期中自测

基础部分（建议测试时间不超过 60 分钟）

1. 填空题

（1） 设随机事件 A 和 B 独立，$P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A+B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(B)=(\quad)$.

（2） 随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，则 $P(1<X<2)=(\quad)$.

（3） 随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=2a\cdot 0.8^{k-1}$（$k=1,2,\cdots$），则常数 $a=(\quad)$.

（4） 设 $X\sim N(1,9)$，$Y\sim N(-1,4)$，若 $P(X>3)=P(Y\le \dfrac{a}{3})$，则 $a=(\quad)$

（5） 已知随机变量 $X\sim U(0,2)$，则 $E(\min\{X,1\})=(\quad)$.

（6） 随机向量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其中 $\mu_1=-3$，$\mu_2=0$，$\sigma_1^2=9$，$\sigma_2^2=4$，$\rho=0.5$，则 $\mathrm{Var}(X+\dfrac{Y}{2})=(\quad)$.

（7） 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自二项分布总体 X 的随机样本，$X\sim B(100,\dfrac{1}{5})$，若样本容量 $n=8$，则 $E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=(\quad)$.

（8） 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,4)$ 的随机样本，若使 $P\left(\left|\bar{X}-\mu\right|<\dfrac{1}{2}\right)\ge 0.96$ 成立，则样本容量 n 至少要达到 $(\quad)$.

2. 某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 60%，30% 和 10%，各车间的次品率分别是 3%，5% 和 7%．试求：

（1） 在该厂产品中任取一件，恰为次品的概率.

（2） 若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率.

3. 随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{4}, & 0\le x,y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

（1） 求 X,Y 的边际密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

（2） 验证随机变量 X,Y 相互独立.

（3） 计算相关系数 $\mathrm{Corr}(X+Y,X-Y)$.

强化部分（建议测试时间不超过 60 分钟）

1. 假设 X 和 Y 都是正的随机变量，其联合概率密度函数是 $f(x,y)=\dfrac{c}{y}\exp\left\{-\left(y+\dfrac{x}{y}\right)\right\}$，$0<x,y<\infty$，这里 c 是常数.

（1） 确定常数 c 的值.

（2） 计算协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

（3） 计算条件期望 $E\left[e^{-X}\mid Y=1\right]$.

2. 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自总体 $U(0,1)$，假设 $X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$， $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$.

（1） 分别求 $X_{(1)}$， $X_{(n)}$ 的概率密度函数.

（2） 求 $X_{(1)}$， $X_{(n)}$ 的联合概率密度函数.

（3） 求 $E(X_{(n)}+X_{(1)})$.

（4） 求 $X_{(n)}-X_{(1)}$ 的概率密度函数.

3. 某校有 1600 名学生将参加通识讲座，共有 5 个讲座同时开讲，假定每位同学是随机地选择一个讲座去听，而且同学之间的选择是相互独立的，如果某间阶梯教室想以不低于 95% 的概率保证在这间教室听讲座的学生都有座位，那么这间阶梯教室至少需要设有多少座位？（需给出求解过程）

4. 假设随机变量 X_1 与 X_2 独立同分布且 $X_1+X_2\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 X_1 的分布.（需给出求解过程）

附录：标准正态累积分布函数 $\Phi(x)$

x	0.85	0.92	1.00	1.64	1.80	1.96	2.05	2.33	2.58
$\Phi(x)$	0.802	0.821	0.841	0.950	0.964	0.975	0.980	0.990	0.995