰的观点。每次通过预定义一组明确的运算，将一个能重现部分常识的数学模型建立起来，它就会向我们展示如何「构造一台机器」（例如，写一个计算机程序）。这台机器在不完备的信息之上运转，并通过那几条弱三段论的量化版本进行可信推理，而不是演绎推理。

实际上，对于某些特定的推断问题，像这样的计算机软件的开发是这个领域中最活跃且有用的趋势之一。所处理的一类问题可能是，给定大量数据，其中包含10 000独立的观测，依据这些数据以及手头上掌握的任何先验信息，确定与数据起因相关的100种不同的可行假设的可信程度。

对于两种泾渭分明的假设的判断，个人的常识可能就足够了；但是面对100种假设，它们之间的界限也不是那么清晰，若没有计算机，也没有一种发达的数学理论来指导编程，那么我们会不知所措。也就是说，在那位警察的弱三段论中，究竟是什么决定了A的可信度大幅提升，甚至提升到了必然的程度；或者只是提升了微不足道的一点点，让B近乎与A无关呢？这本书的目标就是在当前可能的深度与广度上建立能够回答上述问题的数学理论。

尽管我们期盼得到一种对计算机编程有用的数学理论，但是会思考的计算机的这一观点也有助于在心理学方面建立一种数学理论。人脑所用的推理过程，这方面的问题受情感和谬论的主宰。讨论这方面的问题，很难不卷入到一些问题的争论之中。不过这些问题，就我们所掌握的知识而言还是不足以探讨清楚，而且也与我们的目的无关。

显然，人脑中的运算相当复杂，以至于我们无需假装去解释它的神秘之处，并且在任何情况下，也不会尝试去解释人类大脑里所有难以重现的迷乱和不一致性。这虽然是个有趣并且重要的主题，但是它并非我们在此所研究的主题。我们的主题是逻辑的规范性原理，并非心理学或神经生理学原理。

为了强调这一点，我们要问的并非是，「如何构建人类常识的数学模型」，而是问「如何构建一台机器，让它在清晰定义可表示理想化的常识的原理下，去执行有用的可信推理」。

1.4 介绍一下机器人

为了搁置争议，专心致志，我们要发明一种虚构的东西。它的大脑由我们来设计，这样它就可以根据某些确定的规则进行推理了。这些规则可从一些简单的基本假设推导出来。在我们看来，这些基本假设是人心所向。亦即，我们认为一个理性的人，一旦意识到他的思维违背了这些基本假设，就会想对自己的思维进行修正。

原则上，我们可以采用我们喜欢的任何规则。这些规则的定义，也就是我们将要研究的那个机器人的定义。将我们的机器人所作的推理与你所作的推理进行比较，如果你发现二者并无相似之处，那么你有理由拒绝我们的机器人，然后你可以根据你的想法再设计一个新的机器人。不过，如果你发现二者非常相似，那么就会信任这个机器人，需要让它帮助你去解决你所面对的那些推断问题。总之，理论终将获得成功，而不仅仅停留在假设阶段。

我们的机器人作的是关于命题的推理。目前我们必须要求，对于这个机器人而言，所涉及的任何命题必须有着明确的含义，必须是简单的、确定的、非真即假的逻辑形式。亦即，除非特殊声明，我们只关心二值逻辑，或亚里士多德式的逻辑。像这样的「亚里士多德命题」，是正确的还是错误的，我们不关心。实际上，我们对此无能为力，正是我们要所发明这个机器人的主要原因。例如，我个人认为下面两个命题皆为真：

$A \equiv$ 贝多芬与柏辽兹素未谋面。

$B \equiv$ 尽管柏辽兹在其全胜时期不逊色于任何人，但贝多芬的音乐较柏辽兹更具有存世价值。

命题 B ，目前并非我们的机器人所能推理的命题，而命题 A 却是，尽管要判定该命题的真伪看上去有些不太可能。在我们的理论建成之后，你会发现，有趣的是，像 A 这样的亚里士多德命题，其严格性可以放宽；如此一来，机器人便可以处理像 B 这样的命题了。

1.5 布尔代数

1.6 运算的完备集

1.7 公设

1.8 评论

2 量化规则

概率论，不过是生活约化而成的计算。

Laplace, 1819

问题已被形式化了，这是我们所作的公设在数学上的必然结果。这些公设可粗略描述如下：

- (I) 命题的可信性由实数表示；
- (II) 定性符合常识；
- (III) 一致性。

本章仅基于这些公设推导与推断相关的量化规则。所得结果，曾经有着一段漫长、复杂又令人难以置信的历史。这段历史充满着广义科学方法论方面的教训（见某些章尾部的评注部分）。

2.1 乘法规则

我们首先为逻辑乘 AB 的可信性分别与 A 与 B 的可信性之间的关系找出一个一致性的规则。我们在意的其实是 $AB|C$ 。由于推理过程本身有些微妙，这要求我们从一些不同的视角去审视。

先考虑将 AB 为真的裁决打碎为对 A 与 B 所作的更为基本的裁决。机器人可以

- (1) 裁决 B 为真； ($B|C$)
- (2) 认可 B 为真，裁决 A 为真。 ($A|BC$)

或者，等同地，

- (1) 裁决 A 为真； ($A|C$)
- (2) 认可 A 为真，裁决 B 为真。 ($B|AC$)

上面，在每种情况中，我们给出了每一步骤相应的可信性。

现在，解释一下第 1 个过程。为了命题 AB 为真， B 必须为真。因而，必须考虑 $B|C$ 的可信性。此外，若 B 为真，则需要进一步保证 A 为真，因此还需要考虑 $A|BC$ 的可信性。但是若 B 为假，则无需裁决 A ，亦即无需裁决 $A|\overline{B}C$ ，便可知晓 AB 为假；若机器人先推理 B ，那么， A 的可信性仅在 B 为真时才值得考虑。因此，机器人在有了 $B|C$ 与 $A|BC$ 的情况下，就不需要 $A|C$ 了，因为 $A|C$ 并未给它带来更多的信息。

类似地， $A|B$ 与 $B|A$ 是不需要的；无论 A 与 B 在缺乏 C 的情况下多么可信，都与机器人在知道 C 为真的情况下所作的裁决无关。例如，若机器人知晓地球是圆的，那么在裁决与现在的宇宙学相关的问题时，它就可以忽略那些在它尚不知地球是圆的之时需要考虑的观点。

由于逻辑乘法运算遵循交换律, $AB = BA$, 因此上文中的 A 与 B 毫无疑问, 可以互换; 亦即 $A|C$ 与 $B|AC$ 的知识也能用于确定 $AB|C = BA|C$ 。对于 AB , 机器人必定能从这两个过程中得到相同的可信性, 这是我们的一致性条件之一, 即公设 (IIIa)。

可以用更明确的形式来描述。 $(AB|C)$ 可以是 $B|C$ 与 $A|BC$ 的某个函数:

$$(AB|C) = F[(B|C), (A|BC)] \quad (2.1)$$

现在, 如果上述推理尚不完全清晰, 那么就审视一下其他的替代形式。例如, 可以假设

$$(AB|C) = F[(A|C), (B|C)] \quad (2.2)$$

是容许的形式。但是, 很容易揭示, 这种形式的关系无法满足公设 (II) 的那些定性条件。给定 C , 命题 A 或许非常可信, 命题 B 或许可信, 但是 AB 可能依然非常可信或非常不可信。

例如, 下一个遇到的人, 蓝眼睛, 这相当可信, 黑头发, 这也相当可信; 这两样生理特征同时出现于此人身上, 也没什么不合理之处。不过, 左眼睛是蓝色的, 这相当可信, 右眼睛是褐色的, 也相当可信, 但是若它们同时为真, 那就极为不可信。如果使用这种形式的公式, 那么就没法考虑这些情况。用这种形式的函数, 我们的机器人无法像人类那样去作推理, 它甚至连定性的推理都做不到。

还有一些其他的可能的形式。尝试所有的可能形式的方法——“穷举证明”——可像下面这样进行。先引入一些实数

$$u = (AB|C), \quad v = (A|C), \quad w = (B|AC), \quad x = (B|C), \quad y = (A|BC). \quad (2.3)$$

如果 u 被表示成 u, v, x, y 中两个或更多个实数的函数, 那么有 11 种可能的形式。可以写出每一种可能, 将它置于各种极端条件下, 如同褐色眼睛与蓝色眼睛那样 (抽象描述: A 蕴含了 B 为假²)。其他极端条件有, $A = B$, $A = C$, $C \Rightarrow \bar{A}$, 等。Tribus (1969) 作了冗长乏味的分析, 发现只有两种可能的形式, 在某种极端的情况下, 遵循着定性符合常识这一公设, 它们分别是 $u = F(x, y)$ 与 $u = F(w, v)$, 这正是之前我们推理出来的那两种函数形式。

现在, 运用第 1 章讨论的量化要求。给定的先验信息的任何变化 $C \rightarrow C'$, 以及 B 变得更可信, A 没有变化,

$$B|C' > B|C \quad (2.4)$$

$$A|BC' = A|BC \quad (2.5)$$

根据常识, AB 只会变得更可信, 而不是更不可信:

$$AB|C' \geq AB|C \quad (2.6)$$

当且仅当 $A|BC$ 为不可能时, 相等关系成立。同样, 给定先验信息 C'' , 以及

$$B|C'' = B|C \quad (2.7)$$

² 译注: $A \Rightarrow \bar{B}$

$$A|BC'' > A|BC \quad (2.8)$$

就会有

$$AB|C'' \geq AB|C \quad (2.9)$$

当且仅当 $B|C$ 为不可能时，相等关系成立（即使此时未去定义 $A|BC$ ， $AB|C''$ 依然不可能为真）。此外，函数 $F(x, y)$ 必须是连续的，不然，(2.1) 右侧的某个可信性的微小递增可能会导致 $AB|C$ 的大幅递增。

总之， $F(x, y)$ 必须是 x 与 y 的连续的单调递增函数。若假设它可微（并非必须如此；见 (2.13) 的讨论），便有

$$F_1(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \geq 0 \quad (2.10.a)$$

仅当 x 表示不可能时，上式中的相等关系成立；还有，

$$F_2(x, y) \equiv \frac{\partial F}{\partial y} \geq 0 \quad (2.10.b)$$

后文会继续使用这些符号，无论 F 是什么样的函数， F_i 表示 F 的第 i 个参数对应的微分。

接下来，我们动用公设 (IIIa)，“结构上”的一致性。假设想获得 $(ABC|D)$ 的可信性，即三个命题同时为真的可信性，由于布尔运算遵循结合律 $ABC = (AB)C = A(BC)$ ，因此有两种方式来做此事。若规则具有一致性，一定能从这两种顺序的运算中获得相同的结果。首先，可以将 BC 视为单一的命题，利用 (2.1)：

$$(ABC|D) = F[(BC|D), (A|BCD)] \quad (2.11)$$

然后，对可信性 $(BC|D)$ 应用 (2.1)，可得：

$$(ABC|D) = F\{F[(C|D), (B|CD)], (A|BCD)\} \quad (2.12.a)$$

不过，也可以在一开始将 AB 视为单一的命题，这样就可以从另一种顺序推出不同的结果：

$$(ABC|D) = F[(C|D), (AB|CD)] = F\{(C|D), F[(B|CD), (A|BCD)]\} \quad (2.12.b)$$

若我们寻找的这个规则是要用于表示推理的一致性方法，那么 (2.12.a) 与 (2.12.b) 必定恒等。在这种情况下，我们的机器人所作的一致性推理，其必要条件可表示为一个函数方程，

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \quad (2.13)$$

在数学里，这个方程历史悠久，源起于 N. H. Abel (1826) 的研究。Aczél (1966) 在他的讲述函数方程的巨著中，贴切地成这个方程为“关联方程” (Associativity Equation)，并列举了 98 份讨论或使用这个方程的参考文献。Aczél 在不假设函数可微的条件下，求出了通解 (2.27)，见下文。不过，他的书中 (Aczél, 1987)，用了 11 页的篇幅证明此解的存在。在此，我们给出 R. T. Cox (1961) 在假设函数可微的前提下给出的更短的证明；也可参考附录 B 中的讨论。

显然, (2.13) 有一个平凡解, $F(x, y) = \text{常数}$ 。但是这个解违背了单调性要求 (2.10), 并且毫无用处可言。除非 (2.13) 有一个非平凡解, 不然, 这条路就走不通了; 因此, 必须寻求最为广义的非平凡解。先定义一些缩写

$$u \equiv F(x, y), \quad v \equiv F(y, z) \quad (2.14)$$

现在, 依然认为 (x, y, z) 是互不依赖的变量, 待求解的函数方程可写为

$$F(x, v) = F(u, z) \quad (2.15)$$

分别对 x 与 y 求微分, 按照 (2.10) 的记法, 可得

$$\begin{aligned} F_1(x, v) &= F_1(u, z)F_1(x, y) \\ F_2(x, v)F_1(y, z) &= F_1(u, z)F_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

从这两个方程中消除 $F_1(u, z)$, 可得

$$G(x, v)F_1(y, z) = G(x, y) \quad (2.17)$$

其中, $G(x, y) \equiv F_2(x, y)/F_1(x, y)$ 。显然, (2.16) 的左部一定是不依赖 z 。可将 (2.17) 等价地写为

$$G(x, v)F_2(y, z) = G(x, y)G(y, z) \quad (2.18)$$

用 U 与 V 分别表示 (2.17) 与 (2.18) 的左部, 可以得出 $\partial V/\partial y = \partial U/\partial z$ 。因而 $G(x, y)G(y, z)$ 必定不依赖 y 。具有这一性质的最一般性的函数 $G(x, y)$ 为

$$G(x, y) = r \frac{H(x)}{H(y)} \quad (2.19)$$

其中, r 为常数, $H(x)$ 为任意函数。基于 F 的单调性, 可确定 $G > 0$, 因此需要 $r > 0$, 至于 $H(x)$ 的正负则无关大体。应用 (2.19), 则 (2.17) 与 (2.18) 变成:

$$F_1(y, z) = \frac{H(v)}{H(y)} \quad (2.20)$$

$$F_2(y, z) = r \frac{H(v)}{H(z)} \quad (2.21)$$

关系 $dv = dF(y, z) = F_1 dy + F_2 dz$ 可化为

$$\frac{dv}{H(v)} = \frac{dy}{H(y)} + r \frac{dz}{H(z)} \quad (2.22)$$

或者化为积分形式

$$w[F(y, z)] = w(v) = w(y)w'(z) \quad (2.23)$$

其中

$$w(x) = \exp \left\{ \int^x \frac{dx}{H(x)} \right\} \quad (2.24)$$

积分符号无下界，意味着 w 会有一个任意的倍增因子。但是，将 (2.15) 代入函数 $w(\cdot)$ 并应用 (2.23)，可得 $w(x)w^r(v) = w(u)w^r(z)$ ；再次应用 (2.23)，函数方程便可化为

$$w(x)w^r(y)[w(z)]^{r^2} = w(x)w^r(y)w^r(z) \quad (2.25)$$

若 $r = 1$ ，便可获得一个非平凡解，最终结果可表示为以下两种形式：

$$w[F(x, y)] = w(x)w(y) \quad (2.26)$$

或

$$F(x, y) = w^{-1}[w(x)w(y)] \quad (2.27)$$

因此，逻辑乘法所遵守的结合律与交换律必须体现为以下的函数形式

$$w(AB|C) = w(A|BC)w(B|C) = w(B|AC)w(A|C) \quad (2.28)$$

我们将这种形式称为乘法规则。由 (2.24) 的构造可知， $w(x)$ 必定是个正的连续的单调函数，至于它是递增的还是递减的，这有赖于 $H(x)$ 的符号；目前，它另有深意。

结果得到了 (2.28)，某种意义上，它是公设 (IIIa) 所述一致性的必要条件。不过，对于任意多个联结的命题，(2.28) 显然也能保证这种一致性的存在。例如，用 (2.12) 的办法可以将 $(ABCDEFGH|I)$ 展开为数目繁多的不同形式；但是，只要 (2.28) 成立，这些形式的结果必定相同。

定性要符合常识，这一要求对 $w(x)$ 有着更为严格的限定。例如，根据 (2.28) 所给出的形式，假设在给定 C 的情况下 A 为真，那么在由 C 的知识所营造的“逻辑环境”里，从当且仅当一个为真时另一个也必定为真这一意义来说，命题 AB 与 B 并无区别。基于第 1 节讨论的最基本的公理，同样为真的命题一定具备相同的可信性³：

$$AB|C = B|C \quad (2.29)$$

还有

$$A|BC = A|C \quad (2.30)$$

由于给定 C 的时候 A 是确信的（亦即 C 蕴含 A ），那么给定任何其他不与 C 矛盾的 B ， A 依然是确信的。在这种情况下，(2.28) 约化为

$$w(B|C) = w(A|C)w(B|C) \quad (2.31)$$

对于机器人而言，无论 B 有多么可信或不可信，该式必定成立。因此，函数 $w(x)$ 必定具有以下性质

³ 见 1.5 节。

$$w(A|C) = 1 \text{ 表示确信性} \quad (2.32)$$

现在，在给定 C 的情况下，假设 A 不可信，那么在给定 C 时，命题 AB 也不可信：

$$AB|C = A|C \quad (2.33)$$

若给定 C 的情况下， A 不可信（亦即 C 蕴含 \bar{A} ），那么给定任何不与 C 矛盾的更充分的信息 B ， A 依然不可信：

$$A|BC = A|C \quad (2.34)$$

在这种情况下，(2.28) 可化为

$$w(A|C) = w(A|C)w(B|C) \quad (2.35)$$

无论 B 有多么可信，这个方程必定成立。 $w(A|C)$ 只有两个可能的值能够满足这个条件，要么为 0，要么为 $+\infty$ （排除了 $-\infty$ ，不然基于连续性， $w(B|C)$ 必须为负值；于是 (2.35) 自相矛盾）。

综上所述，定性要符合常识，这决定了 $w(x)$ 必须是一个正值的连续单调函数。它可能递增，也可能递减。若它递增，取值范围必须从 0 到 1，前者表不可信，后者表确信。若它递减，取值范围必须从 $+\infty$ 到 1，前者表不可信，后者表确信。至于它在这两种区间里具体如何变化，我们所给出的公设则没有对其进行限定。

然而，这两种可能的表示在内涵上并不相同。给定任意函数 $w_1(x)$ ，令它符合上述标准并且用 $+\infty$ 表示不可信，便可以定义一个新函数 $w_2(x) = \frac{1}{w_1(x)}$ ，这个函数同样可被接受，它是以 0 来表示不可信。因而，作为一种约定，若我们采纳 $0 \leq w(x) \leq 1$ ，不失一般性；也就是说，就内涵而言，我们所作的公设里面的所有的一致性皆被包含于这种形式。（读者不妨检验一下，未尝不可选择相反的那种约定，从这一点发展出一套完整的理论，也包括它的全部应用，结果是一样的，只不过方程在形式上有些另类，但内涵是相同的。）