

概率论与数理统计

第三章: 联合分布

李立颖 (lily@sustech.edu.cn)

南方科技大学数学系

2023 秋季



南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

1 引言

- 二维随机变量

2 (二维) 离散随机变量

3 (二维) 连续随机变量

4 独立随机变量

5 条件分布

6 联合分布随机变量函数

7 极值和顺序统计量

多维随机变量的背景

例

- 人的身高 H 与体重 W
- 某地区的气温 X , 气压 Y 与湿度 Z
- 射击中落点横向偏差与纵向偏差 Y

问

能不能将上述随机变量单独分别进行研究?

分析

- 一般人的身高 $H \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$, $W \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$. 但身高与体重之间有一定关系.
- 气象指标中的气温、气压与湿度也是相关联的
- 导弹射程误差与落点的横向偏差及纵向偏差都有关

由于同一对象的不同指标之间往往是有一定联系的, 所以应该把它们作为一个从中整体来看待.

二维随机变量的概念

定义

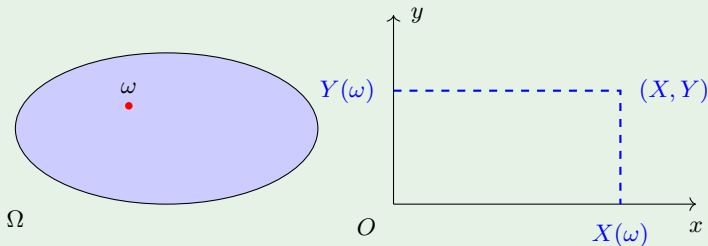
设 Ω 为样本空间, $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, 是定义在 Ω 上的两个随机变量. 记

$$(X, Y) := (X(\omega), Y(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

称 (X, Y) 为**二维随机变量 (向量)**.

注

一个试验产生的二维随机变量可视为向二维平面“投掷”一个“随机点”.



累积分布函数

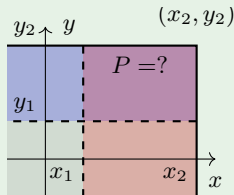
定义

设 (X, Y) 为二维随机变量. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义

$$F(x, y) := P\left(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}\right) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

称 $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的**累积分布函数**, 或称为 X 与 Y 的**联合累积分布函数**.

计算 $P(X \in (x_1, x_2], Y \in (y_1, y_2])$



$$P(X \in (x_1, x_2], Y \in (y_1, y_2]) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

分布函数 $F(x, y)$ 的本质特征

单调性

对任意固定 x_0 , $F(x_0, y)$ 是 y 的单调不减函数; 对任意固定 y_0 , $F(x, y_0)$ 是 x 的单调不减函数.

无穷处极限

$$0 \leq F(x, y) \leq 1 \text{ 且}$$

$$F(\infty, \infty) = 1, \quad F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, \quad \forall x, y.$$

右连续性

对任意 x, y , $F(x, \cdot)$, $F(\cdot, y)$ 是右连续的.

二维单调性

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = P(X \in (x_1, x_2], Y \in (y_1, y_2]) \geq 0.$$

二维单调性

注

最后一条性质不能由前三条性质推出.

反例

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq -1, \\ 0, & x + y < -1. \end{cases}$$

则 $F(1, 1) - F(-1, 1) - F(1, -1) + F(-1, -1) = 1 - 1 - 1 + 0 < 0$.

n 维随机变量

定义

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是定义在样本空间 Ω 上的 n 个随机变量. 称

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

为 n 维随机变量 或 n 维随机向量.

分布函数

称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

为 n 维随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数 或 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布 (函数).

二维随机变量的基本分类

- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量

边缘分布 (marginal distribution)

如果 (X, Y) 是一个二维随机变量, 则它的分量 X (或者 Y) 是一维随机变量. 因此 X 或 Y 也有分布.

定义

称 X 或 Y 的分布为 X 或 Y 关于二维随机变量 (X, Y) 的**边缘分布 (边际分布)**.

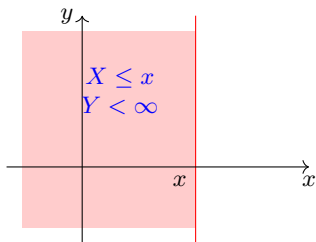
边际分布函数

- 二维随机变量的整体概率特性: $(X, Y) \sim F(x, y)$.
- 两个一维随机变量的概率特性: $X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$.

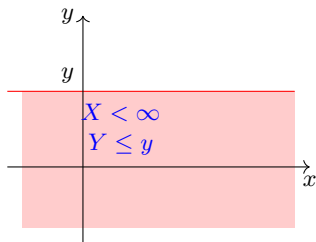
定义

称 $F_X(x)$ 、 $F_Y(y)$ 为 (X, Y) 关于 X 、 Y 的**边际分布 (函数)**.

联合分布与边际分布的关系



$$F_X(x) = F(x, \infty)$$



$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

性质

随机变量的边际分布完全由它们的联合分布决定。 **反之不然。**

例题

设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = A \left(B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left(C + \arctan \frac{y}{2} \right), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

其中 A, B, C 为常数.

- ① 确定 A, B, C .
- ② 求 X 和 Y 的边缘分布函数.
- ③ 求 $P(X > 2)$.

解

$$F(\infty, \infty) = A(B + \pi/2)(C + \pi/2) = 1$$

$$F(-\infty, \infty) = A(B - \pi/2)(C + \pi/2) = 0$$

$$F(\infty, -\infty) = A(B + \pi/2)(C - \pi/2) = 0.$$

因此 $B = C = \pi/2$, $A = \frac{1}{\pi^2}$.

解

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{2}, \quad -\infty < y < \infty,$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

- 1 引言
- 2 (二维) 离散随机变量
 - 频率函数
 - 边际频率函数
 - 习题
 - 作业
- 3 (二维) 连续随机变量
- 4 独立随机变量
- 5 条件分布
- 6 联合分布随机变量函数
- 7 极值和顺序统计量

二维离散型随机变量

回顾: 二维随机变量分类

- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量

定义

设随机变量 (X, Y) 的所有可能的取值为 (x_i, y_j) , $i, j = 1, 2, \dots$, 取值的概率为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j) := p_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则称 (X, Y) 为**离散型随机变量**, 称 $p_{i,j}$ 为它的**(联合) 频率函数 (joint frequency function)**.

频率函数的基本性质

本质特征

设随机变量 (X, Y) 的频率函数为

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则

- $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

频率函数的表格表示法

$\begin{matrix} Y \backslash X \\ \end{matrix}$	x_1	x_2	\cdots	x_i	\cdots
y_1	p_{11}	p_{21}	\cdots	p_{i1}	\cdots
y_2	p_{12}	p_{22}	\cdots	p_{i2}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
y_j	p_{1j}	p_{2j}	\cdots	p_{ij}	\cdots

例题

袋中装有 2 只白球及 3 只黑球. 现进行无放回的摸球, 定义随机变量如下:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次摸出白球,} \\ 0, & \text{第一次摸出黑球,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次摸出白球,} \\ 0, & \text{第二次摸出黑球.} \end{cases}$$

求 (X, Y) 的频率函数.

解

$$P(X = 0, Y = 0) = P(Y = 0 | X = 0) \cdot P(X = 0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{20},$$

$$P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1 | X = 0) \cdot P(X = 0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{20},$$

$$P(X = 1, Y = 0) = P(Y = 0 | X = 1) \cdot P(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1 | X = 1) \cdot P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20}.$$

例题

有一个射击游戏, 参加游戏的人先掷一下骰子, 若出现点数为 X , 则射击 X 次. 设某人击中目标概率为 $p = 0.9$. 记击中目标的次数为 Y . 求 (X, Y) 的频率函数.

分析

X 的取值为 $1, 2, \dots, 6$, Y 的取值为 $0, 1, \dots, X$. 当 $X = i$ 时, $Y \sim \text{Bin}(i, p)$, $i = 1, 2, \dots, 6$. 我们应当用乘法公式计算概率!

解

由乘法公式及如上分析,

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(Y = j \mid X = i)P(X = i) \\ &= \frac{1}{6} \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}, \quad 0 \leq j \leq i, \quad 1 \leq i \leq 6. \end{aligned}$$

边际频率函数

设 (X, Y) 的频率函数为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$ 则随机变量 X 的频率函数是

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} := p_{i\cdot}, \quad i = 1, 2, \dots$$

同理 Y 的频率函数是

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} := p_{\cdot j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

定义

称数列 $\{p_{i\cdot}\}$ 为 (X, Y) 关于 X 的**边际频率函数**, 称数列 $\{p_{\cdot j}\}$ 为 (X, Y) 关于 Y 的**边际频率函数 (marginal frequency function)**.

边际频率函数的性质

- 它是一维随机变量的频率函数
- 它可通过二维随机变量的频率函数计算得到.

例子

设随机变量 X 从 1, 2, 3, 4 中等可能取值, 又设随机变量 Y 从 1, 2, ..., X 中等可能取值. 求 X, Y 的联合频率函数以及边际频率函数.

解

当 $X = i$ 时, Y 以 $\frac{1}{i}$ 的概率等可能取到 1 至 i . 因此由乘法公式,

$$P(X = i, Y = j) = P(Y = j | X = i) \cdot P(X = i) = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4}, \quad 1 \leq j \leq i.$$

因此 X, Y 的频率函数及边际频率函数为

$\begin{array}{c} X \\ \backslash \\ Y \end{array}$	1	2	3	4	$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^4 p_{ij}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
$p_{i \cdot} = \sum_{j=1}^4 p_{ij}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

n 维离散型随机变量的边际频率函数

设 X_1, \dots, X_n 的联合频率函数为

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p(x_1, \dots, x_n).$$

边际频率函数

随机变量 X_1 的**边际频率函数**是

$$P_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, \dots, x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

随机变量 X_1, X_2 的**二维边际频率函数**是

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3, \dots, x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

多项分布 (multinomial distribution): 二项分布的推广

定义

假设进行 n 次独立试验, 每次试验有 r 种可能的结果, 各自出现的概率是 p_1, \dots, p_r . 令 N_i 是 n 次试验中出现第 i 种试验结果的所有次数, 其中 $i = 1, \dots, r$. 则 N_1, \dots, N_r 的联合频率函数是

$$p(n_1, \dots, n_r) = \binom{n}{n_1 \dots n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r},$$

称为**多项分布**.

两种计算 N_i 边际频率函数的方法

- 将联合频率函数关于其它的 n_j 求和;
- N_i 可解释为 n 次试验中**成功的次数**, 故 $N_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$, 因此

$$p_{N_i}(n_i) = \binom{n}{n_i} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{n - n_i}.$$

例子

箱子里装有 4 只白球和 2 只黑球. 在其中随机地取两次, 每次取一只. 分别考虑“有放回抽样”与“无放回抽样”. 定义

$$X = \begin{cases} 0, & \text{第一次为黑球,} \\ 1, & \text{第一次为白球.} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{第二次为黑球,} \\ 1, & \text{第二次为白球.} \end{cases}$$

求 X, Y 的联合分布律和边缘分布律.

解

有放回抽样:

Y \ X	X		$p_{i\cdot}$
	0	1	
0	1/9	2/9	1/3
1	2/9	4/9	2/3
$p_{\cdot j}$	1/3	2/3	1

无放回抽样:

Y \ X	X		$p_{i\cdot}$
	0	1	
0	1/15	4/15	1/3
1	4/15	6/15	2/3
$p_{\cdot j}$	1/3	2/3	1

例题

袋中有 1 个红球, 2 个黑球, 3 个白球. 现有放回地取两次, 每次取一球, 以 X, Y, Z 分别表示取球所得红、黑、白球个数. 求: $P(X=1 | Z=0)$, $P(X=1, Z=0)$, 以及 (X, Y) 的分布.

解

$$P(X=1 | Z=0) = P(\text{Bin}(2, 1/3) = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=1, Z=0) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

X, Y 的取值均为 0, 1, 2. 我们只计算几个例子:

$$P(X=0, Y=0) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6},$$

两个均为白球

$$P(X=0, Y=1) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times 2 = \frac{1}{3},$$

黑白或白黑

$$P(X=1, Y=2) = 0,$$

总数超 2 只, 不可能

$$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

两只均为红球.

作业

● P76: 3

● 补充题

- ① 把一枚均匀硬币抛掷三次, 设 X 为三次抛掷中正面出现的次数, 而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值. 求 (X, Y) 的频率函数.
- ② 设 X 的分布为 $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$. 令 $Y = X^2$. 求 (X, Y) 的联合频率函数及边缘频率函数.
- ③ 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & Y \leq k, \\ 1, & Y > k, \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

求二维随机变量 (X_1, X_2) 的联合频率函数及边缘频率函数.

1 引言

2 (二维) 离散随机变量

3 (二维) 连续随机变量

- 概率密度函数
- 二维连续型随机变量的边际分布密度
- 二维正态分布
- 均匀分布
- 作业

4 独立随机变量

5 条件分布

6 联合分布随机变量函数

7 极值和顺序统计量

二维连续型随机变量

定义

设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数 (joint cdf) 为

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

若存在非负可积函数 $f(x, y) \geq 0$ 使得

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, du \, dv, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

则称 (X, Y) 为**二维连续型随机变量**, 称 $f(x, y)$ 为**概率密度函数 (密度函数、密度、联合密度函数)**.

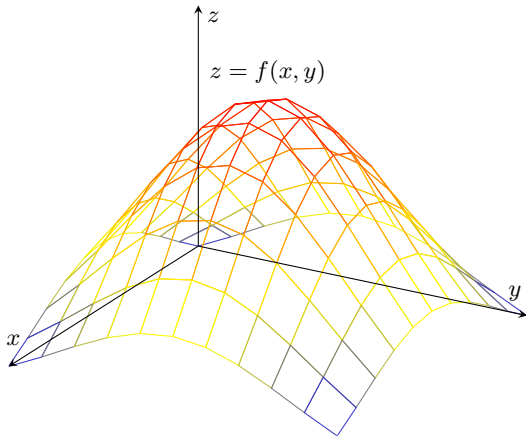
注

由微积分知识, $F(x, y)$ 是连续函数.

密度函数的基本性质

本质特征

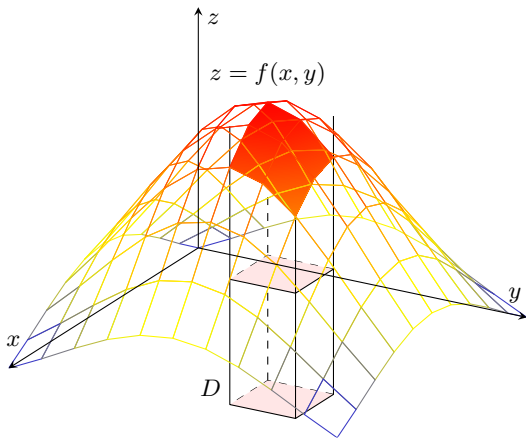
- $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u, v) du dv = 1$. **几何意义: 曲面 $z = f(x, y)$ 与 xOy 平面围成的体积为 1.**



区域概率

对任意 (由逐段光滑曲线围成的) 区域 $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



分布函数与密度函数

性质

在 $f(x, y)$ 的连续点处, 有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

注

在 $f(x, y)$ 的连续点处, 由导数的定义有

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+, \Delta y \rightarrow 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

密度函数的意义

$$P(x < x \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y) \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

例题

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}} k e^{-(2x+y)}.$$

- ① 确定常数 k ;
- ② 求分布函数 $F(x, y)$;
- ③ 计算概率 $P(Y \leq X)$.

解

- ① 由归一性,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv = k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(2x+y)} dx dy \\ &= k \left[\int_0^{\infty} e^{-2x} dx \right] \cdot \left[\int_0^{\infty} e^{-y} dy \right] = \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

因此 $k = 2$.

$$f(x, y) = \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}} k e^{-(2x+y)}.$$

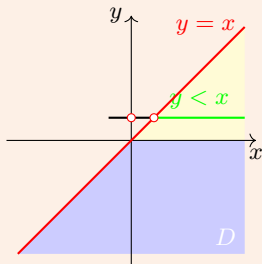
解

② 显然, 分布函数只有在 $x > 0, y > 0$ 时才非零. 我们有

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2u+v)} du dv \\ &= \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}). \end{aligned}$$

③ 记 $D = \{(x, y) \mid y \leq x, x, y \in (-\infty, \infty)\}$. 于是

$$\begin{aligned} P(Y \leq X) &= P((X, Y) \in D) \\ &= \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D \cap \{x, y>0\}} 2e^{-(2x+y)} dx dy \\ &= \int_0^\infty dy \int_y^\infty 2e^{-(2x+y)} dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



例题

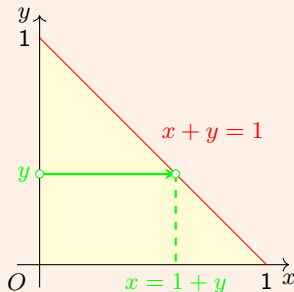
设随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = 1_{\{x>0, y>0\}} 2e^{-(2x+y)}.$$

计算概率 $P(X + Y \leq 1)$.

解

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 1) &= \iint_{\{x+y \leq 1\}} f(x, y) \, dx dy \\ &= \iint_{\{x+y \leq 1, x>0, y>0\}} 2e^{-(2x+y)} \, dx dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} 2e^{-(2x+y)} \, dx \\ &= 1 - 2e^{-1} + e^{-2}. \end{aligned}$$



约定

记号

$$(X, Y) \sim F(x, y)$$

表示二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$.

$$(X, Y) \sim f(x, y)$$

表示二维随机变量 (X, Y) 的概率函数为 $f(x, y)$, 即

- 离散型随机变量 $f(x, y)$ 表示频率函数 (PMF);
- 连续型随机变量 $f(x, y)$ 表示密度函数 (PDF).

n 维随机变量的记号

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

设 (X, Y) 的分布函数和密度函数分别为 $F(x, y)$, $f(x, y)$.

X 的边际分布

随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) dy \right] du$$

因此随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Y 的边际分布

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dx \right] dv, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

定义

称 $f_X(x)$ ($f_Y(y)$) 为 (X, Y) 关于 X (Y) 的**边际密度 (函数)**.

注

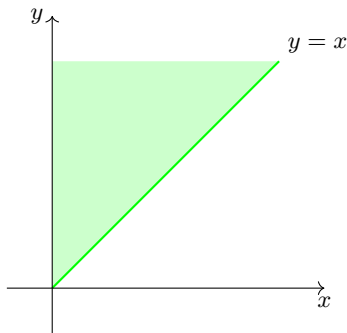
已知联合密度可以求得边际密度.

例子

设 (X, Y) 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边际密度函数.



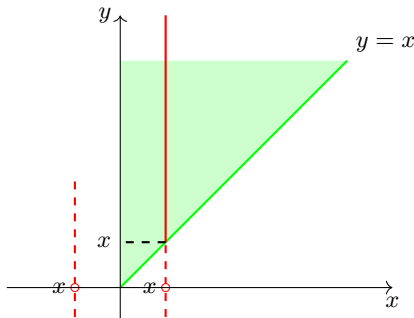
X 的边际分布

解

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$. 当 $x \leq 0$ 时, 显然 $f_X(x) = 0$. 当 $x > 0$ 时, 由图知

$$f_X(x) = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-y} \Big|_x^{\infty} = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

因此 $f_X(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} e^{-x}$ (指数分布).



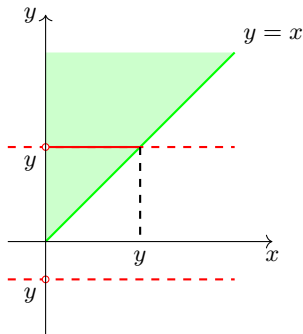
Y 的边际分布

解

当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = 0$. 当 $y > 0$ 时,

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}.$$

故 $f_Y(y) = \mathbb{1}_{\{y>0\}} ye^{-y}$.



例题

设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

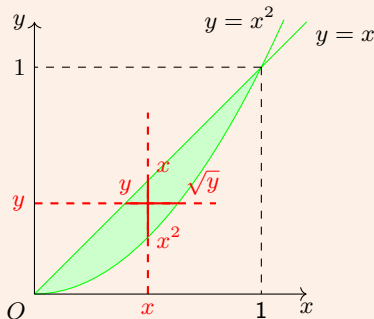
求边际密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解

由图知 $0 \leq X, Y \leq 1$. 因此

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \int_{x^2}^x 6 dy = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) 6x(1-x),$$

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(y) \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y).$$



n 维连续型变量的边际密度

定义

设 X, Y, Z 的联合密度函数为 $f(x, y, z)$, 则随机变量 X 的一维边际密度函数是

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy dz,$$

随机变量 X 和 Y 的二维边际密度函数是

$$f_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dz.$$

联合分布的非唯一性

Farlie–Morgenstern 族

设 $F(x)$ 和 $G(y)$ 都是一维连续型分布函数. 则对任意的 α , $|\alpha| \leq 1$,

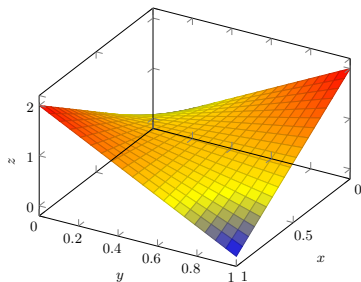
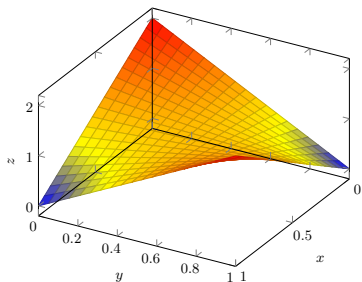
$$H(x, y) = F(x)G(y) \left[1 + \alpha (1 - F(x)) (1 - G(y)) \right]$$

是二维连续型分布函数, 且边际分布为

$$H(x, \infty) = F(x), \quad H(\infty, y) = G(y).$$

注

按这种方式, 可以构造给定边际分布的无数个不同的二维联合分布.

$F = G = U(0, 1)$ 时 Farlie-Morgensten 族(a) $\alpha = -1$: $h(x, y) = 2x + 2y - 4xy$ (b) $\alpha = 1$: $h(x, y) = 2 - 2x - 2y + 4xy$

连接函数 (copula)

定义

称那些使得边际分布为均匀分布的联合累积分布函数为**连接函数**, 记为 $C(u, v)$.

性质

- ① $C(u, v)$ 关于每个变量都是非降的
- ② $P(U \leq u) = C(u, 1) = u, C(1, v) = v$.
- ③ 限定连续型连接函数, 即 $C(u, v)$ 具有密度:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \geq 0.$$

由连接函数构造两个分布的耦合 (coupling)

引理

- 假设 X 和 Y 是分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 的连续型随机变量, 则 $U = F_X(X)$ 和 $V = F_Y(Y)$ 是均匀分布 $U(0, 1)$.
- 对于连接函数 $C(u, v)$, 考虑定义联合分布

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)),$$

则其边际分布为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 且密度为

$$f_{XY}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y).$$

注

由两个边际分布和任意连接函数, 可以构造出相同边际分的联合分布, 即: **边际函数不能决定联合分布**, 两个变量的相依性由连接函数控制.

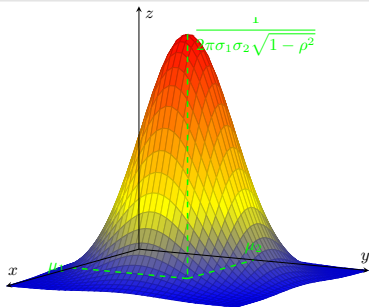
二维正态分布

定义

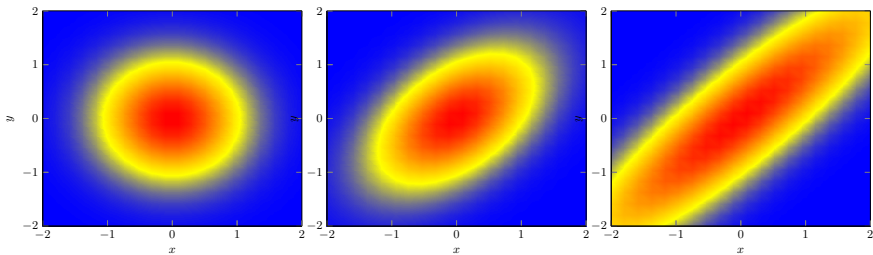
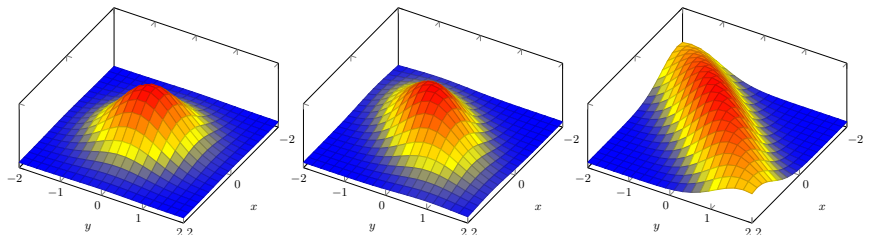
若 X, Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

则称 (X, Y) 服从参数为 $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的**二维正态分布**, 记为 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. 其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$.



$\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 的二维正态分布

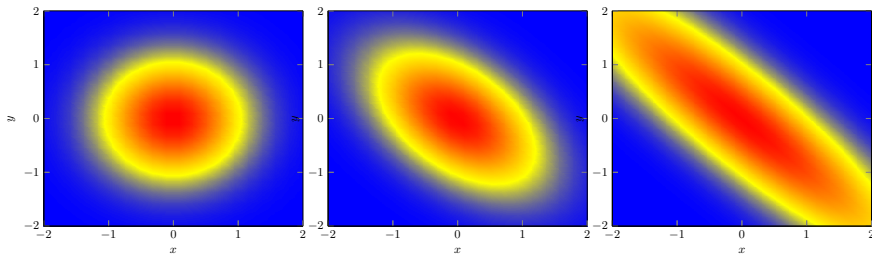
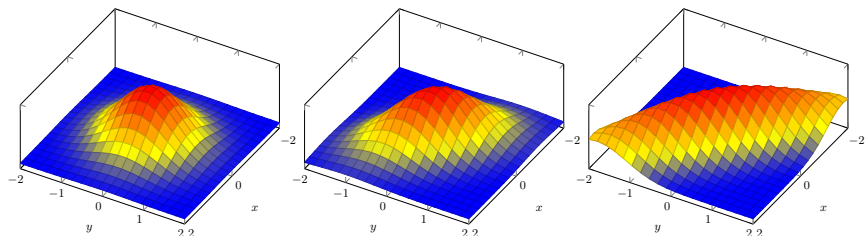


(a) $\rho = 0$

(b) $\rho = 0.5$

(c) $\rho = 0.9$

$\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 的二维正态分布



(a) $\rho = 0$

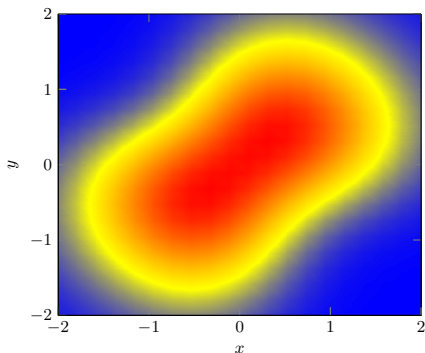
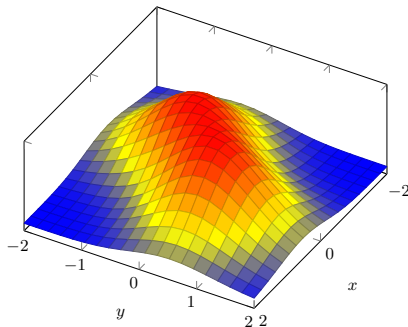
(b) $\rho = -0.5$

(c) $\rho = -0.9$

取边际密度都为 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的正态分布, 利用密度为 $c(u, v) = 2 - 2u - 2v + 4uv$ 的连接函数, 则二维联合密度为

$$f(x, y) = \left[2 - 2\Phi(x) - 2\Phi(y) + 4\Phi(x)\Phi(y) \right] \cdot \varphi(x)\varphi(y).$$

此函数具有边际正态, 但不是二维正态密度.



均匀分布

定义

设有界区域 G 的面积为 A . 若随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则称 (X, Y) 服从区域 G 上的**均匀分布**, 记作 $(X, Y) \sim U(G)$.

性质

若 $(X, Y) \sim U(G)$, 则对任意 $G_1 \subset G$,

$$P((X, Y) \in G_1) = \frac{|G_1|}{|G|}.$$

这就是二维的几何概型!

例题

设 $(X, Y) \sim U(G)$, 其中

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

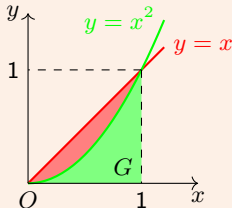
求

- ① $f(x, y)$;
- ② $P(Y > X^2)$;
- ③ (X, Y) 在平面上的落点到 y 轴距离小于 0.3 的概率.

解

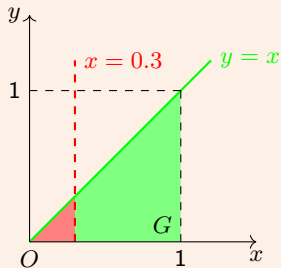
① 显然 $|G| = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, 故 $f(x, y) = \mathbb{1}_G(x, y) \cdot 2$.

$$P(Y > X^2) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 2 dy = \frac{1}{3}.$$



解

$$\textcircled{3} \quad P(|X| < 0.3) = P(-0.3 < X < 0.3) = \int_0^{0.3} dx \int_0^x 2 dy = 0.09.$$



例题

设随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 其中

$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + \frac{y}{2} \leq 1\}$. 试求随机变量 (X, Y) 的边际密度函数.

解

区域 D 的面积为 $A = 1$, 所以联合密度函数为 $f(x, y) = \mathbb{1}_D(x, y)$.

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f_X(x) = 0$. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2(1-x)} 1 dy = 2(1-x).$$

因此, $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \cdot 2(1-x)$.

同理, 随机变量 Y 的边际密度函数为

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{(0,2)}(y) \int_0^{1-\frac{y}{2}} 1 dx = \mathbb{1}_{(0,2)}(y) \cdot (1 - y/2).$$

● P76: 5, 6, 7, 8

● 补充题:

① 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} k(1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求边际密度函数以及 $P(1 < X < 3, 1 < Y < 2)$.

② 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x, y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求边际密度函数;

(2) 求 $P(X > Y)$;

(3) 求 $P(X < 0.5)$.

- 1 引言
- 2 (二维) 离散随机变量
- 3 (二维) 连续随机变量
- 4 独立随机变量
 - 随机变量的独立性
 - 二维离散型随机变量的独立性
 - 二维连续型随机变量的独立性
 - n 维随机变量的边际分布与独立性
 - 作业
- 5 条件分布
- 6 联合分布随机变量函数
- 7 极值和顺序统计量

概念的引入

事件的独立性

$$\begin{aligned} A, B \text{ 相互独立} &\Leftrightarrow A \text{ 和 } B \text{ 之间没有任何关系} \\ &\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B). \end{aligned}$$

问

怎样定义随机变量 X 、 Y 之间的独立性？

分析

若 X 和 Y 相互“独立”，从直观上看， X 和 Y 取任何值之间应是没有任何关系的，即 $\forall x, y \in \mathbb{R}^1$ ，两个事件

$$\{X \leq x\}, \quad \{Y \leq y\}$$

应该相互独立，即

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

随机变量的独立性

定义

设 $(X, Y) \sim F(x, y)$, $X \sim F_X(x)$, $Y \sim F_Y(y)$, 若对任意的 $x, y \in (-\infty, \infty)$, 有

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y),$$

即 $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$. 称随机变量 X, Y **相互独立**.

注

两个随机变量相互独立, 联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积.

性质

若 X, Y 相互独立. 对任意的 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = P(x_1 < X \leq x_2) \cdot P(y_1 < Y \leq y_2),$$

即 $\{x_1 < X \leq x_2\}$ 与 $\{y_1 < Y \leq y_2\}$ 相互独立.

证明

$$\begin{aligned} & P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \\ &= F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1) \\ &= [F_X(x_2) - F_X(x_1)] \cdot [F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] \\ &= P(x_1 < X \leq x_2) \cdot P(y_1 < Y \leq y_2). \end{aligned}$$

X 与 Y 独立的直观意义

X 的取值与 Y 的取值是相互独立、互不相干的.

独立性的定义

定义

设 (X, Y) 的频率函数为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

则 X, Y 相互独立等价于对任意 $i, j = 1, 2, \dots$ 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

即

$$X \text{ 与 } Y \text{ 独立} \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}.$$

例题

甲袋中有 3 个红球, 2 个白球; 乙袋中有 4 个红球, 5 个白球. 从甲、乙两袋中各任取两球, 记 X, Y 分别表示取到白球的个数, 问 X, Y 是否独立?

分析

由于从两袋中取球是相互独立的过程, 所以 X, Y 的取值是相互独立、互不相干的, 故 X, Y 相互独立.

判断随机变量的独立性的方法

- 按定义判断
- 从直观背景判断

例题

设随机变量 X 从 1, 2, 3, 4 四个数中等可能取值. 又设随机变量 Y 从 1 到 X 中等可能取值. 问 X, Y 是否独立?

解

(X, Y) 的频率函数及边际频率函数为

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^4 p_{ij}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^4 p_{ij}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

可以直接验证, 对任意 $i, j = 1, 2, 3, 4$, $P(X = i, Y = j) \neq P(X = i) \cdot P(Y = j)$. 因此 X, Y 独立. **从直观上看, X 和 Y 也不独立.**

例子

设 (X, Y) 的频率函数为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$1/8$	a	$1/24$
2	b	$1/4$	$1/8$

问:

- ① a, b 应满足什么条件?
- ② 若 X, Y 独立, 求 a, b .

分析

第一问是考察归一化条件, 第二问是考察独立性条件.

解

- ① 由归一化条件, $\sum_{i,j} p_{ij} = 1 \Rightarrow a + b = 1 - (1/8 + 1/24 + 1/4 + 1/8) = \frac{11}{24}, a \geq 0,$
 $b \geq 0.$

解

② 由 X, Y 的独立性

$$a = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = (a + 1/4)(1/8 + a + 1/24)$$

$$b = P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = (b + 1/8)(b + 1/4 + 1/8).$$

求解这两个二次方程, 得到 $a = 1/12$ 或 $a = 1/2$, $b = 1/8$ 或 $b = 3/8$. 再利用归一化条件:

$$a + b = \frac{11}{24} \Rightarrow a = \frac{1}{12}, b = \frac{3}{8}.$$

独立性的条件

定义

设 (X, Y) 为连续型随机变量, 且

$$(X, Y) \sim f(x, y), \quad X \sim f_X(x), \quad Y \sim f_Y(y).$$

则 (X, Y) 相互独立当且仅当在 $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ 的连续点处有

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

分析

(X, Y) 相互独立表明对任意的 x, y ,

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \leq x)P(Y \leq y) \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dudv &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u)f_Y(v) \, dudv. \end{aligned}$$

独立性的推论

定义

X 和 Y 独立 \Leftrightarrow 对任意 x 和 y 有

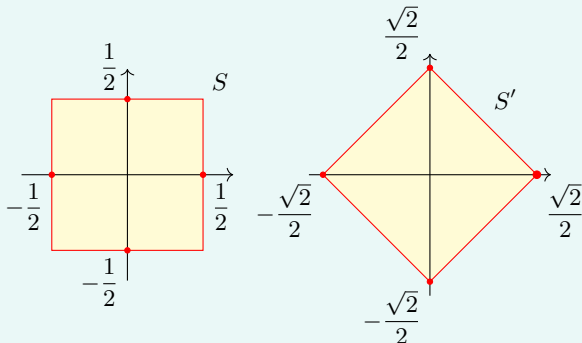
$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

推论

二维随机变量 (X, Y) 相互独立, 则边缘分布完全确定联合分布.

例子

设 (X, Y) 服从正方形 $S = \{(x, y) \mid -1/2 \leq x, y \leq 1/2\}$ 上的均匀分布. 又设 S' 为 S 旋转 45° , (X', Y') 为 S' 上的均匀分布.



独立性验证

- 易见 $f_X(x) = \mathbb{1}_{(-1/2, 1/2)}(x)$, $f_Y(y) = \mathbb{1}_{(-1/2, 1/2)}(y)$, 因此 $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \Rightarrow X, Y$ 独立.
- $f_{X'}(0.5) > 0$, $f_{Y'}(0.5) > 0$, 但 $f_{X'Y'}(0.5, 0.5) = 0$, 因此 X', Y' 不独立.

例题

设 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

问 X, Y 是否独立?

分析

先利用边际密度的公式计算出 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 再验证独立性条件.

解

X, Y 的边际密度函数分别为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(2x+y)} dy = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) 2e^{-2x}, \\ f_Y(y) &= \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(2x+y)} dx = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) e^{-y}. \end{aligned}$$

因此 $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 故 X, Y 相互独立.

问

若 (X, Y) 的密度函数能分解为 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 其中 $g(x) \geq 0, h(y) \geq 0$. 问 X, Y 是否独立?

答

要注意 $f(x, y)$ 、 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的定义域!

例题

若 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 X, Y 是否相互独立?

解

$$f_X(x) = \int_x^1 2 dy = 2(1-x), \quad 0 < x < 1$$
$$f_Y(y) = \int_0^y 2 dx = 2y, \quad 0 < y < 1.$$

由于在面积不为 0 的区域 $D = \{(x, y) \mid y < x < 1, 0 < y < 1\}$ 上,
 $f(x, y) = 0 \neq f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 和 Y 不独立

注

密度函数形式可分离, 但支撑区域不可分离.

Farlie–Morgenstern 族的独立性

Farlie–Morgenstern 族

设 $F(x)$ 和 $G(y)$ 都是一维连续型分布函数. 则对任意的 α , $|\alpha| \leq 1$,

$$H(x, y) = F(x)G(y) \left[1 + \alpha \left(1 - F(x) \right) \left(1 - G(y) \right) \right]$$

是二维连续型分布函数, 且边际分布为

$$H(x, \infty) = F(x), \quad H(\infty, y) = G(y).$$

注

只有当 $\alpha = 0$ 时, X 和 Y 才是相互独立的. 此时, $H(x, y) = F(x)G(y)$, 即 H 分解成了边际分布 $F(x)$ 和 $G(y)$ 的乘积.

例题

在某一分钟内, 信号进入收信机是等可能的. 若收到两个互相独立的信号的时间间隔小于 0.5 秒时, 信号将相互产生干扰. 求两信号相互干扰的概率.

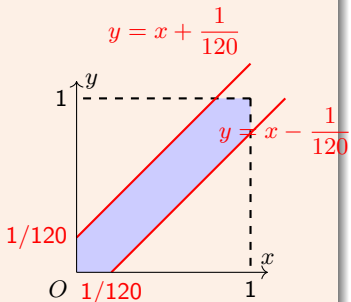
解

设两信号进入收信机的时间分别为 X, Y 分钟. 则 $X, Y \sim U(0, 1)$. 因为 X, Y 独立, 故联合密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

即 $(0, 1)^2$ 上的均匀分布. 故两信号相互干扰的概率为

$$\begin{aligned} & P(|X - Y| < \frac{1}{120}) \\ &= \int_{(x, y) \in (0, 1)^2, |x - y| < \frac{1}{120}} 1 \, dx dy \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{120}\right)^2 \approx 0.016. \end{aligned}$$



二维正态分布的独立性

二维正态分布回顾

$(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]},$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$.

重要结论

若 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

定理

X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$.

边际分布

设 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x_n).$$

一维边际分布

X_i 的边际分布函数为

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x_i) &= P(X_1 < \infty, \dots, X_{i-1} < \infty, X_i \leq x_i, X_{i+1} < \infty, \dots, X_n < \infty) \\ &= F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty). \end{aligned}$$

二维边际分布

X_1, X_2 的联合分布是

$$\begin{aligned} F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 < \infty, \dots, X_n < \infty) \\ &= F(x_1, x_2, \infty, \dots, \infty). \end{aligned}$$

注

类似地可定义三维、四维等高维边际分布.

随机向量的独立性

分量的独立性

对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^1$, 若

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立.

向量的独立性

设 $(X_1, \dots, X_m) \sim F_1(x_1, \dots, x_m)$, $(Y_1, \dots, Y_n) \sim F_2(y_1, \dots, y_n)$. 若

$$(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) \sim F(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = F_1(x_1, \dots, x_m) \cdot F_2(y_1, \dots, y_n),$$

则称 (X_1, \dots, X_m) 与 (Y_1, \dots, Y_n) 相互独立.

注

从直观上看: 随机向量的独立性是指各随机向量的取值是相互独立、互不相干的.

独立随机变量的函数的独立性

定理

设 $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ 相互独立, 则

- ① $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, X_i$ 和 Y_j 相互独立.
- ② 对任意 m 元 (连续) 函数 h 与 n 元 (连续) 函数 g ,

$$h(X_1, \dots, X_m), \quad g(Y_1, \dots, Y_n)$$

相互独立.

注

$h: (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$ 也是一个连续函数.

应用

X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 是两组独立的数据, h, g 是对两组数据的处理. 则处理后的结果依然独立.

例题

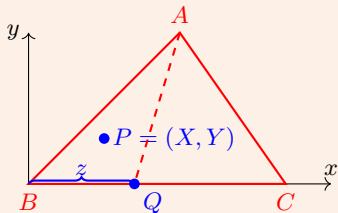
设在 $\triangle ABC$ 内部任取一点 P , 在底边 BC 上任取一点 Q . 求直线 PQ 与线段 AB 相交的概率.

解

如图建立坐标系. 依题意, 点 P 服从 $\triangle ABC$ 上的均匀分布, 点 Q 服从区间 $(0, BC)$ 上的均匀分布, 它们的概率密度分别为

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{S_{\triangle ABC}} \mathbb{1}_{\triangle ABC}(x, y),$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{BC} \mathbb{1}_{(0, BC)}(z).$$



由独立性, $f(x, y, z) = f_{XY}(x, y)f_Z(z)$.

线段 AB 与直线 PQ 相交当且仅当 $P \in \triangle ABQ$. 因此所求概率为

$$\begin{aligned} & P((X, Y) \in \triangle ABQ, 0 < z < BC) \\ &= \int_0^{BC} f_Z(z) dz \int_{(x, y) \in \triangle ABQ} f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{BC} \int_0^{BC} dz \cdot \frac{z}{BC} = \frac{1}{BC^2} \cdot \frac{BC^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

● P77: 19

● 补充题:

① 一个袋中有 5 个球, 其中两个白球 3 个黑球,

(1) 先后有放回地任取两球 (一共取两球);

(2) 先后无放回地任取两球 (一共取两球);

假设 X 和 Y 分别表示第一次和第二次取到白球的数量, 求 (X, Y) 的联合频率函数及边缘频率函数, 并讨论独立性.

② 在一个以原点为圆心、半径为 R 的圆内随机选取一点, 令 (X, Y) 表示这一点的分布, 则 (X, Y) 服从

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求 c

(2) 求边缘密度函数

(3) 讨论 X 和 Y 的独立性.

- 1 引言
- 2 (二维) 离散随机变量
- 3 (二维) 连续随机变量
- 4 独立随机变量
- 5 条件分布**
 - 引子
 - 离散型条件概率
 - 连续型条件概率
 - 作业与小结
- 6 联合分布随机变量函数
- 7 极值和顺序统计量

实例

考虑南科大的全体学生, 从其中随机抽取一个学生, 分别以 X 和 Y 表示其身高和体重. 则 X 和 Y 都是随机变量, 它们都有一定的概率分布.

额外的限制条件

现在若限制 $1.7 < Y < 1.8$ (米), 在这个条件下去求 X 的**条件分布**. 这就意味着要从该校的学生中把身高在 1.7 米和 1.8 米之间的那些人都挑出来, 然后在挑出的学生中求其体重的分布.

讨论

条件分布与不加条件的分布会**不一样**. 如: 在条件分布中体重取大值的概率会显著增加.

条件分布

条件概率回顾

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

条件分布的“定义”

设 (X, Y) 为二维随机变量. 对任意 $y \in \mathbb{R}^1$, 考虑条件概率

$$P(X \leq x | Y = y), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

这可视为在 $\{Y = y\}$ 条件下, 随机变量 X 的概率分布 — **条件分布**.

问

能否由条件概率定义计算

$$P(X \leq x | Y \leq y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}?$$

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的频率函数为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$

条件概率公式的应用

由条件概率公式, $\{Y = y_j\}$ 发生的条件下, $\{X = x_i\}$ 发生的概率为

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

同理, 在 $\{X = x_i\}$ 发生的条件下, $\{Y = y_j\}$ 发生的条件概率为

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

定义

对于固定的 j , 若 $P(Y = y_j) = p_{\cdot j} > 0$, 则称

$$p_{X|Y}(x_i | y_j) = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

为 $Y = y_j$ 的条件下, 随机变量 X 的**条件 (conditional) 频率函数**.

对于固定的 i , 若 $P(X = x_i) = p_{i \cdot} > 0$, 则称

$$p_{Y|X}(y_j | x_i) = P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

为在 $X = x_i$ 的条件下, 随机变量 Y 的**条件 (conditional) 频率函数**.

例题

设随机变量 X 从 1, 2, 3, 4 四个数中等可能取值, 又设随机变量 Y 从 $1 \sim X$ 中等可能取值. 问当 Y 取到数字 3 时, X 取四个数字的可能性各是多少?

解

由

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^4 p_{ij}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^4 p_{ij}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

在 $Y = 3$ 的条件下, X 取到四个数字的概率为

$X = k$	1	2	3	4
$p_{X Y}(k, 3)$	0	0	4/7	3/7

条件频率函数的性质

性质

- ① $P(X = x_i | Y = y_j) \geq 0, i = 1, 2, \dots$
- ②
$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i | Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{1}{p_{\cdot j}} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

注

这两条性质说明, 条件频率函数也是一种频率函数.

例题

设

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.3, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases} F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 0.4, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

已知 $P(X=1, Y=0) = 0.1$. 求

- ① 联合分布律
- ② 当 $Y=0$ 时, X 的条件分布律 $P(X=k | Y=0)$;
 $p_{X|Y}(1|0) = 0.25, p_{X|Y}(2|0) = 0.75$.
- ③ $Y=0$ 时 X 的条件分布函数.

回顾

$$P(X=x_0) = F(x_0) - F(x_0-0).$$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{i\cdot}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	

二维随机连续型随机变量的条件概率密度

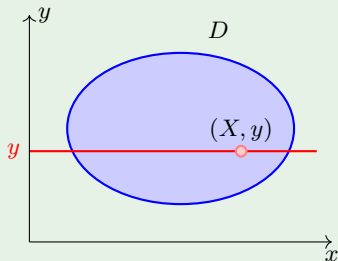
问题

设 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y)$. 考虑在 $\{Y = y\}$ 已发生的条件下, $\{X \leq x\}$ 发生的条件概率

$$P(X \leq x | Y = y), \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

背景解释

- (X, Y) 在区域 D 上具有密度 $f(x, y)$
- (X, Y) 限制在直线时可视为一维随机变量, $P(X \leq x | Y = y)$ 为此一维随机变量的分布函数.



如何定义 $P(X \leq x | Y = y)$?

问题

对于连续型随机变量 Y , $P(Y = y) = 0$.

解决方案

用 $\{Y \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)\}$ 代替 $\{Y = y\}$, 并令 $\varepsilon \downarrow 0$.

假设密度函数是连续的, 由积分中值定理,

$$\begin{aligned} P(X \leq x | Y \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)) &= \frac{P(X \leq x, y - \varepsilon < Y < y + \varepsilon)}{P(y - \varepsilon < Y < y + \varepsilon)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(u, v) dv du}{\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_Y(v) dv} \\ &= \frac{2\varepsilon \int_{-\infty}^x f(u, y_{\varepsilon, u}) du}{2\varepsilon f_Y(\tilde{y}_{\varepsilon})}, \quad y_{\varepsilon, u}, \tilde{y}_{\varepsilon} \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du, \quad \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

连续型条件分布与概率

定义

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 若对于固定的 y , (X, Y) 关于 Y 的边际密度 $f_Y(y) > 0$, 则称

$$\frac{f(x, y)}{f_Y(y)} := f_{X|Y}(x | y), \quad -\infty < x < \infty,$$

为在 $Y = y$ 的条件下, X 的**条件密度 (conditional density)**. 称

$$F_{X|Y}(x | y) := \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u | y) du, \quad -\infty < x < \infty,$$

为在 $Y = y$ 条件下, X 的**条件分布 (函数)**.

类似地, 定义

$$f_{Y|X}(y | x) := \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad -\infty < y < \infty$$

$$F_{Y|X}(y | x) := \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(v | x) dv, \quad -\infty < y < \infty.$$

连续情形的全概率公式

定理

Y 的边际密度可表示为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y | x) f_X(x) dx.$$

注

这表明联合密度可以用边际密度和条件密度表示.

证明

由 $f_{Y|X}(y | x) := \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, $-\infty < y < \infty$, 我们有

$$f(x, y) = f_{Y|X}(y | x) f_X(x).$$

两边对 x 在 $(-\infty, \infty)$ 上积分即可.

条件密度的性质

$$\textcircled{1} f_{X|Y}(x | y) \geq 0,$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(u | y) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du = 1.$$

注

这两条性质说明, 条件密度也是一种密度.

与独立性的关系

事件独立性与条件概率的关系

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A | B) = P(A), P(B | A) = P(B)$.

随机变量独立性与条件密度的关系

X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \text{a.e.}$

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x), \text{a.e.}$$

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y), \text{a.e.}$$

平面上的均匀分布

定义

设 G 是平面上的有界区域, 其面积为 A . 若 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

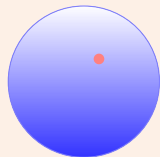
则称 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

实际背景

若随机点 (X, Y) 在平面区域 G 上“等可能”取值, 则 (X, Y) 服从 G 上均匀分布.

例

设雷达的圆形屏幕半径为 1, 当用雷达捕捉目标时, 可认为目标出点在点 (X, Y) 在屏幕上服从圆域 $G: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布.



例题

设 (X, Y) 服从圆域 $G: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布, 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$.

解

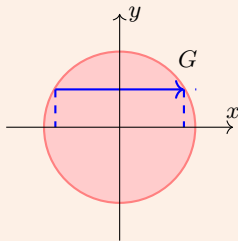
(X, Y) 的密度及 Y 的边际密度分别为

$$f(x, y) = \mathbb{1}_G(x, y) \cdot \frac{1}{\pi},$$

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{(-1,1)}(y) \cdot \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}.$$

故当 $-1 < y < 1$ 时有

$$f_{X|Y}(x | Y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi f_Y(y)} = \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & |x| \leq \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



二维正态条件分布

二维正态分布

设 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]},$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

二维正态条件分布

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left[y - \mu_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1) \right]^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}}$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right).$$

给定 X 时, Y 的条件密度是一维 (单变量) 正态分布

边际分布

随机变量边际分布由联合分布决定

$$F_X(x) = F(x, \infty), \quad F_Y(y) = F(\infty, y).$$

边际频率/密度函数

离散型随机变量边际频率函数

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} := p_{i\cdot}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} := p_{\cdot j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

连续型随机变量边际密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{R}$$

条件分布

定义

$$P(X \leq x | Y = y), \quad x \in \mathbb{R}$$

可视为 $\{Y = y\}$ 发生的条件下随机变量 X 的概率分布 (思考: $P(Y = y) = 0$ 时怎么理解?)

条件频率/密度函数

离散型随机变量的条件频率函数	连续型随机变量的条件概率密度
$P(X = x_i Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, p_{\cdot j} > 0$	$f_{X Y}(x, y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0, x \in \mathbb{R}$
$P(Y = y_j X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}, p_{i \cdot} > 0$	$f_{Y X}(y x) := \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0, y \in \mathbb{R}$

作业

- P77: 1, 9, 10, 15

- 补充题

- ① 高随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X = x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布, 求

- (1) X 和 Y 的联合密度函数;
- (2) Y 的密度函数;
- (3) $P(X + Y > 1)$.

- ② 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

- (1) 求边缘密度函数并讨论独立性;
- (2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$ 和 $f_{Y|X}(y | x)$.

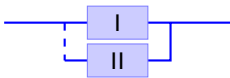
- 1 引言
- 2 (二维) 离散随机变量
- 3 (二维) 连续随机变量
- 4 独立随机变量
- 5 条件分布
- 6 联合分布随机变量函数
 - 引子
 - 连续型; $X + Y$ 的分布
 - 离散型独立随机变量的和
 - $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布
 - 两个随机变量变换的分布
 - 作业
- 7 极值和顺序统计量

实际背景

设有两个部件 I 和 II, 其工作寿命分别为 X, Y .

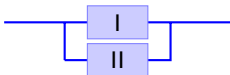
冷冗余系统 部件 I 坏了, 换上备用部件 II 继续工作.

系统寿命: $X + Y$.



热冗余系统 部件 I、II 并联同时工作, 仅当两个部件都损坏时, 整个系统才失效.

系统寿命: $\max(X, Y)$.



串联系统 部件 I、II 串联同时工作, 只要有一个部件损坏, 整个系统都失效.

系统寿命: $\min(X, Y)$.



问题

怎么确定上述各系统的寿命?

问题

若 $(X, Y) \sim f(x, y)$, 怎样求

$$X + Y, \quad \max(X, Y), \quad \min(X, Y)$$

的分布?

一般化

设 $z = g(x, y)$ 是一个二元函数, 怎样求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布?

思路

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) \\ &= \int_{(x, y): g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \cdots = \int_{-\infty}^z f_Z(u) du. \end{aligned}$$

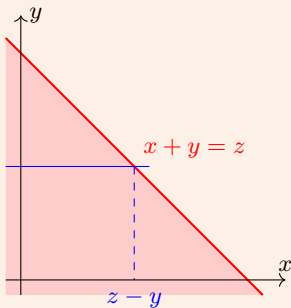
则 $Z \sim f_Z(z)$.

定理

若 $(X, Y) \sim f(x, y)$, 则 $f_Z(z) \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx$.

证明

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \\ &\stackrel{u=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f(u-y, y) du dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y, y) dy \right] du \end{aligned}$$



独立随机变量的和

$Z = X + Y$ 密度函数

(X, Y) $\sim f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx.$$

独立随机变量

若 X, Y 相互独立, 则 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x) dx.$$

卷积公式 (convolution)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t) dt.$$

例题

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 求 $Z = X + Y$ 的密度函数.

解

由独立性及卷积公式, 有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z/2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}. \end{aligned}$$

易见 $X + Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$.

独立正态分布的和

两个正态分布的和

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立, 则

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

一般结果

一般的, 若 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ 相互独立, $i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

即: 独立正态分布的和依然服从正态分布.

例题

某电气设备中的两个部件存在接触电阻 R_1 、 R_2 . 两个部件的工作状态是相互独立的, 概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 R_1 、 R_2 串联后的总电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

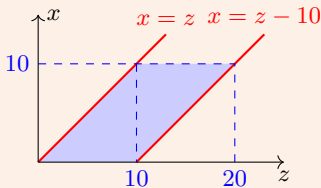
解

由卷积公式, $f_R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx$. 被积函数是非零区域是

$$0 < x < 10, 0 < z-x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 10, z-10 < x < z.$$

因此

$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{10-x}{50} \cdot \frac{10-(z-x)}{50} dx = \frac{600z - 60z^2 + z^3}{15000}, & 0 \leq z < 10, \\ \int_{z-10}^{10} \frac{10-x}{50} \cdot \frac{10-(z-x)}{50} dx = \frac{(20-z)^3}{15000}, & 10 \leq z < 20, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



例题

设 X, Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解

由卷积公式, Z 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \sim \Gamma(2, \lambda). \end{aligned}$$

注

由泊松流的知识, n 个独立 $\text{Exp}(\lambda)$ 的和为 $\Gamma(n, \lambda)$.

离散卷积公式

设 X, Y 相互独立, 其频率函数分别为

$$P(X = i) = p_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad P(Y = j) = q_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

令 $Z = X + Y$. 则我们有

离散卷积公式

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i)P(Y = k - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = k - i)P(Y = i), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

比较: 连续型卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - y)f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z - x) dx.$$

泊松分布的和

例子

设 X, Y 独立, 且 $X \sim \text{Poi}(\lambda_1), Y \sim \text{Poi}(\lambda_2)$. 求 $Z = X + Y$ 的分布.

解

由离散卷积公式,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = k - i) \cdot P(Y = i) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^i}{i!} e^{-\lambda_2} \\ &= e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \lambda_1^{k-i} \lambda_2^i \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}. \end{aligned}$$

因此 $Z \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

例题

设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	-1	1	2
-1	1/4	1/6	1/8
0	1/4	1/8	1/12

求 $X + Y$, XY 的概率分布.

解

根据 (X, Y) 的联合分布可得

P	1/4	1/4	1/6	1/8	1/8	1/12
(X, Y)	$(-1, -1)$	$(-1, 0)$	$(1, -1)$	$(1, 0)$	$(2, -1)$	$(2, 0)$
$X + Y$	-2	-1	0	1	1	2
XY	1	0	-1	0	-2	0

合并相同的项可得 $X + Y$ 和 XY 的分布列.

直接法

例题

设 X 、 Y 独立同分布, 其密度函数为

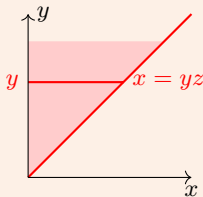
$$f(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-x}.$$

求 $Z = X/Y$ 的密度.

解

当 $z \geq 0$, Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbf{P}(X/Y \leq z) = \iint_{x/y \leq z, x>0, y>0} e^{-(x+y)} dx dy \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^{yz} e^{-(x+y)} dx = \int_0^\infty e^{-y} (1 - e^{-yz}) dy \\ &= 1 - \frac{1}{1+z}. \end{aligned}$$

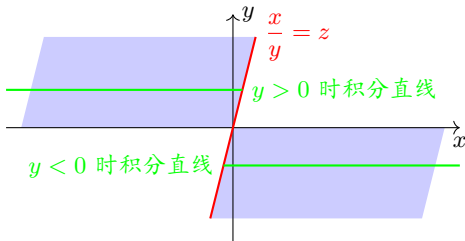


$$\text{因此 } f_Z(z) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z) \frac{1}{(1+z)^2}.$$

一般情形

设 $(X, Y) \sim f(x, y)$, 则 $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P(X/Y \leq z) = \iint_{x/y \leq z} f(x, y) dx dy$$



$$F_Z(z) = \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{yz} f(x, y) dx + \int_{-\infty}^0 dy \int_{yz}^{\infty} f(x, y) dx.$$

由于积分区域不是矩形, 计算积分以及求导比较繁琐.

回顾

二重积分的变量替换

若连续可微分函数

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

把平面 Oxy 上区域 Ω 单值映射到平面 $O'uv$ 上的区域 Ω' , 其 Jacobi 式为

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

为了处理 $z = \frac{x}{y}$, 我们的变换函数必须包含 $u = \frac{x}{y}$.

公式法

令 $x/y = u$, $y = y$, 则变换 $(x, y) \mapsto (u, y)$ 的 Jacobi 式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, y)} = \begin{vmatrix} y & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y.$$

因此

$Z = X/Y$ 的分布/密度函数

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(uy, y) |y| dy \right] du,$$
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z y, y) |y| dy.$$

独立的情形

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zy) f_Y(y) |y| dy.$$

例题

设 X, Y 独立且同服从正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 求随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度.

解

我们利用公式法求解.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2 z^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x e^{-x^2 \cdot \frac{z^2+1}{2}} dx \\ &\stackrel{u=x^2}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u \cdot \frac{z^2+1}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi(z^2+1)}, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

注

Z 服从 Cauchy 分布.

例子

设 ξ, η 为独立同分布, 均服从指数分布 $f(x) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)e^{-x}$. 试求 $(U, V) = (\xi + \eta, \xi/\eta)$ 的联合密度, 并证明 U, V 独立

思路

我们要利用换元

$$x + y = \tilde{u}, x/y = \tilde{v} \Leftrightarrow x = \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{1 + \tilde{v}}, y = \frac{\tilde{u}}{1 + \tilde{v}}, J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} = -\frac{\tilde{u}}{(1 + \tilde{v})^2}.$$

解

$$\begin{aligned} F_{UV}(u, v) &= \mathbf{P}(\xi + \eta \leq u, \xi/\eta \leq v) \\ &= \iint_{x+y \leq u, x/y \leq v, x \geq 0, y \geq 0} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^u \int_0^v e^{-\tilde{u}} |J| d\tilde{u} d\tilde{v}. \end{aligned}$$

因此 $f_{UV}(u, v) = \frac{ue^{-u}}{(1+v)^2} \mathbb{1}_{(0, \infty)^2}(u, v)$. 易见 U, V 相互独立. (其实 $V = \frac{1-X}{X}$, $X \sim \text{U}(0, 1)$.)

二维正态布的线性变换

例子

设 X_1, X_2 相互独立且服从标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 且 $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2$. 则 $(Y_1, Y_2) \sim \mathcal{N}(0, 0, 1, 2, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

推广

两个独立标准正态分布随机变量 (更一般地, 二维联合正态分布) 的 (非奇异) 线性变换服从二元正态分布.

解释

正态分布的密度函数为 $Ce^{-Q(x,y)}$ 的形式, 其中 Q 为一个 (椭圆型) 二次型, 经过线性变换后依然得到一个椭圆二次型.

随机变量的其它函数

例子

设 X, Y 独立且均服从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, 求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率分布.

解

当 $z \geq 0$ 时, Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z) = \int_{x^2 + y^2 \leq z^2} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq z^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^z d\rho \int_0^{2\pi} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\varphi \\ &= 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

因此, $f_Z(z) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(z) \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$ (**Rayleigh 分布**).

● P79: 43, 44, 51, 52, 57

● 补充题

- ① 假设 X 和 Y 是两个独立的随机变量, 均服从标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$. 令 $U = X + Y$, $V = X - Y$. 求 U 和 V 的边缘密度函数及联合密度函数, 并讨论独立性.
- ② 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

- (1) 求边缘密度函数;
- (2) 求 $Z = 2X - Y$ 的概率密度函数;
- (3) 求 $P(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$.

- 1 引言
- 2 (二维) 离散随机变量
- 3 (二维) 连续随机变量
- 4 独立随机变量
- 5 条件分布
- 6 联合分布随机变量函数
- 7 极值和顺序统计量