大数据的统计学基础——第8周

法律声明

【声明】本视频和幻灯片为炼数成金网络课程的教学资料，所有资料只能在课程内使用，不得在课程以外范围散播，违者将可能被追究法律和经济责任。

课程详情访问炼数成金培训网站

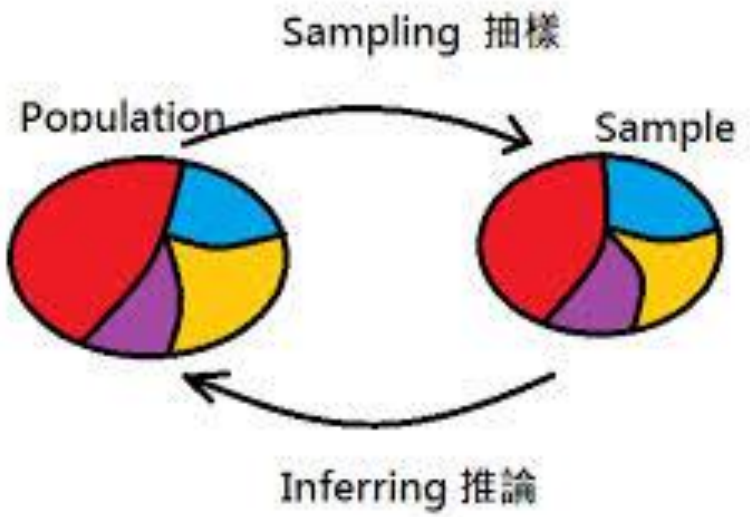
http://edu.dataguru.cn

关注炼数成金企业微信

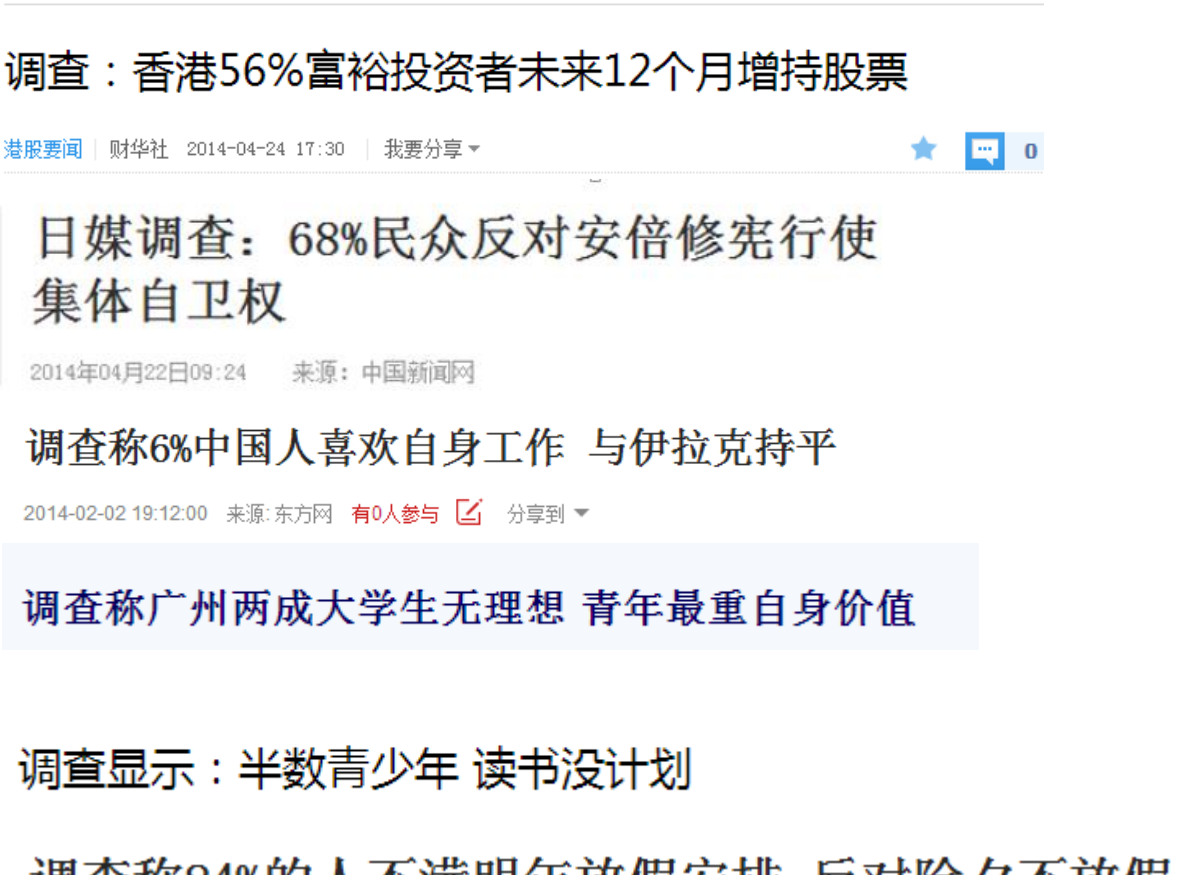
■提供全面的数据价值资讯，涵盖商业智能与数据分析、大数据、企业信息化、数字化技术等，各种高性价比课程信息，赶紧掏出您的手机关注吧！

统计推断

- 统计学：描述统计学与推断统计学 ——→ 根据样本数据推断总体数据的情况
- 样本均值→总体均值
- 样本方差→总体方差
- 样本比例→总体比例



总体比例估计


调查：香港56%富裕投资者未来12个月增持股票
港股要闻 | 财华社 2014-04-24 17:30 | 我要分享
0
日媒调查：68%民众反对安倍修宪行使集体自卫权
2014年04月22日09:24 来源：中国新闻网
调查称6%中国人喜欢自身工作 与伊拉克持平
2014-02-02 19:12:00 来源: 东方网 有0人参与 分享到
调查称广州两成大学生无理想 青年最重自身价值
调查显示：半数青少年 读书没计划
调查称84%的人不满明年放假安排 反对除夕不放假

样本比例估计总体比例

- 要求：
- 1. 样本要为简单随机样本
- 2. 二项分布的条件成立
- 3. 至少有5个成功，5个失败，即np>=5,nq>=5
- 样本比例$\hat{p}$是总体比例p的最好点估计（Point estimation）——无偏而且最有效

例子

- 美国的“全国艾滋行为调查”访问了2673位成人异性恋者的随机样本。其中，有170人承认，在前一年曾有超过一个性伴侣，占样本的6.36%。（这个结果可能会存在偏差，因为有人会不愿意把自己的性行为如实告诉别人，但我们在这里假设所有人都说了实话）
- 根据以上的数据，我们可以推断，美国所有成年异性恋者中有不止一个性伴侣的比例大约是6.36%
- 但是如果我们再做一次调查，得到的样本比例或许会不一样，假设是6.72%。那么我们应该使用哪个数据区估计总体比例呢？

点估计——置信区间

- 刚才的例子中，如果实际上成年异性恋中，有6%的人不止一个性伴侣。则真实的总体比例p=0.06。“全国艾滋行为调查”的大小为n=2673的样本，如果重复抽取多次的话，得到的样本比例$\hat{p}$的分布会很接近于正态分布（中心极限定理）
- 分布的均值：0.06
- 分布的标准差：$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.06*0.94}{2673}} \approx 0.0046$
- 所有的样本比例$\hat{p}$中，约有95%会落在2个标准差之内，即
- (p-2* $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，p+2* $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$)=（0.0508,0.0692）
- 有95%的$\hat{p}$跟p的差距的绝对值在2* $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$之内。换句话说，95%的($\hat{p}$-2* $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，$\hat{p}$+2* $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$) 区间会包含正真的总体比例p

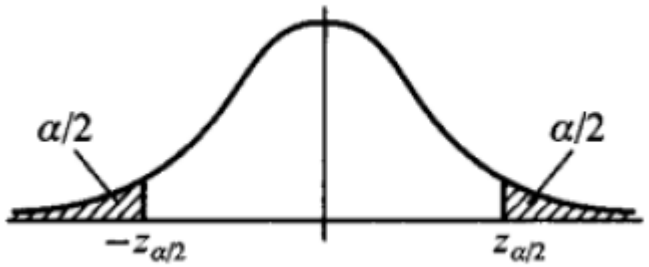
点估计——置信区间

- 中心极限定理：样本比例$\hat{p}$近似正态分布N(p, p(1-p)/n)

定理三(棣莫弗－拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理) 设随机变量 η_n ($n=1,2,\cdots$)服从参数为 n,p $(0<p<1)$的二项分布,则对于任意 x,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x). \qquad (2.5)$$

- 样本比例落在尾部的概率非常小
- 样本比例落在阴影尾部的总概率为α
- 样本比例落在中间部分的概率为1-α



置信区间——名称解析

- 置信区间（confidence interval ）：用来估计总体参数真实值的一个区间，通常形式：估计值±误差界限
- 误差界限（margin of error)：估计值的最大误差，使用E表示
- 置信度（confidence level ）：1-α
- 临界值(critical values):$z_{\alpha/2}$
- 置信区间边界(confidence interval limits)：置信上限，置信下限

置信区间

- $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$，所以 $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$
- $P\left\{\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$，故 $P\left\{\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = 1-\alpha$
- 由于p值的真实值不知道，一般采用 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 去代替 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
- 所有总体比例p的1-α置信区间为

$$(\hat{p} - E, \hat{p} + E)$$

- 其中，$E = z_{\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

总体比例的区间估计

- 要求：
- 1. 样本要为简单随机样本
- 2. 二项分布的条件成立
- 3. 至少有5个成功，5个失败，即np>=5,nq>=5

- 之前的例子中，样本比例$\hat{p}$=0.0636。那么所有成年异性恋者中，有不止一个性伴侣的人所占的比例p的95%置信区间为：

- $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.0636 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.0636*0.9364}{2673}} = 0.0636 \pm 0.0092 = (0.0544,0.0728)$
- 有95%的把握$(0.0544,0.0728)$会包含真正的总体比例

总体比例的区间估计

- 更精确的计算方法：

- $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

- $1-\alpha = P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{\alpha/2}\right) = P\{(n+z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\hat{p}+z_{\alpha/2}^2)p + n\hat{p}^2 < 0\}$

- $= P\{p_1 < p < p_2\}$

- 令$(n+z_{\alpha/2}^2) = a, -(2n\hat{p}+z_{\alpha/2}^2) = b, n\hat{p}^2 = \mathrm{c}$，则

- $p_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, p_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- 故p的置信区间为(p_1, p_2)

样本容量的确定

- $E = z_{\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow$
- $\hat{p}$已知：$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{E^2}$
- $\hat{p}$未知：$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 0.25}{E^2}$
- 取整规则：往上取整。51.1→52
- 注意适用条件！

例子

- 日常生活中，我们可以使用不同的工具与他人联系，像电子邮件，qq，微信，电话等等。某位社会学家想知道现今中国内，使用电子邮件的人所占的比例。如果他想要要构建一个95%的置信区间，而且要把误差控制在4%以内，那么要调查多少人？
- （1）如果知道，根据以前的某个调查，在2000年，全国有16.9%的人正正使用电子邮件；
- （2）我们没有任何关于$\hat{p}$的信息。
- （1）根据过往的调查， $\hat{p}$=0.169,1- $\hat{p}$=0.831。对于95%的置信区间， α=0.05，$z_{\alpha/2} = 1.96$,误差界限E=0.04。
- 根据公式：$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{E^2} = \frac{1.96^2 * 0.169 * 0.831}{0.04^2} = 337.194 = 338$
- (2) $\hat{p}$未知：$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 0.25}{E^2} = \frac{1.96^2 * 0.25}{0.04^2} = 600.25 = 601$

拓展

- 假设总体比例的95%的置信区间为(a,b)，则
- $\hat{p} = \frac{a+b}{2}$
- $E = \frac{a-b}{2}$

- 有限总体校正因子（Finite Population Correction Factor）
- 当总体有限时，每次抽样是不放回抽样时
- $E = z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} * \sqrt{1-\frac{n}{N}}$ 所以此时： $n = \frac{N\hat{p}(1-\hat{p})[z_{\alpha/2}]^2}{\hat{p}(1-\hat{p})[z_{\alpha/2}]^2+(N-1)E^2}$

总体均值估计

- 2012年5月14日，人民银行与西南财经大学共同发布《中国家庭金融调查报告》：中国自有住房拥有率高达89.68%，远超世界60%左右的水平，而城市第一套房平均收益率在300%以上。
- 2012年5月14日，中国家庭金融调查与研究中心出台《中国家庭金融调查报告》。报告指出：中国城市家庭平均资产为247.6万元，高出美国21%。总体上反映了中国城市家庭拥有较大财富。
- 2012年8月5日，北京大学发布由北大中国社会科学调查中心完成的《中国民生发展报告2012》。调查称：中国家庭的平均住房面积为116.4平方米，人均住房面积为36.0平方米。2011年中国家庭的平均总支出为3.8万元，比2010年增长了5710元。
- 2013年2月19日《人民日报海外版》宣布：中国已成为世界第二大经济体，人均GDP已超过5000美元，公共假期已有115天，达到了中等发达国家水平。并指出：解决了“有钱”、“有闲”的问题之后，我国旅游业开始全面增长，进入大众化发展的新阶段。
- 2013年7月14日新华网刊出“我国人民币存款突破百万亿”、“中国人均存款77623元”。曾任证监会主席的郭树清认为：“中国的储蓄率高达52%，这在世界上是罕见的，而且就大国经济而言历史上不曾有过先例。

总体均值的估计——σ已知

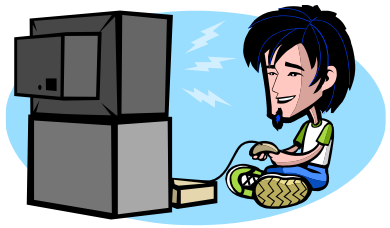
- 适用条件：
- 1. 简单随机样本
- 2. σ已知
- 3. 总体为(近似)正态分布或n>30
- 点估计：样本均值$\bar{x}$是总体均值μ的最好点估计——无偏而且比其他统计量更有效

总体均值的估计——σ已知

- 区间估计
- 由 $\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ ，得 $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
- $1-\alpha=P\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=P\left\{\bar{x}-z_{\alpha/2}*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/2}*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=P\{\bar{x}-E<\mu<\bar{x}+E\}$，此时$E=z_{\alpha/2}*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 故在σ已知的情况下，总体均值的置信区间为
- $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}，\bar{x}+z_{\alpha/2}*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

例子

- 某家游戏公司针对某个游戏进行玩家调查，共收集有效问卷125份。问卷中有一个问题是问玩家的年龄。125份问卷中得到的平均年龄为14.75岁。根据之前的调查结果，玩家年龄的标准差为2.45。请根据上述资料构建玩家年龄的95%置信区间。
- 解： n=125>30,$\bar{x} = 14.75, \sigma = 2.45$，$z_{\alpha/2}$=1.96
- 根据公式：E=$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.45}{\sqrt{125}} = 0.219$
- 故所求置信区间为$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} * E, \bar{x} + z_{\alpha/2} * E\right) = (14.75 - 1.96 * 0.219, 14.75 + 1.96 *$



样本容量的确定

- 在误差界限E和总体标准差σ已知的情况下：
- 由$E = z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$得
- $n = [\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}]^2$

- 当σ未知时：
- （1）使用 极差(range)/4 来近似σ
- （2）进行预实验，使用预实验中的样本标准差S来近似σ
- （3）使用早期做的其他实验数据

总体均值估计——σ未知

- 适用条件：
- 1. 简单随机样本
- 2. 总体正态分布或n>30

- 点估计：样本均值$\bar{x}$是总体均值μ的最好点估计

- 区间估计：$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
- $1-\alpha = P\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2,n-1}\right\} = P\left\{\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1} * \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1} * \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = P\{\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E\}$,此时，$E = t_{\alpha/2,n-1} * \frac{S}{\sqrt{n}}$

例子

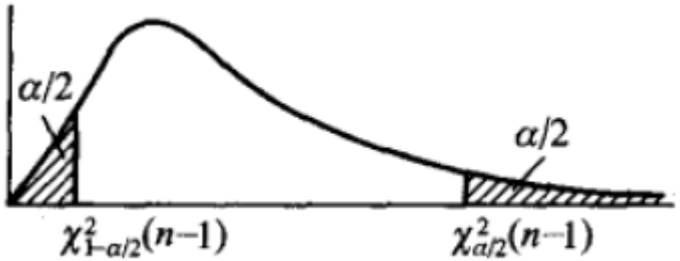
- 某公司的全部职工中，随机抽取了23名员工，收集了他们的年龄数据，如下：
- 34,37,37,38,41,42,43,44,44,45,45,45,46,48,49,53,53,54,54,55,56,57,60
- 求公司平均年龄的点估计与95%置信区间。
- 解：（1）点估计：$\bar{x} = \frac{34+37+\cdots\ldots+57+60}{23} = 47.0$
- (2)区间估计：
- $n = 23, n-1 = 22, \alpha = 0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.074$
- $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(34-47)^2+(37-47)^2+\cdots\ldots+(60-47)^2}{23-1} = 52.1, s = 7.2$
- $E = t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.074 * \frac{7.2}{\sqrt{23}} = 3.114$
- 故95%的置信区间为（43.9,50.1）

总体方差的估计

- 要求：
- 1. 简单随机样本
- 2. 总体必须服从正态分布

- 点估计：样本方差是总体方差的最好点估计——无偏
- 一般使用样本标准差估计总体标准差，尽管它是有偏的

- 区间估计：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- $1-\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1})$
- $= P(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}})$



例子

- 英国的硬币——便士现在铸造机器的标准差为0.0165g。现想提高铸造工艺，降低便士的铸造标准差而引进了新的铸币机器。从新的机器铸造的一批硬币中随机抽取了10个硬币，测量其重量。根据测量的数据知道，这10个硬币的重量标准差为0.0125g。已知便士的重量服从正态分布，求新机器铸造的硬币的标准差的95%置信区间，并由此判断新的机器的铸造技艺是否有所改进。

- n=10,$\alpha = 0.05$，故$\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$=2.700，

- $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$=19.022

- 代入数据，

- $\frac{(10-1)0.0125^2}{19.022} < \sigma^2 < \frac{(10-1)0.0125^2}{2.700}$

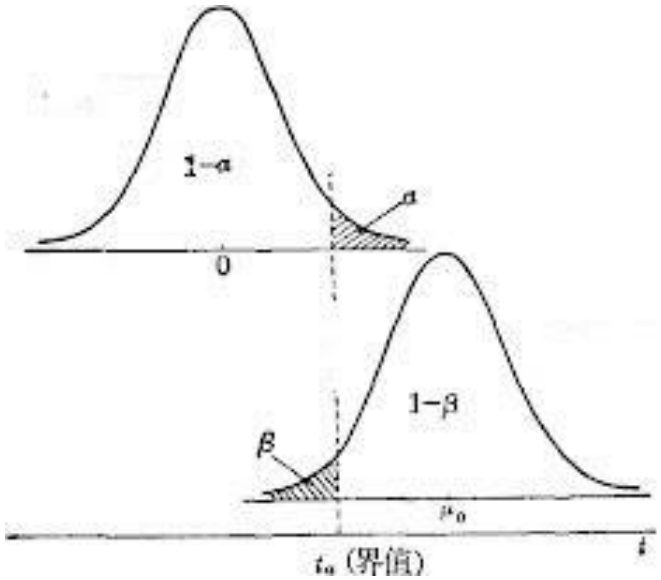
- 两边开方，得（0.0086,0.0228）

- 不能说明铸造技艺提升

n \ α	0.995	0.99	0.975	0.025
1	0.000	0.000	0.001	5.025
2	0.010	0.020	0.051	7.378
3	0.072	0.115	0.216	9.348
4	0.207	0.297	0.484	11.143
5	0.412	0.554	0.831	12.832
6	0.676	0.872	1.237	14.440
7	0.989	1.239	1.690	16.012
8	1.344	1.646	2.180	17.534
9	1.735	2.088	2.700	19.022
10	2.156	2.558	3.247	20.483

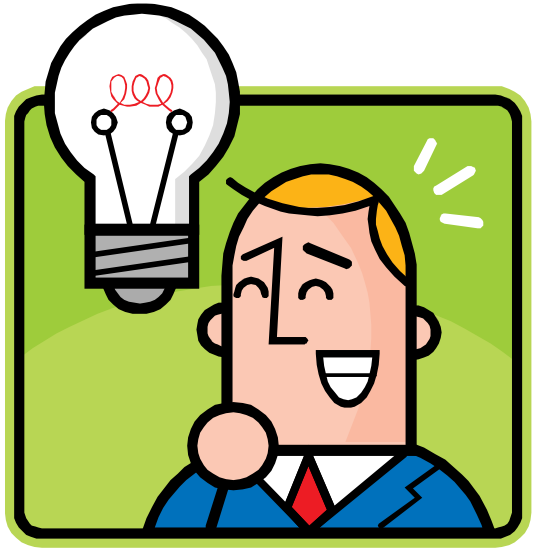
单侧区间估计

- 单侧置信区间：（置信下限，∞）或是（-∞，置信下限）
- 总体均值的单侧置信区间：
- $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \rightarrow 1-\alpha = P\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha,n-1}\right\} = P\left\{\bar{x} - t_{\alpha,n-1} * \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \infty\right\}$
- $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \rightarrow 1-\alpha = P\left\{t_{1-\alpha,n-1} < \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right\} = P\left\{-\infty < \mu < \bar{x} + t_{\alpha,n-1} * \frac{S}{\sqrt{n}}\right\}$



例子

- 从一批灯泡中随机地取5只做寿命试验，测得寿命（以h计）为：
- 1050,1100，1120,1250,1280
- 设灯泡的寿命服从正态分布。求灯泡寿命平均值的95%的单侧置信区间。
- α=0.95，n=5,$t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,4} = 2.1318, \bar{x} = 1160, s^2 = 9950$
- $\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} * t_{\alpha,n-1}, \infty\right) = (1065, \infty)$



炼数成金逆向收费式网络课程

- Dataguru（炼数成金）是专业数据分析网站，提供教育，媒体，内容，社区，出版，数据分析业务等服务。我们的课程采用新兴的互联网教育形式，独创地发展了逆向收费式网络培训课程模式。既继承传统教育重学习氛围，重竞争压力的特点，同时又发挥互联网的威力打破时空限制，把天南地北志同道合的朋友组织在一起交流学习，使到原先孤立的学习个体组合成有组织的探索力量。并且把原先动辄成千上万的学习成本，直线下降至百元范围，造福大众。我们的目标是：低成本传播高价值知识，构架中国第一的网上知识流转阵地。
- 关于逆向收费式网络的详情，请看我们的培训网站 http://edu.dataguru.cn

Thanks

FAQ时间