概率论与数理统计 第八次作业参考题解

2023.11.13

Q1. 不正确。强大数定律只保证**以概率 1 收敛**，弱大数定律只保证**依概率收敛**，参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）5.2 节例 5.4（Page 233）和 5.5 节例 5.13（Page 243）。

Q2. 记 $Y_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i), \forall \epsilon > 0$，应用 Chebyshev 不等式：

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{Y_n}{n}\right| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathrm{Var}[Y_n] = \frac{1}{n^2\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 < \frac{c}{n\epsilon^2}.$$

Q3. 假设 $\{X_i\}_i$ 独立同分布且具有有限的期望 μ 和方差 σ^2，记

$$\Phi_n(x) := \mathrm{P}\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu) \leq x\right\},$$

$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$，可以先后证明：

1. 存在足够大的 $A_\delta > 0$ 使得 $\Phi(A_\delta) \geq 1 - \delta$。
2. 由中心极限定理 $\lim_n \Phi_n(x) = \Phi(x)$ 知存在足够大正整数 $N_1 > 0$ 使得
$$|\Phi_n(A_\delta) - \Phi(A_\delta)| < \delta, |\Phi_n(-A_\delta) - \Phi(-A_\delta)| < \delta, \forall n \geq N_1.$$
3. 取足够大正整数 N_2 使得 $\dfrac{\epsilon\sqrt{N_2}}{\sigma} > A_\delta$。从而当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left\{\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} &\leq 1 - \Phi_n(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}) + \Phi_n(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}) \leq 1 - \Phi_n(A_\delta) + \Phi_n(-A_\delta) \\ &\leq 1 - (\Phi(A_\delta) - \delta) + (\Phi(-A_\delta) + \delta) \leq 4\delta.\end{aligned}$$

即证 $\lim_n \mathrm{P}\left\{\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \epsilon\right\} = 0, \forall \epsilon > 0$。

Q4. 注意到恒等式

$$S^2 - \sigma^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \sigma^2\right] - \frac{n}{n-1}(\overline{X} - \mu)^2 - \frac{\sigma^2}{n-1}.$$

应用弱大数定律知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\sigma^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \overline{X}-\mu \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

结合**依概率收敛**的四则运算性质[1]立即得 $S^2-\sigma^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$。

Q5. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）5.5 节习题 13 的推导（Page 251）。

Q6. 应用强大数定律知 $\overline{X} \xrightarrow{\text{a.s.}} 2, \overline{Y} \xrightarrow{\text{a.s.}} 5$，结合 **Q5** 结论得到

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i} = \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{2}{5}.$$

Q7. 直接应用中心极限定理。

$$n\mu = 20, \sqrt{n}\sigma = \sqrt{10}, \mathrm{P}(X=20) = \mathrm{P}\left(\frac{X-20}{\sqrt{10}} = 0\right) \approx \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{10}}\right) = 0.1256.$$

以及精确值

$$\mathrm{P}(X=20) = 2^{-40}\binom{40}{20} \approx 0.1254.$$

Q8. 事故数 $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$，其中 $n = 10000, p = 0.001, \mu = 10, \sigma = \sqrt{9.99}$，公司获得至少毛利润 m 千元的概率为

$$p_m = \mathrm{P}\left(20 - Y \geq m\right) = \mathrm{P}\left(\frac{Y-10}{\sqrt{9.99}} \leq \frac{10-m}{\sqrt{9.99}}\right) \approx \Phi\left(\frac{10.5-m}{\sqrt{9.99}}\right).$$

(1) 公司能够获利概率 $p_0 \approx \Phi\left(\frac{10.5}{\sqrt{9.99}}\right) = 0.9996$，是大概率事件，故定价合理。

(2) 所求即 $p_4 \approx \Phi\left(\frac{6.5}{\sqrt{9.99}}\right) = 0.9801$。

(3) 所求即 $\Phi\left(\frac{10.5-m}{\sqrt{9.99}}\right) = 0.95$，解得 $m = 5.3011$ 千元。

Q9. $X_i \sim \mathrm{U}(-1,1), \mathrm{E}[\overline{X}] = 0, \mathrm{Var}[\overline{X}] = \dfrac{1}{3n}$，所求 n 次测量平均误差低于 ϵ 的概率为

$$p_{n,\epsilon} = \mathrm{P}\left(\left|\overline{X}\right| < \epsilon\right) = \mathrm{P}\left(\left|\sqrt{3n}\overline{X}\right| < \sqrt{3n}\epsilon\right) \approx 2\Phi\left(\sqrt{3n}\epsilon\right) - 1,$$

[1] 四则运算性质指的是，若 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a, Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} b$，则有 $cX_n, X_n \pm Y_n, X_nY_n$ 分别依概率收敛到 $ca, a \pm b, ab$。若还满足 $Y_n \neq 0, b \neq 0$，则 $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a/b$。证明留作练习。

(1) $p_{25,0.2} \approx 2\Phi(\sqrt{75}\times 0.2)-1=0.9167$.
(2) 所求即 $2\Phi(\sqrt{3n}\epsilon)-1\geq 1-\alpha$，对 $\epsilon=0.2,\alpha=0.05$ 解得 $n\geq 33$。
(3) 由 Chebyshev 不等式得

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{\mathrm{Var}[\overline{X}]}{\epsilon^2}=1-\frac{1}{3n\epsilon^2},$$

对 $\epsilon=0.2,\alpha=0.05$，令 $1-\dfrac{1}{3n\epsilon^2}\geq 1-\alpha$ 解得 $n\geq 167$。

Q10. $X\sim \mathrm{B}(5000,0.8),\mathrm{E}[X]=4000,\mathrm{Var}[X]=800$，所求即

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{5000}-0.8\right|\leq\epsilon\right)\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-4000}{\sqrt{800}}\right|\leq\frac{5000\epsilon}{\sqrt{800}}\right)\approx 2\Phi\left(\frac{5000\epsilon+0.5}{\sqrt{800}}\right)-1,$$

令 $2\Phi\left(\dfrac{5000\epsilon+0.5}{\sqrt{800}}\right)-1=0.99$ 解得 $\epsilon=0.0145$，对应合格品数的范围 $[3927,4073]$。

Q11. 讨论略，参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）5.4 节例 5.11（Page 239）。

Q12.
(1) 记 $X_i=\mathbb{1}_{\{\text{第}i\text{天上涨}\}}$，则

$$Y_n=\prod_{i=1}^n 1.7^{X_i}0.5^{1-X_i},\ln Y_n=\sum_{i=1}^n\left[\ln(3.4)X_i+\ln(0.5)\right],$$

由中心极限定理知 $\ln Y_n$ 近似服从正态分布 $\mathcal{N}\left(n\ln\dfrac{\sqrt{3.4}}{2},\dfrac{n}{4}\ln^2(3.4)\right)$。
(2) 利用独立性，

$$\mathrm{E}\left[Y_n\right]=\prod_{i=1}^n\mathrm{E}\left[1.7^{X_i}0.5^{1-X_i}\right]=1.1^n.$$

(3) 应用强大数定律知 $\overline{X}\xrightarrow{\text{a.s.}}\dfrac{1}{2}$，从而可以进一步验证

$$Y_n=\left(1.7^{\overline{X}}0.5^{1-\overline{X}}\right)^n\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$

Q13.
(1) 由 $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\mathbb{1}_{[X_i,+\infty]}(x)$ 计算知

$$\mathrm{E}[F_n(x)]=F(x),\mathrm{Var}[F_n(x)]=\frac{F(x)[1-F(x)]}{n}.$$

(2) $\forall x > 0$，由 SLLN 知

$$P(\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)) = 1.$$

Q14. 预期是均匀分布和正态分布对应的实验结果符合中心极限定理，Cauchy 分布不符合。