概率论与数理统计

第四章: 随机变量的数字特征

李立颖 (lily@sustech.edu.cn)

南方科技大学数学系

2023 秋季

南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数字特征

随机变量的概率特征

- 分布函数 (CDF, cumulative distribution function)
- 密度函数 (PDF, probability density function)
- 频率函数 (PMF, probability mass function)

特点

- 优点：全面、详细、完整
- 不足：复杂、重点不突出

问题

如何粗线条地描述随机变量的特性？函数是一个无穷维/高维的对象，如何用一个低维的对象去刻画？

数字特征

平均值

例子

甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了 100 发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

怎样评估两人的射击水平？

分析

两人的总环环数分别为

$$\text{甲}: 8\times 15+9\times 40+10\times 45=930,$$
$$\text{乙}: 8\times 35+9\times 10+10\times 55=920.$$

每枪的平均环数为

$$\text{甲}: \frac{8\times 15+9\times 40+10\times 45}{100}=9.3,$$
$$\text{乙}: \frac{8\times 35+9\times 10+10\times 55}{100}=9.2$$

平均值概念广泛存在

- 某班级某课程考试的平均成绩
- 电子产品的平均无故障时间
- 某地区的日平均气温和日平均降水量
- 某地区的家庭平均年收入
- 某地区的水稻的平均亩产量
- 某国家国民的平均寿命.

问题

怎样定义随机变量平均值概念?

例子

甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了 100 发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

怎样评估两人的射击水平？

进一步分析

记甲每枪击中的环数为 X，因为射击次数较多，故可以认为 X 的频率函数为

X	8	9	10
p_k	0.15	0.40	0.45

则甲射手每枪的平均环数为

$$8 \times 0.15 + 9 \times 0.40 + 10 \times 0.45 = 9.3.$$

平均环数

$$E(X) := \sum_{k=1}^{3} x_k p_k.$$

离散型随机变量的数学期望

定义

设随机变量 X 的频率函数为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$\mathsf{P}(X=x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$, 则称

$$\mathsf{E}(X):=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(X=x_k)$$

为随机变量 X 的**数学期望 (期望、均值)**

“数学期望 (Expectation, Expected Value)” 的由来

“数学期望” 是历史上沿用下来的一个名词, 可理解为在数学上对随机变量进行计算期望到的值, 即平均值.

例题

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 付款额根据使用寿命 X 来确定:

寿命 (年)	$X \le 1$	$1 < X \le 2$	$2 < X \le 3$	$X > 3$
付款 (元)	1500	2000	2500	3000

假设 $X \sim \mathrm{Exp}(0.1)$, 试求该商店出售一台电器的平均收费额.

解

设出售一台电器的收费额为 Y, 则 Y 的频率函数为

$$\mathsf{P}(Y=1500)=\mathsf{P}(X\le 1)=\int_0^1 \frac{1}{10}e^{-x/10}=0.0952$$

$$\mathsf{P}(Y=2000)=\mathsf{P}(1<X\le 2)=\int_1^2 \frac{1}{10}e^{-x/10}=0.0861$$

$$\mathsf{P}(Y=2500)=\mathsf{P}(2<X\le 3)=\int_2^3 \frac{1}{10}e^{-x/10}=0.0779$$

$$\mathsf{P}(Y=3000)=\mathsf{P}(3<X\le 4)=\int_3^\infty \frac{1}{10}e^{-x/10}=0.7408.$$

泊松分布的期望

若 $X \sim \pi(\lambda)$, 则 $\mathsf{E}x = \lambda$.

证明

由 $\mathsf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathsf{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned}$$

二项分布的期望

若 $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$，则 $\mathsf{E}X = np$.

证明

注意到 $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k'=k-1=0}^{n} \binom{n-1}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-1-k'} \\
&= np[p + (1-p)]^{n-1} \\
&= np.
\end{aligned}
$$

为什么要求绝对收敛?

绝对收敛可以保证求和结果与顺序无关，并且使得数学期望有与可列可加性兼容的一系列极限结果.