作业 4 参考答案

1. $P(X=2)\approx 0.2009$. 对 $\lambda=1$, 其 Poisson 近似值为 $P(X=2)\approx 0.1839$.

2. 0.3233, 0.3233.

3. 记 X 为产卵个数, Y 为虫卵发育成虫的个数.

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(Y=k|X=n)P(X=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.$$

4. $a=1/3,\ b=2.$

5. (1)1/3. (2)1/3.

6. 记怀孕期天数 X, $P\left(\{X\geq\mu+2\sigma\}\bigcup\{X\leq\mu-3\sigma\}\right)\approx 0.0241.$

7. 记报废公里数 X, $P(X>2.5|X>1.5)=\dfrac{1-F(2.5)}{1-F(1.5)}$，服从指数分布时为 0.7165.

8. (1) 令冤枉无罪的人的概率 $P(X>c|\mu=1)=e^{-c}=1-95\%$ 即得 $c=\log(20)\approx 2.9957$.
(2) $P(X>c|\mu=2)=e^{-c/2}\approx 0.2236$.

9. $f_Y(y)=f_X(\log y)\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\log y\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left(-\dfrac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\ y>0.$

10. (1) $|(g^{-1}(z))'|f(g^{-1}(z))$；
(2) $U(0,1)$；
(4) 逆变换抽样；
(5) 正确, 考虑 $F^{-1}(y)=\sup\{x,F(x)\leq y\}$，由连续性可证明 $F(F^{-1}(y))=y$，由此可说明 (2) 仍然成立.

11. (1) $P(Y=i)=P(X\in I_i)=p_i$.
(2) 给定任一离散型分布, 记其取值 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 及对应概率 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, 令 $a_0=0, a_i=a_{i-1}+p_i(i>1)$, 取 $I_i=(a_{i-1},a_i)$, $X\sim \mathrm{U}(0,1)$, 构造 $Y=\sum_{i=1}^{\infty}y_i 1_{I_i}(X)+y_1 1_{(0,1)\setminus\cup_i I_i}(X)$ 即满足前述离散型

分布.

12. 记断点 $X \sim U(0,1)$, 当 $x \leq p_0$ 时 $l(x) = 1 - x$, 当 $x > p_0$ 时 $l(x) = x$. 期望为 $E(l(X)) = p_0 - p_0^2 + 1/2$.

13. $EX = 2,\ \mathrm{Var}(X) = 7/3$.

14. $Beta(a,b)$ 分布的密度函数为 $f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1$. 期望为 $\frac{a}{a+b}$，方差为 $\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$.