第 13 次作业

1. 假设 Markov 链的状态个数为M，其转移概率矩阵的列和也为1（i.e. $\forall j$，$\sum_{i=1}^{M} p_{ij} = 1$），证明：$\vec{\pi} = \frac{1}{M}(1,\cdots,1)$为该链的平稳分布.
2. 作业 11-7 续，假设影响销售的所有因素不变，请预测长期的畅销和滞销概率.
3. *假设群体的每个成员在每个时间周期里以概率p死去，在每个时期新加入的成员数是均值为$\lambda > 0$的 Poisson 随机变量，以X_n记在时期n开始时的群体成员数.

（1） 证明：$\{X_n, n \ge 0\}$为 Markov 链.

（2） 假设X_0服从均值为$\alpha > 0$的 Poisson 分布，证明：若X_0为该 Markov 链的平稳分布，则$\alpha = \frac{\lambda}{p}$.

（3） 求该 Markov 链的全部平稳分布.

4. （加权图上的随机游走）给定一个具有有限顶点的无向网络，其中边(i, j)具有一个非负权重w_{ij}（i, j可能相等），如果(i, j)不是边，则定义$w_{ij} = 0$，假设$w_{ij} = w_{ji}$（无向），且$\sum_j w_{ij} > 0$，若质点当前在顶点i，则下一步移动到顶点j的概率为$p_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}}$. 证明这是个具有平稳分布的 Markov 链，并求出该平稳分布.
5. *有两个盒子，总共有M个可区分的球，每个时刻通过随机选取一个球并将其从当前盒子移到另外一个盒子来进行转换. 最初所有球都在第二个盒子里，以X_n记在时刻n时第一个盒子中的球数（所以$X_0 = 0$）.

（1） 证明：$\{X_n, n \ge 0\}$为 Markov 链.

（2） 证明：$(\pi_1,\cdots,\pi_M)$ 是平稳分布，这里 $\pi_j = \binom{M}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^M$.

（3） 尝试给出平稳分布的直观解释.

6. 验证课上 Metropolis-Hastings 算法中调整后的链 Q 相对于 $\vec{\pi} = (\pi_1,\cdots,\pi_M)$ 可逆.

7. （计算机实验）利用 Metropolis-Hastings 方法模拟 Zipf 分布，取 $M = 20$，$a = 1.5$，收集 10000 个数据并画出相应的直方图.