# 第一章　质点运动学

## 1.1　速度、加速度、运动学方程和轨道

**1.1.1**　一物体做直线运动，它的运动学方程为

$$x = at + bt^2 + ct^3$$

其中 $a$、$b$、$c$ 均为常量. 求：

(1) $t=1\sim2$ 期间的位移，平均速度和平均加速度；

(2) $t=2$ 时的速度和加速度.

**解**　(1) $\Delta x = x(2) - x(1)$

$= (2a+4b+8c)-(a+b+c)$

$= a+3b+7c$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a + 3b + 7c$$

$$\bar{a} = \frac{v(2) - v(1)}{\Delta t} = \frac{(a + 4b + 12c) - (a + 2b + 3c)}{1} = 2b + 9c$$

(2) $v(2) = (a+2bt+3ct^2)|_{t=2} = a+4b+12c$

$a(2) = (2b+6ct)|_{t=2} = 2b+12c$

**1.1.2**　一质点沿 $x$ 方向做直线运动，$t$ 时刻的坐标为 $x=5t^2-t^3$，式中 $x$ 以米计，$t$ 以秒计. 求：

(1) 第 4 秒内的位移和平均速度；

(2) 第 4 秒内质点所走过的路程.

**解**　(1) $\Delta x = x(4)-x(3) = (80-64)-(45-27) = -2\text{m}$

$$\bar{v} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = -2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 先求出速度变号的时刻.

$$v = 10t - 3t^2$$

速度变号的时刻 $v=0$，此时 $t=\dfrac{10}{3}\text{s}$.

第 4 秒内走过的路程

$$s = \left|x\left(\frac{10}{3}\right) - x(3)\right| + \left|x(4) - x\left(\frac{10}{3}\right)\right|$$

$$= |18.52 - 18| + |16 - 18.52| = 3.04\text{m}$$

**1.1.3**　一质点 $t=0$ 时从原点出发，以恒定速率向 $x$ 正方向沿轨道 $x^2+(y-r)^2=r^2$ 运动，其中 $r$ 为常量. $T$ 时又回到原点. 求：

(1) $t=\frac{1}{3}T$ 时的位矢、速度和加速度；

(2) 在 $t=0$ 至 $t=\frac{1}{3}T$ 期间，质点的位移、平均速度和平均加速度.

**解**　(1) 由轨道方程可知，质点做圆周运动. 再由 $t=0$ 时从原点出发，以恒定速率向 $x$ 正方向运动. 可直接写出质点的运动学方程为

$$x = r\sin\omega t$$

$$y = r(1-\cos\omega t)$$

其中 $\omega$ 为常量.

运动学方程也可用解微分方程得到，方法如下：

$$y = r-\sqrt{r^2-x^2}$$

(考虑到 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，开方时取负号)

$$\dot{y}=+\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\dot{x}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}^2+\frac{x^2\dot{x}^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2\dot{x}^2}{r^2-x^2}=v^2$$

这里 $v$ 为速率，是常量.

由于 $t=0$ 时 $x=0$，且 $\dot{x}>0$，所以

$$r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\sqrt{r^2-x^2}$$

(开方时取正号)

$$\int_0^x\frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=\int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x=r\sin\left(\frac{v}{r}t\right)$$

$$y=r-r\cos\left(\frac{v}{r}t\right)=r\left[1-\cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right]$$

由 $t=T$ 时 $x=0$、$y=0$，可得

$$x=r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y=r\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$

$t=\frac{1}{3}T$ 时，

$$x=r\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$y=r\left[1-\cos\frac{2\pi}{3}\right]=\frac{3}{2}r$$

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{T}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}r\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}r\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(t)=r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i}+r\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\boldsymbol{j}$$