

第 7 次作业

1. 设  $X \sim B(10, 0.9)$ ,  $Y - 8 \sim B(10, 0.1)$ .

(1) 分别画出  $X, Y$  的概率质量函数图.

(2) 计算并比较  $X, Y$  的均值、方差、中位数和众数.

(3) 计算  $X, Y$  的偏度系数.

2. (1) 分别计算  $Exp(1)$ ,  $P(4)$  和  $U(0,1)$  的偏度系数和峰度系数.

(2) 分别计算  $Exp(1)$ ,  $P(4)$  和  $U(0,1)$  的矩母函数

(3) 利用矩母函数计算上述三个分布的偏度系数和峰度系数.

3. 计算具有下列矩母函数的连续随机变量  $X$  的概率密度函数:

$$M_X(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2-t} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-t}.$$

4. 假设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $Y = e^X$  (对数正态分布).

(1) 证明: 对数正态分布的矩母函数不存在.

(2) 利用正态分布的矩母函数计算  $Y$  的各阶原点矩.

5. 假设随机变量  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$  ( $i = 1, 2$ ) 相互独立, 请利用矩母函数确定

$Y = X_1 + X_2$  的分布.

6. \*将线段  $[0,1]$  随机断开, 将前半段 (包含原线段左端点那部分) 扔掉, 将剩下线段再随机断开后扔掉前半段, 求余下的那一段长度的期望值.

7. \*\*一个矿工在井下迷了路, 迷路的地方有三个门, 假设从第一个门出来, 经过 2 小时可达安全之处; 若从第二个门出来, 经过 3 小时后会回到原地; 若从第三个门出来, 经过 1 小时后会回到原地. 假定该人选择门是随机的, 且始终无法区分这三个门, 能够走到安全之处的平均用时是多少?

8. \*证明: 若  $E(Y|X) = X$ , 则  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X)$ .

9. (1) 证明: 若  $X, Y$  独立, 则  $E(Y | X) = E(Y)$ .

(2) \*上述结论反之是否成立? 请说明理由.

10. \*令  $\hat{Y} = E(Y | X)$ ,  $\tilde{Y} = Y - \hat{Y}$ , 证明:  $Var(Y) = Var(\hat{Y}) + Var(\tilde{Y})$ . 尝试给出该式的一个直观解释.

11. 定义条件方差为  $Var(Y | X) = E[(Y - E(Y | X))^2 | X]$ , 证明:

$$(1) Var(Y | X) = E(Y^2 | X) - E^2(Y | X)$$

$$(2) Var(Y) = E[Var(Y | X)] + Var[E(Y | X)]$$

12. 假设点  $(X, Y)$  服从单位圆盘上半部分上的均匀分布. 若观测到  $X = 0.5$ , 那么在均方误差意义下  $Y$  的最优预测值是什么?

13. \*应用中常常基于随机变量  $X$  的观察值对随机变量  $Y$  的值进行预测, 假设仅仅知道  $X$  和  $Y$  的期望分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ , 方差分别为  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$ , 相关系数为  $\rho$ .

(1) 在均方误差意义下求  $Y$  的最优线性预测, 即选择系数  $a, b$  使得

$$E[(Y - (aX + b))^2] \text{ (均方误差) 达到极小值.}$$

(2) 给出这个最优线性预测对应的均方误差, 并指出其值何时接近 0.

(3) 验证: 若  $X, Y$  服从  $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $Y$  的最优线性预测就是

$$E(Y | X).$$

14. \*设  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 独立同分布且公共期望为  $\mu$ ,  $Y = X_1 + \dots + X_N$ ,  $N$  为

取正整数值的随机变量, 分布为  $P(N = n) = p_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 且与  $X_i$

( $i=1, 2, \dots$ ) 相互独立.

(1) 假设  $E(N) = a$ , 求  $E(Y)$ .

(2) 求  $N$  的矩母函数为  $M_N(t)$ .

(3) 假设  $X_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) 的矩母函数为  $M_X(t)$ , 求  $M_Y(t)$ .

(4) 假设  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $p_n = (1-p)^{n-1}p$  (几何分布), 求  $Y$  的分布.

(5) (4) 中所得  $Y$  的分布与  $X_1 + X_2$  的分布是否相同? (提示: 考查

$X_1 + X_2$  的矩母函数)

15. \*构造一个个数为随机的独立正态随机变量之和不是正态分布的例子, 并加以必要说明.

16. (计算机实验) 股票市场模拟: 设  $Y_i$  ( $i=1,\dots,n$ ) 为独立同分布随机变量,

满足  $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$ , 令  $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ . 将  $Y_i = 1$  视为股票价格上涨

一元, 将  $Y_i = -1$  视为股票价格下降一元, 将  $X_n$  视为第  $n$  个时间点股票的价格.

(1) 求  $E(X_n)$  和  $\text{Var}(X_n)$ .

(2) 模拟  $X_n$  并绘出  $X_n$  对于  $n=1,\dots,10000$  的图形, 重复模拟几次并观察, 随机序列是否呈现某种趋势? 图形是否有差别? 若有差别尝试利用 (1) 中的结论进行解释.