2.5.4 证

(1) 构作真假赋值 v，使得 $A^v=1, B^v=0, C^v=1$，则

[1] $(A\to B)^v=0$,

[2] $(A\to C)^v=1$,

[3] $(B\land C)^v=0$.

由[1] [2]得

[4] $((A\to B)\lor(A\to C))^v=1$,

由[3]得

[5] $(A\to(B\land C))^v=0$,

由[4] [5]原式得证.

(2) 构作真假赋值 v，使得 $A^v=1, B^v=0, C^v=1$，则

[1] $(A\to B)^v=0$,

[2] $(A\to C)^v=1$,

[3] $(B\lor C)^v=1$.

由[1] [2]得

[4] $((A\to B)\land(A\to C))^v=0$,

由[3]得

[5] $(A\to(B\lor C))^v=1$,

由[4] [5]原式得证.

(3) 构作真假赋值 v，使得 $A^v=0, B^v=1, C^v=0$，则

[1] $(A\land B)^v=0$,

[2] $(A\to C)^v=1$,

[3] $(B\to C)^v=0$.

由[1]得

[4] $((A\land B)\to C)^v=1$.

由[2] [3]得

[5] $((A\to C)\land(B\to C))^v=0$.

由[4] [5]原式得证.

(4) 构作真假赋值 v，使得 $A^v=0, B^v=1, C^v=0$，则

[1] $(A\lor B)^v=1$,

[2] $(A\to C)^v=1$,

[3] $(B\to C)^v=0$.

由[1]得

[4] $((A\lor B)\to C)^v=0$.

由[2] [3]得

[5] $((A\to C)\lor(B\to C))^v=1$.

由[4] [5]原式得证. □

2.6.1 证

(v-1) 定理 2.6.9 (v)的 $\vdash$.

[1] $\neg A\vdash\neg A\lor B$ (由定理 2.6.9 (i)).

[2] $\neg(\neg A\lor B)\vdash A$ (由定理 2.6.6 (vii), [1]).

[3] $A\to B, \neg(\neg A\lor B)\vdash A$ (由(+), [2]).

[4] $A\to B, \neg(\neg A\lor B)\vdash A\to B$ (由($\in$)).

[5] $A\to B, \neg(\neg A\lor B)\vdash B$ (由($\to$-), [4], [3]).

[6] $A\to B, \neg(\neg A\lor B)\vdash\neg A\lor B$ (由($\lor$+), [5]).

[7] $A\to B, \neg(\neg A\lor B)\vdash\neg(\neg A\lor B)$ (由($\in$)).

[8] $A\to B\vdash\neg A\lor B$ (由($\neg$-), [6], [7]).

(v-2) 定理 2.6.9 (v)的 $\dashv$.

[1] $\neg A\vdash A\to B$ (由定理 2.6.5 (vi)).

[2] $B\vdash A\to B$ (由定理 2.6.4 (ii)).

[3] $\neg A\lor B\vdash A\to B$ (由($\lor$-), [1], [2]).

(vi-1) 定理 2.6.9 (vi)的 $\vdash$.

[1] $A\vdash A\lor B$ (由定理 2.6.9 (i)).

[2] $\neg(A\lor B)\vdash\neg A$ (由定理 2.6.6 (v), [1]).

[3] $B\vdash A\lor B$ (由定理 2.6.9 (i)).

[4] $\neg(A\lor B)\vdash\neg B$ (由定理 2.6.6 (v), [3]).

[5] $\neg(A\lor B)\vdash\neg A\land\neg B$ (由($\land$+), [2], [4]).

(vi-2) 定理 2.6.9 (vi)的 $\dashv$.

[1] $\neg A\land\neg B, A\lor B\vdash\neg A\land\neg B$ (由($\in$)).

[2] $\neg A\land\neg B, A\lor B\vdash\neg A$ (由($\land$-), [1]).

[3] $\neg A\land\neg B, A\lor B\vdash\neg B$ (由($\land$-), [1]).

[4] $A\lor B\vdash\neg A\to B$ (由定理 2.6.9 (iv)).

[5] $\neg A\land\neg B, A\lor B\vdash\neg A\to B$ (由(+), [4]).