2023 秋概随期中自测参考解答

基础部分

1.

(1) 1/4

(2) 3/4

(3) 0.1

(4) -7

(5) 3/4

(6) 13

(7) 14

(8) 68

2.

(1) 设事件 A 为次品，产品由甲、乙、丙三车间生产分别设为事件 B_1, B_2, B_3，则 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.04$。

(2) $P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = 9/20$.

3.

(1) $f_X(x) = \int_0^2 \frac{x}{4}\mathrm{d}y = \frac{x}{2}, 0 < x < 2; f_Y(y) = \int_0^2 \frac{x}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, 0 < y < 2$.

(2) $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量 X, Y 相互独立。

(3) $\mathrm{Corr}(X+Y, X-Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(X-Y)}} = \frac{\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)}{\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)}$.

$\mathrm{E}(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 4/3, \mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_0^2 x^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2$，即 $\mathrm{Var}(X) = 2/9$。

$\mathrm{E}(Y) = \int_0^2 y\frac{1}{2}\mathrm{d}y = 1, \mathrm{E}\left(Y^2\right) = \int_0^2 y^2\frac{1}{2}\mathrm{d}y = 4/3$，即 $\mathrm{Var}(Y) = 1/3$。

因此 $\mathrm{Corr}(X+Y, X-Y) = -1/5$。

强化部分

1.

(1) 根据概率的归一化可确定 $c = 1$。

(2) Y 的边际 PDF 为 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}\mathrm{d}x = e^{-y}$，于是 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$，即 $Y \sim Exp(1), X|Y = y \sim Exp(\frac{1}{y})$，因此 $\mathrm{E}(Y) = 1, \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}(Y) = 1, \mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|Y)) = \mathrm{E}(Y\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}(Y^2) = 2$，故协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 1$。

(3) $\mathrm{E}(e^{-X}|Y=1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-x}\mathrm{d}x = 1/2$.

2.

(1) $f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1}, 0<x<1; f_{X_{(n)}}(x) = nx^{n-1}, 0<x<1$。

(2) $f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}, 0<x<y<1$。

(3) $\mathrm{E}(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}, \mathrm{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}$，故 $\mathrm{E}(X_{(1)}+X_{(n)}) = 1$。

(4) $R = X_{(n)} - X_{(1)}$，构造从 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 到 $(R, X_{(n)})$ 的变换，其 Jacobian 行列式绝对值为 1，故 $f_{R,X_{(n)}}(r,x) = n(n-1)r^{n-2}, 0<r<x<1$，进而求出 R 的边缘 PDF 为 $f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r), 0<r<1$。

3.

对于某个固定的教室，可设随机变量 $X_i = 1$ 代表第 i 个学生会去该教室，$X_i = 0$ 代表去其他教室，则各 X_i 独立同分布且 $P(X_i = 1) = \frac{1}{5}, i = 1, 2, \cdots, n$，其中 $n = 1600$。那么去该教室总人数 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$。根据中心极限定理，$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 趋于标准正态分布。假设教室座位数为 N，令 $P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq N) = P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{N-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \geq 95\%$，则 $\frac{N-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq 1.64$，其中 $\mu = \frac{1}{5}, \sigma = \frac{2}{5}$。得出 $N \geq 346.24$，因此 N 至少为 347。

4.

可利用性质一：矩母函数能唯一确定分布函数；性质二：独立随机变量和的矩母函数等于诸随机变量各自矩母函数的乘积。

则有 $M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = M_{X_1+X_2}(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$，因此有 $M_{X_1}(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{4} + \frac{\mu t}{2}}$，故 $X_1 \sim N(\frac{\mu}{2}, \frac{\sigma^2}{2})$。