1.（简单随机游走）设 Markov 链的状态空间是整数集合，具有转移概率

$$p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

其中 $0 < p < 1$. 证明：当 $p = 0.5$ 时，此链所有状态都是常返的，当 $p \neq 0.5$ 时，所有状态都是非常返的.（提示：利用 Stirling 公式 $n! \sim n^n \sqrt{n} e^{-n} \sqrt{2\pi}$）

参考答案:

证明：不妨设初始位置在 0 点：

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= C_{2n}^n \cdot p^n \cdot (1-p)^n = \frac{2n}{n!n!} p^n (1-p)^n \\ &= \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} p^n (1-p)^n \\ &= \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

(i) 若 $p = 0.5$，$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$，则:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty$$

所以常返.

(ii) 若 $p \neq 0.5$，$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{m^n}{\sqrt{\pi n}} (0 < m < 1)$，则:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{00}^{(2n)} \to \text{收敛}$$

所以非常返.

2. 设 Markov 链的状态空间是非负整数集合，具有转移概率

$$p_{i,i+1} = 0.5, p_{i0} = 0.5, i = 0, 1, 2, \ldots.$$

(1) 由状态 0 出发再返回状态 0 所需的平均步数是多少？状态 0 是否是正常返的？

(2) 状态 0 是否是周期为 1 的？

(3) 状态 $i > 0$ 是否是正常返且周期为 1 的状态（即遍历状态)？

参考答案:

解:

(1) 平均步数是:

$$\mu_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(0.5)^n = 2 < +\infty$$

(2) 是

(3) 是. 由于 $i \leftrightarrow 0$ 且状态 0 是常返的，因此状态 i 也常返；由于状态 i 在经过 $i+1, i+2, \ldots$ 步都可以回到状态 i，因此周期 $d(i) = 1$，所以状态 i 是遍历的.（事实上根据定理：若 $i \leftrightarrow j$，则 $d(i) = d(j)$ 可直接得到 $d(i) = 1$ ）

3. 证明：

(1) 状态有限的 Markov 链必然至少含有一个常返态.

(2) 状态有限的 Markov 链若不可约则其所有状态都是常返的.

参考答案:
解：

(1) 反证. 假设所有状态均为非常返态，则 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in S}\lim_{n\to+\infty}p_{ij}^{(n)}=0$，而 $\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}=1$ 恒成立，矛盾，故至少有一个常返态.

(2) 已证，“状态有限的 Markov 链必然至少含有一个常返态”，且“不可约 Markov 所有状态互通、互通的状态同为常返”，因此，有限不可约 Markov 链所有状态常返.

4. 证明：(1)若i→j，则f_i j ＞ 0;(2)如果 $i\leftrightarrow j$ 且为常返态，则 i,j 同为正常返的或同为零常返的.

解：(1)由于i→j，故存在最短路径n_0＞0，且除终端状态途径状态均不为j，由此即得。(2)由于 $i\leftrightarrow j$，则 $\exists k,m>0$，使得 $P_{ij}^{(k)}>0,P_{ji}^{(m)}>0$，则根据 C-K 不等式有：

$$P_{jj}^{(k+r+m)}\geqslant P_{ji}^{(m)}P_{ii}^{(r)}P_{ij}^{(k)}$$

因此：

$$\lim_{r\to\infty}P_{ii}^{(r)}\leqslant\frac{1}{P_{ji}^{(m)}P_{ij}^{(k)}}\lim_{r\to\infty}P_{jj}^{(k+r+m)}$$

若 j 零常返，则不等式右边为 0，则左边也为 0，故 i 也零常返，反之类似。若 i 正常返，则不等式左边 >0，则右边也 >0，即 j 也正常返，反之也类似。故 i,j 同为正常返的或同为零常返.

5. 设 Markov 链的状态空间为 1,2,3,4，其一步转移概率矩阵为：

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0&0\\1&0&0&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\end{bmatrix}$$

(1) 指出常返态和非常返态，并给出相应的理由.

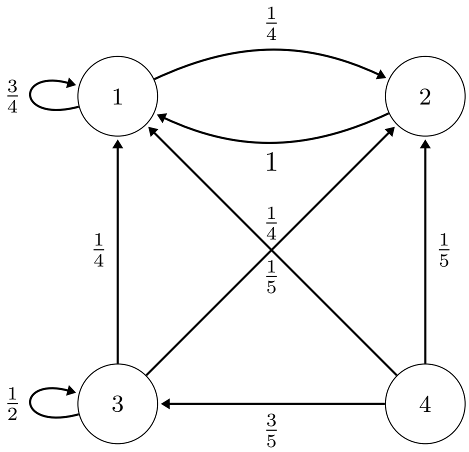
(2) 指出正常返且周期为 1 的状态（即遍历状态）并给出理由.

参考答案:
解：

状态转移图如下：

(1) 1 与 2 为常返态，计算 $f_{ii}^{(n)}$ 即可：

$$f_{11}^{(1)}=\frac{3}{4},f_{11}^{(2)}=\frac{1}{4},f_{11}=1$$



$$f_{22}^{(1)}=0, f_{22}^{(2)}=\frac{1}{4}, f_{22}^{(n)}=1\times\frac{3}{4}^{n-2}\times\frac{1}{4}\ (n>2), f_{22}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_{22}^{(n)}=1$$

$$f_{33}^{(1)}=\frac{1}{2}, f_{33}^{(n)}=0\ (n\geqslant 2), f_{33}=\frac{1}{2}<1$$

$$f_{44}=0<1$$

因此，$1,2$ 常返，$3,4$ 非常返.

(2)

$$\mu_1=\sum nf_{11}^{(n)}=\frac{5}{4}<+\infty$$

故为正常返，又因为 $d(1)=1$，所以状态 1 为遍历状态.

$$\mu_2=\sum nf_{22}^{(n)}=5<+\infty$$

故为正常返，又因为 $d(2)=1$，所以状态 2 为遍历状态.

6. 证明：

(1) 状态有限的 Markov 链不可能有零常返态.（提示：利用反证法，考查零常返态 i 的可达状态集 $A(i)=\{j:i\to j\}$ 以及 $\sum\limits_{j\in A(i)}p_{ij}^{(n)}$ ）

(2) 状态有限的 Markov 链若不可约则其所有状态都是正常返的.

参考答案:

解：

(1) 反证法，假设存在零常返态 i，令 $A(i)=\{j:i\to j\}$，由于 i 是零常返的，则 $i\leftrightarrow j$ 且 j 也是零常返的，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=0$，故：

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in A(i)}P_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in A(i)}\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=0$$

矛盾，因此状态有限的 Markov 链不可能有零常返态

(2) 由第 3 题知，状态有限的 Markov 链若不可约则其所有状态都是常返态，由 (1) 知状态有限的 Markov 链不可能有零常返，因此都是正常返.

7. 证明：对于不可约非周期 Markov 链，如果状态都是非常返的或都是零常返的，则平稳分布不存在.

参考答案:

解：**反证法**：假设状态存在平稳分布 $\pi = [\pi_1, \pi_2, \cdots]$，由于所有状态都是非常返或者零常返，则对于 $\forall i, j \in S$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$，则对 $\forall j$：

$$\begin{aligned}
\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij}^{(n)} &= \sum_{i=1}^{M} \pi_i P_{ij}^{(n)} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \pi_i P_{ij}^{(n)} \quad \leftarrow \text{由于} P_{ij}^{(n)} \leqslant 1 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{M} \pi_i P_{ij}^{(n)} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \pi_i \quad \leftarrow \text{令} n \to \infty \\
&< 0 + \varepsilon = \varepsilon \quad \leftarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \sum_{i=M+1}^{\infty} \pi_i < \varepsilon
\end{aligned}$$

这与 $\sum\limits_j \pi_j = 1$ 矛盾，所以不存在平稳分布

8. 设 Markov 链转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

求其平稳分布.

参考答案:

解：由 $\pi P = \pi$, 解得:$\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$