[7] $\forall x(F(x)\vee G(x))^v=1$ (由[5], [6]).

[8] $\forall xF(x)^v=0$ (由[1], [2]).

[9] $\forall xG(x)^v=0$ (由[3], [4]).

[10] $(\forall xF(x)\vee\forall xG(x))^v=0$ (由[8], [9]).

由[7] [10]原式得证.

(5) 假设 $\exists x\forall yA(x, y)\models\forall y\exists xA(x, y)$ 不成立,

则存在以 D 为论域的赋值 v 使得

[1] $\exists x\forall yA(x, y)^v=1$,

[2] $\forall y\exists xA(x, y)^v=0$,

由 A(x, y)构作 A(u, w) (取 u, w 不在 A(x, y)中出现), 则

[3] 存在 $a\in D$, 使得 $\forall yA(u, y)^{v(u/a)}=1$ (由[1]).

[4] 存在 $a\in D$, 使得对于任何 $b\in D$, 有 $A(u, w)^{v(u/a)(w/b)}=1$ (由[3]).

[5] 存在 $b\in D$, 使得 $\exists xA(x, w)^{v(w/b)}=0$ (由[2]).

[6] 存在 $b\in D$, 使得对于任何 $a\in D$, 有 $A(u, w)^{v(u/a)(w/b)}=0$ (由[5]).

其中[4]与[6]矛盾.

∴假设不成立, $\exists x\forall yA(x, y)\models\forall y\exists xA(x, y)$.

(6) 令 F(x, y)为拟原子公式, D={a, b},

由 F(x, y)构作 F(u, w) (显然 u, w 不在 F(x, y)中出现),

以 D 为论域构作赋值 v, 使得 F^v={(a, a), (b, b)}, 则

[1] $F(u, w)^{v(u/a)(w/a)}=1$,

[2] $F(u, w)^{v(u/a)(w/b)}=0$,

[3] $F(u, w)^{v(u/b)(w/a)}=0$,

[4] $F(u, w)^{v(u/b)(w/b)}=1$.

[5] $\exists xF(x, w)^{v(w/a)}=1$ (由[1]).

[6] $\exists xF(x, w)^{v(w/b)}=1$ (由[4]).

[7] $\forall y\exists xF(x, y)^v=1$ (由[5], [6]).

[8] $\forall yF(u, y)^{v(u/a)}=0$ (由[1], [2]).

[9] $\forall yF(u, y)^{v(u/b)}=0$ (由[3], [4]).

[10] $\exists x\forall yF(x, y)^v=1$ (由[8], [9]).

由[7] [10]原式得证. □

3.5.1 证

(vi-1) 定理 3.5.2 (vi)的 $\vdash$.

[1] $A(u, v)\vdash\exists y\exists xA(x, y)$

(由定理 3.5.2 (ii), 取 u, v 不在 A(x, y)中出现).

[2] $\exists x\exists yA(x, y)\vdash\exists y\exists xA(x, y)$ (由($\exists$-), [1]).

(vi-2) 定理 3.5.2 (vi)的 $\dashv$.

[1] $A(u, v)\vdash\exists x\exists yA(x, y)$

(由定理 3.5.2 (ii), 取 u, v 不在 A(x, y)中出现).

[2] $\exists y\exists xA(x, y)\vdash\exists x\exists yA(x, y)$ (由($\exists$-), [1]).

(viii) 定理 3.5.2 (viii).

[1] $\exists x\forall yA(x, y)\vdash\exists xA(x, u)$ (由($\forall$-), 取 u 不在 A(x, y)中出现).

[2] $\exists x\forall yA(x, y)\vdash\forall y\exists xA(x, y)$ (由($\forall$+), [1]). □

3.5.2 证

(1) 定理 3.5.3 (ii)的 $\vdash$.

[1] $A(u)\vdash\exists xA(x)$ (由($\exists$+), 取 u 不在 A(x)中出现).

[2] $\neg\exists xA(x)\vdash\neg A(u)$ (由定理 2.6.6 (v), [1]).

[3] $\neg\exists xA(x)\vdash\forall x\neg A(x)$ (由($\forall$+), [2]).

(2) 定理 3.5.3 (ii)的 $\dashv$.

[1] $\forall x\neg A(x)\vdash\neg A(u)$ (由($\forall$-), 取 u 不在 A(x)中出现).

[2] $A(u)\vdash\neg\forall x\neg A(x)$ (由定理 2.6.6 (vi), [1]).

[3] $\exists xA(x)\vdash\neg\forall x\neg A(x)$ (由($\exists$-), [2]).

[4] $\forall x\neg A(x)\vdash\neg\exists xA(x)$ (由定理 2.6.6 (vi), [3]). □

3.5.3 证

(v-1) 定理 3.5.4 (v)的 $\vdash$.

[1] $A\to B(u)\vdash\exists x(A\to B(x))$ (由($\exists$+), 取 u 不在 B(x)中出现).

[2] $\neg\exists x(A\to B(x))\vdash\neg(A\to B(u))$ (由定理 2.6.6 (v), [1]).

[3] $\neg(A\to B(u))\vdash A$ (由定理 2.6.7 (v)).

[4] $\neg(A\to B(u))\vdash\neg B(u)$ (由定理 2.6.7 (vi)).

[5] $\neg\exists x(A\to B(x))\vdash A$ (由(Tr), [2], [3]).

[6] $A\to\exists xB(x), \neg\exists x(A\to B(x))\vdash A$ (由(+), [5]).

[7] $A\to\exists xB(x), \neg\exists x(A\to B(x))\vdash A\to\exists xB(x)$ (由($\in$)).