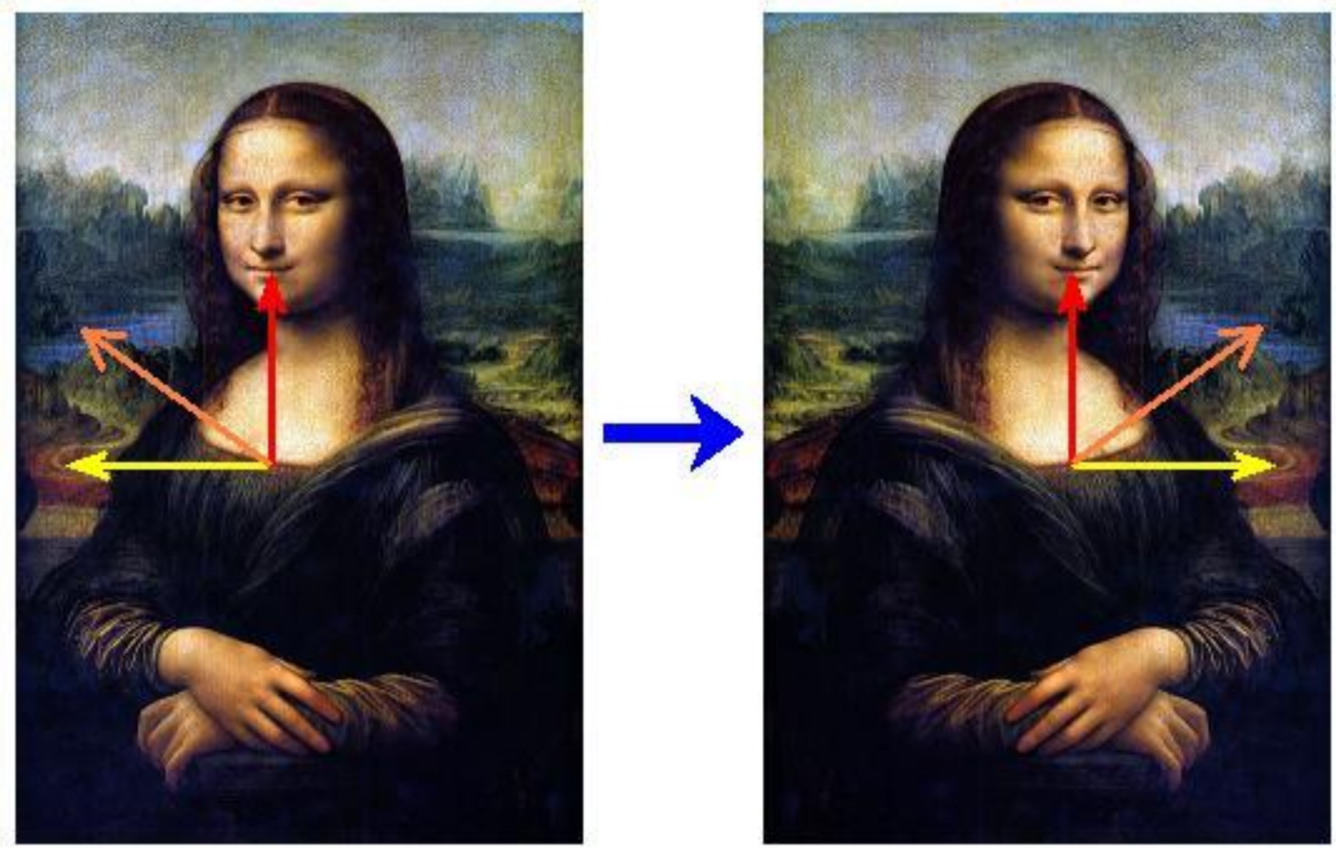


大数据的矩阵计算基础——第7周

DATAGURU专业数据分析社区

法律声明

【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以”/H责任。

课程详情访问炼数成金培训网站

http://edu.dataguru.cn

关注炼数成金企业微信

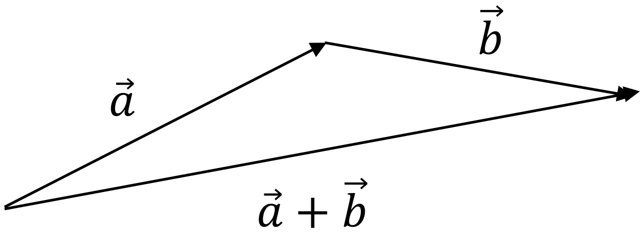
■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

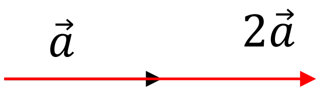
本周内容

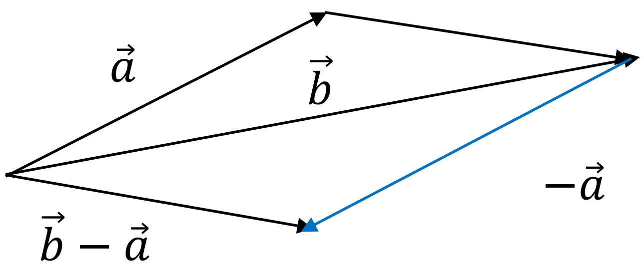
- 复习
- 特征值
- 特征向量
- 特征子空间
- 对角化

向量

- 几何中：有大小有方向的量成为向量
- 代数中：n个实数（或复数）组成的有序数组
- 等价的概念，不同的表达

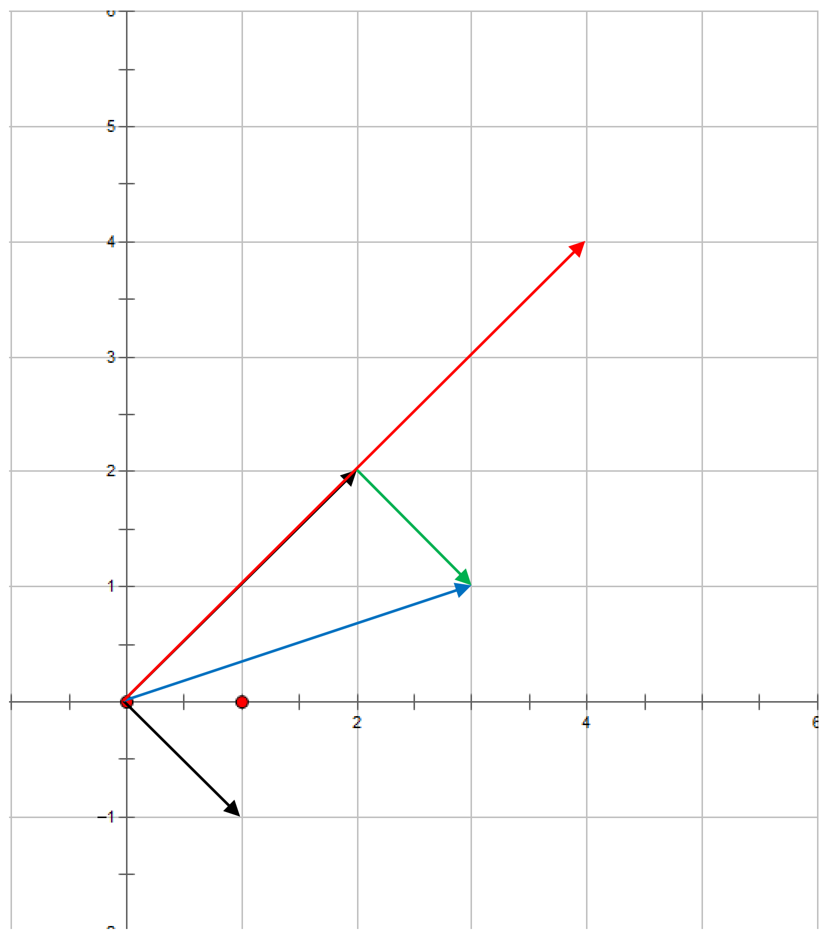






基与坐标

- 平面直角坐标系下的向量表示
- (2,2)+(1,-1)=(3,1)
- 2(2,2)=(4,4)



线性空间

- 对加法和数乘封闭，且满足8个条件
- 一般所研究的线性空间里的元素都是向量，这样的线性空间也称向量空间
- 如果线性空间中的元素是矩阵，则称矩阵空间
- 如二阶方阵的集合是一个矩阵空间，是一个四维线性空间
- $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$是该四维线性空间的一组基

关于矩阵秩的一些梳理

方阵$A_{n\times n}$满秩 $\Leftrightarrow rank(A)=n \Leftrightarrow \det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A$可逆 $\Leftrightarrow$ 行/列向量组线性无关
$\Leftrightarrow AX=0$只有零解 $\Leftrightarrow AX=B$有唯一解 $\Leftrightarrow B$是A的列空间的元素

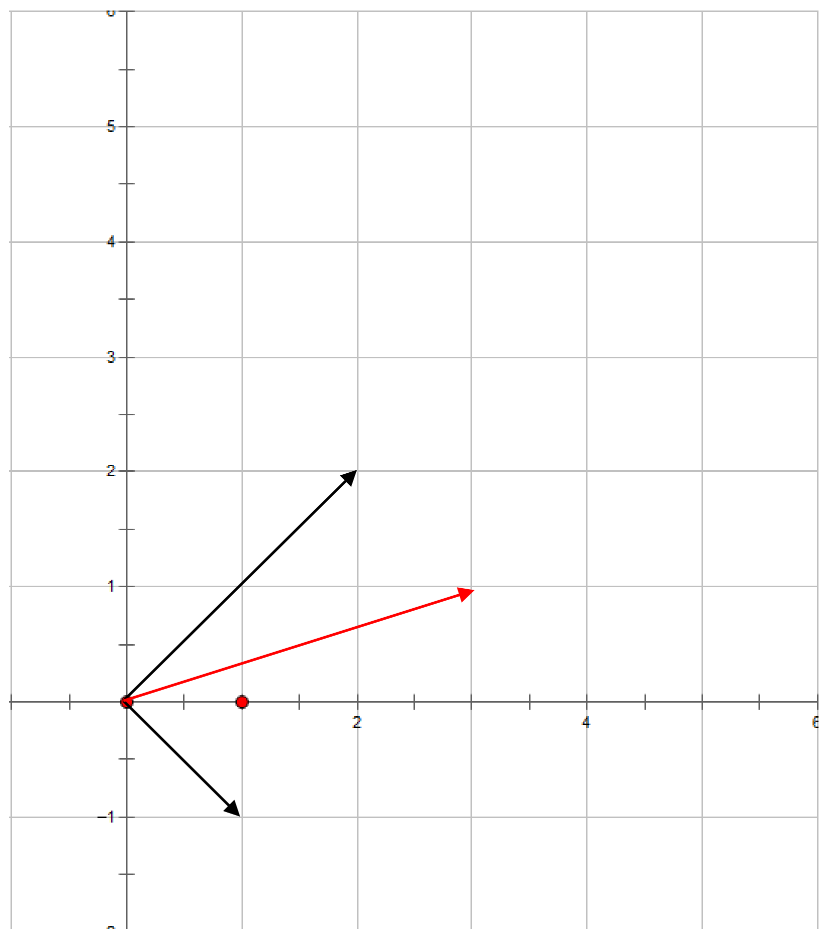
矩阵$A_{m\times n}(m>n)$列满秩 $\Leftrightarrow rank(A)=n \Leftrightarrow$ 列向量组线性无关
$\Leftrightarrow AX=0$只有零解 $\Leftrightarrow AX=B$若有解，必定有唯一解

矩阵$A_{m\times n}(m<n)$行满秩 $\Leftrightarrow rank(A)=m \Leftrightarrow$ 行向量组线性无关
$\Leftrightarrow AX=0$有非零解

基变换与坐标变换

- $\vec{a} = (3,1) = (2,2) + (1,-1)$
- $\vec{a}$在基(1,0),(0,1)下的坐标为(3,1)

在基(2,2),(1,-1)下的坐标为(1,1)



线性变换的矩阵表示

n 维线性空间 V 上的线性变换 $T:V \to V$ 将 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 映射为 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$。由于$T(\alpha_i)$仍然是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，所以令

$$T(\alpha_i)=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots a_{ni}\alpha_n \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

因此

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)
&=(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n))\\
&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\\
&\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A
\end{aligned}
$$

矩阵 A 称为**线性变换** T (在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下)**的矩阵表示**。

线性变换的矩阵表示

对 V 中的任意向量 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$，显然

其在线性变换 T 下的像为

$$T(\alpha) = T(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n)$$

$$= x_1T(\alpha_1) + x_2T(\alpha_2) + \cdots + x_nT(\alpha_n)$$（理由？）

$$= (T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n))x$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)Ax$$

$$\equiv (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)y$$

因此原像与像（在给定基下）的坐标变换公式为

$$\boxed{y = Ax}$$

线性映射的矩阵表示

- 线性映射f：n维线性空间→m维线性空间 对应于矩阵$A_{m\times n}$
- 例：2维空间→3维空间，照片、斜二测画法

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

不同基下的线性变换矩阵表示

- 设T为n维线性空间上的线性变换，对于V的两组基：$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$，其矩阵表示分别为A和B，即

$$T(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_n) = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_n)A\ ;\ T(\beta_1\ \beta_2 \ldots\ \beta_n) = (\beta_1\ \beta_2 \ldots\ \beta_n)B$$

- 且从基$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$到基 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$的过渡矩阵为P，即

$$(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n) = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)P$$

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots, \beta_n)B = T(\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots, \beta_n) = T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_n)P = \big(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots \ldots, T(\alpha_n)\big)P$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_n)AP = (\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots, \beta_n)P^{-1}AP$$

- 故$B = P^{-1}AP$

矩阵相似

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的

- 对n阶矩阵A、$B \in F^{m\times n}$，如果存在n阶可逆矩阵（即满秩矩阵）$P \in F^{n\times n}$，使

$$B = P^{-1}AP$$

- 则称A与B相似，或A相似与 B 。
- 称相似变换矩阵 P 将 A 相似变换为 B

例子

- 二维线性空间R^2上的一个线性变换f，在基下$(1,0)^T,(0,1)^T$的矩阵表示为$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.求f在基$(0,1)^T,(1,1)^T$下的矩阵表示为？
- 1. 先求从基$(1,0)^T,(0,1)^T$到基$(0,1)^T,(1,1)^T$的过渡矩阵P=$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- 2.同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的
- $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

从几个小问题入手

$c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$通过线性变换$\begin{pmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}$形成的像是？

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$通过线性变换$\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$形成的像是？还有其他向量通过线性变换$\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$达到类似的效果吗？

特征值与特征向量

- 当非零向量$X=(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)^T$在线性变换f（f的矩阵表示为A）下所形成的像为

$$\lambda X=\lambda(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)^T$$

时，称λ为线性变换f的特征值，向量X是f属于特征值λ的一个特征向量

- 等价于
- 对于n维非零向量$X=(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)^T$和n阶方阵A，若存在数$\lambda$使得$\mathrm{A}X=\lambda X$，则称$\lambda$为方阵A的特征值，向量X是A对应于特征值$\lambda$的一个特征向量

例子

例 2 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是否是 A 的特征向量？

解

$$A\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24\\ 20\end{bmatrix}=-4\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}=-4\boldsymbol{u}$$

$$A\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ 11\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{u}$ 是特征值-4 对应的特征向量，但 $A\boldsymbol{v}$ 不是 $\boldsymbol{v}$ 的倍数（见图 5-2），故 $\boldsymbol{v}$ 不是 A 的特征向量.

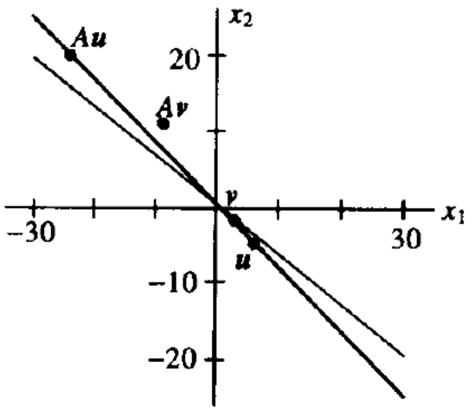


图 5-2　$A\boldsymbol{u}=-4\boldsymbol{u}$，但 $A\boldsymbol{v}\neq\lambda\boldsymbol{v}$

■

例子

例 2　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$,

例 3　证明 7 是例 2 中矩阵 A 的特征值，并求特征值 7 对应的特征向量.

解　数 7 是 A 的特征值当且仅当方程

$$A\boldsymbol{x}=7\boldsymbol{x} \tag{1}$$

有非平凡解，(1) 等价于 $A\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，或

$$(A-7I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \tag{2}$$

为解该齐次方程，计算

$$A-7I=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 5 & -5\end{bmatrix}$$

$A-7I$ 的列显然是线性相关的，故 (2) 有非平凡解，因此 7 是 A 的特征值. 为求其对应的特征向量，用行变换化简矩阵：

$$\begin{bmatrix}-6 & 6 & 0\\ 5 & -5 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故通解为 $x_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. 凡是具有此种形式且 $x_2\neq 0$ 的向量都是 $\lambda=7$ 对应的特征向量. ■

求解矩阵特征值的方法

- $AX=\lambda X \Leftrightarrow AX-\lambda X=0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)X=0 \Leftrightarrow$ 齐次方程$(A-\lambda I)X=0$有非零解 $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I)=0$
- 其中$\det(A-\lambda I)=0$是关于λ的一元n次方程，称$\det(A-\lambda I)$为特征多项式
- 例： 求矩阵$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值

求解矩阵特征向量的方法

- 根据特征向量的定义，矩阵A的特征向量满足$AX = \lambda X$，即$(A-\lambda I)X = 0$。故X是齐次方程$(A-\lambda I)X = 0$的解，可以根据齐次方程的解法求特征向量
- 求矩阵$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征向量
- 由上题已知矩阵$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值是7和2.故
- $\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$
- $\Longrightarrow$ 当$\lambda = 7$时，$x_1 = 3x_2$；当$\lambda = 2$时，$2x_1 = x_2$
- 所以$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$对应于$\lambda = 7$的特征向量是$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$对应于$\lambda = 2$的特征向量是$c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

例子

- 求方阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$的特征值及特征值

特征子空间

- 称方阵A所有对应于特征值λ的特征向量加上零向量所构成的线性空间为方阵A对应于λ的特征子空间

- 若$\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_s$是n阶矩阵A的s个互不相等的特征值，而$v_{i1}, v_{i2}, \dots\dots, v_{ir_i}$是对应于$\lambda_i$的线性无关特征向量，那么$v_{11}, \dots\dots, v_{12}, \dots\dots, v_{sr_s}$线性无关

例子

例 4 设 $A=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}$，$A$ 的一个特征值是 2，求对应的特征空间的一个基.

解 计算

$$A-2I=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&6\\2&-1&6\\2&-1&6\end{bmatrix}$$

用行变换化简 $(A-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的增广矩阵：

$$\begin{bmatrix}2&-1&6&0\\2&-1&6&0\\2&-1&6&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-1&6&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因为方程 $(A-2I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有自由变量，故 2 是 A 的特征值. 通解是

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1/2\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix},\ x_2和x_3为任意值$$

图 5-4 显示出特征空间是 $\mathbb{R}^3$ 的 2 维子空间，其中的一个基是

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

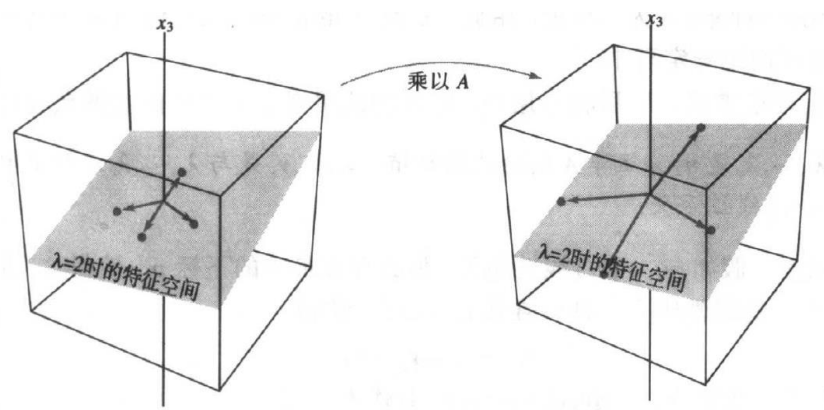


图 5-4 A 对特征空间的扩张作用

退化矩阵

- 求矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量
- $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$；$\lambda = 0$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 故特征向量为$x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，只有一个，而矩阵是二阶方阵

几何重数与代数重数

- 方阵A的特征值λ对应的特征子空间的维数称为λ的几何重数，而λ作为方程$\det(A -$

相似矩阵的特征值

- 如果n阶方阵A与B是相似的，那么方阵A与B具有相同的特征值和相同的代数重数。
- 证明。
- 例：$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$相似，其中P=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

方阵的n次幂

- $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值与特征空间的基分别为7和2、$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 根据特征向量的定义，有$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 即$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
- $A = PDP^{-1} = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}(v_1, v_2)^{-1}$

方阵的n次幂

- 对于n阶方阵A ,其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_n$（可能有重根），对应的特征向量为

$$v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n,\ A = PDP^{-1} = (v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}(v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n)^{-1}$$

- 则$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} =$

$$(v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n)\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}(v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n)^{-1}$$

例子

- 求$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的二次幂

- 求A=$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$的二次幂，$A = PDP^{-1}$，其中$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

对角化

- 从线性变换的角度：若线性变换f关于线性空间V的某个基的矩阵为对角矩阵，则称f可对角化
- 从矩阵的角度：若n阶方阵A相似与对角矩阵D，即存在可逆矩阵P，使得$A = PDP^{-1}$,则称A可对角化
- 矩阵A可对角化的充要条件是:A有n个线性无关的特征向量
- 有n个不同的特征值的矩阵A可对角化

例子

- 将矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$对角化

- 将矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$对角化

炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间