

# 第一章 质点运动学

## 1.1 速度、加速度、运动学方程和轨道

1.1.1 一物体做直线运动,它的运动学方程为

$$x = at + bt^2 + ct^3$$

其中  $a, b, c$  均为常量. 求:

(1)  $t=1\sim 2$  期间的位移, 平均速度和平均加速度;

(2)  $t=2$  时的速度和加速度.

解 (1)  $\Delta x = x(2) - x(1)$

$$= (2a + 4b + 8c) - (a + b + c)$$

$$= a + 3b + 7c$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a + 3b + 7c$$

$$\bar{a} = \frac{v(2) - v(1)}{\Delta t} = \frac{(a + 4b + 12c) - (a + 2b + 3c)}{1} = 2b + 9c$$

$$(2) v(2) = (a + 2bt + 3ct^2)|_{t=2} = a + 4b + 12c$$

$$a(2) = (2b + 6ct)|_{t=2} = 2b + 12c$$

1.1.2 一质点沿  $x$  方向做直线运动,  $t$  时刻的坐标为  $x = 5t^2 - t^3$ , 式中  $x$  以米计,  $t$  以秒计. 求:

(1) 第 4 秒内的位移和平均速度;

(2) 第 4 秒内质点所走过的路程.

解 (1)  $\Delta x = x(4) - x(3) = (80 - 64) - (45 - 27) = -2\text{m}$

$$\bar{v} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = -2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 先求出速度变号的时刻.

$$v = 10t - 3t^2$$

速度变号的时刻  $v=0$ , 此时  $t = \frac{10}{3}\text{s}$ .

第 4 秒内走过的路程

$$\begin{aligned} s &= \left| x\left(\frac{10}{3}\right) - x(3) \right| + \left| x(4) - x\left(\frac{10}{3}\right) \right| \\ &= |18.52 - 18| + |16 - 18.52| = 3.04\text{m} \end{aligned}$$

1.1.3 一质点  $t=0$  时从原点出发, 以恒定速率向  $x$  正方向沿轨道  $x^2 + (y-r)^2 = r^2$  运动, 其中  $r$  为常量.  $T$  时又回到原点. 求:

(1)  $t = \frac{1}{3}T$  时的位矢、速度和加速度;

(2) 在  $t=0$  至  $t = \frac{1}{3}T$  期间, 质点的位移、平均速度和平均加速度.

**解** (1) 由轨道方程可知, 质点做圆周运动. 再由  $t=0$  时从原点出发, 以恒定速率向  $x$  正方向运动. 可直接写出质点的运动学方程为

$$\begin{aligned}x &= r \sin \omega t \\y &= r(1 - \cos \omega t)\end{aligned}$$

其中  $\omega$  为常量.

运动学方程也可用解微分方程得到, 方法如下:

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

(考虑到  $t=0$  时,  $x=0, y=0$ , 开方时取负号)

$$\begin{aligned}\dot{y} &= + \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \dot{x} \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{x}^2 + \frac{x^2 \dot{x}^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 \dot{x}^2}{r^2 - x^2} = v^2\end{aligned}$$

这里  $v$  为速率, 是常量.

由于  $t=0$  时  $x=0$ , 且  $\dot{x} > 0$ , 所以

$$r \frac{dx}{dt} = v \sqrt{r^2 - x^2}$$

(开方时取正号)

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} &= \int_0^t v dt \\ x &= r \sin\left(\frac{v}{r}t\right) \\ y &= r - r \cos\left(\frac{v}{r}t\right) = r\left[1 - \cos\left(\frac{v}{r}t\right)\right]\end{aligned}$$

由  $t=T$  时  $x=0, y=0$ , 可得

$$\begin{aligned}x &= r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ y &= r\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\end{aligned}$$

$t = \frac{1}{3}T$  时,

$$\begin{aligned}x &= r \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ y &= r\left[1 - \cos \frac{2\pi}{3}\right] = \frac{3}{2}r \\ \mathbf{r}\left(\frac{T}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}r\mathbf{i} + \frac{3}{2}r\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(t) &= r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathbf{i} + r\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]\mathbf{j}\end{aligned}$$