DATAGURU 炼数成金

大数据的统计学基础——第5周

DATAGURU专业数据分析社区

法律声明

【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以外范围散播，违者将可能被追究法律和经济责任。

课程详情访问炼数成金培训网站

http://edu.dataguru.cn

关注炼数成金企业微信

■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

基本初等函数求导公式

(1) $(C)'=0$

(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$

(10) $(e^x)'=e^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

不定积分

- 积分与求导互为逆运算

1、$\int k dx = kx + c$

2、$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$

3、$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

4、$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

5、$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

6、$\int \cos x dx = \sin x + c$

7、$\int \sin x dx = -\cos x + c$

8、$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

9、$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

10、$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

11、$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

12、$\int e^x dx = e^x + c$

13、$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

简单定积分计算

- 牛顿——莱布尼兹公式：$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$
- 其中，F(x)为f(x)的原函数，即$F'(x) = f(x)$

- 分部积分公法：
- 设u(x)、v(x)在[a,b]上具有连续导数$u'(x), v'(x)$，则

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

回顾

8. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6，0.7. 今各投 3 次. 求

(1) 两人投中次数相等的概率；

(2) 甲比乙投中次数多的概率.

- 上周的作业中，解答这道题我们设立了两个随机变量：用X记录甲投中的次数，Y记录乙投中的次数。我们写出了它们各自的分布律：

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

Y	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

回顾

- 这次我们尝试将X、Y取值的不同情况下的概率都计算出来
- 为了方便计算，我们把X与Y的分布律的数据改一下

X	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.5	0.1

Y	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.5	0.2

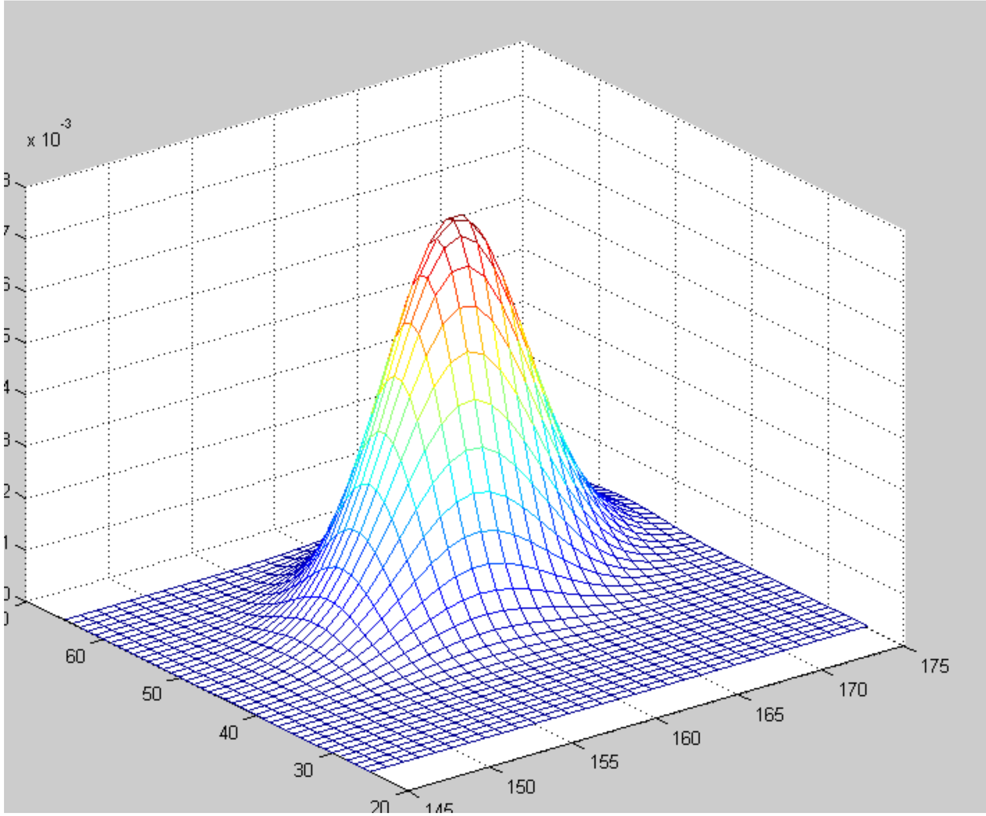
Y	X	0	1	2	3
0		0.01	0.03	0.05	0.01
1		0.02	0.06	0.1	0.02
2		0.05	0.15	0.25	0.05
3		0.02	0.06	0.1	0.02

联合分布律

- 有了上表，再计算题目中的问题就变得简单了

二维随机变量

- 一般，设E是一个随机试验，它的样本空间是S={e}，设X=X{e}和Y={e}是定义在S上的随机变量，由X与Y构成的向量（X,Y）叫做二维随机向量或是二维随机变量（Two-dimensional random vector）



分布函数

- 设（X,Y）是二维随机变量，对于任意实数x，y，二元函数：

$$F(x,y)=P\{(X\leq x)\cup(Y\leq y)\}=P\{X\leq x,Y\leq y\}$$

- 称为二维随机变量（X,Y）的联合分布函数(Joint probability distribution)

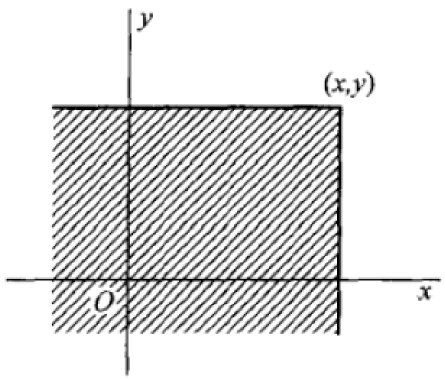


图 3—2

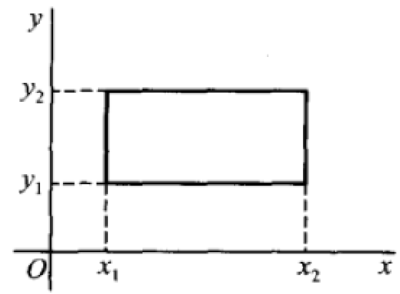


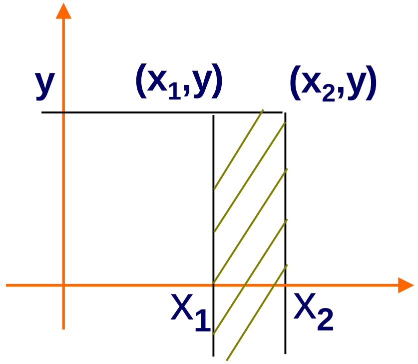
图 3—3

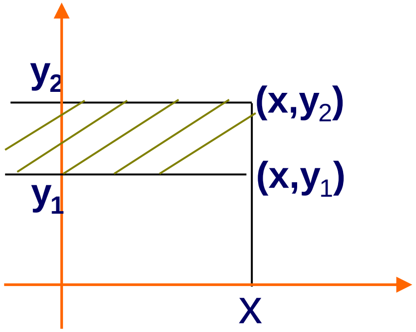
分布函数的性质

◆ 1. F(x,y)是对于x和y的不减函数，即

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$
$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

◆ 2. 0≤F(x,y)≤1，且对于任意固定的y，F(-∞，y)=0；对于任意固定的x，F(x，-∞)=0
F（-∞，-∞）=0，F（∞，∞）=1





分布函数的性质

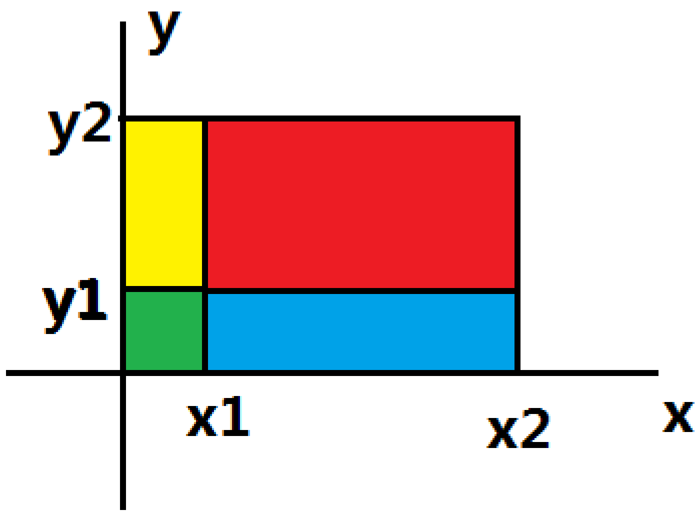
- 3. F（x，y）关于x右连续，关于y右连续，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon, y) = F(x, y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x, y+\varepsilon) = F(x, y)$$

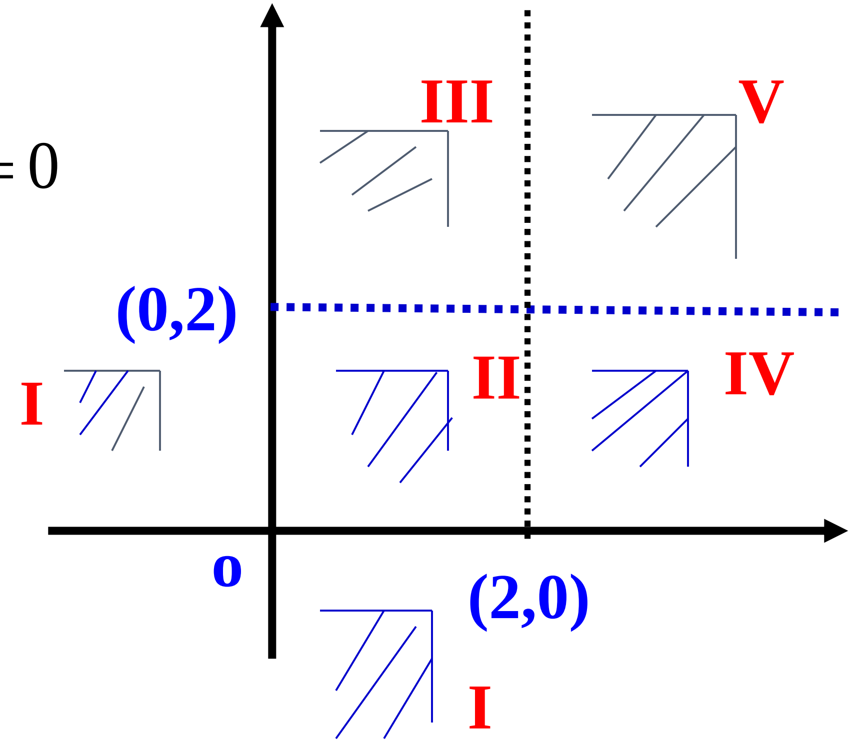
- 4. 对于任意(x1,y1),(x2,y2),x1<x2,y1<y2,下述不等式成立：

$$F(x2,y2)-F(x2,y1)+F(x1,y1)-F(x1,y2)\geq 0$$



例子

例 3.1 设随机变量(X, Y)等可能地取值:(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), 求X, Y的联合分布函数.



解: Ⅰ. x < 0, 或y < 0时,

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P(\Phi)=0$$

Ⅱ. 0≤x<2, 0≤y<2时,

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$$

$$=P\{(X,Y)=(0,0)\}=\frac{1}{4}$$

III. 0≤x<2, y≥2时.

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$$

$$=P\{(X,Y)=(0,0)\}+P\{(X,Y)=(0,2)\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

例子

IV.x≥2, 0≤y <2时,

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$= P\{(X,Y) = (0,0)\} + P\{(X,Y) = (2,0)\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

V.x≥2, y≥2时,

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$= P\{(X,Y) = (0,0)\} + P\{(X,Y) = (0,2)\}$$

$$+ P\{(X,Y) = (2,0)\} + P\{(X,Y) = (2,2)\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

例子

- 综上所述，得随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0; \\ 1/4, & 0\leqslant x<2,\ 0\leqslant y<2; \\ 1/2, & 0\leqslant x<2, y\geqslant 2\text{及}x\geqslant 2, 0\leqslant y<2; \\ 1, & x\geqslant 2,\ y\geqslant 2. \end{cases}$$

离散与连续.

- 如果二维随机变量（X,Y）全部可能取到的值是有限对或是可列无限对，则称（X,Y）为离散型的二维随机变量。
- 如果对于二维随机变量（X,Y）的分布函数F(x,y)，存在非负可积函数f（x，y）使得对于任意x,y有

$$\mathrm{F(x,y)}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

- 称（X,Y）为连续型的二维随机变量。函数f(x,y)称为二维随机变量（ X ， Y ）的联合概率密度（Joint probability density ）。

联合分布律

- 对于离散型的二维随机变量（X,Y）的所有可能取值为（xi,yi），I,j=1,2,……，称P{X=xi,Y=yi}=pij，i,j=1,2，…… 为随机变量X和Y的联合分布律（ Joint distribution law ）
- 性质：

$1^\circ \quad p_{ij} \ge 0,\ \ i, j = 1, 2, \cdots$

$$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

例子

- 一个口袋中有三个球, 依次标有数字1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中, 再任取一个. 设每次取球时, 各球被取到的可能性相等. 以X, Y分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字, 求X, Y的联合分布律.

解: (X, Y)的可能取值为(1, 2),(2, 1),(2, 2)

$$P\{(X,Y)=(1,2)\}=P\{(X=1)\cap(Y=2)\}$$
$$=P(X=1)P(Y=2/X=1)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{3}$$

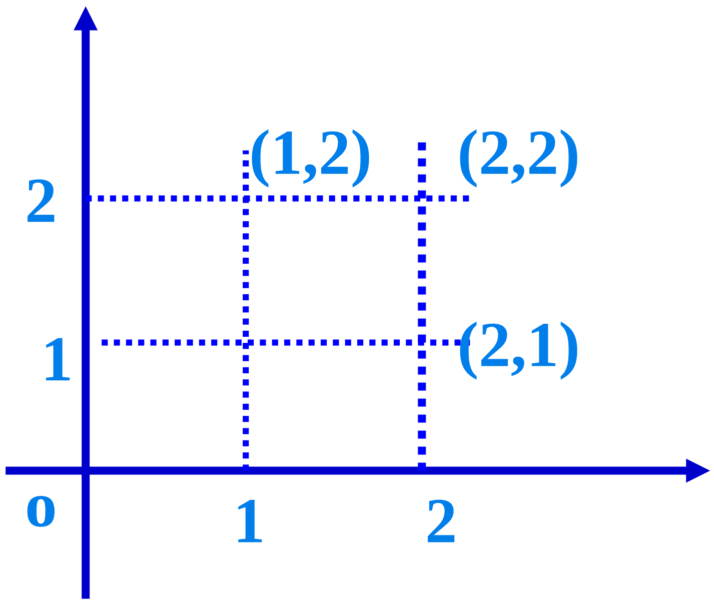
$$P\{(X,Y)=(2,1)\}=P(X=2)P(Y=1/X=2)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P\{(X,Y)=(2,2)\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

例子

◆ 故X与Y的联合分布律

Y \ X	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3



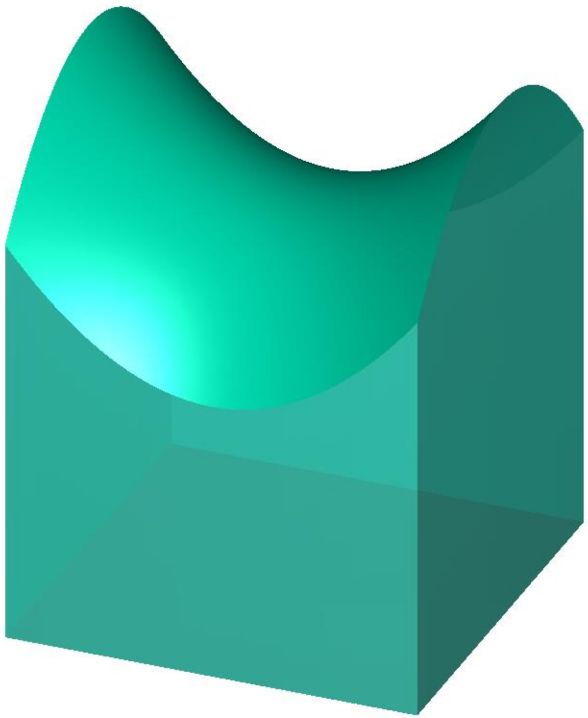
联合概率密度

- 联合概率密度的性质：
- 1. f(x,y)≥0
- 2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$
- 3. 设G是xOy平面上的区域，点（X,Y）落在G内的概率为

$$\mathrm{P}\{(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{G}\} = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$$

- 4. 若点f(x,y)在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} = f(x,y)$$



例子

例 2 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$;(2)求概率 $P\{Y\leqslant X\}$.

解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}2e^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即有 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例子

(2) 将(X,Y)看作是平面上随机点的坐标. 即有

$$\{Y \leqslant X\} = \{(X,Y) \in G\},$$

其中 G 为 xOy 平面上直线 $y=x$ 及其下方的部分，如图 3—4. 于是

$$P\{Y \leqslant X\} = P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

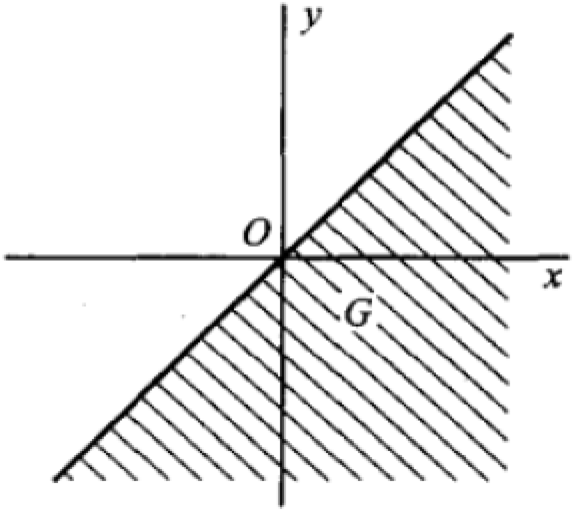


图 3—4

多维随机变量

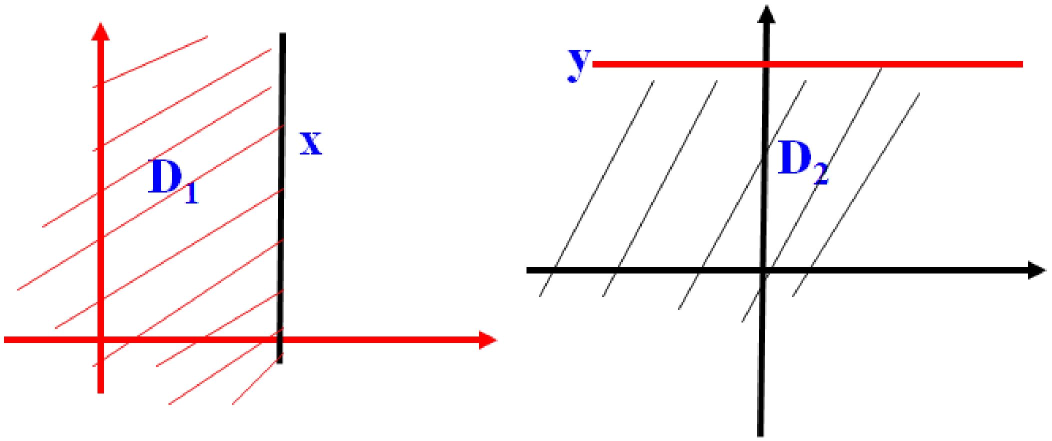
- 二维随机变量可以推广到多维的情况：
- 设E是一个随机试验，它的样本空间是S={e}，设X1=X1{e}，X2={e}，......，Xn=Xn{e}是定义在S上的随机变量，由Xi构成的向量（X1,X2，......,Xn）叫做多维随机向量或是多维随机变量（ Multidimensional random vector ）
- 对于任意x1,x2,......,xn，函数F（ x1,x2,......,xn ）=P{X1≤x1, X2≤x2,......Xn≤xn}称为n维随机变量的分布函数

边缘分布

- 在多维随机变量中，将X，Y各自的分布称为边缘分布函数（ Marginal distribution ），分别记为F_X，F_Y

$$F_X = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

$$F_Y = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y)$$



边缘分布律

设(X, Y)是二维离散型随机变量,其(联合)分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1,2,\cdots)$$

则关于X的边缘分布律为:

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij} \quad (i=1,2,\cdots)$$

关于Y的边缘分布律为:

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij} \quad (j=1,2,\cdots)$$

边缘分布律

- 边缘分布律具有一维分布律的性质
- 联合分布律唯一决定边缘分布律. 具体求法是将联合分布律写成表格形式, 然后各行分别相加得关于X的分布律；各列相加得Y的分布律

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例子

- 已知(X, Y)的联合分布律如图
- 求X与Y的(边缘)分布律.
- 将联合分布表中的各行概率分别相加

  得X的分布律:

X \ Y	-1	2	3
-1	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$
2	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$
3	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$

$$P(X=-1)=0+\frac{3}{30}+\frac{2}{30}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{30}+\frac{6}{30}+\frac{6}{30}=\frac{3}{6}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{2}{30}=\frac{2}{6}$$

即：

$$\begin{pmatrix} X & -1 & 2 & 3 \\ p_{i\cdot} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

同理可得

$$\begin{pmatrix} Y & -1 & 2 & 3 \\ p_{\cdot j} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

边缘概率密度

- 对于连续型随机变量(X,Y)，它的联合概率密度为f(x,y),则关于X和关于Y的边缘概率密度（ Marginal probability density ）如下：

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \end{aligned}}$$

- 边缘分布函数与边缘概率密度的关系：

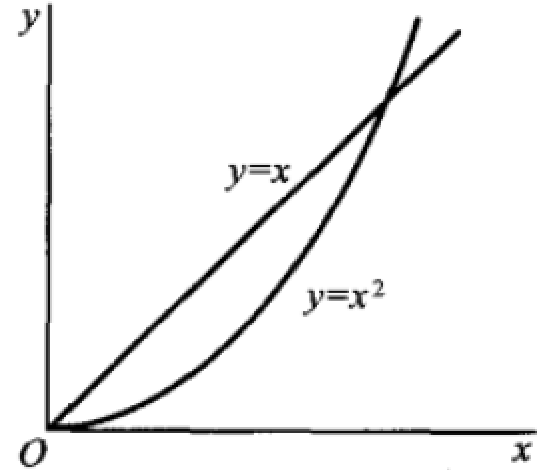
$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$
$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv$$
$$= \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$$

例子

例 2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度（图 3—5）

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$.



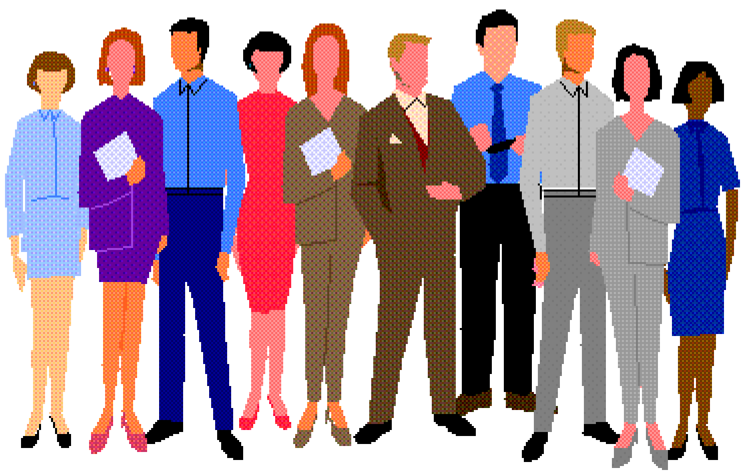
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y=6(x-x^2), 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y), 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

条件分布

- 考虑一大群人，从中随机挑选一个人，记此人的身高和体重分别为X和Y，则X和Y是随机变量。
- X和Y有相应的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$。
- 如果已知X的取值是160cm，则此时Y也有一个分布函数$F^*_Y(y)$。
- 问题： $F_Y(y)$与$F^*_Y(y)$相等吗？在X未知的情况下，抽到的人体重小于60kg的概率和在已知X=160cm的情况下，抽到抽到的人体重小于60kg的概率相等吗？



条件分布

- 回顾条件概率：$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) > 0$
- 在X未知的情况下，抽到的人体重小于60kg的概率：P(X取任意值，Y ≤ 60)
- 已知X=160cm的情况下，抽到抽到的人体重小于60kg的概率：

$$P(Y \leq 60|X = 160) = \frac{P(X = 160, Y \leq 60)}{P(X = 160)}$$

- 设二维随机变量（X,Y），条件概率P(X ≤x|Y=y)可以看做是在Y=y的条件下，X的分布函数$F_{X|Y}(x)$

条件分布律

DATAGURU 炼数成金

- 设离散二维随机变量（X,Y）的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1,2,\cdots)$$

- 关于X和关于Y的边缘分布律分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij} \quad (i=1,2,\cdots)$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij} \quad (j=1,2,\cdots)$$

- 则事件$\{X=x_i|Y=y_i\}$的概率由条件概率的定义可知：

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}} \quad \text{i=1,2......n}$$

- 称上式为在Y=yj条件下随机变量X的条件分布律

例子

- 盒子里装有3只黑球，4只红球，3只白球，在其中任取2球，以X表示取到黑球的数目，Y表示取到红球的只数。求
  （1）X，Y的联合分布律；
  （2）X=1时Y的条件分布律；
  (3) Y=0时X的条件分布律。
- 解：X, Y的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

例子

- 由于P(X=1)=7/15，故在X=1的条件下，Y的分布律为

$$P(Y=0\mid X=1)=3/7,\ P(Y=1\mid X=1)=4/7,\ P(Y=2\mid X=1)=0.$$

Y	0	1
$P(Y=k\mid X=1)$	3/7	4/7

- 同理P(Y=0)=1/3，故在Y=0的条件下，X的分布律为：

X	0	1	2
$P(X=k\mid Y=0)$	1/5	3/5	1/5

条件概率密度

- 对于连续型随机变量（X,Y），其联合概率密度为f(x,y)，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$。若对固定的y， $f_Y(y) > 0$，则称$\frac{f(x,y)}{f_Y(x)}$为在Y=y条件下X的条件概率密度（Conditional probability density），记为$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
- 称$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t,y)}{f_Y(y)} dt$为在Y=y条件下X的条件分布函数

例子

- 设G是平面上的有界区域,其面积为A。若二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A},(x,y)\epsilon G\\ 0,其他\end{cases}$$

- 则称(X,Y)在G上服从均匀分布。现设二维随机变量(X,Y)在圆域$x^2+y^2\le 1$上服从均匀分布，求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$。

解 由假设随机变量（X,Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

例子

且有边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是当 $-1<y<1$ 时有

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定积分过程

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}dx=\int_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\pi}dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{x}{\pi}\Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},-1\le y\le 1$$

积分对象是x，要确定x的积分范围，此时y可以看做是一个单纯的常数，而不是自变量

最后得出的函数表达式中只含有y，是y的边缘概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

最后得到的条件概率密度是一个关于y的函数

例子

当 $y=0$ 和 $y=\frac{1}{2}$ 时 $f_{X|Y}(x|y)$ 的图形分别如图 3－6，图 3－7 所示.

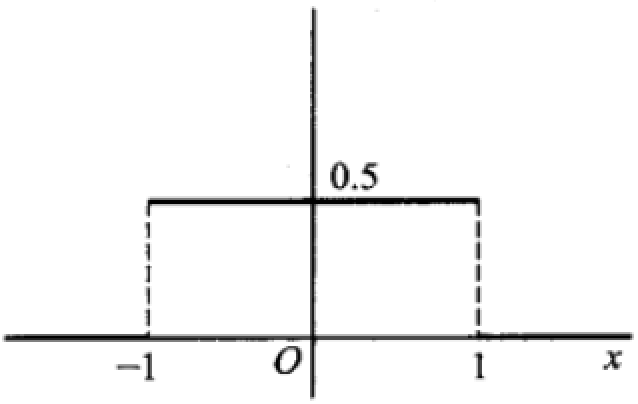


图 3－6

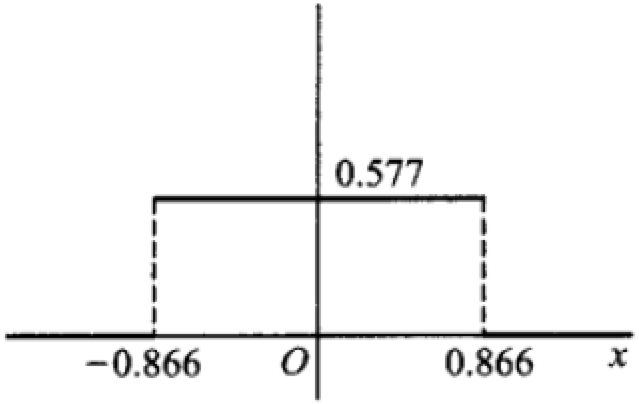
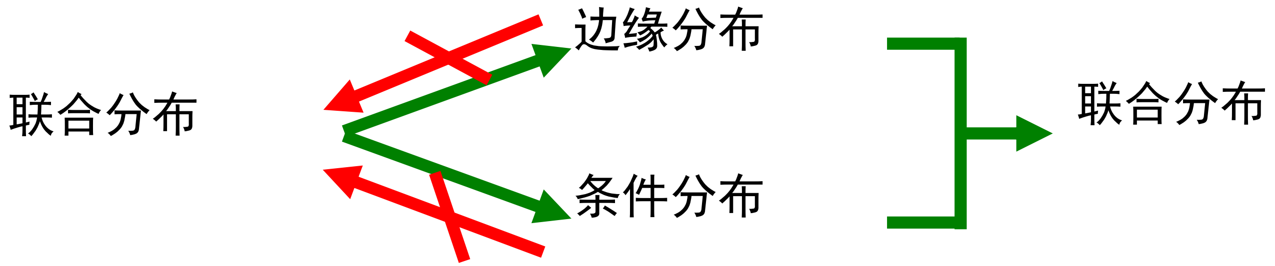


图 3－7

各种分布的关系

- 联合分布可以唯一地确定边缘分布和条件分布



随机变量的独立性

- 回顾事件的独立性：
- 对于事件A，B，若P(AB)=P(A)P(B)成立，则称事件A，B相互独立
- 类比随机变量的独立性：
- 对于随机变量X,Y，记A={X≤x}，B={Y≤y}，若对于任意的x，y，都有P(AB)=P(A)P(B)，即P{X≤x， Y≤y}=P{X≤x}P{Y≤y}，即$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ 成立，称随机变量X和Y是相互独立的。
- 当(X,Y)是连续型随机变量时$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$等价于$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$几乎处处成立
- 当(X,Y)是离散型随机变量时$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$等价于$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=$

例子

8. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6，0.7. 今各投 3 次. 求

（1）两人投中次数相等的概率；

（2）甲比乙投中次数多的概率.

- 对于开头的例子，用X记录甲投中的次数，Y记录乙投中的次数。因为两人投篮是互不影响的，所以X与Y是相互独立的。可以根据公式$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$验证X与Y的独立性。

习题

1. 在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，考虑两种试验：(1)放回抽样；(2)不放回抽样．我们定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第一次取出的是次品;}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第二次取出的是次品.}\end{cases}$$

试分别就(1)、(2)两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律．

- （1）放回抽样：
- （X,Y）的所有可能取值：（0,0）（0,1）（1,0）（1,1）
- P（X=0，Y=0）$=\frac{10}{12}*\frac{10}{12}=\frac{25}{36}$ ； P（X=0,Y=1)$=\frac{10}{12}*\frac{2}{12}=\frac{5}{36}$
- P（X=1,Y=0）$=\frac{2}{12}*\frac{10}{12}=\frac{5}{36}$ ； P(X=1,Y=1)$=\frac{2}{12}*\frac{2}{12}=\frac{1}{36}$

习题

- 故放回抽样时（X,Y）的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	25/36	5/36
1	5/36	1/36

- （2）不放回抽样：

- P（X=0，Y=0）=$\frac{10}{12}*\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$ ；   P（X=0,Y=1)=$\frac{10}{12}*\frac{2}{11}=\frac{10}{66}$

- P（X=1,Y=0）=$\frac{2}{12}*\frac{10}{11}=\frac{10}{66}$；   P(X=1,Y=1)=$\frac{2}{12}*\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$

Y \ X	0	1
0	45/66	5/33
1	5/33	1/66

习题

- 对于上述的X与Y，它们相互独立吗？
- （1）放回抽样：先求出X与Y的边缘分布律

Y \ X	0	1	Y
0	25/36	5/36	5/6
1	5/36	1/36	1/6
X	5/6	1/6	

- 根据边缘分布律与联合分布律，很容易验证$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$ 的正确性，所以X与Y在放回抽样下是相互独立的。

习题

- （2）无放回抽样：

Y \ X	0	1	Y
0	45/66	5/33	5/6
1	5/33	1/66	1/6
X	5/6	1/6	

- 很明显，P{X=0,Y=0}=45/66≠25/36=P{X=0}P{Y=0}
- 故在无放回抽样下，X与Y不相互独立

炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间