概率论与数理统计 第五次作业参考题解

2023.10.24

Q1.

(1) 对 $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3$，所求即

$$\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x, Y=y, Z=3-x-y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}.$$

(2)

$$\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X=1, Y+Z=2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{2}}{\binom{12}{3}}.$$

Q2. 由分布函数定义直接验证，注意 $\mathrm{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \mathrm{P}(x \leq b, c < Y \leq d) - \mathrm{P}(x \leq a, c < Y \leq d)$。

Q3. (1) (2) 问参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的例 3.15（Page 149）。对于 (3)(4) 问，

$$\mathrm{P}(R \leq r) = \iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq r} \frac{1}{\pi} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r^2, 0 < r < 1,$$

以及 $E[R] = 2/3$。

Q4 & Q5. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的习题 4.3 节 28 题解答（Page 222 - 223）。

Q6.

(1) 记 $S_0 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$，则 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 2\mathbb{1}_{S_0}(x,y).$$

(2) $f_Y(y) = 2(1-y)$

(3) $f_X(x|Y=y) = \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\mathbb{1}_{(0,1-y)}(x)}{1-y}$

Q7.

(1) X_1 的条件分布为 $B(n, \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$。

(2) 可以理解为两种不同分类的顾客来访商店，已知总的来访数，那么其中某种顾客的来访数是二项分布。有余力的同学可以结合 Poisson 过程中，已知某时刻发生的事件数，则这些事件发生的时刻是均匀分布的结论。

Q8. 记到达时间 (X,Y)，$D=\{(x,y):1\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$，$f_{(X,Y)}(x,y)=\mathbb{1}_D(x,y)$，所求概率即

$$\int_{\substack{1\le x\le 2, 1\le y\le 2\\ |x-y|\ge \frac{1}{6}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{25}{36}.$$

Q9.

(1)

$$H_X(x)=\lim_{y\to+\infty}H(x,y)=F(x), H_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}H(x,y)=G(y).$$

(2) 在 $H(x,y)$ 中 $F(x),G(y)$ 都取为均匀分布对应的分布函数，再取 $\alpha=-1,1$。

Q10. 给定 Copula 函数 $C(x,y)$，可以构造二元函数 $H(x,y)=C(F(x),G(y))$。

(1) 一方面，可以验证 $H(x,y)$ 确实是一个二元分布函数。事实上，$H(x,y)$ 关于 x,y 都是非降和右连续的, 且成立

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} H(x,y)=0, \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} H(x,y)=1,$$

$$H(x_2,y_2)-H(x_2,y_1)-H(x_1,y_2)+H(x_1,y_1)\ge 0, \forall x_1<x_2, y_1<y_2.$$

(2) 另一方面，可以由 Copula 函数的边际分布是均匀分布验证 $H(x,y)$ 的边际分布分别是 $F(x)$ 和 $G(y)$。

Q11.

(1) X 离散 Y 离散:

$$\mathrm{P}(X=x_i|Y=y_i)=\frac{\mathrm{P}(Y=y_i|X=x_i)\mathrm{P}(X=x_i)}{\mathrm{P}(Y=y_i)}=\frac{\mathrm{P}(Y=y_i|X=x_i)\mathrm{P}(X=x_i)}{\sum_j \mathrm{P}(Y=y_i|X=x_j)\mathrm{P}(X=x_j)}$$

(2) X 离散 Y 连续:

$$\mathrm{P}(X=x_i|Y=y)=\frac{f_{Y|X}(y|x_i)\mathrm{P}(X=x_i)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x_i)\mathrm{P}(X=x_i)}{\sum_j f_{Y|X}(y|x_j)\mathrm{P}(X=x_j)}$$

(3) X 连续 Y 离散:

$$\mathrm{P}(X=x|Y=y_i)=\frac{\mathrm{P}(Y=y_i|X=x)f_X(x)}{\mathrm{P}(Y=y_i)}=\frac{\mathrm{P}(Y=y_i|X=x)f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}}\mathrm{P}(Y=y_i|X=t)f_X(t)\mathrm{d}t}$$

(4) X 连续 Y 连续:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{\mathbb{R}}f_{Y|X}(y|t)f_X(t)\mathrm{d}t}$$

Q12.
(1) $c=\dfrac{1}{\pi\log 2}$
(2) 计算知

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi\log 2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right),f_Y(y)=\frac{2}{\pi\log 2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1+y^2}}\right),$$

从而由 $f_X(x)f_Y(y)\neq f_{(X,Y)}(x,y)$ 知 X,Y 不独立。

Q13.
(1) 只需验证当 $x^2+y^2\leq 1$ 时 $g(x,y)$ 非负

$$g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)+\frac{xy}{100}\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{100}>0,$$

且

$$\iint_{\mathbb{R}^2}g(x,y)=\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)=1,$$

故 $g(x,y)$ 确实是二维概率密度函数。
(2) 由 $g(x,y)$ 定义容易验证

$$f_U(x)=\int_{\mathbb{R}}g(x,y)=f_X(x),f_V(y)=\int_{\mathbb{R}}g(x,y)\mathrm{d}x=f_Y(y),$$

即 (U,V) 的边际分布都是标准正态分布，但从 (U,V) 的联合概率密度 $g(x,y)$ 直接看出 (U,V) 的联合分布不是二元正态分布。

Q14. 预期是频率分布直方图和概率密度函数图象形状接近。