大数据的矩阵计算基础——第11周

广义逆

法律声明

课程详情访问炼数成金培训网站

http://edu.dataguru.cn

关注炼数成金企业微信

■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

本周内容

- 广义逆矩阵
  - 减号逆
  - 自反广义逆
  - 最小范数广义逆
  - 最小二乘广义逆
  - 加号逆
- 广义逆在线性方程组中的应用
  - 相容方程的通解与最小范数解
  - 不相容方程的最小二乘解
  - 加号逆的应用

左逆矩阵与右逆矩阵

- 对于n*n矩阵A，若存在n*n矩阵B使得AB=BA=I，则称A为可逆矩阵，B为A的逆，记 $B = A^{-1}$
- 对于m*n矩阵A，也能有逆矩阵吗？
- 左逆矩阵：LA=I
- 右逆矩阵：AL=I

左逆矩阵与右逆矩阵

- 对于以下三个矩阵，左逆矩阵是否存在？若存在，是否唯一？
- $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
- 对于m*n矩阵A，仅当m>n时，A可能有左逆矩阵
- 对于m*n矩阵A，仅当m<n时，A可能有右逆矩阵

唯一解

- 左伪逆矩阵：$L = (A^T A)^{-1} A^T$
- 右伪逆矩阵：$R = A^T (A^T A)^{-1}$

- 例：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,求其右逆

Gauss消去法

- 对方程组的增广矩阵作初等行变换，不会改变方程的解。

- 定理：若用初等行变换将增广矩阵[A|B]化成[C|D]，则方程组AX=B与方程组CX=D是同解方程组。

- 由定理， 可以利用初等行变换将增广矩阵[A|B]化简成行阶梯矩阵，写出该阶梯形矩阵所代表的方程组，逐步回代, 求出方程组的解. 此法称为Gauss消去法。

- 更加直接的方法，将线性方程组的增广矩阵[A|B]化成[C|D]，其中C为A的等价标准形，则D为方程组的解。

线性方程组解的个数

- 线性方程组解情况的判定定理
- 1. rank(A|B)=rank(A)时，方程有解。
- （1）当rank(A|B)=n(未知量的个数）时，方程有唯一解；
- （2）当rank(A|B)<n时，方程组有无穷多个解。且通解中含有n-rank(A|B)个自由未知量。
- 2. rank(A|B)>rank(A)时，方程无解

- 若线性方程组为齐次方程，即AX=0.则有
- 1. 当rank(A)=n时，方程只有零解
- 2. 当rank(A)<n时，方程有非零解
- 特别地，当方程个数m小于未知数的个数n时，方程必有非零解

例

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$$

解：对方程组的增广矩阵 $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$ 施以初等行变换，化为阶梯形矩阵：

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例

因为 $r(A \mid b) = r(A) = 2 < 4$，故方程组有无穷多解．接上式进行回代有

$$\xrightarrow{\text{回代}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

取 $x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$ （其中 c_1，c_2 为任意常数），则方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{3}{7}c_1 - \frac{13}{7}c_2 \\ x_2 = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}c_1 + \frac{4}{7}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

一致方程

- 方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$

- 若线性方程组Ax=y中，矩阵A的行之间的线性关系也存在于向量y的对应元素中，则称该方程组为一致方程（consistent equation）

- 非一致方程（ inconsistent equation ）

广义逆矩阵

- 若A是一个m*n阶矩阵，若存在n*m阶矩阵G，使得当线性方程组Ax=y为一致方程时，x=Gy是方程组的解，则称G为A的广义逆矩阵，记为A^{-}

- 一致方程Ax=y对y≠0有解x=Gy，当且仅当AGA=A

- 若矩阵G满足AGA=A 则称G为A的广义逆矩阵

例

- $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Moore-Penrose广义逆

- 对于任意复数m*n阶矩阵A，如果存在n*m阶复矩阵G，满足
  - 1. AGA=A
  - 2. GAG=G
  - 3. $(AG)^H = AG$
  - 4. $(GA)^H = GA$
- 称G为A的一个Moore-Penrose广义逆，上述四个方程称为M-P方程
- 若G满足M-P方程的全部或其中一部分，则称G为A的广义逆

广义逆的分类

- 减号逆
- 自反广义逆
- 最小范数广义逆
- 最小二乘广义逆
- 加号逆，伪逆， Moore-Penrose逆

减号逆的存在性

DATAGURU 炼数成金

- 对于任意m*n阶矩阵A，其减号逆A^-一定存在，但不唯一

证明：若 $A=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$，则 $A^-=\begin{pmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}_{n\times m}$，即

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^- = \begin{pmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}_{n\times m},$$

其中 G_{12}, G_{21}, G_{22}是任意给定的.

减号逆的计算

- 设A$\in C_r^{m\times n}$，则存在满秩矩阵P和Q，其中P为m阶方阵，Q为n阶方阵，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

- 则

$$A^- = Q\begin{pmatrix} I_r & B_{r\times(m-r)} \\ C_{(n-r)\times r} & D_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}P$$

例

- 已知$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$,求$A^{-}$

减号逆的计算

- 设$A \in C_r^{m\times n}$，则存在奇异值分解

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} V^H$$

- 于是

$$A^- = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & B_{r\times(m-r)} \\ C_{(n-r)\times r} & D_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} U^H$$

例

- 已知$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$,求$A^{-}$

自反广义逆

- 使用符号A_r^-表示
- $AA_r^-A = A; \quad A_r^-AA_r^- = A_r^-$
- 若A是一个行（或列）满秩矩阵，则A的右逆（或左逆）就是A的一个自反广义逆

自反广义逆的计算

- 设A∈$C_r^{m\times n}$，其奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$$

- 则

$$A_r^- = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & B \\ C & C\Sigma_r B \end{bmatrix} U^H$$

例

- 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求A的一个自反广义逆

最小范数广义逆

- 符号：A_m^-
- 条件$AA_m^-A = A$；$(A_m^-A)^H = A_m^-A$与$A_m^-AA^H = A^H$等价

最小范数广义逆的计算

- 设A是m*n阶矩阵（m≤n），则$A_m^- = A^H(AA^H)^-$

- 设$A \in C_r^{m\times n}$，其奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} V^H$$

- 则

$$A_m^- = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & B_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & D_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} U^H$$

例

- 求$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$,求A的一个最小范数广义逆

最小二乘广义逆

- 符号：A_i^-
- $AA_i^-A = A$ ；$(AA_i^-)^H = AA_i^-$

最小二乘广义逆的计算

- 设A是m*n阶矩阵（m≤n），则$A_i^- = (AA^H)^- A^H$

- 设A$\in$C$_r^{m\times n}$，其奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} V^H$$

- 则

$$A_m^- = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0_{r\times(m-r)} \\ C_{(n-r)\times r} & D_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} U^H$$

加号逆

- A^+
- 加号逆是唯一的
- 设A∈$C_r^{m\times n}$，其奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} V^H$$

- 则

$$A^+ = V\begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} U^H$$

广义逆在线性方程组中的应用

- 对于非齐次线性方程组 AX=b，有以下几种情况
- 1. 方程是一致方程
  - 1）A是满秩方阵，则方程组有唯一解：$X = A^{-1}b$
  - 2）方程组有无数个解，可以寻找最小范数解 $\min\limits_{Ax=b}\|x\|$
- 2. 方程组不一致，可以寻找最小二乘解 $\min\limits_{x\in C^n}\| Ax-b\|_2$。而一般来说，最小二乘解不唯一，所以可以进一步求最小二乘解的最小范数解 $\min\{\| x\|: \min\limits_{x\in C^n}\| Ax-b\|_2\}$

一致方程的通解与减号逆

- 若线性方程组AX=b是一致方程，则线性方程组的一个特解可以表示为$X = A^{-}b$;而通解可以表示为$X = A^{-}b + (I - A^{-}A)z$，其中z是与X同维的任意向量

- 例：求解$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

最小范数解

- 对于一致方程AX=b,如果存在与b无关的A的某些特殊减号逆G，使得特解Gb与其他解相比，具有最小范数，即$\|Gb\| \leq \|X\|$

- 一致方程AX=b的最小范数解是$X = A_m^- b$

- 最小范数解唯一

例

- 求$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$的最小范数解

最小二乘解

- 对于不一致方程组AX=b,如果有$\|A\tilde{X}-b\| \leq \|AX-b\|$,其中X为方程组的任意近似解，则称$\tilde{X}$是方程组的最小二乘解

- 最小二乘解为$X = A_i^{-}b$

- 最小二乘解不唯一

例

- 求方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 的一个最小二乘解

极小范数最小二乘解

- 不一致方程AX=b的极小范数最小二乘解为$X = A^{+}b$
- 对于线性方程组AX=b，其解为$X = A^{+}b$
- 在多元统计中的应用：求解多元线性回归方程的参数

炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间