大数据的矩阵计算基础——第1周

法律声明

【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以外范围散播，违者将可能被追究法律和经济责任。

关注炼数成金企业微信

■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

内容

- 矩阵的概念
- 矩阵的线性运算——加法、减法与数乘
- 矩阵的乘法
- 矩阵的转置
- 矩阵的逆
- 矩阵的行列式

运动会成绩记录问题

- 运动会成绩记录问题
- 学院运动会有数学、物理、化学、生物、地理、环境六个系参赛。每项赛事限报1 人。每项赛事取前五名记分并发奖金。前五名分别记7、5、3、2、1分，分别发奖金100、70、50 、20、10 元。接力赛项目得分加倍，奖金增加4 倍。请列出各项比赛成绩明细表。

100 米（男女）成绩表

名次	1	2	3	4	5
数学	1	0	0	1	0
物理	0	1	0	0	0
化学	0	0	2	0	0
生物	1	0	0	0	1
地理	0	1	0	1	0
环境	0	0	0	0	1

$$\begin{array}{c} \\ \text{系别} \Rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{名　　次} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A_{100}$$

运动会成绩记录问题

200米（男女）成绩表					
名次	1	2	3	4	5
数学	0	1	1	0	0
物理	1	0	0	0	1
化学	0	1	0	1	0
生物	0	0	1	0	1
地理	1	0	0	1	0
环境	0	0	0	0	0

$$\begin{array}{cc} & \text{名　次} \\ \text{系别} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A_{200}$$

名次	积分	奖金
1	7	100
2	5	70
3	3	50
4	2	20
5	1	10

$$\begin{array}{cc} & \text{分值}\quad\text{奖金} \\ \text{名次} & \begin{pmatrix} 7 & 100 \\ 5 & 70 \\ 3 & 50 \\ 2 & 20 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \end{array} = B.$$

什么是矩阵

- 由m*n个元素$a_{ij}(i=1,2,\dots\dots;j=1,2,\dots\dots)$排成的m行n列的有序列表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 称为m行n列矩阵，简称m*n矩阵，常用大写字母A，B，C等表示。
- 上表可以记为$A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$

什么是矩阵

- A_{100}是一个6*5的矩阵

$$\begin{array}{cc} & \text{名　　次} \\ \text{系别} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A_{100}$$

- $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & i & 5 \\ -2i & 6 & 7 \end{bmatrix}$是一个2行3列的矩阵

矩阵与向量

- 当m=1或是n=1时

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- 称A为行向量或是列向量

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵
- 元素是复数的矩阵称为复矩阵

矩阵相等

- 对于两个矩阵A和B，当它们的行数相同，列数相同，并且对应位置上的元素都相等时，称矩阵A与B相等，记住A=B。
- 即$a_{ij} = b_{ij}$，对所有i=1，2，……,m;j=1,2，……，n都成立

- 若两个矩阵行数与列数分别相等, 则为同型矩阵
- 例如下面两个是同型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

方阵

- 当m=n时，我们称矩阵A为n阶方阵.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 从左上到右下的对角线称为主对角线
- 从右上到左下的对角线称为次对角线

单位矩阵

- 主对角线上全是1，其余位置上全是0的方阵称为单位矩阵，记为I或E；或I_n，E_n

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

全为1

负矩阵、上三角阵、下三角阵

- 对于矩阵$A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$，各个元素取相反数得到的矩阵称为A的负矩阵，记为-A
- 对于矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$的负矩阵为$-A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$
- 上三角阵

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & O & & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角阵

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & O & \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

对角方阵

- 既是上三角阵，又是下三角阵的矩阵称为对角方阵或对角矩阵。记为

$$\mathbf{D}=diag\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \boldsymbol{O} \\ & \boldsymbol{O} & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

不全为0

- 所有对角元a_{ii}都相等的对角方阵称为数量矩阵。

- 对角元的和$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$称为方阵A的迹，记为trA

零矩阵

- 所有元素全为零的矩阵称为零矩阵，零矩阵记作 $0_{m\times n}$或 O
- 注意：不同阶数的零矩阵并不相等

例如 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3阶零方阵

3×4阶零矩阵

矩阵加法

- 综合考虑各个系100米与200米的各个名次人数

$$\begin{array}{cc} & \text{名　　次} \\ \text{系别} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A_{100} \qquad \begin{array}{cc} & \text{名　　次} \\ \text{系别} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A_{200}$$

- $$A_{100} + A_{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵加法，减法与数乘

- 记$A_{m\times n} = (a_{ij}); B_{m\times n} = (b_{ij})$
- 加法：$A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})$
- $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+5 & 2+6\\3+7 & 4+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 8\\10 & 12\end{bmatrix}$
- 减法：$A_{m\times n} - B_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})$
- $\begin{bmatrix}6 & 8\\10 & 12\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 8\\10 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5 & -6\\-7 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$
- 数乘：$kA = (ka_{ij})$
- $3 \times \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\times 1 & 3\times 2\\3\times 3 & 3\times 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\9 & 12\end{bmatrix}$

矩阵加法，减法与数乘

- 加法运算律：
- 交换律：A+B=B+A
- 结合律：(A+B)+C=A+(B+C)
- 零矩阵相关：A+0=A；A-A=0

- 数乘运算律：
- 1A=A ;0A=$\mathit{0}$
- 结合律：(kl)A=k(lA)
- 分配律：(k+l)A=kA+lA
- k(A+B)=kA+kB

运动会积分与奖金计算

- 计算院运会中各队的积分与奖金
- 例：数学系的100米赛跑的积分与奖金

$$A_{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 100 \\ 5 & 70 \\ 3 & 50 \\ 2 & 20 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{100}B = \begin{pmatrix} 9 & 120 \\ 5 & 70 \\ 6 & 100 \\ 8 & 110 \\ 7 & 90 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$1\times7+0\times5+0\times3+1\times2+0\times1=9$$

矩阵乘法

- 记$A_{m\times n}=(a_{ij})$; $B_{n\times p}=(b_{ij})$
- 定义矩阵A与矩阵B的乘积为一个m*p的矩阵$C_{m\times p}=(c_{ij})=AB$

其中，
$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

A的列数一定要和B的行数相等。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

例　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求: $C=AB.$

解　$\because A=\left(a_{ij}\right)_{3\times4}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{4\times3,}$　$\therefore C=\left(c_{ij}\right)_{3\times3}$.

$$C=AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}$$

矩阵乘法

- 设A是一个1*n矩阵，B是一个n*1矩阵，则

$$AB = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i\right]_{1\times 1}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

- 矩阵乘法一般不满足交换律

矩阵乘法

DATAGURU 炼数成金

- 当AB=0并不能推出A、B中有一个为零矩阵
- 如：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

但A,B都不是零矩阵.

矩阵乘法

- 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 求AB，AC
- 解：计算得

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$$

- AB=AC，但B≠C。
- 矩阵乘法不满足消去率

矩阵乘法

- 矩阵乘法运算运算规律
- 1. (AB)C=A(BC)
- 2. A(B+C)=AB+AC
- 3. (A+B)C=AC+BC
- 4. k(AB)=(kA)B=A(kB)
- 5. AI=IA=A
- 6. A0=0A=0

- 若A 是n阶方阵, 则A^m 是A 的m次幂, 即m个A相乘,对矩阵的乘幂，有:

$$A^p A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

- 当AB=BA时，有 $(AB)^k = A^k B^k$

矩阵转置

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，$A$的转置为$A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$
- $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$，则${A_{m\times n}}^T=B_{n\times m}=(a_{ji})_{n\times m}$
- 转置的运算性质:

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$; $(ABC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

对于多个矩阵，有:

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{\mathrm{T}}=A_m^{\mathrm{T}}\cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}$$

矩阵转置

- 求$(AB)^T$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 7\\4 & 3 & 0\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

解法1：

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 7\\4 & 3 & 0\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\4 & 1 & 8\end{bmatrix}\quad (AB)^T=\begin{bmatrix}9 & 4\\6 & 1\\3 & 8\end{bmatrix}$$

解法2：

$$B^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\-1 & 3 & 1\\7 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\\-2 & 4\end{bmatrix}$$

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\-1 & 3 & 1\\7 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\\-2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 4\\6 & 1\\3 & 8\end{bmatrix}$$

对称矩阵

- 若A=A^T，则称A为对称矩阵。
- 若A=-A^T，则称A为斜对称矩阵。
- 如A是对称矩阵，B和C都是斜对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 9 \\ -4 & 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

与对角阵的乘法

- $$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 1&3\times 2\\4\times 3&4\times 4\\5\times 5&5\times 6\end{pmatrix}$$

1） $$\begin{pmatrix}b_1&0&\cdots&0\\0&b_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1a_{11}&b_1a_{12}&\cdots&b_1a_{1n}\\b_2a_{21}&b_2a_{22}&\cdots&b_2a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_na_{n1}&b_na_{n2}&\cdots&b_na_{nn}\end{pmatrix};$$

2） $$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&0&\cdots&0\\0&b_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1a_{11}&b_2a_{12}&\cdots&b_na_{1n}\\b_1a_{21}&b_2a_{22}&\cdots&b_na_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_1a_{n1}&b_2a_{n2}&\cdots&b_na_{nn}\end{pmatrix};$$

可逆矩阵

- 对于n*n矩阵A，若存在n*n矩阵B使得AB=BA=I，则称A为可逆矩阵，B为A的逆，记 $B = A^{-1}$

- 如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2*1.5 & 1+2(-0.5) \\ 3(-2)+4*1.5 & 3-4*0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 若A是可逆矩阵，则A的逆是唯一的。
- 证：AB=BA=I=AC=CA，B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C

- 若A，B可逆，则A^{-1}，AB ，A^T，kA也可逆

可逆矩阵

- 如何求解矩阵的逆？
- 方法：待定系数
- 例：求矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求A的逆。
- 解：设A的逆为$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+c=1,\\ 2b+d=0,\\ -a=0,\\ -b=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=2.\end{cases}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}\overset{B}{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}=\overset{B}{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}\overset{A}{\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

可逆矩阵

- A为可逆矩阵，等价于下列的任一条件：
- 1. 存在矩阵B使得AB=I
- 2. A的行向量组线性无关
- 3. 存在矩阵B使得BA=I
- 4. A的列向量组线性无关

分块方法

- 将一个矩阵A的行分成若干组，列也分成若干组，从而A被分为若干小块，将A看作是由这些小块组成的矩阵，称为矩阵分块。

- $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 8 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- 一般将矩阵分成四块

- $$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),\ B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

- $$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right)$$

分块矩阵

DATAGURU 炼数成金

- 分块矩阵的乘法

$$A=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\3&4&0\\\hline -1&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&O_{2\times1}\\A_{21}&1\end{pmatrix}\qquad B=\left(\begin{array}{c|c}2&-2\\3&4\\\hline -1&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A_{11}&O_{2\times1}\\A_{21}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}-O_{2\times1}&A_{11}B_{12}+O_{2\times1}\\A_{21}B_{11}-1&A_{21}B_{12}+0\end{pmatrix}$$

$$A_{11}B_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\18\end{pmatrix}\qquad A_{11}B_{12}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}-1=\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-1=3\qquad A_{21}B_{12}=\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=10$$

$$\begin{pmatrix}A_{11}&O_{2\times1}\\A_{21}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\18&10\\3&10\end{pmatrix}$$

分块矩阵

◆ 分块矩阵的转置

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\4&5&6&0\\\hline 7&8&9&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

$$A^T=\left(\begin{array}{cc|c}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\\\hline 0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T\\A_{12}^T&A_{22}^T\end{pmatrix}$$

分块方法

- $A = diag(A_1, \dots, A_s) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}; B = diag(B_1, \dots, B_s)$

$$kA + B = diag(kA_1 + B_1, \dots, kA_s + B_s)$$

$$AB = diag(A_1B_1, \dots, A_sB_s)$$

$$A^T = diag({A_1}^T, \dots, {A_s}^T)$$

$$A^{-1} = diag({A_1}^{-1}, \dots, {A_s}^{-1})$$

二阶行列式

- 对于二元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

- 为了简化记忆，我们将式子 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ⟹ 二阶行列式

二阶行列式

- 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

- 则

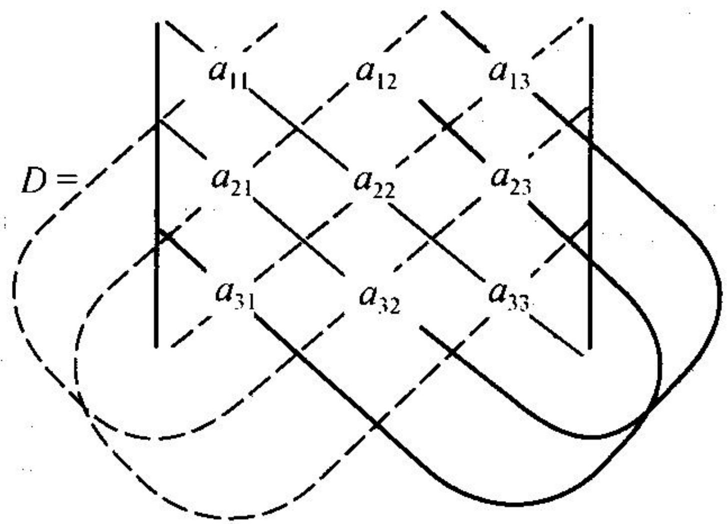
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

三阶行列式

- 定义三阶行列式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

- 对角线法则



n阶行列式

- 设n阶方阵$A=(a_{ij})$的行向量组为a_1，a_2，……，a_n，则

$$\det(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\dots, a_n) = \sum_{(j_1\dots\dots j_n)\in S_n} sign(j_1\dots\dots j_n)\, a_{1j_1}\dots\dots a_{nj_n}$$

称为矩阵A的行列式，记为detA或|A|。

特殊矩阵的行列式

- 对角矩阵

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- 下三角矩阵 与上三角矩阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

行列式的性质

- 1. 单位矩阵的行列式等于1
- 2.如果将行列式的任意两行(或列)互换，那么行列式的值改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 3.行列式一行(或列)的公因子可以提到行列式记号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

- 4. 若某行为零，或两行相同或成比例，则行列式为零
- 5.若行列式的某一行(或列)的元素都是两数之和
- $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
- 6. detA=detA^T
- 7. det(AB)=detAdetB
- 8. det(A^{-1})=1/det(A)

R中的矩阵计算

◆ 构造矩阵

a=matrix(c(1,2,3,4),ncol=2,byrow=T)

b=matrix(c(5,6,7,8),ncol=2,byrow=T)

◆ 矩阵线性运算

a+b

a-b

2*a

4*b

a*b

```
> a+b
     [,1] [,2]
[1,]    6    8
[2,]   10   12
> a-b
     [,1] [,2]
[1,]   -4   -4
[2,]   -4   -4
> 2*a
     [,1] [,2]
[1,]    2    4
[2,]    6    8
> 4*b
     [,1] [,2]
[1,]   20   24
[2,]   28   32
> a*b
     [,1] [,2]
[1,]    5   12
[2,]   21   32
>
```

R中的矩阵计算

- 矩阵乘法

a%*%b

crossprod(a,b) ⟷ t(a)%*%b

- 矩阵转置

t(a);t(b)

- 取方阵的对角线元素

diag(a);sum(diag(a))

c=diag(c(1,2))

- 矩阵求逆

solve(a)

- 矩阵的行列式

det(a);det(b);det(c)

```
> a%*%b
     [,1] [,2]
[1,]   19   22
[2,]   43   50
>
> crossprod(a,b)
     [,1] [,2]
[1,]   26   30
[2,]   38   44
> t(a)%*%b
     [,1] [,2]
[1,]   26   30
[2,]   38   44
>
> t(a);t(b)
     [,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4
     [,1] [,2]
[1,]    5    7
[2,]    6    8
```

```
> diag(a);sum(diag(a))
[1] 1 4
[1] 5
> c=diag(c(1,2))
>
> c
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    2
> solve(a)
     [,1] [,2]
[1,] -2.0  1.0
[2,]  1.5 -0.5
>
> det(a);det(b);det(c)
[1] -2
[1] -2
[1] 2
>
```

炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间