《面向计算机科学的数理逻辑》习题参考答案

 $\forall x(A(x) \land B(x)) \forall \forall x A(x) \land \forall x B(x).$ 假设∃x(A(x) \ B(x)) | ∃xA(x) \ ∃xB(x) 不成立, 二假设不成立,

岩以口为论域的赋值 v 使得

 $\exists x(A(x) \lor B(x))^{\nu}=1,$ 

[2] (3 xA(x) \ 3 xB(x))"=0, 则

∃xA(x)"=∃xB(x)"=0 (由[2]).

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现),

国

[4] 存在a∈D, 使得(A(u)∨B(u))<sup>v(u/a)</sup>=1 (由[1]).

对于任何 a∈D, 有 A(u) (w(a) =B(u) ((w(a) =0 (由[3]).

其中[4]与[5]矛盾.

岩以 D 为论域的赋值 v 使得

 $\exists x(A(x) \lor B(x))^{\nu} = 0$ 

[2] (3xA(x) \ 3xB(x))"=1, 则

∃xA(x)"=1 或∃xB(x)"=1 (由[2]). 3

由 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现),则

[4] 对于任何 a∈D, 有(A(u)∧B(u))<sup>v(u/a)</sup>=0 (由[1]).

存在a∈D, 使得A(u)<sup>v(u/a)</sup>=1或B(u)<sup>v(u/a)</sup>=1 (由[3]). 2

其中[4]与[5]矛盾.

∴假设不成立, ∃x(A(x)∨B(x)) Ħ ∃xA(x)∨∃xB(x).□

3.4.3 证

假设∃x(A(x) \ B(x)) \ \ ∃ x A(x) \ ∃ x B(x) \ \ 成立, 则存在以 D 为论域的赋值 v 使得

其中[4]与[5]矛盾.

:假设不成立,

山 A(x), B(x)构作 A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现), 则 [5] 对于任何 a ∈ D, 有 A(u)<sup>v(u/a)</sup>=0 或 B(u)<sup>v(u/a)</sup>=0 (由[3]). [4] 存在a∈D, 使得(A(u)∧B(u))<sup>v(u/a)</sup>=1 (由[1]). ∃xA(x)'=0 或∃xB(x)'=0 (由[2]). [2]  $(\exists xA(x) \land \exists xB(x))^{*}=0$ ,  $\exists x(A(x) \land B(x))^{\prime}=1,$ 

 $\exists x(A(x) \land B(x)) \models \exists xA(x) \land \exists xB(x).$ 令 F(x), G(x)为拟原子公式, D={a, b},

由F(x), G(x)构作F(u), G(u) (显然 u 不在F(x), G(x)中出现), 以 D 为论域构作赋值 v, 使得 F'={a}, G'={b}, 则、

[1]  $F(u)^{v(u/a)}=1$ ,

[2]  $F(u)^{v(u/b)}=0$ ,

 $G(u)^{v(u/a)}=0$ ,

 $[4] G(u)^{v(u/b)} = 1.$ 

∃xF(x)"=1 (由[1]). [5]

3×G(x)"=1 (由[4]) [9]

[7] (3xF(x) \ 3xG(x)) = 1 (由[5], [6]).

[9] (F(u) \ G(u))<sup>v(u/b)</sup>=0 (由[2], [4]). [8] (F(u) \ G(u)) (w(w/a)=0 (由[1], [3]).

∃x(F(x) \ G(x))"=0 (由[8], [9]). [10]

中[7] [10]原式得证.

優设 V xA(x) V V xB(x) ⊨ V x(A(x) V B(x)) 不成立 则存在以 D 为论域的赋值 v 使得

[1]  $(\forall xA(x) \lor \forall xB(x))^{2}=1$ 

 $\forall x(A(x) \lor B(x))^{\nu}=0$ 

以xA(x)"=1 或∀xB(x)"=1 (由[1]).

由A(x), B(x)构作A(u), B(u) (取 u 不在 A(x), B(x)中出现),则

[4] 存在a∈D, 使得(A(u)∨B(u))<sup>v(u/a)</sup>=0 (由[2]).

[5] 对于任何 a ∈ D, 有 A(u)<sup>v(u/a)</sup>=1 或 B(u)<sup>v(u/a)</sup>=1 (由[3]). 其中[4]与[5]矛盾.

 $\forall xA(x) \lor \forall xB(x) \models \forall x(A(x) \lor B(x)).$ 令F(x), G(x)为拟原子公式, D={a, b}, ::假设不成立, 4

由F(x), G(x)构作F(u), G(u) (显然 u 不在F(x), G(x)中出现), 以 D 为论域构作赋值 v, 使得 F'={a}, G'={b}, 则 [1] F(u)"(u/a)=1,

 $[2] F(u)^{v(u/b)} = 0,$ 

3]  $G(u)^{v(u/a)}=0$ ,

4] G(u)v(u/b)=1.

[5] (F(u) \ G(u)) \ (山(u)=1 (由[1], [3]).

[6] (F(u) ∨ G(u)) v(u/b)±1 (由[2], [4]).

- 30 -