«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

ОТЧЕТ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

по дисциплине
«Математические модели систем с распределёнными параметрами»
Вариант Q12

Выполнила
студентка гр. 3530904/90102 Ли Ицзя

Руководитель
доцент Воскобойников С.П.

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

Постановка задания

Вариант Q. Постановка задачи. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в полом цилиндре, описываемого математической моделью

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=f(r,z),$$

$$0<\mathrm{c}_{11}\le k_1(r,z)\le c_{12},\qquad 0<\mathrm{c}_{21}\le \mathrm{k}_2(\mathrm{r},\mathrm{z})\le \mathrm{c}_{22},$$

$$0<R_0\le r\le R_1,\ 0\le z\le L$$

с граничными условиями, определяемыми вариантом задания. Для решения системы алгебраических уравнений использовать метод сопряжённых градиентов с предобусловливанием. Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме

Форма (4)

Форма (4) отличается от формы (3) тем, что индексы главных диагональных элементов не хранятся и элементы главной диагонали располагаются в отдельном массиве Diag. В массиве A хранятся ненулевые элементы строго верхней треугольной части матрицы. Так как матрица хранится построчно, то в массиве IC хранятся номера столбцов ненулевых элементов верхнего треугольника матрицы. В массиве IR хранятся указатели на начало каждой строки в массивах A и IC. IR(N+1) содержит количество ненулевых элементов в строго верхнем треугольнике матрицы A плюс один.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DIAG	13	14	15	16	17	18	19	20	21

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	7	1	8	2	3	9	4	10	5	6	11	12
IC	2	4	3	5	6	5	7	6	8	9	8	9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IR	1	3	5	6	8	10	11	12	13	13

12.

$$u\big|_{r=R_0}=g_1(z),\qquad -k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R_1}=\chi_2 u\big|_{r=R_1}-g_2(z),\ \chi_2\ge 0,$$

$$k_2\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\chi_3 u\big|_{z=0}-g_3(r),\ \chi_3\ge 0,\qquad -k_2\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=L}=\chi_4 u\big|_{z=L}-g_4(r),\ \chi_4\ge 0$$

Дискретная модель

Введем обозначения:

$$h_r = \frac{r_{R1} + r_{R0}}{N_r}$$
$$h_z = \frac{z_L + z_0}{N_Z}$$

Основная сетка:

$$r_i = R_0 + ih_r, \quad i = 0,1,\dots,N_r$$
$$z_j = jh_z, \quad j = 0,1,\dots,N_z$$

Введем вспомогательную сетку:

$$r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}$$
$$z_{j-1/2} = \frac{z + z_{j-1}}{2}$$
$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_r}{2} & i = 0 \\ h_r & i = 1,\dots,N-1 \\ \frac{h_r}{2} & i = N \end{cases}$$

Аналогично произведем разбиения для переменной z

$$\hbar_j = \begin{cases} \frac{h_z}{2} & j = 0 \\ h_z & j = 1,\dots,N-1 \\ \frac{h_z}{2} & j = N \end{cases}$$

Умножим исходное уравнение на r, проинтегрируем по вспомогательной сетке:

$$-\left[\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right)drdz + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}drdz\right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf\,drdz$$

$$-\left[\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left(r_{i+\frac{1}{2}}k\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial r}|_{r_{i+\frac{1}{2}}}\right)dz - \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left(r_{i-\frac{1}{2}}k\left(r_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial r}|_{r_{i-\frac{1}{2}}}\right)dz \right.$$
$$\left. + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}|_{z_{j+\frac{1}{2}}}\right)dr - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}|_{z_{j-\frac{1}{2}}}\right)dr\right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf\,drdz$$

Воспользуемся формулой средних прямоугольников для вычисления значений интегралов:

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\phi(r,z)dr \approx h_r\phi(r_i,z) = h_r\phi_i$$
$$\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\phi(r,z)dz \approx h_z\phi\left(r,z_j\right) = h_r\phi_j$$
$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r_i\phi\,drdz \approx r_ih_rh_z\phi_{i,j}$$

Также аппроксимируем производные по формуле центральных разностей:

$$k\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}},z=z_j} = k\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_r}$$

$$k\left(r_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}},z=z_j} = k\left(r_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}},r=r_j} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}},r=r_j} = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_z}$$

Получим:

$$-\Big[h_z r_{i+\frac{1}{2}} k_1\left(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j\right)\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_r} - h_z r_{i-\frac{1}{2}} k_1\left(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j\right)\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_r} + h_r r_i k_2\left(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_z} - h_r r_i k_2\left(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_z}\Big] = r_i h_r h_z f_{i,j}$$

$$\cdots\cdots (1)$$

i=1,2,..,N_r-1 ; j = 1,2,..,N_z-1

Аппроксимация граничных условий:

1. При $i=0, j=1,\dots,N_z-1$

$$u_{i,j} = g_1(z_j)$$

2. При $i=N_r, j=1,\dots,N_z-1$

$$-\Big[-h_z R_1\left(\chi_2 u_{N,j} - g_2(z_j)\right) - h_z r_{N-\frac{1}{2}} k_1\left(r_{N-\frac{1}{2}}, z_j\right)\frac{u_{N,j}-u_{N-1,j}}{h_r} + R_1\frac{h_r}{2}k_2\left(R_1, z_{j+\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_z} - R_1\frac{h_r}{2}k_2\left(R_1, z_{j-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_z}\Big] = R_1\frac{h_r}{2}h_z f_{i,j}$$

3. При $i=1,\dots,N_r-1, j=0$

$$-[\frac{h_z}{2} r_{i+\frac{1}{2}} k_1\left(r_{i+\frac{1}{2}}, 0\right)\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_r} - \frac{h_z}{2} r_{i-\frac{1}{2}} k_1\left(r_{i-\frac{1}{2}}, 0\right)\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_r} + r_i h_r k_2(r_i, z_{\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_z} - h_r r_i(\chi_3 u_{i,j} - g_3(r_i)] = \frac{r_i h_r h_z f_{ij}}{2}$$

4. При $i=1,\dots,N_r-1, j=N_z$

$$-\Big[\frac{h_z}{2} r_{i+\frac{1}{2}} k_1\left(r_{i+\frac{1}{2}}, L\right)\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_r} - \frac{h_z}{2} r_{i-\frac{1}{2}} k_1\left(r_{i-\frac{1}{2}}, L\right)\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_r} - h_r r_i(\chi_4 u_{i,N} - g_4(r_i) - h_r r_i k_2\left(r_i, z_{N-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,N}-u_{i,N-1}}{h_z}\Big] = \frac{r_i h_r h_z f_{i,j}}{2}$$

5. При $i=0, j=0$

$$u_{i,j} = g_1(z_j)$$

6. При $i = N_r, j = 0$

$$-\left[-\frac{h_z}{2}R_1\left(\chi_2 u_{N,0} - g_2(0)\right) - \frac{h_z}{2}r_{N-\frac{1}{2}}k_1\left(r_{N-\frac{1}{2}},0\right)\frac{u_{N,0} - u_{N-1,0}}{h_r} + \frac{h_r}{2}R_1k_2\left(R_1, z_{\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}R_1\left(\chi_3 u_{N,0} - g_3(R_1)\right)\right] = \frac{R_1h_rh_zf_{N,0}}{4}$$

7. При $i = 0, j = N_z$

$$u_{i,j} = g_1(L)$$

8. При $i = N_r, j = N_z$

$$-\left[-\frac{h_z}{2}R_1\left(\chi_2 u_{N,N} - g_2(L)\right) - \frac{h_z}{2}r_{N-\frac{1}{2}}k_1\left(r_{N-\frac{1}{2}},L\right)\frac{u_{N,N} - u_{N-1,N}}{h_r} - \frac{h_r}{2}R_1\left(\chi_4 u_{N,N} - g_4(R_1)\right) - \frac{h_r}{2}R_1k_2\left(R_1, z_{N-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{N,N} - u_{N,N-1}}{h_z}\right] = \frac{R_1h_rh_zf_{N,N}}{4}$$

Форма Хранения Матриц

Индексы главных диагональных элементов не хранятся, элементы главной диагонали располагаются в отдельном массиве Diag. В массиве A хранятся ненулевые элементы строго верхней треугольной части матрицы. Так как матрица хранится построчно, то в массиве IC хранятся номера столбцов ненулевых элементов верхнего треугольника матрицы. В массиве IR хранятся указатели на начало каждой строки в массивах A и IC. IR(N+1) содержит количество ненулевых элементов в строго верхнем треугольнике матрицы A плюс один.

Формулы и алгоритмы решения

Для решения используется метод сопряженных градиентов системы симметричной положительно определенной матрице A. Суть метода сводится к следующему. На основе последовательно вычисляемых невязок $r_0, r_1, r_2, \ldots$

$r_n = Ax_n - b$ одновременно с их получением с использованием процедуры Грамма-Шмидта строится система ортогональных векторов s_k

$s_1 = r_0$;

$$s_{n+1} = r_n - \sum_{j=1}^{n} b_{nj}s_j;\ b_{nj} = \frac{(As_j, r_n)}{(As_j, s_j)}$$

В этих обозначениях итерационный метод записывается в виде:

$$x_n = x_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j s_j = x_{n-1} - a_n s_n;\ a_n = \frac{(r_0, s_n)}{(As_n, s_n)}$$

Улучшая свойства сходимости метода, преобразуем формулы:

$$b_{nm} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})};\ a_n = \frac{(r_{n-1}, r_{n-1})}{(As_n, s_n)};$$

Предварительные вычисления состоят в нахождении вектора невязки $r_0 = Ax_0 - b$, 3 по выбранному вектору хо и принятии $s_1 = r_0$ Далее по рекуррентным формулам на каждом шаге последовательно вычисляются:

$$a_n = \frac{(r_{n-1}, r_{n-1})}{(As_n, s_n)}$$

$$x_n = x_{n-1} - a_n s_n$$

$$r_n = r_{n-1} - a_n As_n$$

$$b_{nm} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})};$$

$$s_{n+1} = r_n - b_{nm} s_n$$

Тесты

Константный тест

$$k_1 = k_2 = 1$$
$$u = 1$$
$$f = 0$$

$$R_0 = 1, R_1 = 2, L = 1$$
$$g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 1, g_4 = 1$$
$$\chi_2 = \frac{1}{2}, \chi_3 = 1, \chi_4 = 1$$

Линейный тест

$$k_1 = r + 1, \qquad k_2 = z + 1$$
$$u = 3r + 2z$$

$$f = -8 - \frac{3}{r}$$

$$R_0 = 1, \qquad R_1 = 2, \qquad L = 1$$
$$g_1(z) = 1, \qquad g_2(z) = 2z + 15, \qquad g_3(r) = 3r - 2, \qquad g_4(r) = 6 + 3r$$
$$\chi_2 = 1, \qquad \chi_3 = 1, \qquad \chi_4 = 1$$

Нелинейный тест

$$k_1 = r + z, \qquad k_2 = r + z$$
$$u = r^2 + z^2$$
$$f = -8z - 8r$$

$$R_0 = 1, \qquad R_1 = 2, \qquad L = 1$$
$$g_1(z) = z^2 + 1, \qquad g_2(z) = z^2 + 4z + 12, \qquad g_3(r) = r^2, \qquad g_4(r) = r^2 + 2r + 3$$
$$\chi_2 = 1, \qquad \chi_3 = 1, \qquad \chi_4 = 1$$