**Отчёт по курсовой работе**

«Разработка программы для моделирования стационарного двумерного распределения температуры»

по дисциплине

«Математические модели систем c распределёнными параметрами»

|  |  |
| --- | --- |
| Выполнил студент гр. 3530904/90102 | Мэн Цзянин |
| Руководитель | Воскобойников С.П. |

Оглавление

[Постановка задачи 3](#_Toc100659390)

[Анализ порядка аппроксимации уравнения и граничных условий, выражение для главного члена погрешности аппроксимации 9](#_Toc100659391)

[Невязка и порядок погрешность аппроксимации уравнения 9](#_Toc100659392)

[Невязка и порядок погрешности аппроксимации граничного условия 14](#_Toc100659393)

[Решение системы методом сопряженных градиентов 19](#_Toc100659394)

[Тесты 23](#_Toc100659395)

[Константный тест 23](#_Toc100659396)

[Линейный тест 23](#_Toc100659397)

[Нелинейный тест 23](#_Toc100659398)

[Результаты 24](#_Toc100659399)

[Вывод 25](#_Toc100659400)

[Приложение 26](#_Toc100659401)

# Постановка задачи

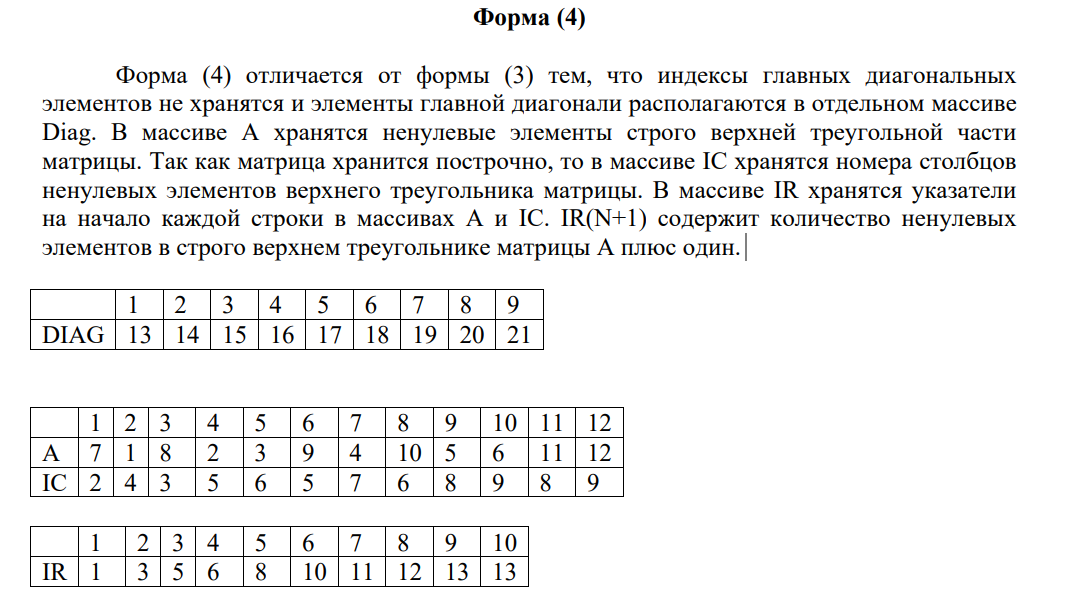
**Вариант N4**.

Постановка задачи. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в цилиндре, описываемого математической моделью



, 

с граничными условиями, определяемыми вариантом задания. Для решения системы алгебраических уравнений использовать метод сопряжённых градиентов с предобусловливанием. Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме



**Дискретная модель**

Введем в прямоугольнике [0, R]×[0, L] равномерную основную сетку

и вспомогательную сетку





Так как используются равномерные сетки, то шаги вспомогательной сетки определяются как

Умножим исходное уравнение на r, проинтегрируем по вспомогательной сетке:

Воспользуемся формулой средних прямоугольников для вычисления значений интегралов:

Также аппроксимируем производные по формуле центральных разностей:

Получим:

i=1,2,.., ; j = 1,2,..,

Аппроксимация граничных условий:

Аналогично воспользуемся интегро-интерполяционным методом, получим:

В результате получается система линейных алгебраических уравнений вида ***A*u=b** размерности N=(Nz-1)(Nr+1)Рассмотрим более подробно структуру этой системы. Для дальнейшей работы необходимо перенумеровать компоненты векторов u и b. Для этого используем приведенный индекс. Сперва для фиксированного *r* движемся по оси *z*, потом переходим к следующему значению *r.*

При таком обозначении новый индекс k можно рассчитать так: k=i\*(Nz-1)+j

Матрица *А* квадратная, симметричная, пятидиагональная.

Хранить будем только 3 диагонали.

# Анализ порядка аппроксимации уравнения и граничных условий, выражение для главного члена погрешности аппроксимации

## Невязка и порядок погрешность аппроксимации уравнения

Преобразование:

При анализе порядка аппроксимации, для простого, будем писать просто

Невязка определяется как разность между правой и левой частью уравнения при условии, что вместо приближенного решения мы подставляем туда точное:

Раскладываем по степениям h точное решение в узлах и коэффициент k

Сокращаются четные степени

т.к. , получаем, что

Четные степени сокращаются

Так как, получаем, что

Подставляем в невязку получившиеся разложения

Группируем по степени hr и hz

Чтобы вычислить порядок аппроксимации, нормируем невязку

Порядок аппроксимации уравнения по r и z:

Главный член погрешности по r

Главный член погрешности по z

где

## Невязка и порядок погрешности аппроксимации граничного условия

1. (Лекция10. p27)

Подставляем полученные ранее произведения:

Группируем по степениям hr и hz

Для вычисления порядка аппроксимации нормируем невязку

Порядок аппроксимации уравнения по r и z:

Главный член погрешности по x

Главный член погрешности по y

где

Подставляем полученные ранее произведения:

Группируем по степениям hr и hz

Для вычисления порядка аппроксимации нормируем невязку

Порядок аппроксимации уравнения по r и z:

Главные члены погрешности

где

Порядок аппроксимации уравнения по r и z:

Главные члены погрешности

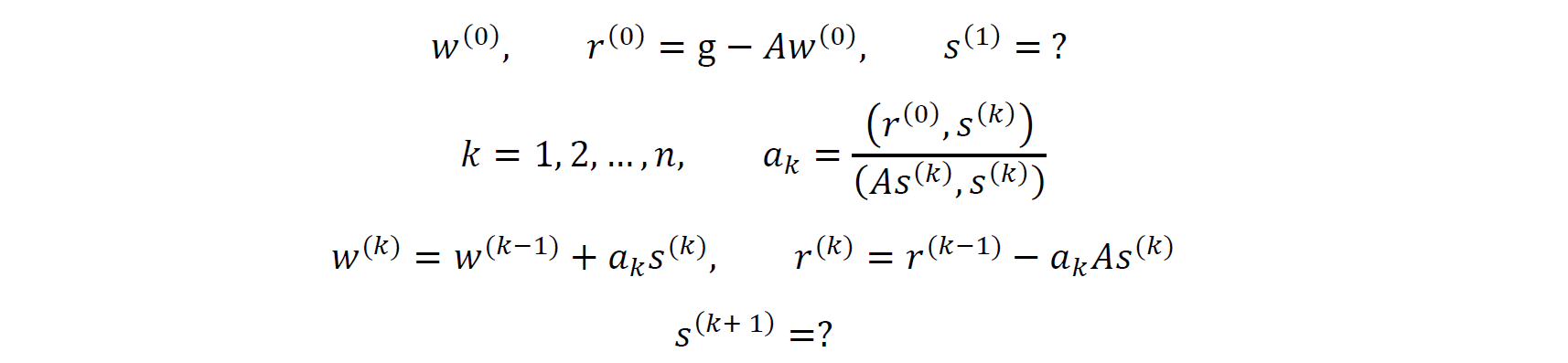
где

# Решение системы методом сопряженных градиентов

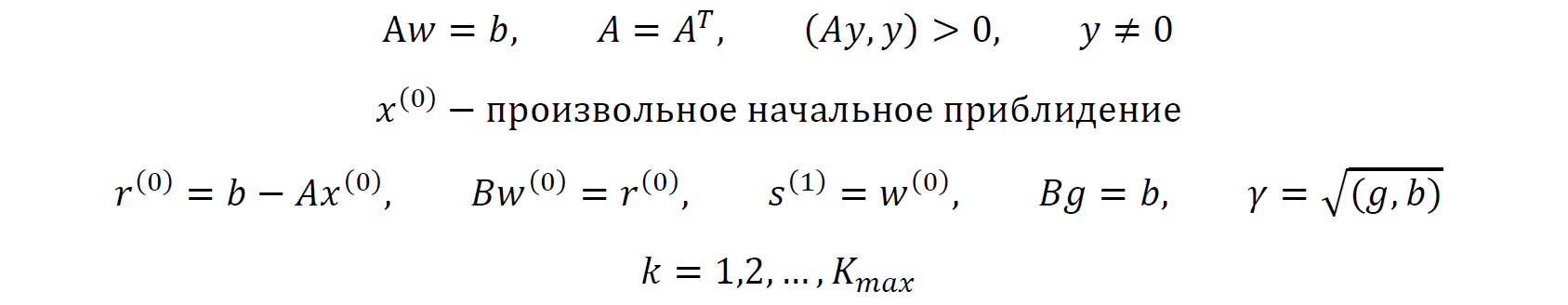
Пусть - произвольное начальное приближение, тогда , что даст нам невязку , предполагается, что у нас есть система из , где 𝑖=1,2,…,𝑛, линейно-независимых векторов, тогда можем разложит по базису этих векторов с соответствующими коэффициентами , найти коэффициенты можем с помощью СЛАУ , решение системы сильно упростится, если при а при скалярное произведение равнялось не 0 значению, в таком случае мы говорим об артогональности. Из этого мы можем выразить коэффициенты , и выразить решение .

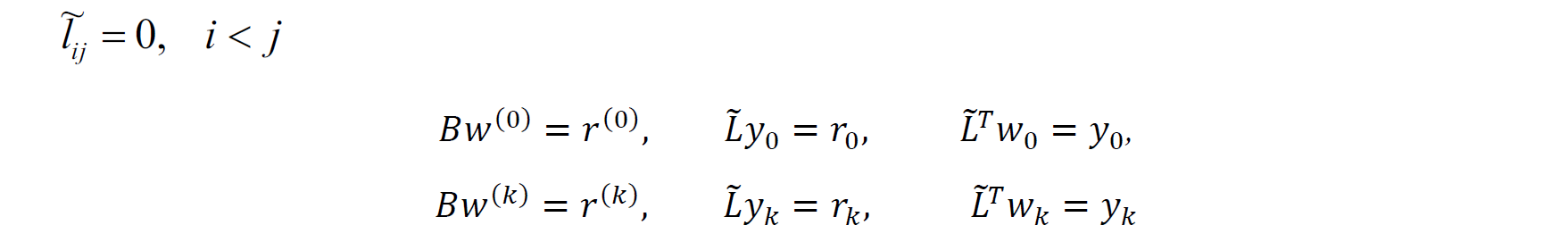
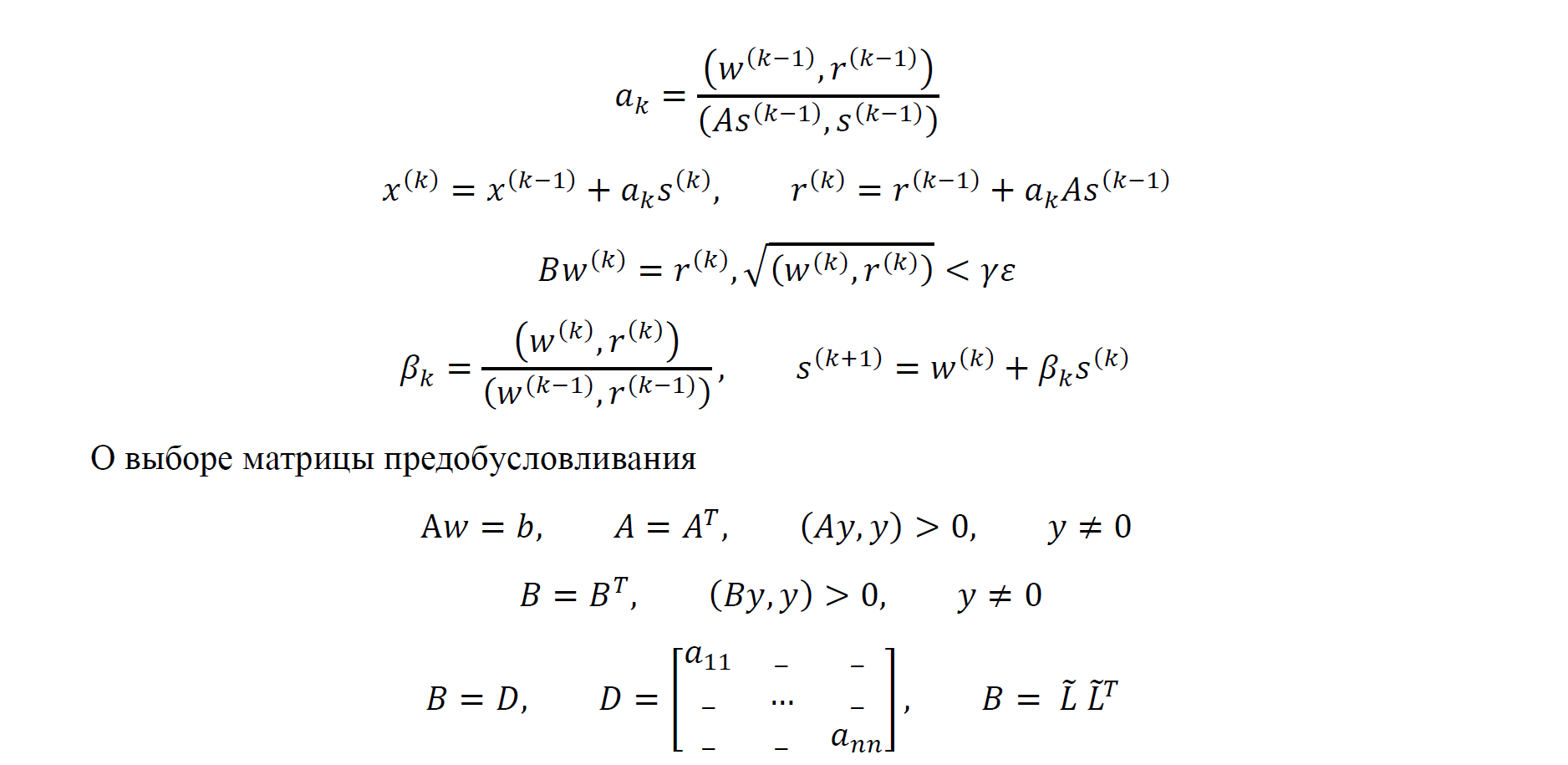
Рассмотрим частичную сумму , , для невязки получим рекуррентное соотношение



При явном методе сопряженных градиентов берут равным , с вводом дополнительного коэффициента при явный метод обладает тем свойством что при отсутствии ошибок округления мы можем получить точное решение не позднее чем на n-ом шаге, но возникает двойственность, из-за ошибок округления происходит разрушение артогональности последовательности s и в результате к неточности, и метод становится итерационным.

**Неявный метод**





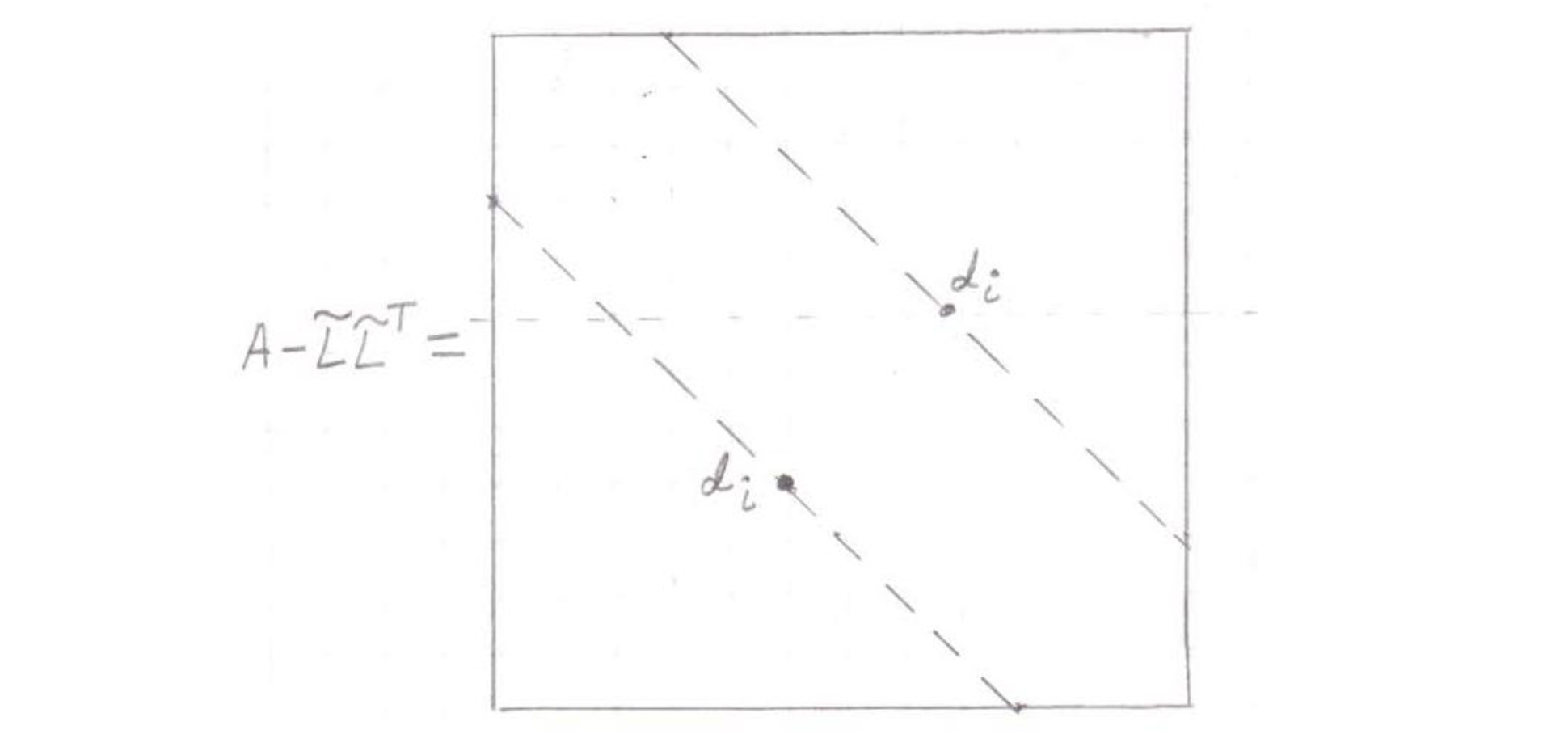
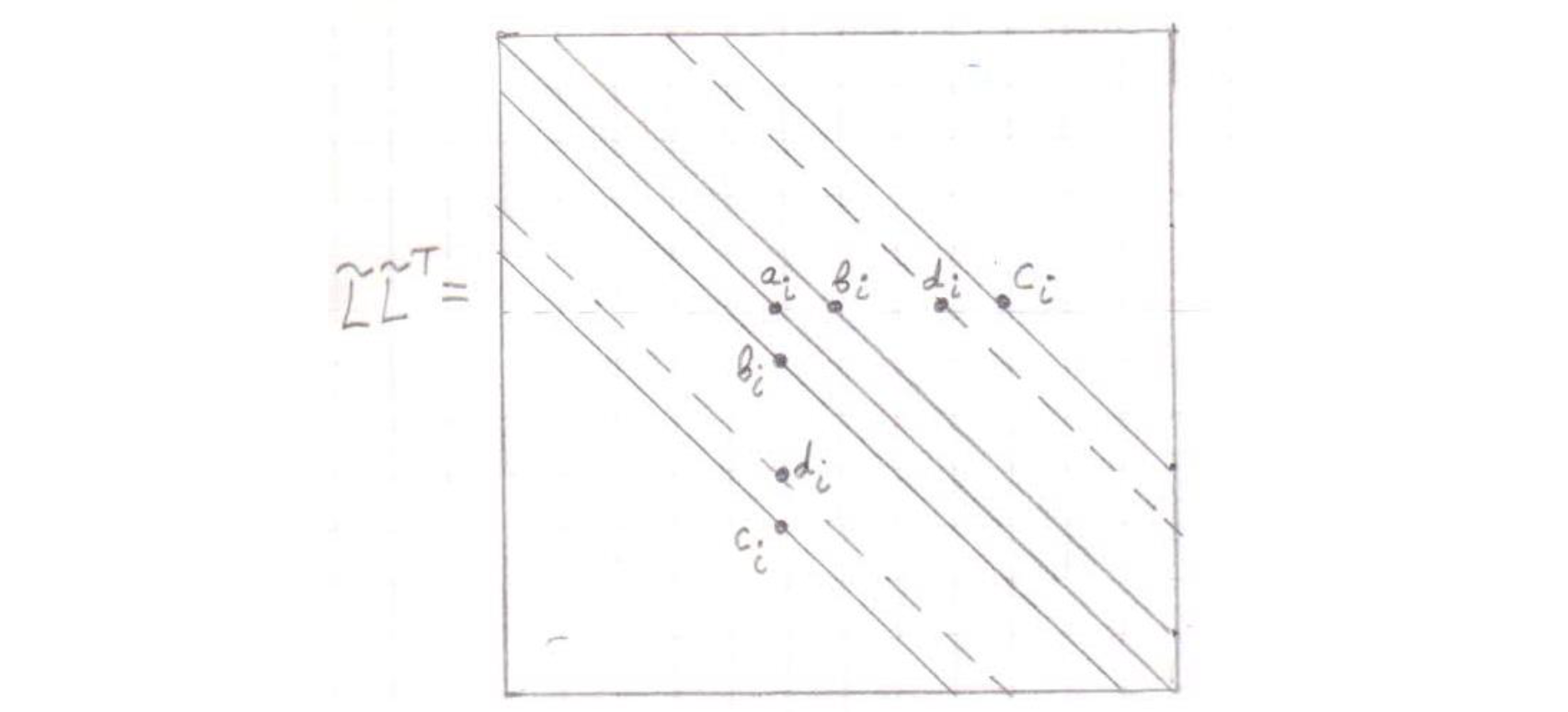
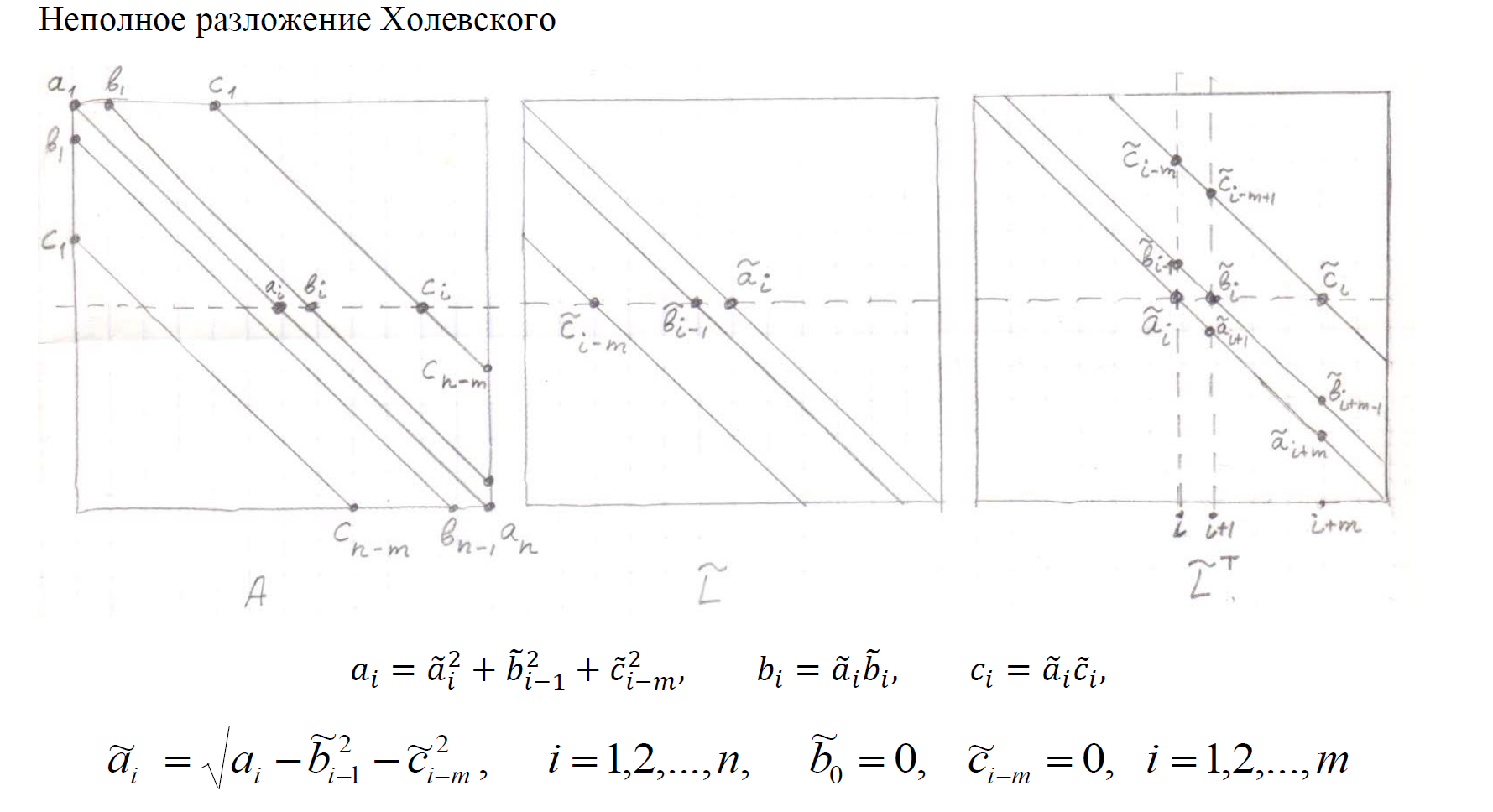
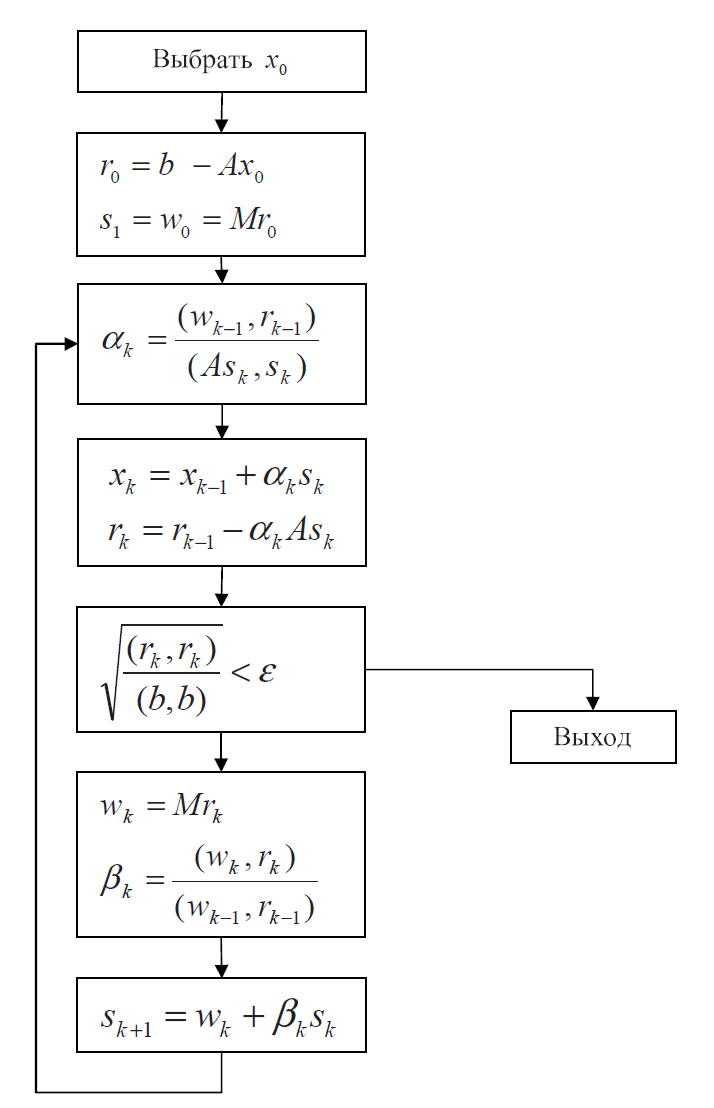


Схема применения метода выглядит следующим образом:



Здесь я использовал параметр .

# Тесты

Для всех тектов:

## Константный тест

## Линейный тест

## Нелинейный тест

# Результаты

Константный случай

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Число разбиений Nr, Nz | Максимальная погрешность | Отношение погрешностей | Число итераций метода |
| 4 | 8.88178419700E-16 | 0 | 11 |
| 8 | 3.82518982489E-07 | 2.32E-09 | 27 |
| 16 | 6.30674762192E-07 | 0.60652337056 | 16 |
| 32 | 2.62734831580E-06 | 0.24004231125 | 107 |
| 64 | 5.99528580780E-06 | 0.43823570719 | 208 |
| 128 | 6.36365821094E-06 | 0.94211310681 | 413 |

Линейный случай

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Число разбиений Nr, Nz** | **Максимальная погрешность** | **Отношение погрешностей** | **Число итераций метода** |
| **4** | 1.95399252334E-14 | 0 | 16 |
| **8** | 1.14468746837E-06 | 1.71E-08 | 32 |
| **16** | 2.26973880935E-06 | 0.504325636 | 65 |
| **32** | 5.50640104335E-06 | 0.412200054 | 130 |
| **64** | 1.24175795404E-05 | 0.443435939 | 252 |
| **128** | 2.36257855251E-05 | 0.525594357 | 486 |

Нелинейный случай

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Число разбиений Nr, Nz** | **Максимальная погрешность** | **Отношение погрешностей** | **Число итераций метода** |
| **4** | 3.38167202120E-02 | 0 | 16 |
| **8** | 8.92482305903E-03 | 3.789063378 | 42 |
| **16** | 2.25182768122E-03 | 3.963368571 | 87 |
| **32** | 5.80594786091E-04 | 3.87848416 | 179 |
| **64** | 1.70294493403E-04 | 3.40935737 | 359 |
| **128** | 4.16449411629E-05 | 4.0892 | 717 |

# Вывод

Погрешность решения дифференциального уравнения складывается из двух: погрешности аппроксимации (появляется при переходе от непрерывного уравнения к системе разностных) и погрешности решения алгебраической системы.

В линейном и константном случаях погрешность аппроксимации отсутствует, ее небольшой рост с увеличением количества разбиений связано с накоплением ошибки округления.

А в нелинейном случае наблюдается уменьшение ошибки в 4 раза при увеличении в 2 раза разбиений по оси 𝑟 и 𝑧. Погрешность решения алгебраической системы мала по сравнению с погрешностью аппроксимации, она возрастает незаметно. Погрешность аппроксимации, в свою очередь, уменьшается, т.к. мы увеличиваем количество разбиений. Причем, согласно теории, при одновременном удвоении числа разбиений погрешность аппроксимации должна уменьшаться в 4 раза, т.к. порядок аппроксимации метода равен 2. Как видим, наблюдаемые результаты очень близок к теоретическому.

# Приложение