∴假设不成立，$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \vDash\!\!\dashv \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$.

(4) 假设$\exists x(A(x)\vee B(x)) \vDash\!\!\dashv \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$不成立，

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\exists x(A(x)\vee B(x))^v=1$,

[2] $(\exists xA(x)\vee\exists xB(x))^v=0$，则

[3] $\exists xA(x)^v=\exists xB(x)^v=0$ (由[2]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现)，则

[4] 存在 $a\in D$，使得$(A(u)\vee B(u))^{v(u/a)}=1$ (由[1]).

[5] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.

若以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\exists x(A(x)\vee B(x))^v=0$,

[2] $(\exists xA(x)\vee\exists xB(x))^v=1$，则

[3] $\exists xA(x)^v=1$ 或$\exists xB(x)^v=1$ (由[2]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现)，则

[4] 对于任何 $a\in D$，有$(A(u)\wedge B(u))^{v(u/a)}=0$ (由[1]).

[5] 存在 $a\in D$，使得 $A(u)^{v(u/a)}=1$ 或 $B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.

∴假设不成立，$\exists x(A(x)\vee B(x)) \vDash\!\!\dashv \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$. □

3.4.3 证

(1) 假设$\exists x(A(x)\wedge B(x))\vDash\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$不成立，

则存在以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\exists x(A(x)\wedge B(x))^v=1$,

[2] $(\exists xA(x)\wedge\exists xB(x))^v=0$,

[3] $\exists xA(x)^v=0$ 或$\exists xB(x)^v=0$ (由[2]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现)，则

[4] 存在 $a\in D$，使得$(A(u)\wedge B(u))^{v(u/a)}=1$ (由[1]).

[5] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=0$ 或 $B(u)^{v(u/a)}=0$ (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.

∴假设不成立，$\exists x(A(x)\wedge B(x))\vDash\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$.

(2) 令 F(x), G(x)为拟原子公式，D={a, b},

由 F(x), G(x)构作 F(u), G(u) (显然 u 不在 F(x), G(x)中出现)，

以 D 为论域构作赋值 v，使得 $F^v=\{a\}$, $G^v=\{b\}$，则

[1] $F(u)^{v(u/a)}=1$,

[2] $F(u)^{v(u/b)}=0$,

[3] $G(u)^{v(u/a)}=0$,

[4] $G(u)^{v(u/b)}=1$.

[5] $\exists xF(x)^v=1$ (由[1]).

[6] $\exists xG(x)^v=1$ (由[4]).

[7] $(\exists xF(x)\wedge\exists xG(x))^v=1$ (由[5], [6]).

[8] $(F(u)\wedge G(u))^{v(u/a)}=0$ (由[1], [3]).

[9] $(F(u)\wedge G(u))^{v(u/b)}=0$ (由[2], [4]).

[10] $\exists x(F(x)\wedge G(x))^v=0$ (由[8], [9]).

由[7] [10]原式得证.

(3) 假设$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\vDash\forall x(A(x)\vee B(x))$不成立，

则存在以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $(\forall xA(x)\vee\forall xB(x))^v=1$,

[2] $\forall x(A(x)\vee B(x))^v=0$,

[3] $\forall xA(x)^v=1$ 或$\forall xB(x)^v=1$ (由[1]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现)，则

[4] 存在 $a\in D$，使得$(A(u)\vee B(u))^{v(u/a)}=0$ (由[2]).

[5] 对于任何 $a\in D$，有 $A(u)^{v(u/a)}=1$ 或 $B(u)^{v(u/a)}=1$ (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.

∴假设不成立，$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\vDash\forall x(A(x)\vee B(x))$.

(4) 令 F(x), G(x)为拟原子公式，D={a, b},

由 F(x), G(x)构作 F(u), G(u) (显然 u 不在 F(x), G(x)中出现)，

以 D 为论域构作赋值 v，使得 $F^v=\{a\}$, $G^v=\{b\}$，则

[1] $F(u)^{v(u/a)}=1$,

[2] $F(u)^{v(u/b)}=0$,

[3] $G(u)^{v(u/a)}=0$,

[4] $G(u)^{v(u/b)}=1$.

[5] $(F(u)\vee G(u))^{v(u/a)}=1$ (由[1], [3]).

[6] $(F(u)\vee G(u))^{v(u/b)}=1$ (由[2], [4]).