概率论与数理统计

第二章: 随机变量 (random variables)

李立颖 (lily@sustech.edu.cn)

南方科技大学数学系

2023 秋季

SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

古典概型中的几个问题

设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ 为随机试验 E 的概率空间.

问题一

样本空间 Ω 中的元素与试验有关, 从数学角度看, 希望 Ω 是**抽象的集合**.

问题二

非等可能事件 的概率怎么计算?

问题三

在概率论如何使用**微积分理论**?

样本空间 Ω 抽象化

例

抛一枚硬币，考察正、反面的情况，则 $\Omega = \{H, T\}$ (有具体含意的空间)。令

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = H \\ 0, & \omega = T. \end{cases}$$

在上述映射下，新的 “样本空间” 为 $\tilde{\Omega} = \{0, 1\}$. 我们有对应关系

$$\{X = 1\} \leftrightarrow \{H\}, \quad \{X = 0\} \leftrightarrow \{T\}.$$

随机变量的定义

一个随机变量是样本空间 Ω 到实数 $\mathbb{R}$ 的映射.

例

将一枚硬币连抛三次，观察正、反面出现的情况，则样本空间为

$$\Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}.$$

定义随机变量 $X =$ 正面出现的次数，则

$$\Omega \xrightarrow{X} \Omega' = \{0, 1, 2, 3\}.$$

我们有事件:

$$\begin{aligned}
\{X=0\} &= \{TTT\}, \\
\{X=1\} &= \{HTT, THT, TTH\} \\
\{X \le 2\} &= \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH\} \\
&= \{X \le 3\} - \{X = 3\} \\
&= \Omega - \{HHH\}.
\end{aligned}$$

随机变量

很多实验产生的结果本身就是随机变量

例

连续型随机变量 (continuous r.v.):

- 某地区的日平均气温 X, 日平均降水量 Y.
- 电子产品的寿命 Y.
- 某城市的日耗电量 W 是一随机变量.

离散型随机变量 (discrete r.v.):

- 一人连续对目标射击 n 次, 击中目标次数 X
- 从一大批产品中随机抽取 n 件进行测试, 其测得的次品数 N.

注

通常用大写字母 X, Y, Z, W 等表示随机变量, 用小写字母 x, y, z, w 表示实数 (非随机).

离散型随机变量

定义

若随机变量仅取有限个或可列个值，则称 X 为**离散型随机变量**.

例

- 将一枚硬币连抛三次，观察正、反面出现的情况，定义 X 为出现正面的次数. X 的取值为 $0, 1, 2, 3$，故 X 为离散型随机变量.
- 用同一支枪对目标进行射击，直到击中目标为止，则射击次数 X 是离散型随机变量.
- 114 查号台一天接到的呼叫次数 X 是离散型随机变量.

问

电子产品的寿命 X 是否是离散型随机变量? **否**.

质量函数

设 X 为离散型随机变量，设 X 的所有可能取值为 $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$，且

$$\mathsf{P}(X = x_k) = p(x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

X 的统计规律完全由数列 $\{x_k\}$, $\{p_k\}$ 确定.

定义

称 $\mathsf{P}(X = x_k) = p(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ 为离散型随机变量 X 的**概率质量函数 (probability mass function)** 或 **频率函数**.

注

离散型随机变量的概率质量函数包括两方面:

1. 随机变量的所有取值
2. 随机变量取各个值的概率

例题

将一枚硬币连抛三次，观察正、反面出现的情况，记 X 为正面出现的次数. 求 X 的概率质量函数.

解

X 的取值为 $0, 1, 2, 3$, 其样本空间为

$$\Omega = \{TTT\} \cup \{TTH, THT, HTT\} \cup \{THH, HTH, HHT\} \cup \{HHH\}.$$

故 X 的概率密度函数为

$$\mathsf{P}(X=0) = \frac{1}{8}, \quad \mathsf{P}(X=1) = \frac{3}{8}$$
$$\mathsf{P}(X=2) = \frac{3}{8}, \quad \mathsf{P}(X=3) = \frac{1}{8}.$$

问

频率函数有什么特点？**求和为 1**.

频率函数的性质

频率函数的基本性质

1. $p(x_k) \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = 1.$

第二点的证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X = x_k) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X = x_k\}\right) = \mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

两个方向理解基本性质

- 离散型随机变量的频率函数一定满足两个性质
- 满足两个性质的数列 $\{p_k\}$ 一定是某离散型随机变量的频率函数.

频率函数的几种表示方法

解析式法

$\mathsf{P}(X = x_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots$

列表法

分布列:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

矩阵法

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{bmatrix}$$

离散型随机变量的概率分布规律相当于向位于 x_k 处的“盒子”中扔球.

例

一球队要经过四轮比赛才能出线. 设球队每轮被淘汰的概率为 $p=0.5$. 记 X 表示球队结束比赛时的比赛场数, 求 X 的频率函数.

解

随机变量 X 的可能取值为 $1,2,3,4$. 记 A_k 为球队通过第 k 轮比赛的事件, $k=1,2,3,4$. 则由独立性,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(X=1) &= \mathsf{P}(\bar{A}_1)=p \\
\mathsf{P}(X=2) &= \mathsf{P}(A_1\bar{A}_2)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(\bar{A}_2)=(1-p)p \\
\mathsf{P}(X=3) &= \mathsf{P}(A_1A_2\bar{A}_3)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(\bar{A}_3)=(1-p)^2p \\
\mathsf{P}(X=4) &= \mathsf{P}(A_1A_2A_3)=(1-p)^3.
\end{aligned}
$$

代入 $p=0.5$, 所求的 X 之频率函数为

X	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.125

例

掷两个均匀的骰子，观测其点数，令 X 为两骰子点数之和．求

a) X 的频率函数

b) X 为奇数的概率．

解

a)

$X=k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b)

$$p_{odd} = \frac{2+4+6+4+2}{36} = \frac{1}{2}.$$

分布函数

思考

随机变量 $X = X(\omega)$ 是样本点 ω 的函数，是“随机函数”，不方便应用微积分工具. 怎样将“随机函数”化为“普通函数”?

观察

对于随机变量 X, $\forall x \in (-\infty, \infty)$, 集合

$$\{X \le x\} = \{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}$$

是事件.

定义

称函数 $F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$, $-\infty < x < \infty$, 为随机变量 X 的**累积分布函数 (CDF, cumulative distribution function)**, 简称**分布函数**.

注

随机变量的分布函数是关于自变量 x 的普通函数，它不再是随机的!

例题

设 X 的频率函数为

X	1	2	3
p_k	0.3	0.2	0.5

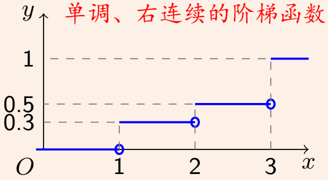
求 X 的分布函数.

解

由分布函数的定义有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \mathsf{P}(X \le x) = \mathsf{P}(\varnothing) = 0, \quad x < 1 \\
F(x) &= \mathsf{P}(X \le x) = \mathsf{P}(X = 1) = 0.3, \quad 1 \le x < 2 \\
F(x) &= \mathsf{P}(X \le x) = \mathsf{P}(X = 1,\ 2) = 0.5, \quad 2 \le x < 3 \\
F(x) &= \mathsf{P}(X \le x) = \mathsf{P}(\Omega) = 1, \quad 3 \le x.
\end{aligned}
$$

于是, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.3, & 1 \le x < 2, \\ 0.5, & 2 \le x < 3, \\ 1, & 3 \le x. \end{cases}$



分布函数的基本性质

$$F(x) = \mathsf{P}(X \le x), \quad -\infty < x < \infty.$$

分布函数的本质特征

1. $F(x)$ 是单调不减函数
2. $0 \le F(x) \le 1$ 且

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) := \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3. $F(x)$ 为右连续函数 (或右连左极, càdlàg),

$$F(x+0) := \lim_{t \to x+0} F(t) = F(x).$$

本质特征的含义

- 随机变量的分布函数必满足这三条性质
- 满足这三条性质的 $F(x)$ 必是某随机变量的分布函数.

概率测度的上连续性

对于单调递增的可列集合列 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

证明

令 $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$, 则 $B_1, B_2, \ldots$ 两两不相容且

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = A_n,\ \forall n; \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

由有限可加性及可列可加性,

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

概率测度的下连续性

对于单调递减的可列集合列 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

证明

令 $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $A_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. 则 $A_\infty, B_1, B_2, \ldots$ 两两不相容. 对任意 n, 有 $A_n = A_\infty \cup \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_n\Big)$. (若 $x \in A_n$, 则 k 为使得 $x \notin A_{k+1}$ 的最小指标.) 由可列可加性,

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(A_\infty) + \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(B_k).$$

特别地, 当 $n = 1$ 时, 右边无穷级数收敛, 因此其尾项级数满足 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(B_k) = 0$. 在前一恒等式取 $n \to \infty$ 极限即得结论.

分布函数本质特征证明 I

$F(x)$ 在 $\pm\infty$ 处极限

$$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

证明

由概率测度的下连续性,

$$F(-\infty) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\{\omega \mid X(\omega) \le -n\})$$
$$= \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \le -n\}\right) = \mathsf{P}(\varnothing) = 0.$$

由概率测度的上连续性,

$$F(+\infty) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\{\omega \mid X(\omega) \le n\})$$
$$= \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \le n\}\right) = \mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

分布函数本质特征证明 II

$F(x)$ 右连续性

$$\lim_{t\to x+} F(t) = F(x).$$

证明

由概率测度的下连续性,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathsf{P}(\{\omega \mid X(\omega) \le x\}) \\ &= \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) \le x + \frac{1}{n}\}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(x+\frac{1}{n}) = \lim_{t\to x+} F(t). \end{aligned}$$

区间概率

问

怎样利用分布函数计算概率

$$\mathsf{P}(a < X \leq b), \quad a < b?$$

分析

$$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$$
$$\Rightarrow \mathsf{P}(\{a < X \leq b\}) = \mathsf{P}(X \leq b) - \mathsf{P}(X \leq a) = F(b) - F(a).$$

单点概率

问

怎样计算概率 $\mathsf{P}(X=c)$ (c 为常数)?

分析

故

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X=c) &= \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{c-\frac{1}{n}<X\leq c\}\right) = \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(c-1/n<X\leq c)\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big[F(c)-F(c-1/n)\Big]\\ &= F(c)-F(c-0).\end{aligned}$$

注

若 $F(x)$ 在 $x=c$ 处连续, 则 $\mathsf{P}(X=c)=0$. 否则 $\mathsf{P}(X=c)>0$.

单点分布

定义

对常数 c, 如果随机变量 X 的频率函数为

$$\mathsf{P}(X=c)=1,$$

则称随机变量 X 服从单点分布.

注

- 严格说单点分布不具有 "随机性", 视为随机变量是为了理论上的需要.
- 单点分布有时也称为 "退化分布".

定义

某事件发生的概率为 1, 则称该事件 "几乎处处" (a.e.) 或 "几乎必然" (a.s.) 发生. 如

$$\mathsf{P}(X=c)=1 \quad\Rightarrow\quad X\overset{\text{a.e.}}{=}c,\ \text{or } X=c,\ \text{a.e.}$$

$$\mathsf{P}(X=Y)=1 \quad\Rightarrow\quad X\overset{\text{a.e.}}{=}Y,\ \text{or } X=Y,\ \text{a.e.}$$

两点分布 (伯努利随机变量)

定义

如果随机变量 X 的频率函数为

$$\mathsf{P}(X=1)=p, \quad \mathsf{P}(X=0)=1-p,$$

则称随机变量 X 服从**0-1 两点分布** 或 **Bernoulli 分布**, 其中 $0<p<1$ 为常数.

注

若一个试验只产生两个结果, 则可以用服从 Bernoulli 分布的随机变量来描述.

例子

- 一门课的考试是“及格”还是“不及格”.
- 刚出生的新生儿是“男”还是“女”.
- 产品检验的结果是“合格”还是“不合格”.
- 射击结果是“击中目标”还是“没击中目标”.

例: 收入分布

我国 2012 年家庭人均收入 R (千元) 分布如下:

R	1	2	4.5	9	15.9	25.8	34.3
收入低于 R 的家庭比例	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95

若规定家庭人均收入 2 千元为贫困线, 又令

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & R(\omega) \leq 2, \\ 0, & R(\omega) > 2. \end{cases}$$

则 X 服从参数为 0.15 的两点分布.

注

X 也可以看作某家庭是否是贫困家庭的 "示性函数" (indicator function):

$$X(\omega) = \mathbb{1}_{\{R(\omega)\ \text{在贫困以下}\}}(\omega).$$

伯努利试验与二项分布

伯努利试验

只产生两个结果 $A, \bar{A}$ 的试验.

伯努利试验产生两点分布.

n 重伯努利实验

将伯努利试验独立并重复进行 n 次的试验.

例

- 某战士用步枪对目标进行射击, 记 A 为击中目标的事件. 每次射击就是一个伯努利试验. 如果对目标进行 n 次射击, 则是一个 n 重伯努利试验.
- 从一批产品中随机抽取一个产品进行检验, 记 A 为产品合格的事件, 则每检验一个产品就是一个伯努利试验.

伯努利试验分析

在伯努利试验中, 令

$$\mathsf{P}(A) = p, \quad \mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - p$$

注

重复 每次试验中概率 $\mathsf{P}(A)$ 保持不变

独立 各次试验的结果互不影响.

记 A_i 为第 i 次试验成功的事件, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由独立性, 有

$$\mathsf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathsf{P}(A_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n.$$

定义

令 X 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 是一个离散型随机变量, 称为**二项分布**.

二项分布的频率函数

记 X 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数.

X 的取值为 $0, 1, 2, \ldots, n$.

二项分布的频率函数

$\{X = k\}$ 发生意味着 A 发生 k 次, $\bar{A}$ 发生 $(n-k)$ 次, 故由有限可加性

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(X = k) &= \mathsf{P}\left(\bigcup_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} A_{i_1} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \cdots \bar{A}_{j_{n-k}} \right) \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathsf{P}\left(A_{i_1} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \cdots \bar{A}_{j_{n-k}} \right) \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

定义

若随机变量 X 的频率函数为

$$\mathsf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n,\ q=1-p,$$

则称 X 服从参数为 (n,p) 的**二项分布**, 记为 $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$. 特别地, 当 $n=1$ 时, $\mathrm{Bin}(1,p)$ 就是两点分布, 即

$$\mathsf{P}(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1.$$

注

由牛顿二项式定理, 易见

$$\sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\big[p+(1-p)\big]^n=1.$$

最可能出现次数

问题

令

$$b(k;n,p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

考察当 n, p 固定时, $b(k;n,p)$ 随 k 的变化情况.

$$\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{n!/k!(n-k)!}{n!/(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{q}.$$

- 当 $k < (n+1)p$ 时, $b(k;n,p)$ 随 k 增加而增加.
- 当 $k = (n+1)p$ 时, $b(k;n,p) = b(k-1;n,p)$.

定义

$m = [(n+1)p]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数) 为**最可能出现次数**, $b(m;n,p)$ 为**中心项**.

例题

一大批电子元件有 10% 已经损坏. 若从这批元件中随机选取 20 只来组成一个线路, 问此线路能正常工作的概率是多少?

解

因为元件的数量很大, 所以取 20 只元件可看作是有放回抽样, 可以用 n 重伯努利试验刻画.
记 X 为 20 只元件中合格品的数量, 则 $X \sim \mathrm{Bin}(20, 0.9)$, 因此

$$\mathsf{P}(\text{线路正常}) \approx \mathsf{P}(X = 20) = 0.9^{20} \times 0.1^{0} = 0.9^{20} \approx 0.1216.$$

例题

已知 100 个产品中有 5 个次品，现从中有放回地取 3 次，每次任取 1 个. 求所取的 3 个中恰有 2 个次品的概率.

解

有放回地抽样是条件相同且独立的试验，它是伯努利试验. 设 X 为所取的 3 个中次品数，则由题意 $X \sim \mathrm{Bin}(3, 0.05)$，因此所求概率为

$$\mathsf{P}(X=2) = \binom{3}{2}(0.05)^2 0.95 = 0.007125.$$

注

若本例改为"无放回"，则此试验不是伯努利试验，只能用更一般的古典概型求解:

$$\mathsf{P}(X=2) = \frac{\binom{95}{1}\binom{5}{2}}{\binom{100}{3}} \approx 0.00618.$$

例: 加州抢动案 (60 年代)

据报道, 加州某地发生一起抢劫案. 目击嫌疑人有两个: 一个男的理平头黑人, 一个女的黑发梳马尾型. 不久抓到一对具有上述特征的夫妇 (情侣), 能否判断他们有罪?

有罪的论点

数学家通过计算机模拟, 得出一对夫妇具有一述特征的概率为 $p = 8.3 \times 10^{-8}$. 这是一个小概率事件. 陪审团在无其它证据的情况下, 裁决他们有罪.

无罪的论点

加州高院推翻了该裁决. 高院认为犯罪的认定应当具有唯一性. 用上列算式: 设 X 为具有上述特征的夫妇数, 则 $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. 要计算

$$\mathsf{P}\left(X > 1 \mid X \geq 1\right) = \frac{\mathsf{P}(X > 1)}{\mathsf{P}(X \geq 1)} = \frac{\mathsf{P}(X \geq 1) - \mathsf{P}(X = 1)}{\mathsf{P}(X \geq 1)} = \frac{1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}$$

n 的估计为 8.3×10^6, 而上式约为 0.2966, 不算小.

保险业的应用

保险业是最早应用概率论的行业之一. 保险公司为了估计企业的利润, 需要计算各种各样的概率.

例题

若某一年某类保险者里面每个人死亡的概率等于 0.005. 现有 10000 个人参加这类人寿保险. 试求在未来一年中在这些保险者里面:

1. 有 40 个人死亡的概率
2. 死亡人数不超过 70 个的概率.

解

记 X 为未来一年中在这些人中死亡的人数, 则 $X \sim \mathrm{Bin}(10000, 0.05)$.

1. $\mathsf{P}(X=40) = \binom{10000}{40} \times 0.005^{40} \times 0.995^{9960} \approx 0.0214$
2. $\mathsf{P}(X \leq 70) = \sum_{k=0}^{70} \binom{10000}{k} \times 0.005^{k} \times 0.995^{10000-k} \approx 0.997.$

例题

设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，且发生故障的概率是 0.01，且一台设备的故障只能由一个人处理．考虑两种配备维修工作的方法：第一种，由 4 个人维护，每人负责 20 台；第二种，由 3 个人共同维护 80 台．试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修概率的大小．

解

第一种情况 记 X_i 为同一时刻第 i 人维护的 2 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_i \sim \mathrm{Bin}(20, 0.01)$ 且相互独立．于是 80 台设备中发生故障而不能及时维修的概率为

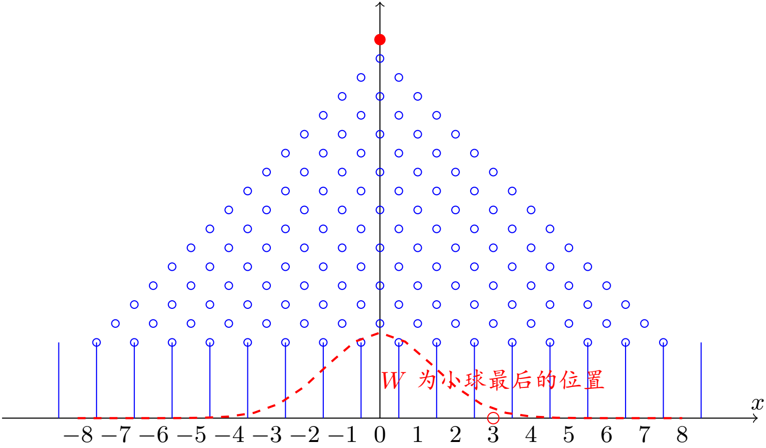
$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4}\{X_i \geq 2\}\right) \geq \mathsf{P}(X_1 \geq 2)$$

$$= 1 - \binom{20}{0}0.01^0 \times 0.99^{20} - \binom{20}{1}0.01^1 \times 0.99^{19} \approx 0.0169.$$

第二种情况 记 X 为 80 台设备中发生故障的台数，于是 $X \sim \mathrm{Bin}(80, 0.01)$．则 80 台设备中发生故障而不能及时维修的概率为

$$\mathsf{P}(X \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3}\binom{80}{k}0.01^k \times 0.99^{80-k} \approx 0.0087.$$

高尔顿钉板试验



共 16 层钉板，X 为小球向右的次数，则

$$X \sim \mathrm{Bin}(16, 0.5), \quad W = \big(X - (16 - X)\big)/2 = X - 8.$$

◂ 正态分布的应用

几何分布

定义

考虑不断重复进行成功率为 p 的伯努利试验，记 X 为第一次成功时所做的试验次数．称 X 为**几何分布**，记为 $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

频率函数

$X = k$ 表明第 1 至 $(k-1)$ 次试验失败，第 k 次试验成功．由试验的独立性，

$$p(k) = \mathsf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

归一性

由 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ (几何级数) 知，

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{1-(1-p)} \cdot p = 1.$$

负二项分布

定义

考虑不断重复进行成功率为 p 的伯努利试验. 记 X 为第 r 次成功时试验的次数，称 X 为**负二项分布**.

频率函数

$X = k$ 表示前 k 次试验中，第 r 次成功发生在第 k 次试验，其余 $(r-1)$ 次成功发生在前 $(k-1)$ 次试验中. 由独立性，所有这样的结果序列发生的概率为 $p^r(1-p)^{k-r}$. 由组合计数原理，这样的样本点一共有 $\binom{k-1}{r-1}$ 个，因此

$$p(k) = \mathrm{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \ldots$$

注

当 $r = 1$ 时，负二项分布就是几何分布.

负二项分布归一化

$$\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}=1.$$

负二项公式

$$(1+x)^{-r}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}x^k,\qquad \binom{-r}{k}=\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!}.$$

证明

$$1=p^r\frac{1}{[1-(1-p)]^r}=p^r\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-r}{m}(-1)^m(1-p)^m=p^r\sum_{k=r}^{\infty}\binom{-r}{k-r}(-1)^{k-r}(1-p)^{k-r}$$

其中

$$(-1)^{k-r}\binom{-r}{k-r}=(-1)^{k-r}\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-(k-r)+1)}{(k-r)!}=\binom{k-1}{k-r}$$

超几何分布

定义

假设盒中有 n 个球, 其中 r 个黑球, $(n-r)$ 个白球. 从盒中无重复地抽取 m 个球. 令 X 为抽到黑球的个数. 称 X 为参数 r, n, m 的超几何分布随机变量.

频率函数

所有的抽取都是等可能的, 适用于不考虑次序的古典概型, 因此

$$\mathsf{P}(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

归一性

Vandermonde 恒等式:

$$\binom{n}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{r}{k}\binom{n-r}{k}.$$

超几何分布与二项分布

超几何分布的极限

假设 $r, n \to \infty$, $r/n \to p$, 则

$$\frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}} \to \binom{m}{k} p^m (1-p)^{m-k}.$$

证明

注意到 m, k 为常数. 因此,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}} &= \frac{\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots\big(n-r-(m-k)+1\big)}{(m-k)!}}{\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}} \\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{r\cdots(r-k+1)\cdot(n-r)\cdots\big(n-r-(m-k)+1\big)}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} \\ &\sim \binom{m}{k} \frac{r^k (n-r)^{m-k}}{n^m} \to \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.\end{aligned}$$

例题

假定在美国 18 家主要计算机公司中，有 12 家位于加州的硅谷. 如果从这 18 家中随机抽取 3 家，则至少有 1 家位于硅谷的概率是多少?

解

令 X 为位于硅谷的公司的数量，则 X 服从参数为 $12, 18, 3$ 的超几何分布. 于是，所求为

$$\mathsf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathsf{P}(X = 0) = 1 - \frac{\binom{12}{0}\binom{6}{3}}{\binom{18}{3}} = 0.9755.$$

泊松流与泊松分布

泊松流

随着时间的推移，在时间轴上源源不断出现的“随机”粒子流称为泊松流.

典型的泊松流

- 随机服务系统
- 稀疏现象的发生
- 物理学中的现象

构造

可以想像把时间轴按 Δt 分成许多小段，每一段时间内独立地以某概率 $p = p(\Delta t)$ 出现粒子. 考虑 $\Delta t \to 0$ 的极限.

泊松分布

定义

设随机变量 X 的取值为 $0, 1, 2, \ldots$, 取值概率为

$$\mathsf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

其中 $\lambda > 0$ 为参数. 称 X 为服从参数为 λ 的**泊松分布**, 记为 $X \sim \pi(\lambda)$ 或 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

注

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

泊松分布的性质

- $\mathsf{P}(X = k) > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

泊松分布与泊松流的关系

泊松流的性质

在泊松流中，记时间间隔 $(0,t]$ 中出现的粒子数为 X，则 $X \sim \pi(\lambda t)$，即

$$\mathsf{P}(X=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

其中参数 $\lambda>0$ 称为**泊松强度**.

泊松定理

定理

设 $\lambda > 0$ 为一常数，n 为正整数，$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. 则对任一非负整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

应用

当 n 很大时，p 很小时，有如下估计

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}.$$

例题

已知某疾病发病率为 0.001，某单位共有 5000 人，问该单位患有这种疾病的人数不超过 5 人的概率.

解

设该单位患有这种疾病的人数为 X，则有 $X \sim \mathrm{Bin}(5000, 0.001)$. 利用泊松定理近似 $\lambda = np = 5$，计算得

$$\mathsf{P}(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5000}{k} 0.001^k 0.999^{5000-k} \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 0.616.$$

泊松分布的应用

- 在应用中, 诸如服务系统中对服务的呼叫数, 产品的缺陷 (如布匹上的疵点、玻璃内的气泡等) 数, 一定时期内出现的稀有事件 (如意外事故、自然灾害等) 个数, 放射性发射出的离子数等等, 都以泊松分布为其概率模型.
- 上述的模型都可以看作 n 大 p 小的二项分布, 由泊松分布, 可以近似为服从 $\lambda = np$ 的泊松分布.
- 泊松分布广泛用于社会生活的许多方面, 在运筹学、管理科学中占有突出的地位.

例题

如果某房地产公司每天售出 1.6 套住宅，且住宅销售量服从泊松分布．求以下事件的概率

1. 一天内恰好售出 4 套住宅；
2. 一天内没有售出住宅；
3. 一天售出 5 套以上住宅；
4. 每天至少售出 10 套住宅；
5. 两天内恰好售出 4 套住宅．

解

最后一问：根据泊松过程的构造，每两天售出的住宅仍服从泊松分布，且参数为 $1.6 \times 2 = 3.2$．因此所求概率为

$$\mathsf{P}(\pi(3.2) = 4) = e^{-3.2}\frac{(3.2)^4}{4!} = 0.1781.$$

例题

某人骑了自行车从学校到火车站，一路上要经过 3 个独立的交通灯．设各灯工作独立，且设各灯为红灯的概率为 p, $p \in (0,1)$．以 Y 表示一路上遇到红灯的次数．

1. 求 Y 的分布律；
2. 求恰好遇到两次红灯的概率．

分析

这是三重伯努利试验，$Y \sim \mathrm{Bin}(3, p)$.

解

1. $\mathsf{P}(Y = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
2. $\mathsf{P}(Y = 2) = 3p^2(1-p)$.

- P46: 1, 15, 31
- 补充题

(1) 设随机变量 X 的频率函数为 $\mathsf{P}(X=x)=c\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $x=1,2,3$. 求 c 的值.

(2) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 求 k 使得 $\mathsf{P}(X=k)$ 达到最大.

(3) 设在 15 只同类型零件中有 2 只为次品. 在其中取 3 次, 每次任取一只, 作不做回抽样, 以 X 表示出取出的次品个数. 求

1. X 的分布律;
2. X 的分布函数并作图;
3. $\mathsf{P}(X\le 1/2)$, $\mathsf{P}(1<X\le 3/2)$, $\mathsf{P}(1\le X\le 3/2)$; $\mathsf{P}(1<X<2)$.

(4) 有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了保险公司和人寿保险. 在一年中每个人死亡的概率为 0.002, 每个参加保险的人在 1 月 1 日须交 12 元保险费, 而在死亡时家属可从保险公司领取 2000 元赔偿金. 求

(1) 保险公司亏本的概率

(2) 保险公司获利分别不少于 10000 元、20000 元的概率.

分布函数回顾

分布函数

随机变量 X 的 (累积) 分布函数

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

分布函数的本质特征

1. $F(x)$ 单调不减
2. $F(x) \in [0,1]$ 且 $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1.$
3. $F(x)$ 右连续.

分布函数的应用

区间概率

$$\mathsf{P}(X \in (a,b]) = F(b) - F(a).$$

点概率

$$\mathsf{P}(X = c) = F(c) - F(c-0).$$

注

因为分布函数是一个普通的函数，所以可以应用微积分工具来研究随机现象.

连续型随机变量 (Continuous random variables)

定义

若随机变量 X 的分布函数能够表为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad f(x) = F'(x)$$

其中 $f(t) \geq 0$, 则称 X 为**连续型随机变量**. 非负可积函数 $f(t)$ 称为**概率密度函数 (probability density function, pdf)**.

微积分基本定理

假设 $F(x)$ 只有有限个点不可导, 且 $F'(x)$ 可积, 则牛顿-莱布尼茨公式成立:

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} F'(x)\,dx.$$

变上限积分

若 $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ 且 $f(x)$ 在 $x = c$ 处连续, 则 $F'(c) = f(c)$.

例题

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求 X 的密度函数.

解

在 $x=0$ 处 $F(x)$ 不可导, 除此之外我们有

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

因此 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

(补充几个不可导处的值不影响积分值!)

随机变量的类型

连续型随机变量 X 的分布函数可表为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

注

1. 连续型随机变量在区间上的取值是“连续的”.
2. 连续型随机变量的分布函数是连续函数, 且能表示成上述形式.

随机变量的类型

- 离散型随机变量
- 非离散型随机变量
  - 连续型随机变量
  - 奇异型随机变量 (singular random variables)

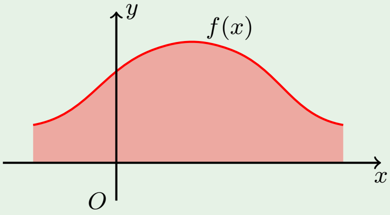
密度函数的性质 I

本质特征

1. $f(t) \geq 0$;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1.$

几何意义

图形在 x 轴上方，上方图形面积为 1



密度函数的性质 II

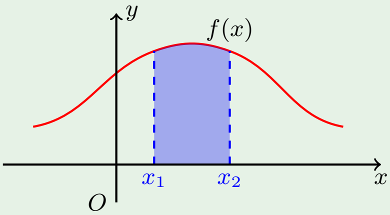
性质

对任意 $x_1 < x_2$，有

$$\mathsf{P}(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

几何意义

$\mathsf{P}(x_1 < X \le x_2)$ 等于曲边梯形面积.



密度函数的性质 III

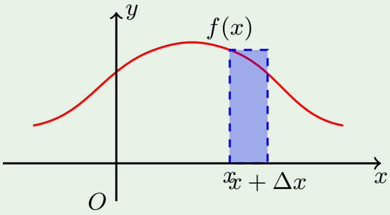
性质

在 $f(x)$ 的连续点处有

$$f(x) = F'(x).$$

几何意义

$\mathrm{P}(x < X \leq x + \Delta x)$ 近似于小矩形面积.



例题

设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^2}, & x>100,\\ 0, & x\le 100.\end{cases}$$

1. 确定常数 k, 并求 X 的分布函数 $F(x)$.
2. 计算概率 $\mathsf{P}(50<x\le 10000)$.

1. 概率密度函数积分为 1, 因此

$$1=\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{100}^{\infty}\frac{k}{x^2}\,dx=\frac{k}{100}\Rightarrow k=100.$$

对密度函数积分得到分布函数:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases}\displaystyle\int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}\,dt, & x>100,\\ 0, & x\le 100\end{cases}=\begin{cases}1-\dfrac{100}{x}, & x>100,\\ 0, & x\le 100.\end{cases}$$

2. $\mathsf{P}(50<X\le 1000)=\displaystyle\int_{50}^{1000}\frac{100}{x^2}\,dx=\frac{9}{10}.$

单点概率

性质

设 X 为连续型随机变量, c 为任意常数, 则 $\mathsf{P}(X=c)=0$.

分析

注意到连续型随机变量的分布函数是连续函数, 因此

$$\mathsf{P}(X=c)=F(c)-F(c-0)=0.$$

注

对于连续型随机变量 X, 有

$$\mathsf{P}(a<X\leq b)=\mathsf{P}(a\leq X\leq b)=\mathsf{P}(a\leq X<b)=\mathsf{P}(a<X<b).$$

密度函数的意义

问

设 X 为连续型随机变量, c 为任意常数, 那么 $\{X = c\}$ 是否是不可能事件?

答

否. $\{X = c\} \neq \varnothing$, 它只是发生概率为 0 的事件. 在概率论中 "不可能事件" 指的是空集.

密度函数的意义

- 密度函数 $f(x)$ 在某点 c 处的高度, 并不反映 X 取值的概率. 但是, 这个高度越大, 则 X 取 c 附近的值的概率就越大.
- 也可以说, 在某点密度曲线的高度反映了概率集中在该点附近的程度.

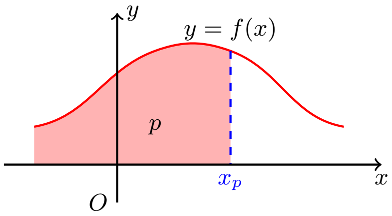
p-分位数

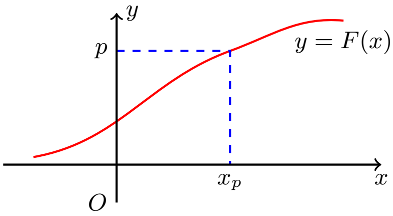
定义

设 $X \sim f(x)\,dx$. 若对 $p \in (0,1)$, 存在常数 x_p 满足

$$\mathsf{P}(X \le x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x)\,dx = p, \text{ or } F(x_p) = p,$$

则称 x_p 为密度函数 $f(x)$ 的 **p-分位数 (quantile)**. 特别地, 取 $p = 1/2,\ 1/4,\ 3/4$ 时, 称 x_p 为**中位数 (median), 下、上四分之一分位数**.





正态分布

定义

如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

其中 $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, 则称 X 服从参数为 (μ, σ^2) 的**正态分布**, 记为 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

归一性的验证

作 $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 的换元:

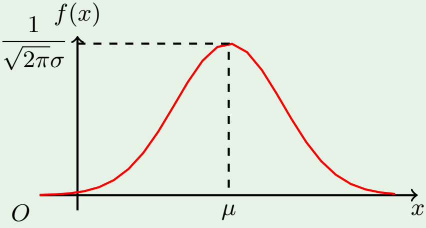
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,dudv\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,dr\right]^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

正态分布密度函数的性质

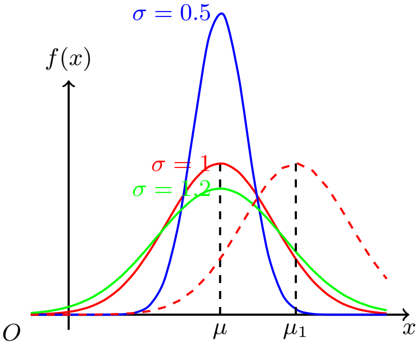
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

性质

- $f(\mu + x) = f(\mu - x)$, 即 $y = f(x)$ 关于 $x = \mu$ 对称.
- 当 $x < \mu$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x) \uparrow$; 当 $x > \mu$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x) \downarrow$. 因此, $f(x)$ 在 $x = \mu$ 处取最大值 $f(\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, 即 $y = f(x)$ 以 x 轴为渐近线.



参数与图像的关系



μ: 位置参数, σ: 刻度参数

- μ 由小变大: 图形向右平移, 形状不变
- μ 由大变小: 图形向左平移, 形状不变
- σ 由小变大: 图形变平坦
- σ 由大变小: 图形变尖锐

正态分布的应用

实际背景

自然界中许多指标都服从或近似服从正态分布

例

- 一个班的某门课程考试成绩
- 海浪的高度
- 一个地区的日耗电量
- 各种测量的误差
- 炮弹弹着点
- 高尔顿钉板试验

正态分布的发现

为什么叫正态分布?

正态分布密度呈现 “中间高, 两头低” 的形态, 它描述了自然界大量存在的随机现象. 所以正态分布是自然界的一种 “正常状态 (normal)” 的分布.

正态分布的发现

正态分布是德国数学家高斯 (Gauss) 在研究误差理论时得到的, 故正态分布也称为**高斯分布**.

服从正态分布的指标特点

一般地说, 若影响某一数量指标的随机因素很多, 而每个因素所起的作用都不太大时, 这个指标服从正态分布.

标准正态分布

定义

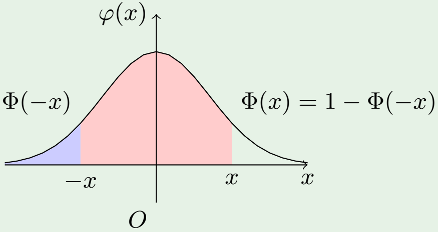
当 $\mu=0$, $\sigma=1$ 时, 称为**标准正态分布**, 记为

$$X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

其概率密度函数和分布函数分别为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

$\Phi(x)$ 的值通常可查表得到.



$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 与 $\mathcal{N}(0,1)$ 的关系

引理

若 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

证明

一个随机变量的分布唯一地由它的分布函数决定. 我们有如下关于 Z 的分布函数的计算:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathsf{P}(Z \le z) = \mathsf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) \\
&= \mathsf{P}(X \le \sigma z + \mu) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= \Phi(z).
\end{aligned}
$$

例题

从某地乘车往火车站有两条路可选. 第一条路线穿过市区, 路程较短但交通拥挤, 所需时间 $X \sim \mathcal{N}(50, 100)$; 第二条路径走环线, 路程较远但意外阻塞较少, 所需时间 $X \sim \mathcal{N}(60, 16)$.

1. 若有 70 分钟时间可用, 问应走哪条路线?
2. 若只有 65 分钟时间可用, 又应走哪条路线?

分析

我们应该保证准时到达的概率尽量大.

解

	路线 I: $\mathcal{N}(50, 100)$	路线 II: $\mathcal{N}(60, 16)$
70 分钟	$\Phi\left(\frac{70-50}{10}\right) = \Phi(2)$	$\Phi\left(\frac{70-60}{4}\right) = \Phi(2.5)$
65 分钟	$\Phi\left(\frac{65-50}{10}\right) = \Phi(1.5)$	$\Phi\left(\frac{65-60}{4}\right) = \Phi(1.25)$

例题

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 求下列概率值:
$\mathsf{P}(|X-\mu| \le \sigma)$, $\mathsf{P}(|X-\mu| \le 2\sigma)$, $\mathsf{P}(|X-\mu| \le 3\sigma)$.

分析

由引理知, $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$

解

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(|X-\mu| \le \sigma) &= \mathsf{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826 \\
\mathsf{P}(|X-\mu| \le 2\sigma) &= \mathsf{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= 2\Phi(2) - 1 = 0.9544 \\
\mathsf{P}(|X-\mu| \le 3\sigma) &= \mathsf{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \le 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) \\
&= 2\Phi(3) - 1 = 0.9974
\end{aligned}$$

3σ-原则

正态分布的值几乎都落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 内.

数据校验与数据“稳健性”

例题

在某体育比赛中，设裁判给运动员的表演打的分数服从 $\mathcal{N}(\mu, 0.2^2)$ 的正态分布，其中 μ 为运动员真实的成绩. 已知 4 位裁判的分数分别为 6.8, 6.7, 7.1, 8.6. 请问这些分数是否公正?

分析

我们可以利用 3σ-原则进行判断. 这里参数 μ 未知，我们考虑用样本均值代替.

解

假设评分是公正的，那么 $\mu \approx \hat{\mu} = (6.8 + 6.7 + 7.1 + 8.6)/4 = 7.33$. 然而 $|8.6 - \hat{\mu}| = 1.27 > 3\sigma = 0.6$, 根据 3σ-原则这是几乎不可能发生的，因此认为假设不成立. 所以评分是不公正的.

注

在体育比赛中常常会去掉一个最高分和最低分，取余下的平均分作为最终的得分.

例题

公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在 0.01 以下来设计的. 设男子身高 $X \sim \mathcal{N}(170, 6^2)$ (单位: cm). 问车门高度如何确定?

分析

设车门高度为 h, 则 $\mathsf{P}(X \geq h) \leq 0.01$, 也即 $\mathsf{P}(X < h) \leq 0.99$. 我们用标准正态分布来求 h.

解

因为 $X \sim \mathcal{N}(170, 6^2)$,

$$\mathsf{P}(X < h) = \mathsf{P}\left(\frac{X - 170}{6} < \frac{h - 170}{6}\right) = \Phi\left(\frac{h - 170}{6}\right).$$

查表得 $\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.9$, 因而 $\dfrac{h - 170}{6} > 2.33 \Rightarrow h \geq 170 + 13.89 \approx 184.$

均匀分布

定义

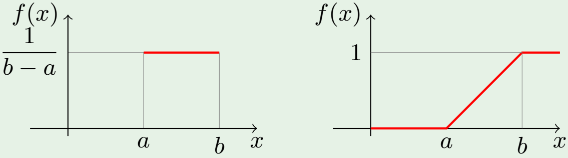
如果随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{else}, \end{cases}$$

则称 X 服从区间 (a, b) 上的**均匀分布 (Uniform distribution)**, 记为 $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

注

- 易见 $f(x) \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = 1$. 因此 $f(x)$ 满足密度函数的本质特征.
- 均匀分布的密度函数与分布函数图像



均匀分布与几何概型

均匀分布的“等可能性”

对任意 $(c, c+L) \subset (a,b)$ 有

$$\mathsf{P}(c < X < c+L) = \int_c^{c+L} \frac{dx}{b-a} = \frac{L}{b-a}$$

即 X 落在 $(c, c+L)$ 的概率只与区间长度有关，而与位置无关. 这反映了某种“等可能性”，即随机变量 X 在区间 (a,b) 上“等可能取值”.

注

若 $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ 为连续型随机变量，c 为常数，则 $\mathsf{P}(X = c) = 0$.

例题

将长度为 2ℓ 的木棒任意截为两段. 求这两段木棒与另一长度为 ℓ 的木棒能构成三角形的概率.

分析

三条边 a, b, c 能组成三角形当且仅当 $a+b>c,\ a+c>b,\ b+c>a$.

解

设两段木棒长度为 X 与 $2\ell - X$, 其中 $X \sim \mathrm{U}(0, 2\ell)$. 则组成三角形当且仅当

$$X+\ell > 2\ell - X,\ 2\ell - X + \ell > X \quad \Leftrightarrow \quad \ell/2 < X < 3\ell/2.$$

因此所求概率为 $\mathsf{P}(\mathrm{U}(0,2\ell) \in (\ell/2, 3\ell/2)) = \displaystyle\int_{\ell/2}^{3\ell/2} \frac{1}{2\ell}\,dx = \frac{1}{2}.$

例题

设随机变量 X 在 $(2,5)$ 上服从均匀分布. 现对 X 进行 3 次独立观测. 求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解

因为随机变量 $X \sim \mathrm{U}(2,5)$, 所以

$$\mathsf{P}(X > 3) = \int_3^5 \frac{1}{3}\, dx = \frac{2}{3}.$$

于是 3 次观测中每次观测到大于 3 的概率为 $2/3$. 易见此为 3 重伯努利试验. 令 Y 为观测值大于 3 的次数, 则 $Y \sim \mathrm{Bin}(3, 2/3)$. 于是所求概率为

$$\mathsf{P}(Y \geq 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}.$$

指数分布

定义

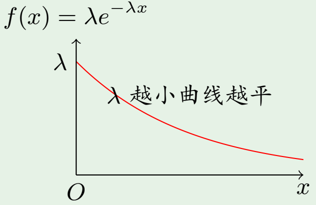
如果随机变量 X 的密度函数为

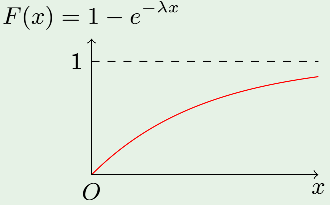
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的**指数分布**，记为 $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

注

- $f(x)\ge 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=1$, 所以 $f(x)$ 确实是密度函数.
- 密度函数与分布函数





指数分布与泊松分布

泊松粒子流回顾

在 $(0,t]$ 中出现的质点数服从参数为 λt 的泊松分布. λ 称为**泊松强度**.

性质

第一个质点出现的时间 T 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

证明

$$\mathsf{P}(T>t)=\mathsf{P}(\pi(\lambda t)=0)=e^{-\lambda t},$$

故 T 的分布函数为 $F(t)=1-e^{-\lambda t}$. 这也是 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ 的分布函数.

参数 λ 的意义

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}(x).$$

λ 的意义

参数 λ 称为**失效率**, λ^{-1} 表示**平均寿命**.

指数分布的实际背景

指数分布通常用来描述“寿命”的分布. 如:

- 电子元件的寿命,
- 电话的通话时间,
- 机器的修理时间,
- 营业员为顾客提供的服务时间.

指数分布广泛用于可靠性理论和排队论.

指数分布的“无记忆性”

无记忆性

设 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 则

$$\mathsf{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathsf{P}(X > t).$$

即: 已知寿命长于 s 的情况下, 再活时间 t 的概率与 s 无关.

证明

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X > s + t \mid X > s) &= \frac{\mathsf{P}(X > s + t, X > s)}{\mathsf{P}(X > s)} \\
&= \frac{\mathsf{P}(X > s + t)}{\mathsf{P}(X > s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathsf{P}(X > t).
\end{aligned}$$

注

指数分布是唯一具有“无记忆性”的连续型随机变量. 几何分布是唯一具有“无记忆性”的离散型随机变量.

例题

假定自动取款机对每位顾客的服务时间 (单位: 分钟) 服从 $\lambda = 1/3$ 的指数分布. 如果有一顾客恰好在你前面走到空闲的取款机, 求:

1. 你至少等候 3 分钟的概率.
2. 你等候时间在 3 分钟至 6 分钟之间的概率.

解

以 X 表示你的等待时间, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则

1. $\mathsf{P}(X \geq 3) = 1 - F(3) = e^{-3\lambda} = e^{-1}$.
2. $\mathsf{P}(X \in (3,6)) = F(6) - F(3) = (1 - e^{-6\lambda}) - (1 - e^{-3\lambda}) = e^{-1} - e^{-2}$.

注

若你到达时取款机正在为一名顾客服务, 但你不知道这名顾客已经被服务的时间, 结果又如何?

由无记忆性, 问题的答案不变.

Gamma 分布的导出

问

已知泊松流中第 1 个粒子出现的时间服从指数分布. 那么第 r 个粒子出现的时间服从什么分布?

答

以 X 记第 r 个粒子出现的时间, 则 $\{X > t\}$ 表明 $(0, t]$ 中至多有 $(r-1)$ 个粒子. 因此

$$R(t) = \mathsf{P}(X > t) = \mathsf{P}(\pi(\lambda t) = 0, 1, \ldots, r-1) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

因此 X 的密度函数为

$$f(t) = -R'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Gamma 分布

定义

若连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

其中 $r, \lambda > 0$ 为参数，则称 X 服从参数为 (r, λ) 的**Γ-分布**，记为 $X \sim \Gamma(r, \lambda)$. 特别地，$\Gamma(1, \lambda) = \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Gamma 函数

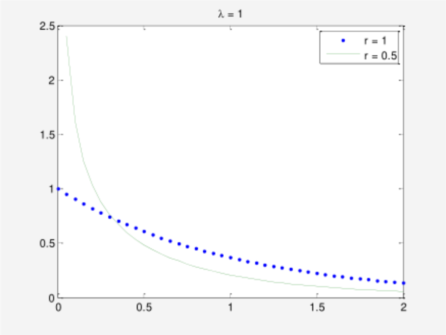
这里

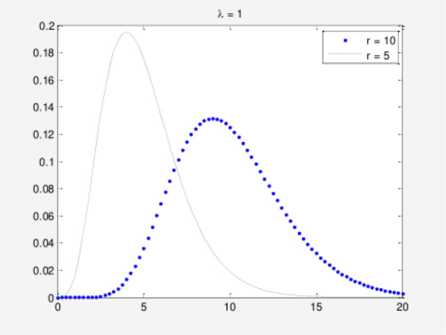
$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx, \quad r > 0.$$

特别地，当 r 为自然数时，$\Gamma(r) = (r-1)!$.

Gamma 分布参数的意义

r: 形状参数. λ: 尺度参数.





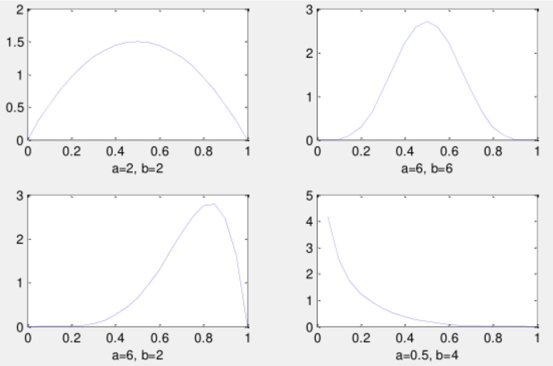
Beta 分布

若连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(u)=\mathbb{1}_{(0,1)}\frac{1}{B(a,b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1}$$

其中 $B(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ 为 Beta 函数, 则称 X 服从参数为 (a,b) 的**Beta 分布**, 记为 $X\sim \mathrm{Beta}(a,b)$.

特别地, 当 $a=b=1$ 时, Beta 分布为 $(0,1)$ 上均匀分布.



地震的概率模型

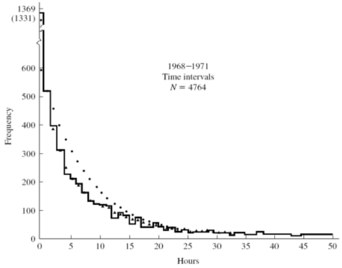


FIGURE 2.12 Fit of gamma density (triangles) and of exponential density (circles) to times between microearthquakes.

指数模型的解释

即使知道上 t 个时间单位内没有地震，也无法预知下 s 个时间单位内发生地震的概率.

Gamma 模型的解释

对于任意一次地震，下一次地震紧跟其后的可能性非常大，并且这种可能性随时间单调下降.

离散型与连续型随机变量的形式统一性

- 设离散型随机变量 X 的频率函数为 $\mathsf{P}(X=x_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots$. 我们改写为

$$p(x)=\mathsf{P}(X=x),\quad x=x_1,x_2,\ldots$$

- 设连续型随机变量的密度函数为 $f(x)$, 则有 $f(x)\,dx\approx\mathsf{P}(X\in(x,x+dx))$.

对应关系

离散型	连续型
$p(x)$	$f(x)\,dx$
$\sum$	$\int$

例

$$\sum_x p(x)=1\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1.$$

概率函数

定义

对于随机变量 X, 它的**概率函数**是指**频率函数** (X 为离散型时) 或**密度函数** (X 为连续型时).

注

- 概率函数表述了离散型随机变量与连续型随机变量的形式统一性.
- 用概率函数来表示, 许多公式既适用于离散型也适用于连续型.

应用中如何确定随机变量的分布?

1. 确定它是离散型或是连续型
2. 根据随机变量的来源确定它的分布形式: 正态分布、均匀分布、指数分布、泊松分布、二项分布等等
3. 进一步检验某随机变量的分布, 并且给出分布参数 — **"分布检验" 与 "参数估计"**.

例题

一批钢材 (线材) 长度 X (cm) $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. 若 $\mu = 100$, $\sigma = 2$, 求这批钢材小于 97.8 cm 的概率.
2. 若 $\mu = 100$, 要使这批钢材的长度至少有 90% 落在区间 $(97, 103)$ 内, 问 σ 至多取何值?

解

1. $\mathrm{P}(X < 97.8) = \Phi\left(\dfrac{97.8 - 100}{2}\right) = 1 - \Phi(1.1) = 1 - 0.8643 = 0.1357.$
2. 令 $\mathrm{P}(97 < X < 103) \geq 0.9$, 则

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{103 - 100}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{97 - 100}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.9 \\
&\Rightarrow \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) \geq 0.95 \Rightarrow \frac{3}{\sigma} \geq 1.645 \\
&\Rightarrow \sigma \leq 1.8237.
\end{aligned}
$$

例题

在区间 $(-1,2)$ 上随机取一数 X. 试写出 X 的概率密度, 并求 $\mathsf{P}(X>0)$ 的值.
若在该区间上随机取 10 个数, 求这 10 个数中恰有两个数大于 0 的概率.

分析

X 服从 $\mathrm{U}(-1,2)$. 大于 0 的个数 $Y \sim \mathrm{Bin}(10,p)$, $p=\mathsf{P}(X>0)$.

解

X 服从 $(-1,2)$ 上的均匀分布, 所以其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

易见 $\mathsf{P}(X>0)=\frac{2}{3}$. 因此 $Y \sim \mathrm{Bin}(10,2)$. 故 $\mathsf{P}(Y=2)=\binom{10}{2}\frac{2^2}{3^{10}}$.

- P48: 33, 40, 45, 52, 53
- 补充题
  1. 已知随机变量 X 的密度函数为
     $$f(x) = Ae^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$
     求:
     (1) A 的值;
     (2) $\mathsf{P}(0 < X < 1)$;
     (3) $F(x)$.
  2. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X (以分钟计) 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(1/5)$. 某顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟他就离开. 他一个月要来银行 5 次, 以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数. 试写出 Y 的分布律, 并求 $\mathsf{P}(Y \geq 1)$.

实际例子

- 若要得到一个圆的面积 Y, 总是测量其半径, 半径的测量值可看作随机变量 X. 若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \pi X^2$ 的分布是什么?
- 若已知体重 W (kg) 服从正态分布. 在身高 L (m) 确定的情形下, 体质指数 $\mathrm{BMI} = W/L^2$ 服从什么分布?

抽象化的问题

已知随机变量 X 的分布, 考虑一个新的随机变量 $Y = g(X)$, 其中函数 $g(\cdot)$ 已知. 求 Y 的分布.

例题

已知 X 有概率分布

X	-1	0	1
p_i	0.2	0.5	0.3

令 $Y = X^2$. 求 Y 的概率分布.

分析

Y 的所有可能取值为 $0, 1$, 因此是一个离散型随机变量. 我们只需要求出 $Y = 0$ 或 1 的概率就能得到分布列.

解

$$\mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{P}(X=0) = 0.5,$$
$$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}\big(\{X=1\} \cup \{X=-1\}\big) = \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=-1) = 0.2 + 0.3 = 0.5.$$

离散型 $\to$ 离散型

引理

设随机变量 X 的频率函数为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y=g(X)$ 的频率函数为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

(若有些 $g(x_k)$ 值相同，则把相应的概率值合并相加！)

连续型 → 离散型

例子

设随机变量 $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, 定义

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 < X \leq 0.25, \\ 1, & 0.25 < X \leq 0.75, \\ 2, & 0.75 < X < 1. \end{cases}$$

求随机变量 Y 的频率函数.

分析

Y 的取值为 $0,1,2$, 是离散型随机变量. 我们只需要求出 $\mathsf{P}(Y=0)$, $\mathsf{P}(Y=1)$, $\mathsf{P}(Y=2)$ 的概率即可.

解

由 $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ 及 Y 的定义知

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y=0) &= \mathsf{P}(0<X\le 0.25)=\int_0^{0.25} 1\cdot dx = 0.25 \\
\mathsf{P}(Y=1) &= \mathsf{P}(0.25<X\le 0.75)=0.50 \\
\mathsf{P}(Y=2) &= \mathsf{P}(0.75<X<1)=0.25.
\end{aligned}$$

因此，Y 的频率函数为

Y	0	1	2
p_k	0.25	0.50	0.25

例题 (儿童智商)

设儿童智商 $X \sim \mathcal{N}(100, 100)$. 将儿童按智商分为 3 类, 类标号 Y 规定如下:

$$Y = \begin{cases} 1, & X > 110, \\ 0, & 90 < X \leq 110, \\ -1, & X \leq 90. \end{cases}$$

求 Y 的频率函数.

解

Y	-1	0	1
p_k	0.16	0.68	0.16

小结

$Y = g(X)$ 的概率分布

若 Y 为离散型, 则先写出 Y 的可能取值 $y_1, y_2, \ldots, y_j,$, 再找出 $\{Y = y_j\}$ 的等价事件 $\{X \in I\}$. 最后用 $\mathsf{P}(Y = y_j) = \mathsf{P}(X \in I)$ 求解频率函数.

关键

找出 “等价事件”!

例题

设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \frac{x}{8}\mathbb{1}_{(0,4)}(x).$$

求随机变量 $Y = 2X + 8$ 的密度函数.

分析

我们利用“等价事件”求得 Y 的分布函数，再对其求导得到密度函数.

解

Y 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \le y) = \mathsf{P}(2X + 8 \le y) \\ &= \mathsf{P}(X \le (y-8)/2) = F_X\left(\frac{y-8}{2}\right) := F_X\big(g^{-1}(y)\big), \end{aligned}$$

其中 $g^{-1}(y) = (y-8)/2$. 因此

$$f_Y(y) = f_X\big(g^{-1}(y)\big)\big(g^{-1}(y)\big)' = \begin{cases} \frac{1}{8}\cdot\frac{y-8}{2}\cdot\frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \frac{y-8}{32}\mathbb{1}_{(8,16)}(y).$$

线性变换

问题

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$, 随机变量 $Y = a + bX$. 求 Y 的概率密度函数.

分析

$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \le y) = \mathsf{P}(a + bX \le y)$. 这里等价事件的处理需要区分 $b > 0$ 与 $b < 0$ 的情况.

解

$$b > 0 \quad F_Y(y) = \mathsf{P}\left(X \le \frac{y-a}{b}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}} f_X(x)\,dx, \text{ 因此}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{b} \cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

$$b < 0 \quad F_Y(y) = \mathsf{P}\left(X \ge \frac{y-a}{b}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}} f_X(x)\,dx. \text{ 因此}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = -\frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

流程总结

如何求 $Y = g(X)$ 的概率密度函数

1. 求随机变量 Y 的分布函数 $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \le y)$.
2. 转化为关于随机变量 X 的概率计算问题.
   需用到函数 $y = g(x)$ 的性质!
3. 求导 $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

$g(x)$ 单调增情形

问题

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$, $y = g(x)$ 单调增且处处可导, 求随机变量 $Y = g(x)$ 的概率密度函数.

解

$$F_Y(y) = \mathsf{P}(X \le g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx.$$

由链式法则求导得

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left[g^{-1}(y)\right]'.$$

讨论

- 若随机变量 X 有取值范围 (a, b), 则 $f_Y(y)$ 有定义域 $g(a) < y < g(b)$.
- 要求 $y = g(x)$ 严格递增, 才能保证 $g^{-1}(y)$ 存在.
- 若 $y = g(x)$ 严格递减, 有什么结论?

$$f_Y(y) = -f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left[g^{-1}(y)\right]' = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|.$$

定理

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 又设 $y=g(x)$ 为严格单调函数 (严格增或严格减), 其反函数 $h(y)=g^{-1}(y)$ 连续可导. 则 $Y=g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} |h'(y)|\cdot f\big(h(y)\big), & h(y)\ \text{有意义} \\ 0, & \text{, 其它.} \end{cases}$$

定理的应用

例子

设 $X \sim \mathrm{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 求 $Y = \tan x$ 的密度函数.

解

记 $y = \tan x$, 则 $h(y) = \arctan y$, $h'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$, $-\infty < y < \infty$. 于是, Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = |h'(y)| \cdot f_X\big(h(y)\big) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad -\infty < y < \infty.$$

注

上述分布称为 Cauchy 分布.

正态分布的线性变换

例题

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. 求 $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$ 的密度函数.

解

记 $y = ax + b$, 则 $h(y) = \dfrac{y-b}{a}$, $h'(y) = \dfrac{1}{a}$, $-\infty < y < \infty$. 于是 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = |h'(y)| \cdot f_X\big(h(y)\big) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left((y-b)/a-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{-\frac{\left[y-(a\mu+b)\right]^2}{2(|a|\sigma)^2}}.$$

即 $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.

注

正态分布对线性变换封闭.

股票价格

例题

考虑时间 u 后的股票价格 S_u，已知 $S_u = S_0 e^{X_u}$，$X_u \sim \mathcal{N}(u\mu, u\sigma^2)$，$S_0$ 为常数. 求 S_u 的密度函数 $F_S(s)$.

解

$h(S) = \ln \dfrac{S}{S_0}$, $h'(S) = \dfrac{1}{S}$. 故

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}\sigma s} e^{-\frac{\left(\ln \frac{s}{S_0} - u\mu\right)^2}{2u\sigma^2}}.$$

注

称 $\dfrac{S_u}{S_0}$ 服从参数为 $(u\mu, u\sigma^2)$ 的对数正态分布，记为 $\mathrm{LN}(u\mu^2, u\sigma^2)$.

例题

设 $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

分析

这里 $y = e^x$ 的反函数是 $h(y) = \ln y$, $1 < y < e$, **因为** $x \in (0,1)$.

解

Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| \cdot f_X\big(h(y)\big), & 1 < y < e, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \frac{1}{y}\mathbb{1}_{(1,e)}(y).$$

直接计算法

解二

Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}(e^X \leq y)$$
$$= \begin{cases} 1, & y \geq e, \\ \displaystyle\int_0^{\ln y} 1 \cdot dx = \ln y, & 1 < y < e, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases}$$

因此

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{y} \mathbb{1}_{(1,e)}(y).$$

非单调 $y = g(x)$ 的例子

问题

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$, 随机变量 $Y = X^2$. 求 Y 的概率密度函数.

分析

这里我们应该直接处理等价事件.

解

Y 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \le y) = \mathsf{P}(X^2 \le y) \\ &= \mathsf{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\, dx. \end{aligned}$$

注意到此时积分上、下限均依赖于 y, 因此

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y})[\sqrt{y}]' - f_X(-\sqrt{y})[-\sqrt{y}]'.$$

讨论

分段单调性

函数 $y = g(x) = x^2$ 的分段严格单调的:

- $y = g_1(x) = x^2$, $x > 0$, 严格递增
- $y = g_2(x) = x^2$, $x < 0$, 严格递减

易见 $g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, 且

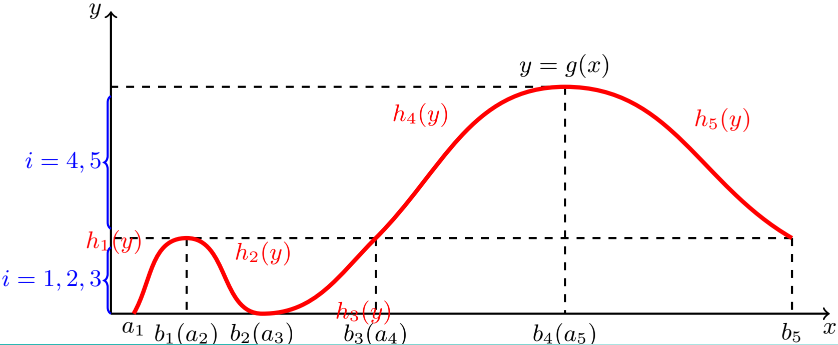
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(g_1^{-1}(y)\right)\left[g_1^{-1}(y)\right]' - f_X\left(g_2^{-1}(y)\right)\left[g_2^{-1}(y)\right]' \\ &= \sum_{k=1}^{2} f_X\left(g_k^{-1}(y)\right)\left|\left[g_k^{-1}(y)\right]'\right|. \end{aligned}$$

推广的定理

定理

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 又设函数 $g(x)$ 在互不相交的区间 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ 上逐段严格单调, 且其反函数 $h_1(y), h_2(y), \ldots$ 均连续可导. 则 $Y = g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \sum_{i:h_i(y)\ \text{有意义}} |h_i'(y)| \cdot f\big(h_i(y)\big).$$



例题

设 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 求 $Y = X^2$ 的密度函数.

解

记 $g(x) = x^2$, 则 $g(x)$ 在 $x < 0$ 时单调减少, 在 $x > 0$ 时单调增加. 其反函数为 $h_1(y) = -\sqrt{y}$, $h_2(y) = \sqrt{y}$, $y > 0$ 且

$$h_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad h_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

因此 Y 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \Big[|h_1'(y)| \varphi\big(h_1(y)\big) + |h_2'(y)| \varphi\big(h_2(y)\big) \Big] \\ &= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \\ &= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}. \end{aligned}$$

设定

设随机变量 X 的密度为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$. 假设 $F(x)$ 在某区间 I 上严格递增, 在 I 的左端点处 $F=0$, 在右端点处 $F=1$. I 可以是有界区间或无界区间. F^{-1} 定义在 $(0,1)$ 上.

命题 1

令 $Z=F(X)$, 则 $Z\sim \mathrm{U}(0,1)$.

证明

$$\mathsf{P}(Z\le z)=\mathsf{P}(F(X)\le z)=\mathsf{P}(X\le F^{-1}(z))=F\big(F^{-1}(z)\big)=z.$$

命题 2

令 $U \sim \mathrm{U}(0,1)$, $X = F^{-1}(U)$, 那么 X 的分布函数是 $F(x)$.

证明

$$\mathsf{P}(X \le x) = \mathsf{P}(F^{-1}(U) \le x) = \mathsf{P}(U \le F(x)) = F(x).$$

应用

生成给定分布的随机变量

要生成分布函数为 $F(x)$ 的随机变量，只需先利用伪随机数生成器生成 $(0,1)$ 上的均匀分布，再将 F^{-1} 作用在上面即可.

例

为生成来自于指数分布的随机变量 T，可以取

$$T = -\frac{1}{\lambda}\ln V, \quad V \sim \mathrm{U}(0,1).$$

例题

设

X	-1	0	1
p	1/3	1/3	1/3.

令 $Y = 2X$, $Z = X^2$, 求 Y, Z 的概率分布.

分析

Y 的可能取值为 $-20, 2$, Z 的可能取值为 $0, 1$. 它们都是离散型随机变量. 我们考察对应的等价事件求解.

解

Y	-2	0	2
p	1/3	1/3	1/3.

Z	0	1
p	1/3	2/3.

例题

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解

$y = g(x) = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, $g'(x) = \dfrac{1}{\sigma} > 0$, $x = h(y) = \sigma y + \mu$. 于是

$$f_Y(y) = \sigma f_X(\sigma y + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

(即 $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.)

注: 正态分布对线性变换的封闭性

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad Y = aX + b \qquad \Longrightarrow \qquad Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

例题

设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 $Y = X^2$ 的密度函数.

解

显然 $Y \in (0, 16)$. 对 $y \in (0, 16)$, 我们有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \le y) = \mathsf{P}(X^2 \le y) = \mathsf{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\, dx \\ &= \frac{x^2}{16}\Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{y}{16}. \end{aligned}$$

因此 $f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,16)}(y) \cdot \frac{1}{16}$, 即 $Y \sim \mathrm{U}(0, 16)$.

例题

若 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 $Y = X^3$ 的密度函数.

解

$y = g(x) = x^3$, $x = y^{1/3} = h(y)$, $h'(y) = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}$. 所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| \cdot f_X\big(h(y)\big) = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}y^{-1/3}, & 0 < y < 64, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

章节复习思考题

1. 什么量被称为随机变量? 它与样本空间的关系如何?
2. 满足什么条件的试验被称为 “ n 重伯努利试验”?
3. 事件 A 在一次试验中发生的概率为 p, $0<p<1$. 若 n 次独立重复的试验中, A 发生的总次数为 X, 则 X 服从什么分布? 导出 X 的分布律.
4. 什么条件下使用泊松近似公式较为合适?
5. 什么样的随机变量称为连续型的?
6. 若事件 A 为不可能事件, 则 $\mathsf{P}(A)=0$, 反之成立吗? 又若 A 为必然事件, 则 $\mathsf{P}(A)=1$, 反之成立吗?
7. 若连续型随机变量 X 在某一区间上的概率密度为 0, 则 X 落在该区间的概率为 0, 对吗?
8. 若随机变量 X 在区间 (a,b) 上均匀分布, 则 X 落入 (a,b) 的任意一个子区间 (a_1,b_1) 上的概率为 $\dfrac{b_1-a_1}{b-a}$, 对吗?
9. 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则 X 的密度函数 $f(x)$ 在 $x=\mu$ 处值最大, 因此 X 落在 μ 附近的概率最大, 对吗?

- P49: 54, 59, 64
- 补充题:
  1. 设随机变量 X 的频率函数为

X	-2	-1	0	1	2
p	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

     求 $Y=X^2$ 的频率函数.
  2. 设随机变量 X 的密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$
     求 $Y=\sin X$ 的概率密度.
  3. 设 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{2^k}$, $k=1,2,\ldots$, 令
$$Y=\begin{cases}1, & X\ \text{取偶数时},\\ -1, & X\ \text{取奇数时}.\end{cases}$$
     求随机变量 X 的函数 Y 的分布律.
  4. 设随机变量 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布, 试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.