

## 作业 3 参考答案

2. 利用概率的连续性

(1) 令  $A_n = \{X \leq -n\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n \geq 1} A_n) = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  同理.

(2) 取  $A_n = \{X \leq x + 1/n\}$ ,  $F(x+) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(X \leq x) = F(x)$ .

(3)  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$ . 证明同 (2).

3. (2)  $P(X+Y=3) = P(X+Y=4) = P(X+Y=5) = 1/3$ ;  $P(Y-X=1) = 2/3$ ,  $P(Y-X=-2) = 1/3$ .

4. 展开, 利用期望的线性性.

5. (1)  $P(X=k) = \frac{ba!(a+b-k)!}{(a-k+1)!(a+b)!}$ ,  $k=1, 2, \dots, a+1$ .

(2)  $X$  服从参数为  $p = b/(a+b)$  的几何分布  $\text{Ge}(p)$ ,  $E(X) = (a+b)/b$ .

6. 存在.

7. (1) 服从参数为  $p$  的几何分布  $\text{Ge}(p)$ .

(2) 利用幂级数性质  $E(X) = 1/p$ ,  $\text{Var}(X) = (1-p)/p^2$ .

8.  $X \sim B(25, 0.6)$ .

(1)  $P(X \geq 15) \approx 0.5858$ . (2)  $P(X > 20) \approx 0.0095$ . (3)  $P(X < 10) \approx 0.0132$ .

9. 利用二项式定理, 分别计算  $E(X) = np$  与  $E(X^2) = np(n-1)p + np$ , 进一步可得  $\text{Var}(X) = np(1-p)$ .

10. (1)  $X$  服从超几何分布  $X \sim H(n, M, N)$ .

(2) 直觉上估计值  $\hat{N}$  满足  $\frac{M}{\hat{N}} = \frac{m}{n}$ , 故可取  $\hat{N} = \left\lceil \frac{nM}{m} \right\rceil$ .

(3) 对不同的  $N$ , 记概率  $P(X=m)$  为  $f(N)$ , 作商

$$\frac{f(N)}{f(N-1)} = \frac{(N-M)(N-n)}{N(N-n-M+m)},$$

从而知当  $N < (nM)/m$  时  $f(N)$  递增, 当  $N > (nM)/m$  时  $f(N)$  递减. 可取  $N = \left\lceil \frac{nM}{m} \right\rceil$  使  $P(X=m)$  达到最大值, 此即极大似然估计.