频率域滤波的数学基础

玩味者

2018 年 7 月 2 日

目录

第一章　傅里叶变换的理论部分

1.1　傅里叶级数的复数形式

在微积分课程中已经知道，一个周期函数如果满足Dirichlet条件，便可以表达为如下的三角无穷级数形式：

$$
\begin{aligned}
&f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\quad t\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\\
&\omega=\frac{2\pi}{T},\\
&a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\ dt,\\
&a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\ dt,\\
&b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\ dt,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

以上的形式称为函数的傅里叶级数展开式（三角形式）。

一个函数被分解为两种三角函数的无穷和，这种形式的使用是不方便的，如果能变成同一个函数的无穷和，事情就会简单很多。于是引入欧拉公式：

$$
e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1.2}
$$

由(1.2)式可以很容易推导出

$$
\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{1.3}
$$

将(1.3)代入(1.1)

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i})\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega t})
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

根据傅里叶系数的三角形式和(1.2)的比较，可以知道

$$
\begin{aligned}
a_n + ib_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\ dt + i\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\ dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos n\omega t + i\sin n\omega t)\ dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{in\omega t}\ dt \\
a_n - ib_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}\ dt
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$n=0$时，(1.5)式将退化为(1.1)式中a_0的形式，令

$$
c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}\ dt, \quad \omega_n = n\omega \tag{1.6}
$$

这样就可以把三角形式的系数全部转成

$$
\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \tag{1.7}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{i\omega_n t} + c_{-n}e^{i\omega_{-n}t}] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

于是，结合(1.8)和(1.6)，我们得到了**傅里叶级数的复数形式**[1]

1.2 傅里叶积分公式

当周期T无穷大的时候，有

$$
\lim_{T\to+\infty} f_T(t) = f(t) \tag{1.9}
$$

那么，根据(1.8)式，一个非周期函数$f(t)$就有

$$
f(t) = \lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-i\omega_n\tau}\ d\tau\right]e^{i\omega_n t} \tag{1.10}
$$

当n取一切整数的时候，ω_n所对应的点便均匀地分布在整个数轴上

$$
\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n} \tag{1.11}
$$

当$T\to+\infty$时，$\Delta\omega_n\to 0$，所以(1.10)可以写作

$$
f(t) = \lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega_n\tau}\ d\tau\right)e^{i\omega_n t}\right]\Delta\omega_n \tag{1.12}
$$

[1]其实，非周期函数可以看作是周期为$[-\infty,\infty]$的周期函数，此时，任意函数（这里并不严格）都可以满足(1.8)式

把式子排列成上面这种形式是有原因的，把中括号内部的部分看作是一个关于ω_n的函数，那么整个式子正好是定积分的定义式，于是(12)式可以写成下面的形式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\ d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega \tag{1.13}$$

将(1.13)式称为**傅里叶积分公式**

1.3 傅里叶变换

由(1.13)式可以直接得出傅里叶变换的形式，设中括号内部的部分为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt \tag{1.14}$$

那么，把(1.14)代入(1.13)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.15}$$

这里，(1.14)被称为$f(t)$的**傅里叶变换式**[2]，记作

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] \tag{1.16}$$

反之，(1.15)被称为$F(\omega)$的**傅里叶逆变换式**，记作

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] \tag{1.17}$$

在信号处理的时候，一个连续的信号可以看作是$f(t)$，这是以时间为自变量的函数，而它的傅里叶变换$F(\omega)$是以ω为自变量的函数，或者说，是频率的函数（$\omega = 2\pi f$）

1.4 傅里叶变换的性质

傅里叶变换的形式是很美好的，简单明了。但是要应用这个结论，需要找到它的一些性质。以下讨论都假设$f(t)$是符合傅里叶变换要求的函数

1. 线性性质 由于积分的线性性质，傅里叶变换很自然也具有线性性质

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] &= \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)\\ \mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)] &= \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\end{aligned} \tag{1.18}$$

[2]当然，在工程中也有使用如下形式的傅里叶变换

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt f(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

这样可以使得系数均衡（强迫症福利），这个都是人为定义的，系数的改变并不影响其数学性质

2. 位移性质

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f(t\pm t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t\pm t_0)e^{-i\omega t}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u\mp t_0)}\ du \\
&= e^{\pm i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\ du \\
&= e^{\pm i\omega t_0}F(\omega) \\
\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)] &= e^{\pm i\omega_0 t}f(t)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

上面的这个结论说明，函数在时域或频域上的位移相当于相对的域中的函数乘以一个因子（加减→乘除）

3. 微分性质

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f'(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\ df(t) \\
&= f(t)e^{-i\omega t}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ de^{-i\omega t} \\
&= f(t)e^{-i\omega t}|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

做到这一步做不下去了，因为如果不给$f(t)$再加上额外的限制的话，$f(t)e^{-i\omega t}|_{-\infty}^{\infty}$这一项就会变成无穷大，所以，必须给$f(t)$加一个限制

$f(t)$在$(-\infty,\infty)$上连续或只有有限个可去间断点，且当$|t|\to+\infty$时，$f(t)\to 0$

有了这个限制之后，前面那一项等于0，得到

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f'(t)] &= i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt \\
&= i\omega\mathscr{F}[f(t)]
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$