概率论与数理统计

李立颖
lily@sustech.edu.cn, 理学院 M622

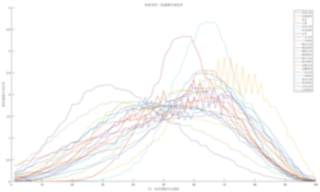
2023 秋季

1 概率
- 引言
- 样本空间

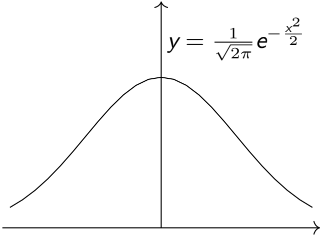
为什么学习概率论与统计?

- 现实生活中的随机现象主要来源于复杂系统:
  - 人口普查
  - 分子热运动
  - 天气预报
  - 量子力学?
- 概率论与统计提供了研究随机现象的工具
  - 概率论: 建立于现代分析学基础上, 主要提供理论基础, 得到的很多结果简洁而深刻, 如大数定律、中心极限定理、遍历定理等
  - 统计学: 解决与复杂系统相关的实际问题 (估计、判断、决策), 如参数估计、假设检验、分类、机器学习等

例 1：正态分布



(a) 高考成绩 [1]



(b) 标准正态分布

[1]图片来源：https://blog.csdn.net/HugoChen_cs/article/details/107650258

例 2: 核物理、随机矩阵与黎曼猜想

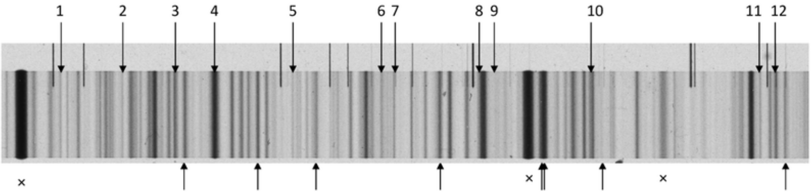


图: 铀原子能量光谱 [2]

- 薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \hat{H}\phi.$$

- 能级 = 特征值

$$\hat{H}\phi = \lambda\phi, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 重原子对应的算子 $\hat{H}$ 类似于一个高维对称矩阵 X

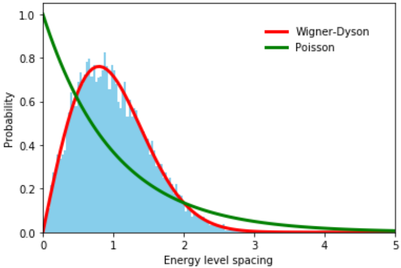
[2] https://www.mdpi.com/2218-2004/5/3/24

例 2：核物理、随机矩阵与黎曼猜想, II

- 对称随机矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \cdots & & \ddots & \cdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NN} \end{bmatrix},$$

  在满足 $x_{ij} = x_{ji}$ 条件下，矩阵元素随机选取
- 特征值 λ 满足 $Xv = \lambda v$. 对称矩阵的特征值都是实数.
- 相邻特征值 $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ 的分布是什么?



例 2: 核物理、随机矩阵与黎曼猜想, III

- 黎曼 ζ-函数, $\mathrm{Re}\, z > 1$
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$
以上函数可延拓至 $z \in \mathbb{C} = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}\}$, $i = \sqrt{-1}$.
- 黎曼猜想: 黎曼函数的全部零点在 $\{a = \frac{1}{2}\}$ 上.
- Montgomery 猜想: $\{a = \frac{1}{2}\}$ 上相邻零点的距离分布由 Dyson–Wigner 分布给出
- 小结:
  - 概率问题: 怎么定义随机性? 怎么刻画极限过程?
  - 统计问题: 怎么比较两个分布?

如何学习概率统计?

- 学思想：概率统计特殊的研究对象包含了许多独特的思维方法和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律，这是其他学科中没有的。例如，以比较各种事件出现的可能性的大小进行决策的思想。
- 学方法：定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。
- 学应用: 尽可能多地了解各种概念的背景、各种方法和模型的实际应用。不仅要学课程中提及的，也要自己收集、寻找各种实例。
- 课前预习、课中认真听讲、课后多做练习。

定义

试验：科学实验，或者对某一事物的某一特征进行观察

例

- 抛一枚硬币，观察正面 H，反面 T 出现的情况
- 将一枚硬币连抛三次，观察正面 H 出现的次数
- 掷一颗骰子，观察出现的点数
- 从一批产品中抽取 n 件，观察次品出现的数量
- 对某厂生产的电子产品进行寿命测试
- 观察某地区的日平均气温和日平均降水量

问： 这些实验有什么特点？试验前无法预知结果.

随机实验与样本空间

试验的特征:

- 试验可以在相同的条件下重复进行
- 试验的结果可能不止一个, 但试验前知道所有可能的全部结果
- 在每次试验前无法确定会出现哪个结果

定义

具有上述特征的称为随机试验, 或简称试验

例

实验 E: 掷一颗骰子, 观察出现的点数.
E 的结果

- “1 点”、“2 点”、...、“6 点” (基本结果, 不可分)
- “出现的点数不超过 3”、“至少出现 4 点” (复合结果, 可分解)

定义

- 称基本结果为样本点、基本事件
- 称试验的全部样本点构成的集合为样本空间.

例

- 离散样本空间:
  - 掷一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - 抛两枚硬币，观察正、反两面出现的情况，其样本空间为
$$\Omega = \{(H, T), (H, H), (T, H), (T, T)\}.$$
- 连续样本空间:
  - 记录深圳地区的日平均气温，其样本空间为 $\Omega = (-60, 60)$
  - 播种飞机对位置为 (x_0, y_0) 的目标进行播种，观察其所覆盖的范围 (x, y)，其样本空间为
$$\Omega = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \infty\}.$$

随机事件

基本结果	不可分	样本点、基本事件
复合结果	可分解	随机事件、事件

表: 试验的结果

- 从集合看: 事件是样本空间的子集
- 从试验看: 事件是基本事件的复合

定义

满足一定条件的样本点的集合称为随机事件, 简称事件. 事件用大写字母 A, B, C, ...等表示.

例

掷一颗骰子, 观察出现的点数, 其样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 事件 A “至少出现 3 点”: $A = \{3, 4, 5, 6\}$
- 事件 B “出现最小或最大点的点”: $B = \{1, 6\}$

几个特殊事件:

- 基本事件: 一个样本点构成的单点集 $\{\omega\}$.
- 必然事件: 每次试验都总发生的事件 $\Omega \subset \Omega$.
- 不可能事件: 每次试验都不会发生的事件 $\varnothing$ (空集 $\varnothing \subset \Omega$).

定义

记

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \Omega, \text{ A 是事件}\}.$$

称 $\mathcal{A}$ 为试验的事件域, 即试验产生的所有事件为元素构成的集合.

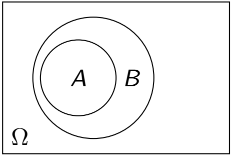
事件语言	基本结果	全体基本试验	事件 A	事件 A 发生
集合语言	样本点 ω	样本空间 Ω	子集 A	$\omega \in A$

表: 小结 — 随机试验的数学描述

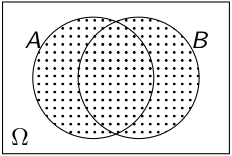
事件间的关系与运算 I

设 A, B 以及 A_k, $k = 1, 2, \ldots$ 为事件

- A 是 B 的 子集, 记作 $A \subset B$: A 发生必然导致 B 发生
- 集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$: $A \subset B$, $B \subset A$
- 集合 A 与 B 的并, 记作 $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$: A 发生或 B 发生, 即 A, B 至少有一个发生, 称为事件 A 和 B 的和.



(a) $A \subset B$



(b) $A \cup B$

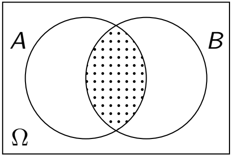
事件间的关系与运算 II

- 集合 A 与 B 的交，记作 $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A,\ \omega \in B\}$: A , B 同时发生，称为事件 A, B 的积，也记作 AB.
- 类似地，可以定义 n 个事件或者可列个事件的积

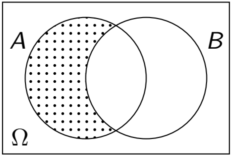
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_i,\ \ i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

- 集合 A 和 B 的差集，记作 $A - B = A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A,\ \omega \notin B\}$: A 发生而 B 不发生



(a) $A \cap B$

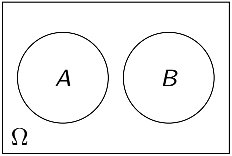


(b) $A \setminus B$

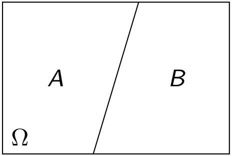
事件间的关系与运算 III

- 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A, B 互不相容 (互斥).
- 若 $A \cup B = \Omega$, 且 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A, B 为逆事件或对立事件, 记为

$$A = \Omega \setminus B = B^c, \quad B = \Omega \setminus A = A^c.$$



(a) $A \cap B = \varnothing$, A 与 B 互斥



(b) A 与 B 为对立事件

事件的运算定律

- 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- 分配律:

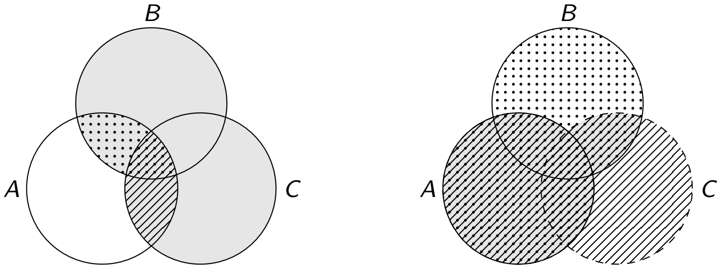
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- De Morgan 律:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c, \quad \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} B_k^c.$$

分配律



(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

如何用定义进行证明

定理

命题

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c.$$

证明: 令 $P = \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c$, $Q = \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c$. 欲证 $P = Q$, 我们只需分别证明 $P \subset Q$ 与 $Q \subset P$. 我们这里只示范前者的证明. 由包含关系的定义, 对任意的 $\omega \in P$, 我们要推出 $\omega \in Q$. 事实上,

$$\omega \in P = \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)^c \xRightarrow{(\text{补集的定义})} \omega \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

$$\xRightarrow{(\text{并集的定义})} \omega \notin B_k,\ \forall k \qquad \xRightarrow{(\text{补集的定义})} \omega \in B_k^c,\ \forall k$$

$$\xRightarrow{(\text{交集的定义})} \omega \in \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c = Q.$$

$\square$

可列

- 可列集: 指一个无穷集 S, 其元素可与自然数形成一一对应，因此可表为 $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$.
- 至多可列：指可列或有限
- 可以证明：可列是“最小的”无穷，即任何一个无穷集合均含有可列子集

作业

- P20: 5, 6
- 补充题:
    1. 设随机事件 A, B 满足条件 $AB = A^c B^c$, 试求 $A \cup B$.
    2. 试把事件 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件之并.