

第 5 次作业

1. 袋中有 3 个红球, 4 个白球, 5 个黑球.

(1) 随机从中一次性取出 3 个球, 令  $X, Y$  分别表示取出的红球数和白球数, 请给出随机向量  $(X, Y)$  的分布表.

(2) 求  $P(X = 1)$ .

2. 设随机变量  $X, Y$  的联合分布函数为  $F(x, y)$ , 证明:

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

3. 随机从以原点为圆心的单位圆盘内取一点, 假设该点在圆盘内服从均匀分布, 令  $(X, Y)$  表示该点的坐标.

(1) 求  $(X, Y)$  的概率密度函数.

(2) 计算  $X$  和  $Y$  的边际分布的概率密度函数.

(3) 记该点与圆心的距离为  $R$ , 求  $P(R \leq r)$ , 这里  $0 < r < 1$  为常数.

(4) 计算  $R$  的期望  $E(R)$ .

4. 完成课上二元正态分布的边际密度的计算.

5. 完成课上二元正态分布的条件密度的计算.

6. 直角坐标系中一个三角形区域的顶点坐标为  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  和  $(1,0)$ , 在该区域

中随机取一点, 其坐标记为  $(X, Y)$ .

(1) 确定  $X$  和  $Y$  的联合分布.

(2) 计算  $Y$  的边际密度.

(3) 计算  $X$  的在给定  $Y$  值条件下的概率密度函数.

7. 假设随机变量  $X_i \sim P(\lambda_i)$  ( $i = 1, 2$ ) 相互独立, 可以证明  $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

(作业 6-1)

- (1) 给定  $X_1 + X_2 = n$ , 求  $X_1$  的条件分布.
- (2) \*尝试给出 (1) 中结论的一个直观解释.
8. 甲乙两人约定在某个地点见面, 如果两人到达的时间是独立的, 且在下午 1 点至 2 点之间均匀分布.
- (1) 请给出甲乙到达时间联合分布的概率密度函数.
- (2) 求先到的人需要等待 10 分钟以上的概率.
9. (Farlie-Morgenstein 族) 如果  $F(x)$  和  $G(y)$  是一维随机变量的累积分布函数, 已知可以证明以下结果: 对任意的  $\alpha \in [-1, 1]$ ,

$$H(x, y) = F(x)G(y)\{1 + \alpha[1 - F(x)][1 - G(y)]\}$$

是一个二元 (随机变量  $(X, Y)$  的) 累积分布函数.

- (1) 求  $(X, Y)$  的边际分布.
- (2) 构造两个不同的二元分布, 使得其边际分布都是区间  $[0, 1]$  上的均匀分布. (可分别取  $\alpha = -1, 1$ )
10. \* (Copula 函数) 边际分布为区间  $[0, 1]$  上均匀分布的联合累积分布函数称为连接 (Copula) 函数. 设  $C(u, v)$  是一个二元 Copula 函数,  $X$  和  $Y$  为连续随机变量, 其累积分布函数分别为  $F(x)$  和  $G(y)$ , 请利用 Copula 函数构造一个二元分布使其边际分布函数分别为  $F(x)$  和  $G(y)$ .
11. 给出当随机变量  $X, Y$  离散或者连续 (共计四种情形) 的全概率公式和 Bayes 公式. (提示: 课上给出了  $X, Y$  都是连续随机变量的情形)
12. 设  $(X, Y)$  有联合密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{1+x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

(1) 确定常数  $c$ .

(2) 计算  $X, Y$  的边际密度, 并证明  $X, Y$  不独立.

13. 设  $X, Y$  独立, 且都服从标准正态分布  $N(0,1)$ , 以  $f(x,y)$  记  $(X,Y)$  的联合密度函数.

(1) 证明: 函数

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) + \frac{xy}{100}, & \text{当 } x^2+y^2 \leq 1 \\ f(x, y), & \text{当 } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

是一个二维概率密度函数.

(2) 若随机向量  $(U,V)$  有密度函数  $g(x,y)$ , 证明:  $U, V$  都服从标准正态分布, 但  $(U,V)$  不服从二元正态分布.

14. (计算机实验) 生成 10000 个 (由均匀分布  $U(0,1)$  产生的) 随机数, 记为  $y_i$

( $i=1, \dots, 10000$ ), 令  $x_i = -\ln(1-y_i)$ , 绘出  $x_i$  ( $i=1, \dots, 10000$ ) 的直方图, 并与指数分布的概率密度函数图相比较. (参考作业 4-10 (3))