(4) $\neg\exists x(F(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(y,x)))$.

(5) $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg\exists y(F(y)\wedge H(y,x)))$.

(6) $\forall x(F(x)\wedge\neg G(x)\wedge\forall y(F(y)\wedge H(y,x)\rightarrow G(y))\rightarrow G(x))$. □

3.4.1 证

对 A 的结构作归纳.

对于任何 $B\in Atom(L)$, 若 $A=B$, 则

$\because A'=\neg B$, $\neg A=\neg B$,

$\therefore A'\models\dashv\neg A$.

对于任何 $B\in Form(L)$, 若 $A=\neg B$ 且 $B'\models\dashv\neg B$, 则

$\because A'=\neg B'$, $\neg A=\neg\neg B$,

$\therefore$根据定理 3.4.3, $\neg B'\models\dashv\neg\neg B$, 即 $A'\models\dashv\neg A$.

对于任何 $B, C\in Form(L)$, 若 $A=B\wedge C$ 且 $B'\models\dashv\neg B$, $C'\models\dashv\neg C$, 则

$\because A'=B'\vee C'$, $\neg A=\neg(B\wedge C)$,

由真假值表可知, 公式$\neg B\vee\neg C$与$\neg(B\wedge C)$具有相同的值,

$\therefore\neg B\vee\neg C\models\dashv\neg(B\wedge C)$.

而根据定理 3.4.3, $B'\vee C'\models\dashv\neg B\vee\neg C$.

$\therefore B'\vee C'\models\dashv\neg(B\wedge C)$, 即 $A'\models\dashv\neg A$.

对于任何 $B, C\in Form(L)$, 若 $A=B\vee C$ 且 $B'\models\dashv\neg B$, $C'\models\dashv\neg C$, 则

$\because A'=B'\wedge C'$, $\neg A=\neg(B\vee C)$,

由真假值表可知, 公式$\neg B\wedge\neg C$与$\neg(B\vee C)$具有相同的值,

$\therefore\neg B\wedge\neg C\models\dashv\neg(B\vee C)$.

而根据定理 3.4.3, $B'\wedge C'\models\dashv\neg B\wedge\neg C$.

$\therefore B'\wedge C'\models\dashv\neg(B\vee C)$, 即 $A'\models\dashv\neg A$.

对于任何 $B(u)\in Form(L)$, 若 $A=\forall xB(x)$且 $B(u)'\models\dashv\neg B(u)$, 则

$A'=\exists xB(x)'\models\dashv\exists x\neg B(x)$, $\neg A=\neg\forall xB(x)$,

假设$\exists x\neg B(x)\models\dashv\neg\forall xB(x)$不成立,

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\exists x\neg B(x)^v=1$,

[2] $\neg\forall xB(x)^v=0$, 则

[3] $\forall xB(x)^v=1$ (由[2]).

由 B(x)构作 B(u) (取 u 不在 B(x)中出现), 则

[4] 存在 $a\in D$, 使得$\neg B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[1]).

[5] 存在 $a\in D$, 使得 $B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[4]).

[6] 对于任何 $a\in D$, 有 $B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\exists x\neg B(x)^v=0$,

[2] $\neg\forall xB(x)^v=1$, 则

[3] $\forall xB(x)^v=0$ (由[2]).

由 B(x)构作 B(u) (取 u 不在 B(x)中出现), 则

[4] 对于任何 $a\in D$, 有$\neg B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[1]).

[5] 对于任何 $a\in D$, 有 $B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[4]).

[6] 存在 $a\in D$, 使得 $B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

$\therefore$假设不成立, $\exists x\neg B(x)\models\dashv\neg\forall xB(x)$, 即 $A'\models\dashv\neg A$.

对于任何 $B(u)\in Form(L)$, 若 $A=\exists xB(x)$ 且 $B(u)'\models\dashv\neg B(u)$, 则

$A'=\forall xB(x)'\models\dashv\forall x\neg B(x)$, $\neg A=\neg\exists xB(x)$,

假设$\forall x\neg B(x)\models\dashv\neg\exists xB(x)$不成立,

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\forall x\neg B(x)^v=1$,

[2] $\neg\exists xB(x)^v=0$, 则

[3] $\exists xB(x)^v=1$ (由[2]).

由 B(x)构作 B(u) (取 u 不在 B(x)中出现), 则

[4] 对于任何 $a\in D$, 有$\neg B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[1]).

[5] 对于任何 $a\in D$, 有 $B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[4]).

[6] 存在 $a\in D$, 使得 $B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\forall x\neg B(x)^v=0$,

[2] $\neg\exists xB(x)^v=1$, 则

[3] $\exists xB(x)^v=0$ (由[2]).

由 B(x)构作 B(u) (取 u 不在 B(x)中出现), 则

[4] 存在 $a\in D$, 使得$\neg B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[1]).