

第 12 次作业

1. (简单 Random Walk) 设 Markov 链的状态空间是整数集合, 具有转移概率

$$p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 $0 < p < 1$. 证明: 当 $p = 0.5$ 时, 此链所有状态都是常返的, 当 $p \neq 0.5$ 时,

所有状态都是非常返的. (提示: 利用 Stirling 公式 $n! \sim n^n \sqrt{ne^{-n}} \sqrt{2\pi}$)

2. 设 Markov 链的状态空间是非负整数集合, 具有转移概率

$$p_{i,i+1} = 0.5, \quad p_{i0} = 0.5, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- (1) 由状态 0 出发再返回状态 0 所需的平均步数是多少? 状态 0 是否是正常返的?
 - (2) 状态 0 是否是周期为 1 的?
 - (3) 状态 $i > 0$ 是否是正常返且周期为 1 的状态 (即遍历状态)?
3. 证明: (1) 状态有限的 Markov 链必然至少含有一个常返态.
(2) 状态有限的 Markov 链若不可约则其所有状态都是常返的.
4. *证明: (1) 如果 $i \rightarrow j$, 则 $f_{ij} > 0$. (提示: 考虑 $n_0 = \min \{n \mid p_{ij}^{(n)} > 0\}$)
(2) 如果 $i \leftrightarrow j$, 且为常返态, 则 i, j 同为正常返的或同为零常返的.

5. 设 Markov 链的状态空间为 $\{1, 2, 3, 4\}$, 其一步转移概率矩阵为:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- (1) 指出常返态和非常返态, 并给出相应的理由.
 - (2) 指出正常返且周期为 1 的状态 (即遍历状态) 并给出理由.
6. 证明: * (1) 状态有限的 Markov 链不可能有零常返态. (提示: 利用反证法, 考查零常返态 i 的可达状态集 $A(i) = \{j: i \rightarrow j\}$ 以及 $\sum_{j \in A(i)} p_{ij}^{(n)}$)

(2) 状态有限的 Markov 链若不可约则其所有状态都是正常返的.

7. *证明: 对于不可约非周期 Markov 链, 如果状态都是非常返的或都是零常返的, 则平稳分布不存在.

8. 设 Markov 链转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

求其平稳分布.

9. (计算机实验) 模拟一个有限状态 Markov 链, 并考查其平稳分布.