

# 概率论与数理统计

李立颖

[lily@sustech.edu.cn](mailto:lily@sustech.edu.cn), 理学院 M622

2023 秋季

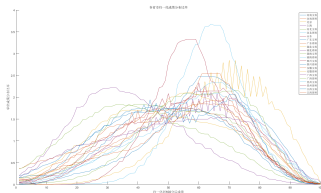
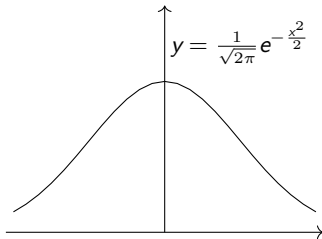
## 1 概率

- 引言
- 样本空间

# 为什么学习概率论与统计?

- 现实生活中的随机现象主要来源于复杂系统:
  - 人口普查
  - 分子热运动
  - 天气预报
  - 量子力学?
- 概率论与统计提供了研究随机现象的工具
  - 概率论: 建立于现代分析学基础上, 主要提供理论基础, 得到的很多结果简洁而深刻, 如大数定律、中心极限定理、遍历定理等
  - 统计学: 解决与复杂系统相关的实际问题 (估计、判断、决策), 如参数估计、假设检验、分类、机器学习等

## 例 1: 正态分布

(a) 高考成绩<sup>1</sup>

(b) 标准正态分布

<sup>1</sup>图片来源: [https://blog.csdn.net/HugoChen\\_cs/article/details/107650258](https://blog.csdn.net/HugoChen_cs/article/details/107650258)

## 例 2: 核物理、随机矩阵与黎曼猜想

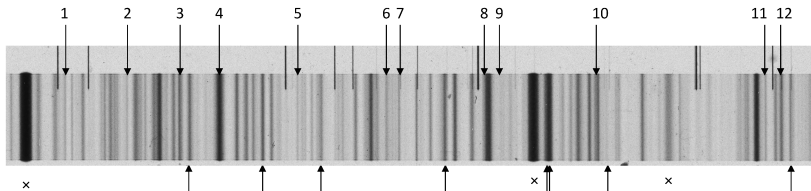


图: 铯原子能量光谱<sup>2</sup>

### ■ 薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \hat{H}\phi.$$

### ■ 能级 = 特征值

$$\hat{H}\phi = \lambda\phi, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

### ■ 重原子对应的算子 $\hat{H}$ 类似于一个高维对称矩阵 $X$

<sup>2</sup><https://www.mdpi.com/2218-2004/5/3/24>

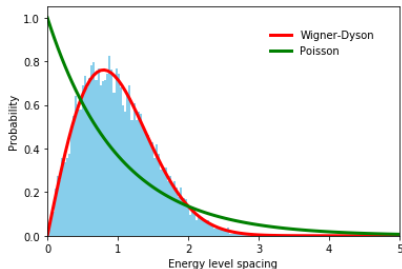
## 例 2: 核物理、随机矩阵与黎曼猜想, II

### ■ 对称随机矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \cdots & & \ddots & \cdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix},$$

在满足  $x_{ij} = x_{ji}$  条件下, 矩阵元素随机选取

- 特征值  $\lambda$  满足  $Xv = \lambda v$ . 对称矩阵的特征值都是实数.
- 相邻特征值  $\lambda_{i+1} - \lambda_i$  的分布是什么?



## 例 2: 核物理、随机矩阵与黎曼猜想, III

- 黎曼  $\zeta$ -函数,  $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

以上函数可延拓至  $z \in \mathbb{C} = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}\}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

- 黎曼猜想: 黎曼函数的全部零点在  $\{a = \frac{1}{2}\}$  上.
- Montgomery 猜想:  $\{a = \frac{1}{2}\}$  上相邻零点的距离分布由 Dyson–Wigner 分布给出
- 小结:
  - 概率问题: 怎么定义随机性? 怎么刻画极限过程?
  - 统计问题: 怎么比较两个分布?

# 如何学习概率统计？

- 学思想：概率统计特殊的研究对象包含了许多独特的思维方法和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律，这是其他学科中没有的。例如，以比较各种事件出现的可能性的进行决策的思想。
- 学方法：定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。
- 学应用：尽可能多地了解各种概念的背景、各种方法和模型的实际应用。不仅要学课程中提及的，也要自己收集、寻找各种实例。
- 课前预习、课中认真听讲、课后多做练习。



## 定义

试验: 科学实验, 或者对某一事物的某一特征进行观察

## 例

- 抛一枚硬币, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况
- 将一枚硬币连抛三次, 观察正面 H 出现的次数
- 掷一颗骰子, 观察出现的点数
- 从一批产品中抽取  $n$  件, 观察次品出现的数量
- 对某厂生产的电子产品进行寿命测试
- 观察某地区的日平均气温和日平均降水量

问: 这些实验有什么特点? 试验前无法预知结果.

# 随机实验与样本空间

试验的特征:

- 试验可以在相同的条件下重复进行
- 试验的结果可能不止一个, 但试验前知道所有可能的全部结果
- 在每次试验前无法确定会出现哪个结果

## 定义

具有上述特征的称为随机试验, 或简称试验

## 例

实验  $E$ : 掷一颗骰子, 观察出现的点数.

$E$  的结果

- “1 点”、“2 点”、...、“6 点” (基本结果, 不可分)
- “出现的点数不超过 3”、“至少出现 4 点” (复合结果, 可分解)

## 定义

- 称基本结果为样本点、基本事件
- 称试验的全部样本点构成的集合为样本空间.

## 例

- 离散样本空间:
  - 掷一颗骰子, 观察出现的点数, 其样本空间为  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - 抛两枚硬币, 观察正、反两面出现的情况, 其样本空间为

$$\Omega = \{(H, T), (H, H), (T, H), (T, T)\}.$$

- 连续样本空间:
  - 记录深圳地区的日平均气温, 其样本空间为  $\Omega = (-60, 60)$
  - 播种飞机对位置为  $(x_0, y_0)$  的目标进行播种, 观察其所覆盖的范围  $(x, y)$ , 其样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \infty\}.$$

# 随机事件

基本结果	不可分	样本点、基本事件
复合结果	可分解	随机事件、事件

表: 试验的结果

- 从集合看: 事件是样本空间的子集
- 从试验看: 事件是基本事件的复合

## 定义

满足一定条件的样本点的集合称为随机事件, 简称事件. 事件用大写字母  $A, B, C, \dots$  等表示.

## 例

掷一颗骰子, 观察出现的点数, 其样本空间为  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 事件  $A$  “至少出现 3 点”:  $A = \{3, 4, 5, 6\}$
- 事件  $B$  “出现最小或最大点的点”:  $B = \{1, 6\}$

几个特殊事件:

- 基本事件: 一个样本点构成的单点集  $\{\omega\}$ .
- 必然事件: 每次试验都总发生的事件  $\Omega \subset \Omega$ .
- 不可能事件: 每次试验都不会发生的事件  $\emptyset$  (空集  $\emptyset \subset \Omega$ ).

## 定义

记

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \Omega, A \text{ 是事件}\}.$$

称  $\mathcal{A}$  为试验的事件域, 即试验产生的所有事件为元素构成的集合.

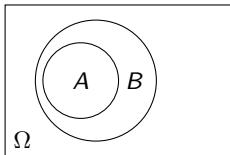
事件语言	基本结果	全体基本试验	事件 $A$	事件 $A$ 发生
集合语言	样本点 $\omega$	样本空间 $\Omega$	子集 $A$	$\omega \in A$

表: 小结 — 随机试验的数学描述

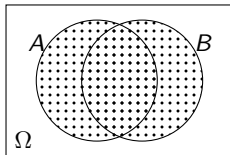
# 事件间的关系与运算 I

设  $A, B$  以及  $A_k, k = 1, 2, \dots$  为事件

- $A$  是  $B$  的子集, 记作  $A \subset B$ :  $A$  发生必然导致  $B$  发生
- 集合  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ :  $A \subset B, B \subset A$
- 集合  $A$  与  $B$  的并, 记作  $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$ :  $A$  发生或  $B$  发生, 即  $A, B$  至少有一个发生, 称为事件  $A$  和  $B$  的和.



(a)  $A \subset B$



(b)  $A \cup B$

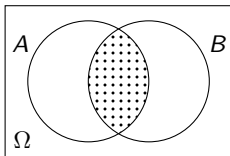
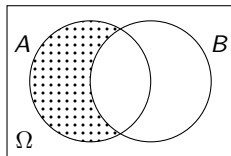
## 事件间的关系与运算 II

- 集合  $A$  与  $B$  的交, 记作  $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A, \omega \in B\}$ :  $A, B$  同时发生, 称为事件  $A, B$  的积, 也记作  $AB$ .
- 类似地, 可以定义  $n$  个事件或者可列个事件的积

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$$

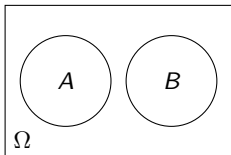
- 集合  $A$  和  $B$  的差集, 记作  $A - B = A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\}$ :  $A$  发生而  $B$  不发生

(a)  $A \cap B$ (b)  $A \setminus B$

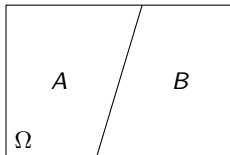
# 事件间的关系与运算 III

- 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A, B$  互不相容 (互斥).
- 若  $A \cup B = \Omega$ , 且  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A, B$  为逆事件或对立事件, 记为

$$A = \Omega \setminus B = B^c, \quad B = \Omega \setminus A = A^c.$$



(a)  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  与  $B$  互斥



(b)  $A$  与  $B$  为对立事件



# 事件的运算定律

## ■ 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

## ■ 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

## ■ 分配律:

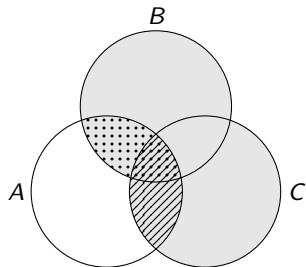
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

## ■ De Morgan 律:

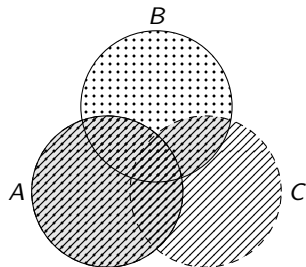
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

$$\left( \bigcup_{k=1}^n B_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^n B_k^c, \quad \left( \bigcap_{k=1}^n B_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^n B_k^c.$$

# 分配律



(a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



(b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# 如何用定义进行证明

## 定理

### 命题

$$\left( \bigcup_{k=1}^n B_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^n B_k^c.$$

证明: 令  $P = \left( \bigcup_{k=1}^n B_k \right)^c$ ,  $Q = \bigcap_{k=1}^n B_k^c$ . 欲证  $P = Q$ , 我们只需分别证明

$P \subset Q$  与  $Q \subset P$ . 我们这里只示范前者的证明. 由包含关系的定义, 对任意的  $\omega \in P$ , 我们要推出  $\omega \in Q$ . 事实上,

$$\omega \in P = \left( \bigcup_{k=1}^n B_k \right)^c \quad \xRightarrow{\text{(补集的定义)}} \omega \notin \bigcup_{k=1}^n B_k$$

$$\xRightarrow{\text{(并集的定义)}} \omega \notin B_k, \forall k$$

$$\xRightarrow{\text{(补集的定义)}} \omega \in B_k^c, \forall k$$

$$\xRightarrow{\text{(交集的定义)}} \omega \in \bigcap_{k=1}^n B_k^c = Q.$$

□

# 可列

- 可列集：指一个无穷集  $S$ ，其元素可与自然数形成一一对应，因此可表为  $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ .
- 至多可列：指可列或有限
- 可以证明：可列是“最小的”无穷，即任何一个无穷集合均含有可列子集

# 作业

■ P20: 5, 6

■ 补充题:

1 设随机事件  $A, B$  满足条件  $AB = A^c B^c$ , 试求  $A \cup B$ .

2 试把事件  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  表示成  $n$  个两两互不相容事件之并.