[5] 存在 $a\in D$，使得 $B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[4]).

[6] 对于任何 $a\in D$，有 $B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

∴假设不成立，$\forall x\neg B(x) \vDash\dashv \neg\exists xB(x)$，即 $A' \vDash\dashv \neg A$.

综上可得，对于满足定理条件的任何公式 A 都有 $A' \vDash\dashv \neg A$. □

3.4.2 证

(1) 假设 $\neg\forall xA(x) \vDash\dashv \exists x\neg A(x)$ 不成立，

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\neg\forall xA(x)^v=1$,

[2] $\exists x\neg A(x)^v=0$，则

[3] $\forall xA(x)^v=0$ (由[1]).

由 A(x)构作 A(u) (取 u 不在 A(x)中出现)，则

[4] 对于任何 $a\in D$，有 $\neg A(u)^{v(u/a)}=0$ (由[2]).

[5] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=1$ (由[4]).

[6] 存在 $a\in D$，使得 $A(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\neg\forall xA(x)^v=0$,

[2] $\exists x\neg A(x)^v=1$，则

[3] $\forall xA(x)^v=1$ (由[1]).

由 A(x)构作 A(u) (取 u 不在 A(x)中出现)，则

[4] 存在 $a\in D$，使得 $\neg A(u)^{v(u/a)}=1$ (由[2]).

[5] 存在 $a\in D$，使得 $A(u)^{v(u/a)}=0$ (由[4]).

[6] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

∴假设不成立，$\neg\forall xA(x) \vDash\dashv \exists x\neg A(x)$.

(2) 假设 $\neg\exists xA(x) \vDash\dashv \forall x\neg A(x)$ 不成立，

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\neg\exists xA(x)^v=1$,

[2] $\forall x\neg A(x)^v=0$，则

[3] $\exists xA(x)^v=0$ (由[1]).

由 A(x)构作 A(u) (取 u 不在 A(x)中出现)，则

[4] 存在 $a\in D$，使得 $\neg A(u)^{v(u/a)}=0$ (由[2]).

[5] 存在 $a\in D$，使得 $A(u)^{v(u/a)}=1$ (由[4]).

[6] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\neg\exists xA(x)^v=0$,

[2] $\forall x\neg A(x)^v=1$，则

[3] $\exists xA(x)^v=1$ (由[1]).

由 A(x)构作 A(u) (取 u 不在 A(x)中出现)，则

[4] 对于任何 $a\in D$，有 $\neg A(u)^{v(u/a)}=1$ (由[2]).

[5] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=0$ (由[4]).

[6] 存在 $a\in D$，使得 $A(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[5]与[6]矛盾.

∴假设不成立，$\neg\exists xA(x) \vDash\dashv \forall x\neg A(x)$.

(3) 假设 $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \vDash\dashv \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$ 不成立，

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\forall x(A(x)\wedge B(x))^v=1$,

[2] $(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x))^v=0$，则

[3] $\forall xA(x)^v=0$ 或 $\forall xB(x)^v=0$ (由[2]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现)，则

[4] 对于任何 $a\in D$，有 $(A(u)\wedge B(u))^{v(u/a)}=1$ (由[1]).

[5] 存在 $a\in D$，使得 $A(u)^{v(u/a)}=0$ 或 $B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\forall x(A(x)\wedge B(x))^v=0$,

[2] $(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x))^v=1$，则

[3] $\forall xA(x)^v=\forall xB(x)^v=1$ (由[2]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现)，则

[4] 存在 $a\in D$，使得 $(A(u)\wedge B(u))^{v(u/a)}=0$ (由[1]).

[5] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.