大数据的矩阵计算基础——第8周

DATAGURU专业数据分析社区

法律声明

【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以”/H责任。

课程详情访问炼数成金培训网站

http://edu.dataguru.cn

关注炼数成金企业微信

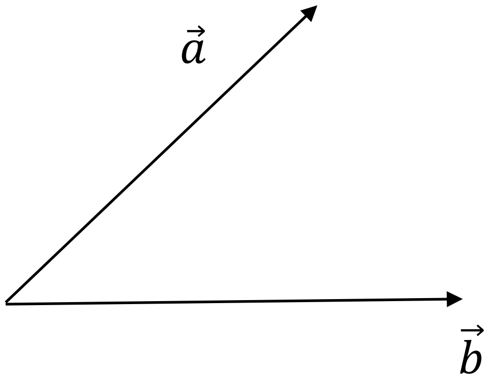
■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

本周内容

- 内积空间：
- 向量内积
- 正交向量组
- 正交矩阵
- 对称矩阵
- 二次型

向量乘积

- 物体在力$\vec{F}$的作用下沿直线运动，位移为$\vec{s}$，则力对物体做的功为：
- $W = |\vec{F}| \times |\vec{s}| \times \cos(\vec{F}, \vec{s})$
- 向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的乘积：
- $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos(\vec{a}, \vec{b})$

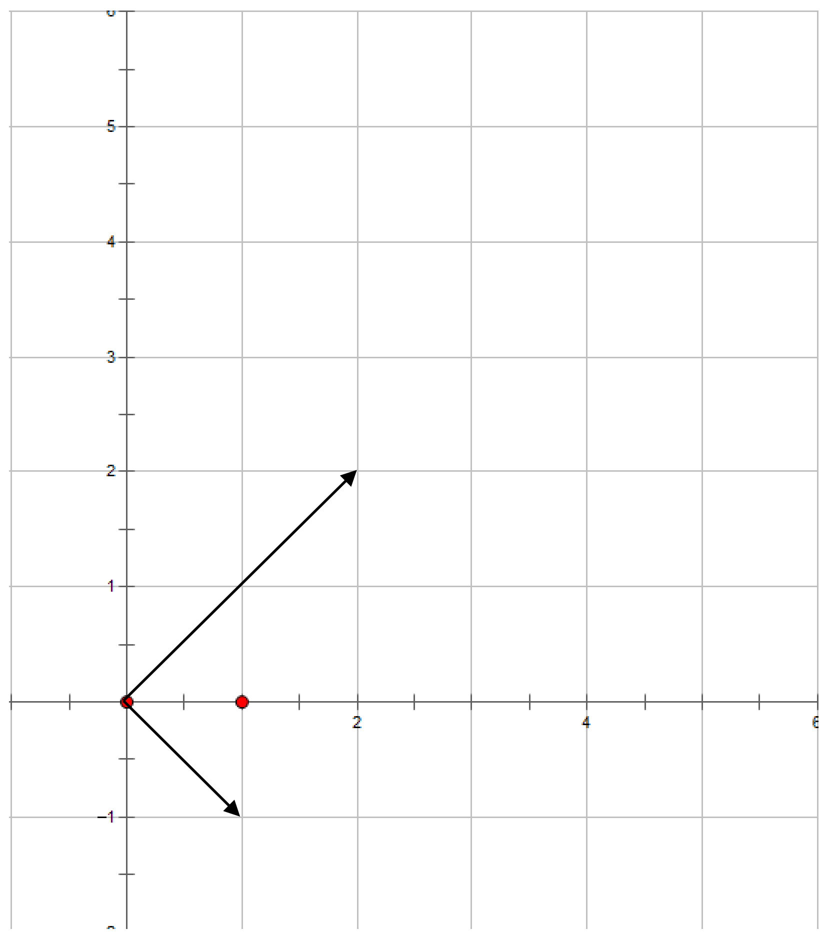


向量乘积

- 向量乘积的坐标表示
- $\vec{a} = (2,2); \vec{b} = (1,-1)$
- $\vec{a} \times \vec{b} = 2 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$

- 在n维线性空间中，向量α的坐标为$(a_1, \ldots \ldots, a_n)$, β的坐标为$(b_1, \ldots \ldots, b_n)$,则向量$\alpha$与$\beta$的乘积为

$$a_1 b_1 + \ldots\ldots + a_n b_n$$



向量内积

- 在线性代数中，向量间的乘积称为内积，又称为点积

- 使用矩阵语言
- $\alpha = (a_1, a_2, \dots\dots, a_n)^T; \beta = (b_1, b_2, \dots\dots, b_n)^T$,则$\alpha$与$\beta$的内积为$\alpha^T\beta$

- 例：$\alpha = (-1,1,0,2)^T; \beta = (2,0,-1,3)^T$
- $\alpha^T\beta = (-1) * 2 + 1 * 0 + 0 * (-1) + 2 * 3 = 4$

例子

例 1 如果 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\2\\-3\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$.

解

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2 & -5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-3\end{bmatrix}=(2)(3)+(-5)(2)+(-1)(-3)=-1$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}=(3)(2)+(2)(-5)+(-3)(-1)=-1$$

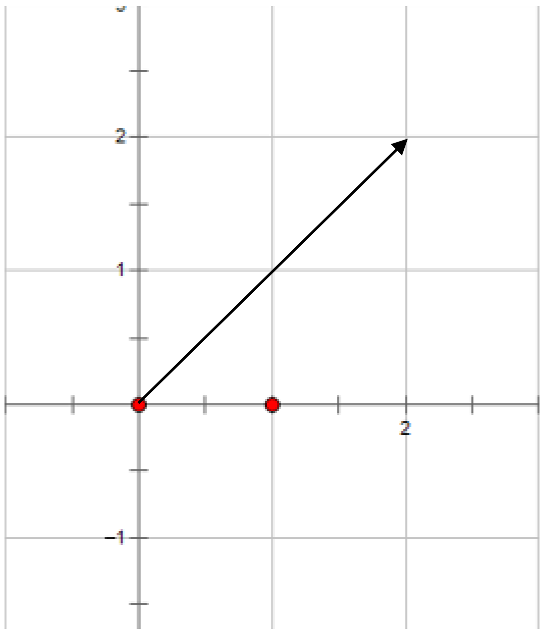
内积的性质

- 1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$
- 2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$
- 3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
- 4. $\alpha^T\alpha \geq 0$.当且仅当$\alpha = 0$时，有$\alpha^T\alpha = 0$

向量长度

- 平面直角坐标系中，向量$\vec{a} = (2,2)$的长度，利用勾股定理计算

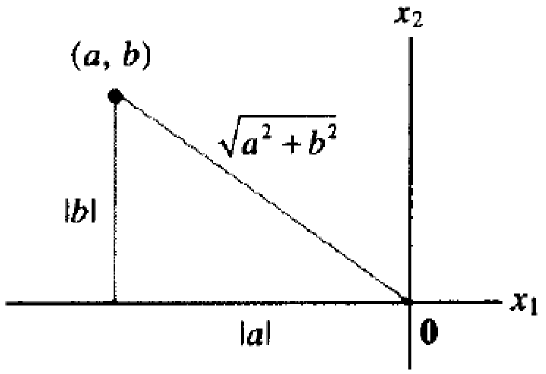
$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



- 定义向量的长度为

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots \ldots + a_n^2}$$

也称为向量的模



向量长度的性质

- 1. $\|\alpha\| \geq 0$.当且仅当$\alpha = 0$时，有$\|\alpha\| = 0$
- 2. $\|k\alpha\| = k\|\alpha\|$
- 3. 对于任意向量α和β，有$|\alpha^T\beta| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$

- 例：(2,1,0)与(1,0,3)

单位向量

- 长度为1的向量称为单位向量。如(1,0);(0,1)
- 单位化：对于线性空间中任意非零向量α，除以自己的长度得到的向量$\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$是一个单位向量，且方向与$\alpha$一致。这种将向量化为单位向量的过程称为单位化

例 2 若 $\boldsymbol{v}=(1,-2,2,0)$，找出和 $\boldsymbol{v}$ 方向一致的单位向量 $\boldsymbol{u}$.

解 首先计算向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度

$$\|\boldsymbol{v}\|^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=(1)^2+(-2)^2+(2)^2+(0)^2=9,\quad \|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{9}=3$$

对 $\boldsymbol{v}$ 乘 $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}$ 得到

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}=\frac{1}{3}\boldsymbol{v}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\\0\end{bmatrix}$$

为验证 $\|\boldsymbol{u}\|=1$，只需验证 $\|\boldsymbol{u}\|^2=1$.

$$\|\boldsymbol{u}\|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=(\tfrac{1}{3})^2+(-\tfrac{2}{3})^2+(\tfrac{2}{3})^2+(0)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+0=1 \quad \blacksquare$$

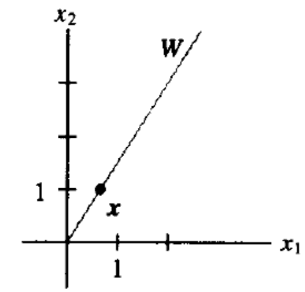
例子

例3 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间且由向量 $\boldsymbol{x}=(\frac{2}{3},1)$ 生成，求出一个单位向量 $\boldsymbol{z}$ 且 $\boldsymbol{z}$ 构成 W 的一个基.

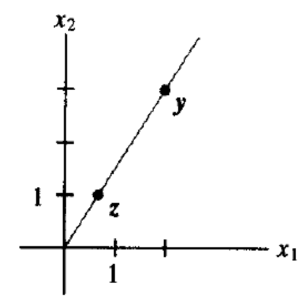
解 空间 W 包含所有 $\boldsymbol{x}$ 数倍的向量，如图 6-3a 所示. W 中的任意非零向量都是 W 的基. 为简化计算，重新"标度" $\boldsymbol{x}$ 以消去分数，即向量 $\boldsymbol{x}$ 乘 3 得到 $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$，现在计算 $\|\boldsymbol{y}\|^2=2^2+3^2=13$，$\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{13}$. 把向量 $\boldsymbol{y}$ 单位化可得：

$$\boldsymbol{z}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}$$

见图 6-3b. 另外一个单位向量是 $(-2/\sqrt{13},-3/\sqrt{13})$. ■



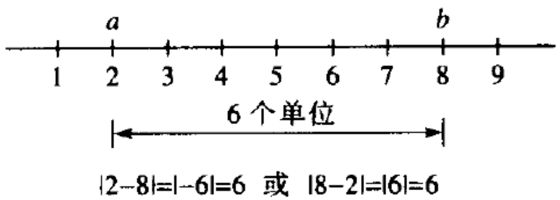
a)

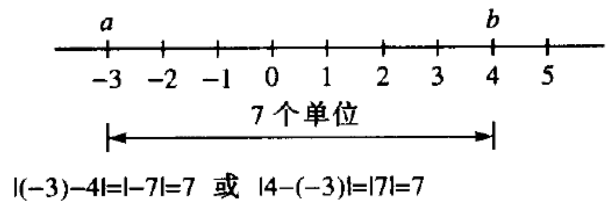


b)

距离

- 数轴上两点距离的计算



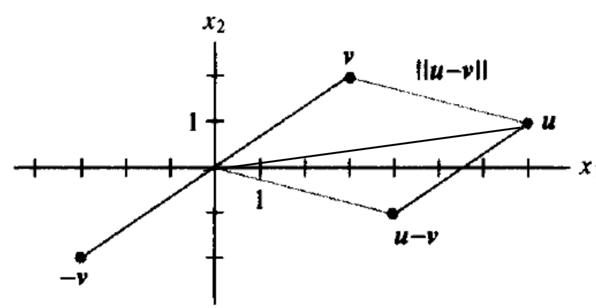


- 平面中两点距离的计算公式$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

- 定义线性空间中两个向量α和β的距离为

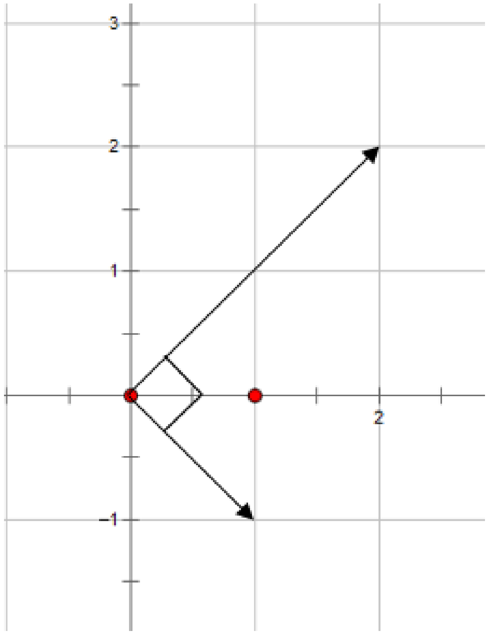
$$dist(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

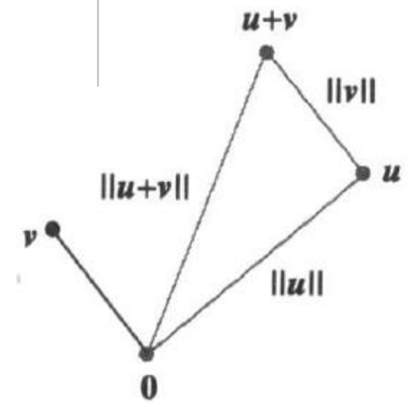
- 例：计算向量 $\boldsymbol{u} = (7, 1)$ 和 $\boldsymbol{v} = (3, 2)$ 之间的距离.



正交向量

- 空间中相互垂直的向量应该满足怎样的代数条件？
- $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- 如果向量α和β的内积等于零，即$\alpha^T\beta=0$，则称向量α和β相互正交(垂直)
- 由于零向量与任意向量的内积都为零，所以零向量与任何向量正交





例子

- 向量a与b正交吗？

$$a = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- 向量u与v正交吗？

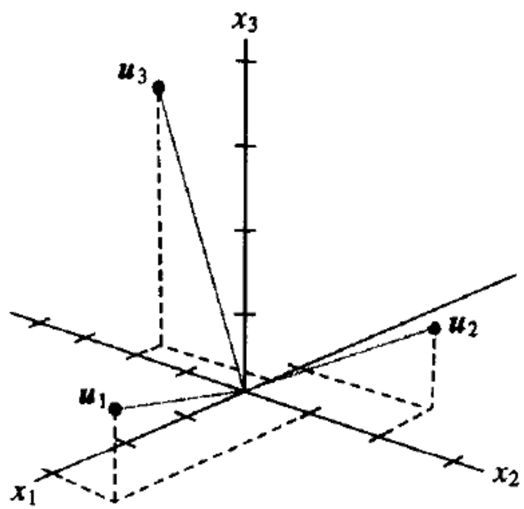
$$u = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

正交向量组

- 如果线性空间中的非零向量组$\alpha_1, \dots\dots, \alpha_n$两两正交，即$\alpha_i^T\alpha_j = 0(i \neq j, i, j = 1,2, \dots\dots, n)$，则称该向量组为正交向量组，也称为正交集。

证明$\{u_1, u_2, u_3\}$是一个正交集，此处

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$



正交向量组

- 正交向量组$\{\alpha_1, \dots \dots, \alpha_r\}$线性无关

- 有正交向量组组成的基称为正交基。

- 标准正交基：若线性空间中的某个基满足：（1）基中的每个向量都是单位向量；（2）基为一个正交向量组，基中的向量两两正交。则称这样的基为标准正交基。

- 假设$\{\alpha_1, \dots \dots, \alpha_r\}$是线性空间中的一个正交基，对线性空间中的每一个向量β，线性组合$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots \dots + k_r\alpha_r$中的$k_i = \frac{\beta^T\alpha_i}{\alpha_i^T\alpha_i}$

例子

证明 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个单位正交基，其中：

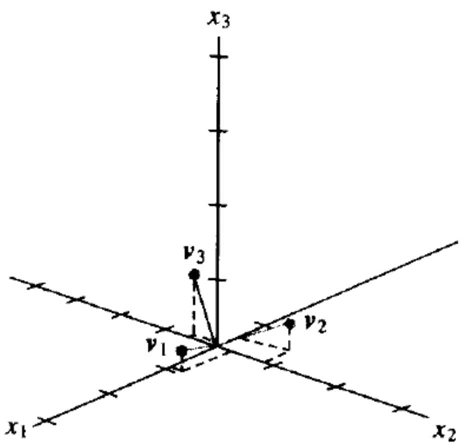
$$v_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

解 计算

$$v_1 \cdot v_2 = -3/\sqrt{66} + 2/\sqrt{66} + 1/\sqrt{66} = 0$$
$$v_1 \cdot v_3 = -3/\sqrt{726} - 4/\sqrt{726} + 7/\sqrt{726} = 0$$
$$v_2 \cdot v_3 = 1/\sqrt{396} - 8/\sqrt{396} + 7/\sqrt{396} = 0$$

从而 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 是一个正交基，另外

$$v_1 \cdot v_1 = 9/11 + 1/11 + 1/11 = 1$$
$$v_2 \cdot v_2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1$$
$$v_3 \cdot v_3 = 1/66 + 16/66 + 49/66 = 1$$



例子

- {u1,u2,u3}是一个正交基，将向量$y=(6,1,-8)^T$表示为u1,u2,u3的线性组合

$$y\cdot u_1=11 \qquad y\cdot u_2=-12 \qquad y\cdot u_3=-33$$

$$u_1\cdot u_1=11 \qquad u_2\cdot u_2=6 \qquad u_3\cdot u_3=33/2$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}\cdot u_1+\frac{y\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}\cdot u_2+\frac{y\cdot u_3}{u_3\cdot u_3}\cdot u_3 \\ &= \frac{11}{11}u_1+\frac{-12}{6}u_2+\frac{-33}{33/2}u_3 \\ &= u_1-2u_2-2u_3 \end{aligned}$$

正交化

- 对于线性无关向量组$\{\alpha_1, \dots\dots, \alpha_r\}$可通过以下变换转化为正交向量组

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2 \\
&\cdots\cdots \\
\beta_r &= \alpha_r - \frac{\alpha_r^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \cdots\cdots - \frac{\alpha_3^T \beta_{r-1}}{\beta_{r-1}^T \beta_{r-1}} \beta_{r-1}
\end{aligned}
$$

- 例： 将线性无关向量组$\alpha_1 = (1,1,1,1)^T, \alpha_2 = (3,3,-1,-1)^T, \alpha_3 = (-2,0,6,8)^T$

正交矩阵

- 设n阶方阵Q满足$Q^TQ = I$,则称Q为正交矩阵

- 如：$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$是正交矩阵

- 矩阵 $U = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{11} & 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$ 是正交矩阵

正交矩阵

- 若Q为正交矩阵，则
- 1. Q的行列式的值为1或-1
- 2. Q可逆且$Q^{-1}=Q^T$
- 3. 若P也为正交矩阵，则PQ也是正交矩阵

- 设Q为n阶方阵，则Q是正交矩阵的充分必要条件是Q的列向量组是单位正交向量组。

- 例：$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$不是正交矩阵

特征值与特征向量

- 当非零向量$X = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n)^T$在线性变换f（f的矩阵表示为A）下所形成的像为

$$\lambda X = \lambda(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)^T$$

时，称λ为线性变换f的特征值，向量X是f属于特征值λ的一个特征向量

- 等价于
- 对于n维非零向量$X = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n)^T$和n阶方阵A，若存在数$\lambda$使得$\mathrm{AX} = \lambda X$，则称$\lambda$为方阵A的特征值，向量X是A对应于特征值$\lambda$的一个特征向量

矩阵相似

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的

- 对n阶矩阵A、$B \in F^{m\times n}$，如果存在n阶可逆矩阵（即满秩矩阵）$P \in F^{n\times n}$，使

$$B = P^{-1}AP$$

- 则称A与B相似，或A相似与 B 。
- 称相似变换矩阵 P 将 A 相似变换为 B
- 可记作A~B

相似矩阵

- 1. 相似矩阵行列式相等
- 2. 相似矩阵同时可逆或同时不可逆；当它们可逆时，它们的逆矩阵也相似

- 例：矩阵A与B相似，$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

对角化

- 从线性变换的角度：若线性变换f关于线性空间V的某个基的矩阵为对角矩阵，则称f可对角化
- 从矩阵的角度：若n阶方阵A相似与对角矩阵D，即存在可逆矩阵P，使得$A = PDP^{-1}$,则称A可对角化
- 矩阵A可对角化的充要条件是:A有n个线性无关的特征向量
- 有n个不同的特征值的矩阵A可对角化（充分条件而不是必要条件）

矩阵对角化

如果可能，对角化矩阵 $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

对称矩阵的特征向量

- 如果A是一个对称矩阵，那么A对应于不同特征值的特征向量是正交的

- 若$A = PDP^T$，其中P为正交矩阵，D为对角矩阵，则称A可正交对角化

- 矩阵$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$是否可正交对角化？

正交对角化

- n阶方阵A可以正交对角化的充分必要条件是A是对称矩阵

- 将矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$正交对角化

二次型

- 二次型：定义在R^n上的一个函数$Q(x) = x^T Ax, x$是R^n中的一个向量，矩阵A是一个n阶对称方阵，称A为关于二次型的矩阵

- 最简单的非零二次型是求向量长度$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots \ldots + a_n^2}$

例 1 令 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，计算下列矩阵的 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$.

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$　　b. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

- 例2：写出二次型$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$的矩阵A

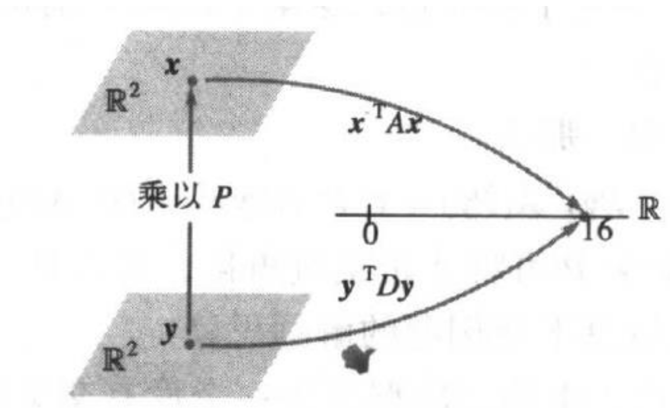
例 3 令 $Q(\boldsymbol{x}) = x_1{}^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$，计算 $Q(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$处的值.

变量代换

- 设x是R^n中的一个向量变量，则变量代换是下面等式的形式：

$$x = Py \text{ 或 } y = P^{-1}x$$

- 将二次型$Q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$通过适当的线性变换转化为没有交叉项的二次型



主轴定理

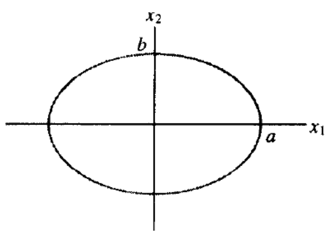
- 没有交叉项的二次型称为二次型的一个标准形，标准二次型所对应的矩阵是一个对角阵。

- 主轴定理：
- 如果A是一个n阶对称方阵，则一定存在一个正交变量变换x=Py将二次型$x^T Ax$变换为没有交叉项的标准形$y^T Dy$

主轴定理的几何意义

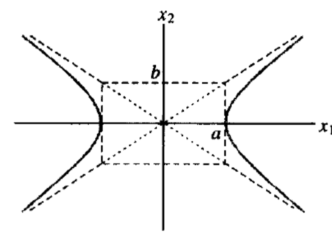
DATAGURU 炼数成金

- 当A是一个2阶对称可逆方阵时，二次型$x^T Ax$表示平面上的椭圆（包含圆）、双曲线、两条相交直线、一个点或是空集
- 当A是一个对角阵时



$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,\ a>b>0$

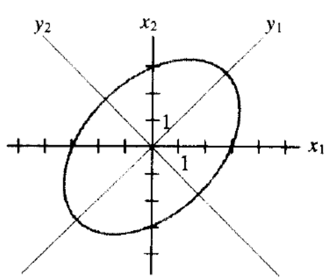
椭圆



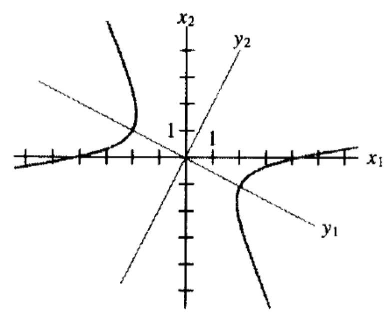
$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,\ a>b>0$

双曲线

- 当A不是一个对角阵时



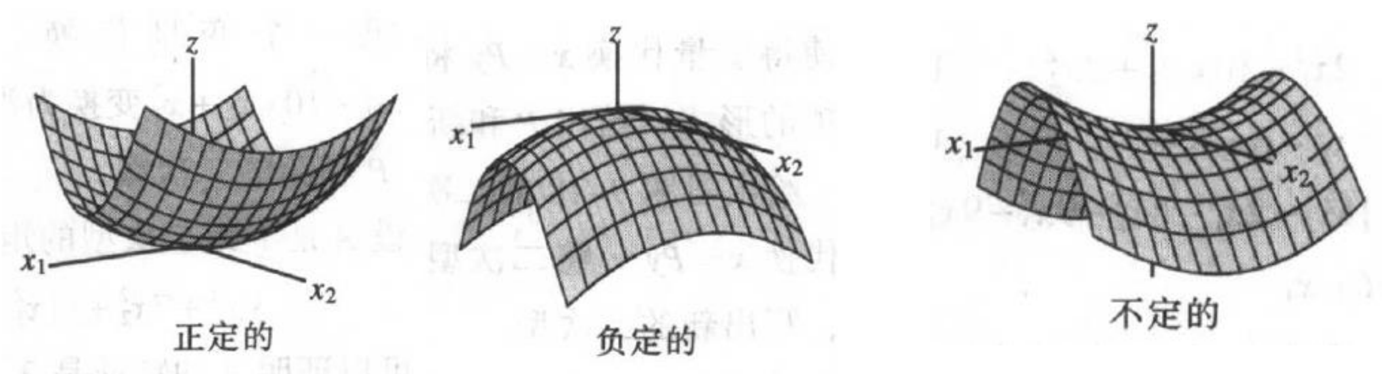
a） $5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=48$



b） $x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2=16$

二次型的类型

- 设Q(x)是一个n元实二次型
- （1）如果对于任意x≠0，有Q(x)>0，那么称Q是正定的
- 如果对于任意x≠0，有Q(x)≥0，那么称Q是半正定的
- （2）如果对于任意x≠0，有Q(x)<0，那么称Q是负定的
- 如果对于任意x≠0，有Q(x)≤0，那么称Q是半负定的
- （3）如果对于任意x≠0，Q(x)既有正值也有负值，那么称Q是不定的



二次型与特征值

- 设A是一个n阶方阵，那么A对应的二次型是
- （1）正定的，当且仅当A的特征值全都为正，此时称A为正定矩阵
- （2）负定的，当且仅当A的特征值全都为负
- （3）不定的，当且仅当A的特征值有正值也有负值

- 例：$Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ 是正定的吗？

炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间