1. **(概率导论 7.1)** 相邻两个顾客陆续到达一个机构的时间间隔是独立同分布的随机变量序列，其公共分布列为：

$$p(k)=\begin{cases}0.2, & 若k=1,\\ 0.3, & 若k=3,\\ 0.5, & 若k=4,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

构造一个 4 状态马尔可夫链模型来描述该到达过程。在这个模型里，其中一个状态应该与到达发生的时间相对应。

参考答案:

解: 设 X_n 表示第 n 时刻所处的状态, 状态集合 $S=\{0,1,2,3\}$, 其中状态 $i(i=0,1,2,3)$ 表示在第 n 时刻，最近一个到达顾客的时刻为 $n-i$。例如：$X_n=0$ 表示第 n 时刻有顾客到达，$X_n=1$ 表示第 $n-1$ 时刻有顾客到达但 n 时刻没有顾客到达。按照此种构造方式可以得到一步转移概率为：

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{5}{8}\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

(概率导论 7.2) 一只老鼠在走廊里移动, 走廊里有 $2m$ 块瓷砖, $m>1$。在瓷砖 $i\neq 1,2m$ 时，老鼠就以等概率向左 $i-1$，或向右 $i+1$ 移动。在瓷砖 1 或者 $2m$ 时，老鼠就必定分别移向瓷砖 2 或者 $2m-1$。每次，老鼠走到瓷砖 $i\leqslant m$，或 $i>m$ 时，电子设备就会分别发出信号 L 或者 R。那么由信号 L 和 R 组成的序列是由状态 L 和 R 组成的马尔可夫链吗?

参考答案:

解:不是。可以验证 $P(X_{n+1}=R|X_n=L,X_{n-1}=R)=\frac{1}{2}, P(X_{n+1}=R|X_n=L,X_{n-1}=L,X_{n-2}=R)=0$，可以看出 X_{n+1} 不只与 X_n 有关，因此不是马尔可夫链。

(概率导论 7.3) 考虑例题 7.2 中如图 7.2 所示的 $m=4$ 情况下的马尔可夫链。假设过程以等概率地从 4 个状态中的任意一个开始，当马氏链处于状态 1 或者状态 2 时，令 $Y_n=1$, 当马氏链处于状态 3 或状态 4 时, 令 $Y_n=2$, 那么, 过程 Y_n 是马尔可夫链吗?

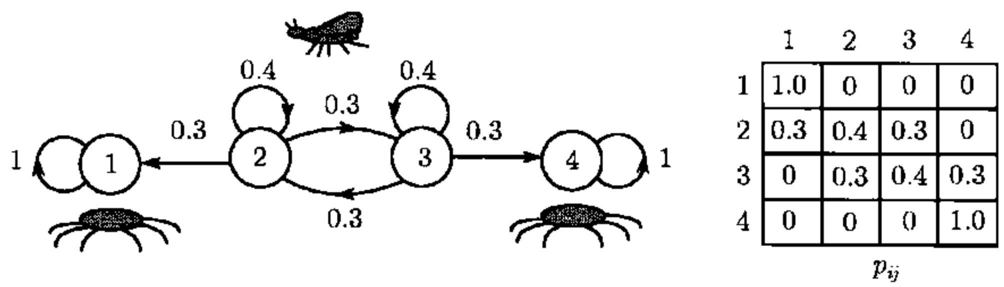


图 7.2　例 7.2 中的转移概率图和转移概率矩阵, 其中 $m=4$

参考答案:

解：不是。类似于 7.2 可验证 $P(Y_2=2|Y_1=2,Y_0=1)=0.7, P(Y_2=2|Y_2=2,Y_1=2)=0.929\neq 0.7$，所以也不是。

(概率导论 7.4) 一只蜘蛛和一只苍蝇在一条直线上以单位增量移动，蜘蛛总是向苍蝇移动一个单元，而苍蝇以 0.3 的概率向靠近蜘蛛方向移动一个单元，以 0.3 的概率向远离蜘蛛方向移动一个单元，以 0.4 的概率保持在原地不动。蜘蛛和苍蝇间的初始距离是整数，当蜘蛛和苍蝇到达同一个位置时，蜘蛛就捉住了苍蝇。

(1) 构造一个马尔可夫链描述蜘蛛和苍蝇之间的相对距离。

(2) 指出状态空间中哪些是非常返状态，哪些是常返状态。

参考答案:

解:

(1) 设初始距离为 M，则状态转移矩阵为 (这里假设蜘蛛从 $0\to 1$ 运动，苍蝇从 $1\to 0$ 运动时，蜘蛛不会抓到苍蝇):

$$
\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ M
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & \cdots & k-1 & k-2 & k & \cdots & M-2 & M-1 & M
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0.4 & 0.6 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0.3 & 0.4 & 0.3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.3 & 0.4 & 0.3
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(2) 状态 0 常返，其余状态 $1,2\cdots,M$ 都非常返

2. 3 个白球和 3 个黑球分布在两个坛子中, 每个含有 3 个球. 如果第一个坛子中有 i 个白球, 就称此系统处于状态 $i(i=0,1,2,3)$. 每次随机地将两个坛子中一个球进行互换, 以 X_n 表示 n 步后系统的状态. 问: $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是否是 Markov 链? 如果是的话请计算其转移概率矩阵.

参考答案:

解：由于 X_n 的状态只与 X_{n-1} 有关，因此是马尔可夫链。其转移概率矩阵为:

$$
P=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\
0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

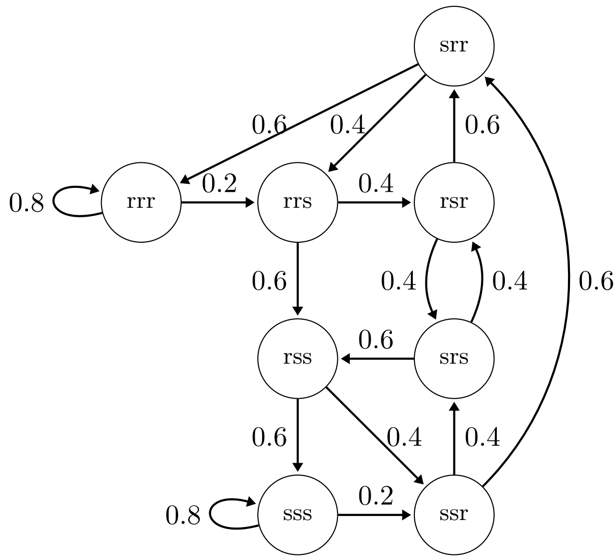
3. 假设明天是否下雨依赖之前三天（前天，昨天，今天）的天气条件，如果前三天都下雨，明天下雨的概率为 0.8, 如果前三天无雨则明天下雨的概率为 0.2, 其他情形则明天以 0.6 的概率与前一天的天气一样. 请构建一个 Markov 链分析这个系统，并给出相应的转移概率矩阵，画出转移概率图.

参考答案:

解：设下雨为 r，晴天为 s，则状态集合 $S=\{rrr,rrs,rsr,rss,srr,srs,ssr,sss\}$，状态转移矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}\\ rrr\\ rrs\\ rsr\\ rss\\ srr\\ srs\\ ssr\\ sss\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} rrr & rrs & rsr & rss & srr & srs & ssr & sss\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8\end{pmatrix}\end{array}$$

状态转移图如下：



4. $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一个状态为 $0,1,2$ 的 Markov 链, 转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

如果 $P(X_0=0)=P(X_0=1)=0.25$, 求 $E(X_3)$.

参考答案:

解：初始分布 $\pi_0=[0.25,0.25,0.5]$，则 X_3 的分布为：

$$\pi_3=\pi_0P^3=[0.25,0.25,0.25]\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^3=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2\end{array}\\ \begin{bmatrix}\frac{59}{144} & \frac{43}{216} & \frac{169}{432}\end{bmatrix}\end{array}$$

所以 $E[X_3]=\frac{53}{54}$

5. 证明：如果 Markov 链的状态个数 $m < \infty$，且状态 i 可达到状态 j，那么状态 i 可以在 m 步内到达状态 j.

参考答案:
解：**证明方法不唯一**。设状态 $S = \{1, \cdots, m\}$ 共 m 个状态，假设状态 i 到状态 j 的所有路径长度均大于 m，设其中最短的一条为：

$$L = \{S_1, \cdots, S_m, \cdots, S_M\}$$

其中 $S_1 = i, S_M = j$，路径长度 $M - 1 \geqslant m$，因此在路径中至少存在两个状态是一样的，即 $\exists 1 \leqslant p < q \leqslant M$ 使得 $S_p = S_q$，可将 S_p 到 S_q 的路径进行合并，显然合并之后的路径长度小于 $M - 1$，这与此路径是最短的一条矛盾，因此存在状态 i 到状态 j 的某一条路径长度均小于 m，即状态 i 可以在 m 步内到达状态 j.

6. 证明：如果状态 i 是常返的，且状态 i 与状态 j 不是互通的，则 $p_{ij} = 0$

参考答案:
解：**证明方法不唯一**。假设 $p_{ij} \neq 0$，则 $i \to j$，又由于 $i \nleftrightarrow j$，因此 $j \nrightarrow i$，说明 i 状态出去到 j 之后无法回到 i，与状态 i 常返矛盾 (也可以通过计算 $f_{ii} < 1$ 来说明与状态 i 常返矛盾)，因此 $p_{ij} = 0$。

7. 下列数据是某种商品连续 24 个月的销售情况 (其中 1 表示畅销，0 表示滞销)：

$$1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1$$

假设该商品销售情况近似满足时间齐性和 Markov 性

(1) 请根据以上这 24 个月的数据给出销售状态的一步转移概率矩阵的近似

(2) 假设影响销售的所有因素不变，如果现在是滞销，请预测之后的第三个月的销售情况

参考答案:
解：

(1) 一步转移概率矩阵近似为：

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

(2) 三个月的转移概率为：

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{595}{1573} & \frac{835}{1343} \\ \frac{259}{648} & \frac{389}{648} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.3783 & 0.6217 \\ 0.3997 & 0.6003 \end{bmatrix}$$

因此三个月之后的销售情况为：$P(\text{滞销}) = 0.3783, P(\text{畅销}) = 0.6217$