DATAGURU 炼数成金

大数据的矩阵计算基础——第4周

DATAGURU专业数据分析社区

法律声明

【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以外范围散播，违者将可能被追究法律和经济责任。

课程详情访问炼数成金培训网站

http://edu.dataguru.cn

关注炼数成金企业微信

■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

线性方程组

- 对于一般的线性方程组，m个方程n个未知数

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 若常数项b_1，b_2，……，b_n不全为0，则称上述方程组为非齐次线性方程组；若常数项$b_1 = b_2 = \cdots\ldots = b_n = 0$，则称上述方程组为齐次线性方程组

线性方程组的解

若有序数组 $S=[s_1, s_2, \cdots, s_n]$，代入方程组(1)中使每个方程都变成恒等式，则称$S$ 为线性方程组的一个**解**.

显然 $S_0=[0, 0, \cdots, 0]$ 是齐次方程组的一个解，称为齐次线性方程组的**零解** (**平凡解**)，当齐次线性方程组未知量不全为零时，称之为**非零解**(**非平凡解**).

存在解的线性方程组称为是**相容的**，否则就是**不相容的**或**矛盾**方程组.

矩阵与线性方程组

- 方程组的解的全体称为它的解集合,若两个方程组有相同的解集，则称它们是同解的.
- 对于线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow AX = B$$

令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

系数矩阵

未知量矩阵

常数项矩阵

线性方程组的增广矩阵

- 系数矩阵A 和常数项矩阵B 合并构成的矩阵

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- 称为线性方程组的增广矩阵.
- 增广矩阵[A|B]可以清楚地表达出一个线性方程组。
- 齐次方程用矩阵可以表示为AX=O

Gauss消去法

- 解线性方程组

- $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -3x_2 + \frac{9}{2}x_3 = 0 \\ 2x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -3x_2 + \frac{9}{2}x_3 = 0 \\ \frac{13}{2}x_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -3x_2 + \frac{9}{2}x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 8 \\ -3x_2 = -9 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Gauss消去法

◆ 上面的求解过程，可以使用线性方程组的增广矩阵的初等行变换来表示：

$$
(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{7}{2} & 13 \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

Gauss消去法

- 对方程组的增广矩阵作初等行变换，不会改变方程的解。
- 定理：若用初等行变换将增广矩阵[A|B]化成[C|D]，则方程组AX=B与方程组CX=D是同解方程组。
- 由定理， 可以利用初等行变换将增广矩阵[A|B]化简成行阶梯矩阵，写出该阶梯形矩阵所代表的方程组，逐步回代, 求出方程组的解. 此法称为Gauss消去法。
- 更加直接的方法，将线性方程组的增广矩阵[A|B]化成[C|D]，其中C为A的等价标准形，则D为方程组的解。

Gauss消去法

DATAGURU炼数成金

- 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$$

- 解：对增广矩阵$[A|B]$ 进行初等变换，

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + \frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss消去法

故 $$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases} \qquad (x_2, x_4\text{可取任意值})$$

- 解的表示式中可取任意值的未知量称为自由未知量
- 用自由未知量表示其它未知量的解表示式称为一般解(通解).
- 当自由未知量取定一个值时，得到的解称为线性方程组的特解.
- 自由未知量的个数是确定的，共有$n-R(A)$个
- 用消元法解 $AX=B$ 或 $AX=O$ 的 一般步骤:
  先写出增广矩阵 $[A|B]$ (或系数矩阵A), 用初等行变换将其化成阶梯形矩阵,若方程组有解，则继续化成行简化阶梯形矩阵,求出方程组的一般解.

线性方程组解的个数

- 阶梯阵的形状与线性方程组的解.

$Ax=b \rightarrow \tilde{A}x=\tilde{b}$	解的数目	$[A, b] \rightarrow [\tilde{A}, \tilde{b}]$
$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 2x_2+x_3=2 \\ 0=1 \end{cases}$	无解	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=8 \\ 2x_2+x_3=1 \\ x_3=5 \end{cases}$	有唯一解	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=2 \\ x_3+4x_4=3 \\ 0=0 \end{cases}$	有无数解	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

线性方程组解的个数

- 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$[A|B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- 其求解过程，相当于对增广矩阵:
- 进行初等行变换，将其化成阶梯形矩阵：

$c_{ii}\neq 0$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,s-1} & c_{1s} & \cdots & c_{1,t-1} & c_{1t} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{2s} & \cdots & c_{2,t-1} & c_{2t} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{rt} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

线性方程组解的个数

1. 当$d_{r+1} \neq 0$ 时，(2)或(3)所表示的方程组中的第 $r+1$ 个方程 "$0 = d_{r+1}$" 是矛盾方程, 方程组(1)无解.

2. 当$d_{r+1} = 0$ 时，方程组(1)有解，解有两种情况:

① 若$r = n$时, (2)表示的方程组为：

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$

此时，方程组(1)有唯一解.

线性方程组解的个数

② 若 $r<n$ 时，则(2)表示的方程组为：

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases}$$

此时,方程组(1)有无穷多解，$x_{r+1},\cdots,x_n$ 为自由未知量.

线性方程组解的个数

- 线性方程组解情况的判定定理
- 1. rank(A|B)=rank(A)时，方程有解。
- （1）当rank(A|B)=n(未知量的个数）时，方程有唯一解；
- （2）当rank(A|B)<n时，方程组有无穷多个解。且通解中含有n-rank(A|B)个自由未知量。
- 2. rank(A|B)>rank(A)时，方程无解

- 若线性方程组为齐次方程，即AX=0.则有
- 1. 当rank(A)=n时，方程只有零解
- 2. 当rank(A)<n时，方程有非零解
- 特别地，当方程个数m小于未知数的个数n时，方程必有非零解

例

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

解：对方程组的增广矩阵 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ 施以初等行变换，化为阶梯形矩阵：

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例

因为 $r(A \mid b) = r(A) = 2 < 4$，故方程组有无穷多解．接上式进行回代有

$$\xrightarrow{\text{回代}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

取 $x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$ （其中 c_1，c_2 为任意常数），则方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}c_1 - \frac{13}{7}c_2 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}c_1 + \frac{4}{7}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

n维向量

- n个实数a_1，a_2，……，a_n组成的有序数组称为n维向量，一般用α，β，γ等希腊字母表示。有时也用**a,b,c,u,v,x,y**等拉丁字母表示。这n个实数称为该向量的n个分量，第i个数a_i称为第i分量。

$$\alpha = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

n维向量

第1个分量

第2个分量

第n个分量

n维向量

- n 维向量写成一行(列)称为行(列)向量，即为行(列)矩阵.

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- 为一列向量, 其转置 $\alpha^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 为行向量

列向量组

- 对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 同样，矩阵的每一列都是m维列向量。记

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad \alpha_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵A 的列向量组.
- 记作 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

行向量组

- 每一行都是n维行向量。记

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},$$
$$\beta_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 称为矩阵A的行向量组.
- 记作

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

向量相等

- 两个n维向量当且仅当他们各对应分量都相等时，才相等。
- 对n维向量$\alpha = [a_1, a_2, \dots\dots, a_n]; \beta = [b_1, b_2, \dots\dots, b_n]$,当且仅当$a_i = b_i (i = 1,2, \dots\dots, n)$时，α=β
- 所有分量均为0的向量称为零向量，记**0**=[0,0,……,0]
- n维向量$\alpha = [a_1, a_2, \dots\dots, a_n]$的各分量的相反数组成的n维向量，称为α的负向量，记为-α，即$-\alpha = [-a_1, -a_2, \dots\dots, -a_n]$

向量的线性运算

- 向量加法：
- 两个n维向量 $\alpha = [a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n]; \beta = [b_1, b_2, \ldots \ldots, b_n]$,它们各对应分量之和组成的向量，称为α与β的和，记为α+ β。即$\alpha + \beta = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \ldots, a_n + b_n]$

- 向量的减法：
- $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots \ldots, a_n - b_n]$

- 向量的数乘：
- n维向量$\alpha = [a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n]$的各个分量都乘以一个实数k所组成的向量，称为实数k与向量α的乘积，记为kα，即k$\alpha = [ka_1, ka_2, \ldots \ldots, ka_n]$

向量的线性运算

- 向量的加法与数乘的运算法则：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha;$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$；$\alpha-\alpha=0$

(4) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(5) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

$(6) 1\alpha = \alpha$

(7) 若 $k\alpha=0$, 则 $k=0$ 或 $\alpha=0.$

(8) 设E 是n阶单位矩阵，则 $E\alpha=\alpha.$

向量的线性组合

- 对于给定的向量$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$，如果存在一组数$k_1, k_2, \dots \dots, k_n$，使关系式

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots \dots + k_n\alpha_n$$

成立，则称向量β是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$的线性组合，或称向量$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$线性表示。

- 例：$\beta = (2, -1, 1), \alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)$，则有$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$。所以$\beta$是$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的线性组合

向量与线性方程组

- 对于m*n的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$
- 则方程组可以写成向量形式 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathrm{b}$
- 如果方程组有解，则存在一组数：$k_1 = x_1, k_2 = x_2, \dots\dots, k_n = x_n$使得线性关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots \ldots + k_n\alpha_n = b$$

成立

向量的线性组合

- 对于向量$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$，向量$\beta$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$线性表示的充分必要条件是：以$\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$为列向量的矩阵与以$\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$，$\beta$为列向量的矩阵有相同的秩。

- 例:$\beta = (2, -1,1), \alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$很显然，是同秩的

向量组等价

若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的每一个向量 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 均可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则称向量组A 可由向量组B 线性表示.

若向量组A 与向量组B 可相互线性表示, 则称这两个向量组等价,记为 $A\sim B.$

向量组等价具有以下性质：

(1) 自身性: $A\sim A;$

(2) 对称性: 即若 $A\sim B$,则 $B\sim A;$

(3) 传递性: 若 $A\sim B$,且 $B\sim C$, 则 $A\sim C.$

向量组的线性相关性

- 对于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$，如果存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$，使得关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots \ldots + k_n\alpha_n = 0$$

成立，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$线性相关。反之，则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$线性无关。

- 若关于向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$的齐次方程组

$$\boldsymbol{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0}$$

有非零解，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$线性相关。若方程组只有非零解，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$线性无关

向量组的线性相关性

- 对于m维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots,\alpha_n$，其中$\alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\dots\dots,n$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots,\alpha_n$线性相关的充分必要条件是：以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots,\alpha_n$为列向量的矩阵的秩小于向量的个数n

- 如果向量组中有一部分向量（称为部分组）线性相关，则整个向量组线性相关。
- 线性无关的向量组中任一部分组皆线性无关。

- 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots,\alpha_n$(n>=2)线性相关的充分必要条件是：其中至少有一个向量是其余n-1个向量的线性组合。

向量组的秩

若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的部分向量 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\ (r<m)$ 满足：

(1) 向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的任一向量均可由向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

或: (1) 向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) A中任意$r+1$个向量都线性相关.

则称 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个**极大线性无关向量组**.

向量组的秩

向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组所含向量的个数 r 称为向量组的秩. 记为 $R_A=r$ 或 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$

若一向量组只含零向量, 则规定它的秩为零.

若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 则 $R_A=m$; 反之, 若 $R_A=m$, 则向量组A 一定线性无关.

矩阵A的秩 = 矩阵A行向量组的秩 = 矩阵A 列向量组的秩 .

列(行)向量组通过行(列)初等变换不改变向量组的线性相关性.

求向量组的秩和极大无关组： 先把这些向量作为矩阵的列构成矩阵，然后用初等行变换将其化为阶梯形矩阵, 则非零行的个数就是向量组的秩, 主元所在列对应的原来向量组中的向量就是极大无关组.

利用软件解线性方程组

```
> a=matrix(c(1,0,0,3,1,1,-1,2,1,2,0,1,1,2,-2,3),ncol=4)
> b=matrix(c(0,1,1,-1),ncol=1)
> a
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    1    1    1
[2,]    0    1    2    2
[3,]    0   -1    0   -2
[4,]    3    2    1    3
> b
     [,1]
[1,]    0
[2,]    1
[3,]    1
[4,]   -1
> solve(a,b)
              [,1]
[1,]  1.480297e-16
[2,] -1.000000e+00
[3,]  1.000000e+00
[4,]  8.326673e-17
```

```
>> a=[1 1 1 1;0 1 2 2;0 -1 0 -2;3 2 1 3]

a =

     1     1     1     1
     0     1     2     2
     0    -1     0    -2
     3     2     1     3
```

```
>> b=[0;1;1;-1]

b =

     0
     1
     1
    -1

>> a\b

ans =

         0
   -1.0000
    1.0000
    0.0000

>> inv(a)*b

ans =

    0.0000
   -1.0000
    1.0000
    0.0000
```

炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间