概率论与数理统计 第六次作业参考题解

2023.10.31

Q1. 参考概率论与数理统计（陈希孺）例 4.3（Page 85 - 86）的推导，可验证 $Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。

Q2.

(1) 参考概率论与数理统计（陈希孺）2.4.4 节（Page 97）商的概率密度公式知

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_Y(xz)f_X(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(1+z^2)x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}.$$

(2) 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的习题 4.1 节 16 题的解答（Page 216 - 217），Θ 服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布，R 具有概率密度

$$f_R(r)=re^{-\frac{1}{2}r^2}, r\geq 0,$$

且 R,Θ 独立。

(3) 直接应用变量替换公式。变换 $(u,v)=(x+y,x-y)$ 的逆变换为 $(x,y)=(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v))$，逆变换的 Jacobi 行列式为 $J(u,v)=-\frac{1}{2}$，从而

$$f_{(U,V)}(u,v)=f_{(X,Y)}(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v))|J(u,v)|=(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}u^2})(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}v^2}),$$

由此看出 U,V 独立。

Q3. 即求 order statistics 的分布，参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的例 3.6（Page 132），注意到

$$P(Y\leq y)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq y)=(F(y))^n, P(Z>z)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>z)=(1-F(z))^n.$$

Q4. 参考 Wikipedia 词条 Chi-squared distribution、Student's t-distribution 和 F-distribution。

Q5.

(1) 投注站需要保证赚取 50 元。如果 A 马获胜，则总共下注的 1000 元中最多 950 元可以用于赔付，即为 A 马设定的赔率至多为 450 : 500。同理，为 B 马设定的赔率至多为 650 : 300，为 C 马设定的赔率至多为 750 : 200。

(2) 此时, 赔率所隐含的 A 马获胜概率为 $500/(500+450)=10/19$, B 马获胜概率为 $300/(300+650)=6/19$，C 马获胜概率为 $200/(200+750)=4/19$。
(3) 三个隐含概率之和大于 1，对应投注站可以保证赚钱。类似作业 2 的 14 题中，甲和乙对各自支持的队伍的胜率估计之和大于 1，则你可以同时与他们打赌并保证赚钱。

Q6.
(1) 错误，考虑 Y 为常数而 X 非常数的情况。
(2) 错误，考虑非对称分布如指数分布的中位数。

Q7. 整理可得 $\mathrm{E}((X-c)^2)\geq \mathrm{Var}(X) \Leftrightarrow (c-\mathrm{E}(X))^2\geq 0$。

Q8. 分区间讨论。对于 $c<m$ 的情况，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|X-c|-\mathrm{E}|X-m| &= \int_{-\infty}^{m}(|x-c|-|x-m|)f(x)\mathrm{d}x+\int_{m}^{+\infty}(|x-c|-|x-m|)f(x)\mathrm{d}x \\ &\geq -(m-c)\int_{-\infty}^{m}f(x)\mathrm{d}x+(m-c)\int_{m}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\geq 0.\end{aligned}$$

$c>m$ 的情况同理。

Q9. 所求为 $Y=\exp(X)$ 且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(x-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2)\mathrm{d}x \\ &= \exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu-\sigma^2)^2)\mathrm{d}x=\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2).\end{aligned}$$

类似可得

$$\mathrm{E}(Y^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(2x-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2)\mathrm{d}x=\exp(2\mu+2\sigma^2).$$

从而 $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\mathrm{E}(Y)^2=\exp(2\mu+\sigma^2)(\exp(\sigma^2)-1)$。

Q10.

$$\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_i\mathrm{Var}(X_i)=\frac{\sigma^2}{n},$$

以及

$$\mathrm{E}(S^2)=\frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_i(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right)=\frac{n}{n-1}\sigma^2-\frac{n}{n-1}\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2.$$

Q11. 由 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ 以及 $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ 知 (1) (2) (3) (4) 等价。

Q12. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的习题 4.3 节 28 题 (e) 的解答（Page 222 - 223）。

Q13. 参考概率导论 (Bertsekas, 第 2 版) 的例 4.15 (Page 193), 可以计算得 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 1$。

Q14. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）4.2 节习题 20 题和 21 题（Page 218 - 219）的证明。

Q15.

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = \mathrm{E}((X_i - \bar{X})\bar{X}) &= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_j X_i X_j\right) - \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left(\sum_{i,j} X_i X_j\right) \\
&= \frac{1}{n}((n-1)\mu^2 + \sigma^2 + \mu^2) - \frac{1}{n^2}(n(n-1)\mu^2 + n(\sigma^2 + \mu^2)) = 0.
\end{aligned}
$$

(2) 不一定。考虑 $X_1, X_2 \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} U(0,1)$，通过计算可以验证 $X_1 - \bar{X}$ 和 $\bar{X}$ 不独立。

Q16.

(3) 可以，x 轴取为给定数据集的观测分位数，y 轴取为假设分布对应 CDF 的反函数在对应分位上的取值，看看是否近似为一条直线。

(4) 可以，x 轴取为第一个数据集的观测分位数，y 轴取为第二个数据集的观测分位数，看看是否近似为一条直线。