作业 2 参考答案

1. 先证明 $P(A+B)$, 再将 $A+B+C$ 表示为 $(A+B)+C$.

2. 利用概率的公理化定义, 逐个验证集合函数 $\bar{P}(A)=P(A|B)$ 满足非负性, 正则性及可列可加性.

3. (1) 不正确. 取任一事件 A_0 满足 $0<P(A_0)<1$, 令 $A=B=A_0$.
(2) 不正确. 取 $A=B=\varnothing$.
(3) 不正确. 注意多个事件独立的定义.

4. $P(A_2)=1/2, P(A_3)=1/3, P(A_5)=7/36, P(A_2A_3)=1/6, , P(A_2A_5)=1/12$, 由独立定义知 A_2 与 A_3 独立, A_2 与 A_5 不独立.

5. 参考概率导论 (Bertsekas, 第 2 版) 中例 1.20 与例 1.21.

6. 记事件 B 为 "A 在迟早要发生", 事件 B_n 为 "A 在前 n 次试验中发生", 则

$$1 \geq P(B) \geq P(B_n) = 1-P(B_n^c) = 1-(1-\epsilon)^n \to 1.$$

7. 记事件 A 为"随机取一张朝上后为红色", 易得 $P(BB)=P(RR)=P(BR)=1/3, P(A|BB)=0, P(A|RR)=1, P(A|BR)=1$, 由贝叶斯公式得 $P(BR|A)=1/3$.

8. (1) 显然每个人中奖的概率均为 $1/n$; (2) 记事件 A_k 表示 "第 k 个人抓到 "中" 后游戏结束", 则 $P(A_1)=1/n, P(A_k|A_{k-1}^c\cdots A_1^c)=1/(n-k+1), k\geq 2$。利用乘法公式可得 $P(A_k)=1/n$. 即抽奖顺序不影响中奖概率.

9. 记事件 A 为 "小明患此病", 事件 B 为 "小明阳性", 由贝叶斯公式知 $P(A|B)=5/6>80\%$, 从而建议手术.

10. 对 $0<k<n$, 记 s_k 为本金 k 元时输光离场的概率, 由递推式 $s_k=(1-p)s_{k-1}+ps_{k+1}$ 以及边界条件 $s_0=1, s_n=0$ 得

$$s_k = \begin{cases} \dfrac{r^n-r^k}{r^n-1}, & \text{当} r \neq 1, \\ 1-\dfrac{k}{n}, & \text{当} r=1, \end{cases}$$

其中 $r=(1-p)/p$. 对 $p\leq 0.5$ 总有 $\lim\limits_{n\to\infty} s_k=1$.

11. 记 A 表示该物种最终灭绝, 由全概率公式可得

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}P(A)+\frac{1}{3}P(A)^2.$$

解得 $P(A)=1$.

12. 由全概率公式得 $P(\text{甲药治愈})=0.655$, $P(\text{乙药治愈})=0.66$, 从而综合来看建议乙。但由于患病 A 的概率很大，且甲药对 A 的治愈率更高，因此选甲也有一定合理性。

13. (1) $P(B_1)=3/5$.

(2) 若放回 $P(B_2)=P(B_1)=3/5$; 若不放回, 利用全概率公式与条件概率下的全概率公式可得 $P(B_2)=P(B_1)=3/5$. 不论放不放回, 若不观测第一个球颜色, 则对取的袋子编号没有先验. (直观上还可以同第 8 题理解).

(3) $P(B_2B_1)=2/5, P(B_2|B_1)=2/3$. $P(B_2|B_1)>P(B_2)$. 直观上观测到第一次取出黑球后, 取的袋子是 1 号袋子的可能性更大.

(4) Bayes 公式

$$P(B_{n+1}|B_1\cdots B_n)=\frac{P(B_1\cdots B_{n+1}|F)P(F)+P(B_1\cdots B_{n+1}|F^c)P(F^c)}{P(B_1\cdots B_n|F)P(F)+P(B_1\cdots B_n|F^c)P(F^c)}.$$

极限为 4/5, 即充分确认选中 1 号袋.

(5) Bayes 公式. 极限为 1.

14. (1) 用 a 元与甲打赌, b 元与乙打赌, 应满足 $a+b\leq 100, -a+1.5b>0, 4a-b>0$.

(2) $5P_{\text{甲}}(A)-20P_{\text{甲}}(B)\geq 0, 10P_{\text{乙}}(B)-15P_{\text{乙}}(A)\geq 0$. $P_{\text{甲}}(B)\leq 0.2, P_{\text{乙}}(B)\leq 0.4$.