# 大数据的矩阵计算基础——第6周

# 法律声明

**【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以外范围散播，违者将可能被追究法律和经济责任。**

# 关注炼数成金企业微信

■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

# 本周内容

- 线性子空间：
- 子空间的交与和
- 子空间的维数定理
- 子空间的直和

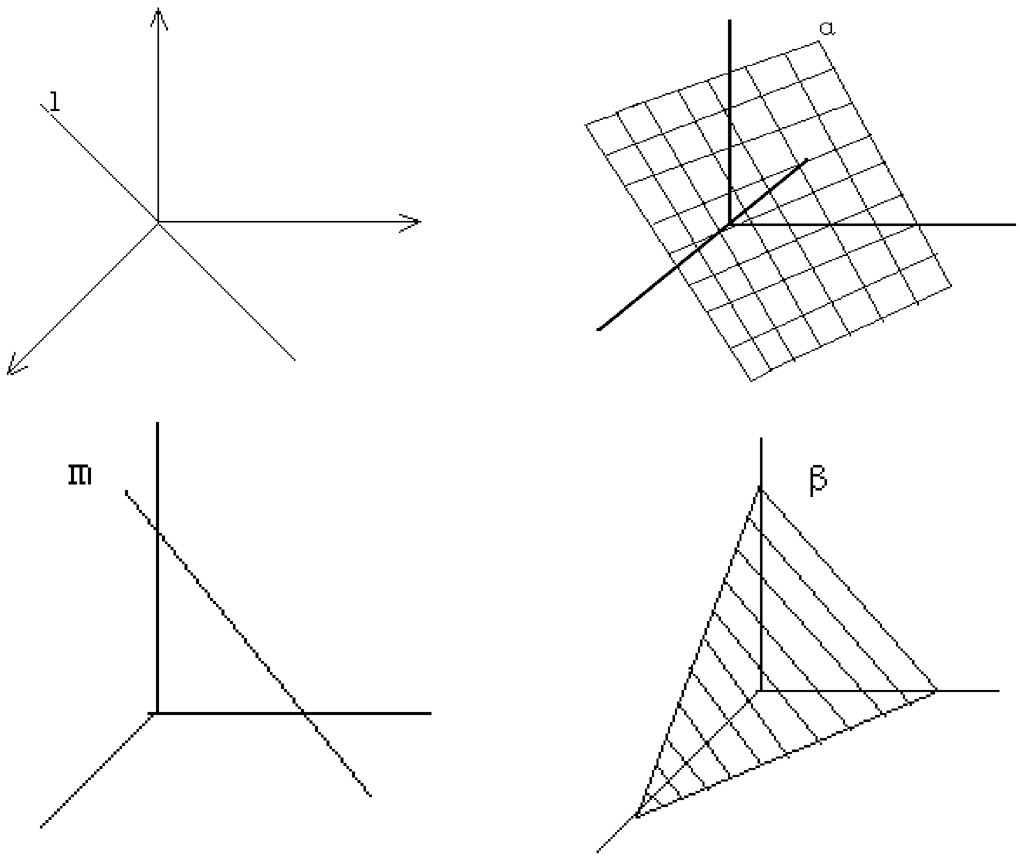
- 线性变换：
- 线性变换的性质
- 线性变换的运算
- 线性变换的矩阵表示

# 子空间

- 设V是数域F的线性空间，W是V的一个非空子集。如果W对于V的加法和数乘是封闭的，那么W本身对于V的加法和数乘也构成一个线性空间。称W为V的一个线性子空间。
- ｛**0**｝和V都是V的子空间，称为V的平凡子空间；其他子空间称为V的非平凡子空间或真子空间。
- 零子空间：｛**0**｝

# 子空间

- $R^3$的子空间



# 子空间的判断方法

- 如果V是F线性空间，$W \subseteq V$，那么W是V的线性子空间的充分必要条件是：

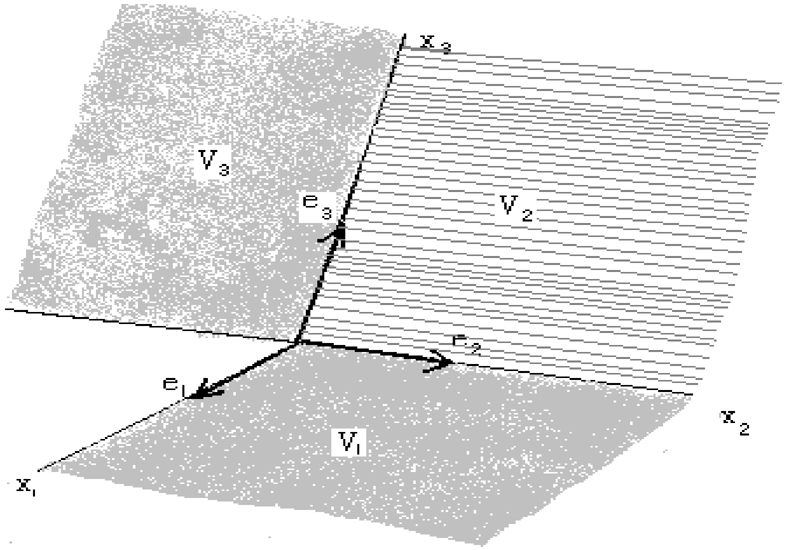
  W非空，且对于对于任意$x$，$y \in W$，$k \in F$，有$kx + y \in W$

- 子空间的维数：0<=dim(W)<=dim(V)

- 已知V是数域F上的线性空间，α，β∈V则集合$\boldsymbol{W} = \left\{ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda\alpha} + \boldsymbol{\mu\beta} \middle| \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{F} \right\}$ 是V的一个子空间，称为由向量α，β生成的子空间，记作span(α，β)或L(α，β)

# 子空间的构造

- $R^3$的一个基，$\mathbf{S=\{e_1,e_2,e_3\}}$




$$V_1 = L(e_1, e_2) = \{\alpha | \alpha = x_1e_1 + x_2e_2\}$$

$$V_2 = L(e_2, e_3) = \{\alpha | \alpha = x_2e_2 + x_3e_3\}$$

$$V_3 = L(e_1, e_3) = \{\alpha | \alpha = x_1e_1 + x_3e_3, \}$$

# 矩阵的零空间

设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，称集合 $\{x\,|\,Ax=0\}$ 为A的零空间记为N(A)，即

$$N(A)=\{x\,|\,Ax=0\}$$

显然N(A)是齐次方程组 $Ax=0$ 的解空间，它是 $R^n$ 的一个子空间。

# 列空间

设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，以$\alpha_i$（$i=1,2,\cdots,n$）表示A的第$i$个列向量，称子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为矩阵A的像空间或列空间，记为

$$R(A)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

$R(A)$还可以这样生成：令$x=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n)^T\in R^n$则：

$$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n)^T=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\cdots+\alpha_n\xi_n$$

从而 $R(A)=\{Ax \mid x\in R^n\}$

显然，由于$\alpha_i$是一个m维向量，所以 $R(A)\subseteq R^m$

# 子空间的交空间、和空间

- 设$W_1 \subseteq V_n$，$W_2 \subseteq V_n$，且都是子空间，则$W_1 \cap W_2$和$W_1 \cup W_2$是否仍然是子空间？
- 交空间：$W_1 \cap W_2 = \{ \alpha \mid \alpha \in W_1$ 而且 $\alpha \in W_2 \} \subseteq V_n$，$W_1 \cap W_2$是子空间，被称为“交空间”
- $W_1 \cup W_2$不再是子空间
- 和空间：$W_1 + W_2 = \{ \alpha = X_1 + X_2 \mid X_1 \in W_1, X_2 \in W_2 \}$，则易证$W_1 + W_2$是子空间，称为“和空间”
- 注意区别$W_1 \cup W_2$与$W_1 + W_2$：$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$

# 子空间的交与和的运算规则

- （1）交换律 $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1 \qquad V_1 + V_2 = V_2 + V_1$

- （2）结合律 $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$

  $(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$

- 根据数学归纳法可以知道，$\bigcap_{i=1}^{m} V_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n} V_i$ 都是线性空间V的子空间

# 例子

如果 $W_1=L\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$，

$W_2=L\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$，

则 $W_1+W_2=L\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$

例：在三维几何空间中，用$V_1$表示一条通过原点的直线，$V_2$表示一张通过原点而且与$V_1$垂直的平面，那么，$V_1$与$V_2$的交是｛0｝，而$V_1$和$V_2$的和是整个空间。

# 例子

例：在线性空间 $P^n$ 中，用 $V_1$ 与 $V_2$ 分别代表齐次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

的解空间，

那么，$V_1 \cap V_2$ 就是齐次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

的解空间。

# 子空间的维数公式

- 因为 $W_1 \cap W_2 \subseteq \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V_n(P)$

- 所以$\dim W_1 \cap W_2 \le \dim W_i \le \dim(W_1 + W_2) \le \dim V_n = n$

- 设$W_1$ 与$W_2$是数域F上线性空间V的两个有限维子空间，则它们的交 与和都是有限维的，并且

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

# 例子

**例** 设 $\alpha_1=(2,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-3,1)^T,$

$\beta_1=(4,5,3,-1)^T,\beta_2=(1,5,-3,1)^T,$

$V_1=span(\alpha_1,\alpha_2),V_2=span(\beta_1,\beta_2).$

求 $V_1\cap V_2$、$V_1+V_2$ 的基与维数。

**解：** 设 $\alpha\in V_1\cap V_2$，则 $\alpha\in V_1$，$\alpha\in V_2$

所以可令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\alpha=l_1\beta_1+l_2\beta_2$

故 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-l_1\beta_1-l_2\beta_2=\theta$

这是关于 $k_1$，$k_2$，$l_1,l_2$ 的齐次方程组，即

$$(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\l_1\\l_2\end{pmatrix}=\theta$$

# 例子

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}2&-1&-4&-1\\1&1&-5&-5\\3&-3&-3&3\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\dashrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{5}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解关于 $k_1$，$k_2$，$l_1,l_2$ 的齐次方程组，得

$$k_1=0,\ k_2=\frac{5}{3}l_2,\ l_1=-\frac{2}{3}l_2$$

因此

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\frac{5}{3}l_2\cdot\alpha_2.$$

所以 $V_1\cap V_2$ 的基为 $\alpha_2$ ，维数为 $\dim(V_1\cap V_2)=1.$

# 例子

$$V_1 + V_2 = span(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

由前得 $0 \cdot \alpha_1 + \frac{5}{3} l_2 \cdot \alpha_2 + \frac{2}{3} l_2 \cdot \beta_1 - l_2 \cdot \beta_2 = \theta$

即 $\beta_2 = 0 \cdot \alpha_1 + \frac{5}{3} \alpha_2 + \frac{2}{3} \beta_1$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 线性无关，这样 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的极大无关组，所以它也是

$V_1 + V_2$ 的基，故 $\dim(V_1 + V_2) = 3.$

# 子空间的直和

- 分析：如果dim（$W_1 \cap W_2$）$\neq 0$，则 $dim(W_1+W_2) < dimW_1 + dimW_2$

所以：

$$dim(W_1+W_2) = dimW_1 + dimW_2$$
$$\Leftrightarrow dim(W_1 \cap W_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

- 直和的定义：

若$W_1$和$W_2$是线性空间V的两个子空间，且$dim(W_1 \cap W_2)=0$，则和为直和 $W=W_1+W_2=W_1 \oplus W_2$，

# 子空间的直和

- 子空间的“和”为“直和”的充要–条件 ：

设$W=W_1+W_2$，则下列各条件等价：

（1） $W=W_1 \oplus W_2$

（2） $\forall X \in W$，$X=X_1+X_2$的表示是惟一的

（3） W中零向量的表示是惟一的

（4） $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$

# 直和分解

- 设$V_1$是数域F上的线性空间V的一个子空间，则一定存在V的另一个子空间$V_2$，使得线性空间V具有直和分解：

$$V = V_1 \oplus V_2$$

- 称$V_1$、$V_2$是V的一对互补的子空间，或者称$V_2$是$V_1$的补子空间，或在V中的直和补

$$\alpha_1 = (1,0,0)^T, \quad \alpha_2 = (0,1,0)^T,$$

$$\beta_1 = (0,0,1)^T, \quad \beta_2 = (0,1,1)^T.$$

显然， $U = span(\alpha_1, \alpha_2)$ 是 $R^3$ 的一个子空间，几何上很容易看出，$span(\beta_1)$ 和 $span(\beta_2)$ 都是 $U$ 的补子空间。

# 线性变换

- 回顾： 线性映射
- 新概念：同构映射

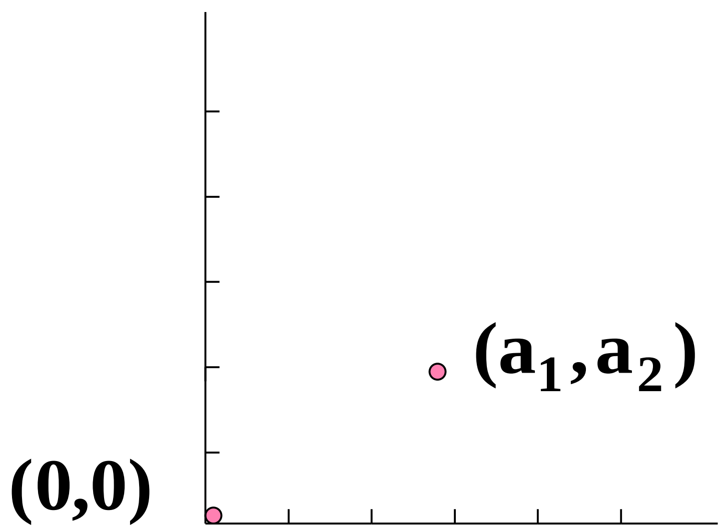
- 线性空间V到自身的线性映射称为V的线性变换或线性算子；线性空间V到数域F的线性映射称为V上的线性函数。

# 线性变换



例：令$\alpha \in R^2$，定义T：$R^2 \to R^2$中的变换是T（$\alpha$）＝$\alpha$＋$a$，上述变换可以具体写成

$$\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, T(\alpha)=\begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix}$$



# 线性变换的性质

- (1) $T(0)=0, T(-\alpha)=-T(\alpha)$，其中 0，$-\alpha \in V_n$
- (2) 若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$，$k_i \in P, \alpha_i \in V, 1 \le i \le r$

  则 $T(\beta) = k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2) + \cdots + k_rT(\alpha_r)$
- 若 $\alpha_1$，$\alpha_2$，……，$\alpha_r$ 线性相关，则 $T(\alpha_1), T(\alpha_2)$，……，$T(\alpha_r)$ 也线性相关，但逆命题不成立。
- 若 $T(\alpha_1), T(\alpha_2)$，……，$T(\alpha_r)$ 线性无关，则 $\alpha_1$，$\alpha_2$，……，$\alpha_r$ 也线性无关，但逆命题不成立

# 线性变换的像空间与零空间

- 设T是线性空间V上的一个线性变换。称$\{T(\alpha)|\alpha \in V\}$为T的像，记为ImT；
- 称$\{\alpha \in V|T(\alpha) = 0\}$为T的核，记为KerT

- ImT和KerT都是线性空间V的子空间

# 线性变换的运算

DATAGURU 炼数成金

- 设$T_1$，$T_2$都是线性空间$V_n$中的线性变换，常见的用它们构成的新的变换：

（i）$T_1+T_2 \Leftrightarrow \forall \alpha \in V_n$，

$$(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha)$$

（ii）$T_1T_2 \Leftrightarrow \forall \alpha \in V_n$，

$$(T_1T_2)(\alpha)=T_1(T_2(\alpha))$$

（iii）$kT \Leftrightarrow \forall \alpha \in V_n$，

$$(kT)(\alpha)=k(T(\alpha))$$

（iv）若T 是可逆变换，$T^{-1} \Leftrightarrow$

$T^{-1}(\beta)=\alpha$当且仅当$T(\alpha)=\beta$。

# 线性变换的矩阵表示

$n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换 $T:V\to V$ 将 $V$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 映射为 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 。由于$T(\alpha_i)$仍然是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，所以令

$$T(\alpha_i)=a_{1\,i}\alpha_1+a_{2\,i}\alpha_2+\cdots a_{n\,i}\alpha_n \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

因此 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$=(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

矩阵 $A$ 称为**线性变换** $T$ (在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下)**的矩阵表示**。

# 线性变换的矩阵表示

对 $V$ 中的任意向量 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$，显然

其在线性变换 $T$ 下的像为

$$T(\alpha) = T(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n)$$

$$= x_1T(\alpha_1) + x_2T(\alpha_2) + \cdots + x_nT(\alpha_n)$$（理由？）

$$= (T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n))x$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)Ax$$

$$\equiv (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)y$$

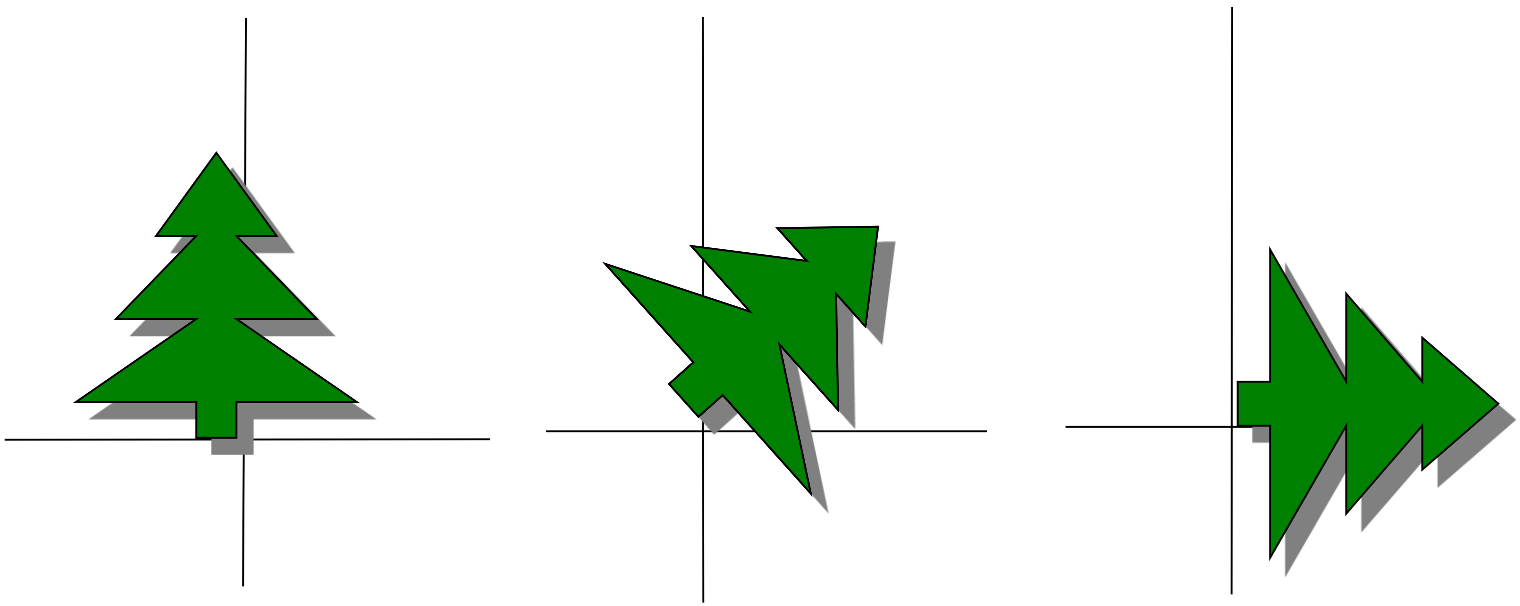
因此原像与像（在给定基下）的坐标变换公式为

$$\boxed{y = Ax}$$

# 旋转变换

- 旋转变换：将线性空间$R^2$中的所有向量均绕原点顺时针旋转角θ ，这时像($\eta_1$，$\eta_1$)与原像($\xi_1$，$\xi_2$)之间的关系为

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$



# 零变换与恒等变换

- 如果对任意$\alpha \in V$，恒有$T(\alpha)=0$，则称T是零变换，记为0，即对任意$\alpha \in V$，恒有$0(\alpha)=0$。
- 零变换对应的矩阵为零矩阵

- 如果对任意$\alpha \in V$，恒有$T(\alpha)=\alpha$，则称T是恒等变换，记为I，即$I(\alpha)=\alpha$
- 恒等变换对应的矩阵为单位矩阵

# 线性变换运算与矩阵

DATAGURU 炼数成金

- 设$V_n$上的线性变换$T_1$，$T_2$，它们在同一组基下的矩阵：$T_1 \leftrightarrow A_1$；$T_2 \leftrightarrow A_2$

（i） $(T_1+T_2) \leftrightarrow (A_1+A_2)$

（ii） $(T_1T_2) \leftrightarrow A_1A_2$

（iii） $(kT_1) \leftrightarrow kA_1$

（iv） 若$T_1$可逆，则 $T_1^{-1} \leftrightarrow A_1^{-1}$

# 炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

# Thanks

**FAQ时间**