概率论与数理统计 第七次作业参考题解

2023.11.5

Q1. 对一般的 $X \sim B(n,p), \mathrm{E}(X)=np, \mathrm{Var}(X)=np(1-p)$ 且：

$$\mathrm{Skewness}(X)=\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

若 $np \in \mathbb{Z}$，则进一步有 $\mathrm{Mode}(X)=\mathrm{Median}(X)=np$。

Q2.

(1) 根据定义计算即可，偏度系数结果分别为 $2, \frac{1}{2}, 0$，峰度系数结果分别为 $9, \frac{13}{4}, \frac{9}{5}$。

(2) 指数分布、泊松分布、均匀分布的矩母函数推导参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的 4.4 节（Page 200 - 209）。

(3) 若 X 的矩母函数为 $M_X(t)$，则

$$\mathrm{Skew}(X)=\frac{M_X^{(3)}(0)-3M_X^{(1)}(0)M_X^{(2)}(0)+2[M_X^{(1)}(0)]^3}{[M_X^{(2)}(0)-[M_X^{(1)}(0)]^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{Kurt}(X)=\frac{M_X^{(4)}(0)-4M_X^{(3)}(0)M_X^{(1)}(0)+6M_X^{(2)}(0)[M_X^{(1)}(0)]^2-3[M_X^{(1)}(0)]^4}{[M_X^{(2)}(0)-[M_X^{(1)}(0)]^2]^2}.$$

Q3. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的 4.4 节例 4.30（Page 206 - 207），这是两个参数分别为 2 和 3 的指数随机变量的混合分布。

Q4.

(1) 对任意 $t>0$，可验证

$$\lim_{y\to+\infty} e^{ty} f_Y(y)=+\infty,$$

故积分 $\mathrm{E}(e^{tY})$ 发散。类似地可验证对 $t<0$，$\mathrm{E}(e^{tY})$ 不存在。

(2) 记 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的矩母函数为 $M_X(t)$，则 Y 的 n 阶原点矩即 $\mathrm{E}(Y^n)=M_X(n)$。

Q5. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的 4.4 节例 4.32（Page 208）。

Q6. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）的 4.3 节例 4.17（Page 195）。记 Y 为第一次折断后留下的木棍长度，X 为第二次折断后留下的木棍长度，由重期望公式得

$$\mathrm{E}[X|Y]=\frac{1}{2}Y, \mathrm{E}[E]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|Y]]=\frac{1}{2}E[Y]=\frac{1}{4}.$$

Q7. 记 Y 为矿工第一次所选门的编号，则

$$\mathrm{E}[X|Y=1]=2,\mathrm{E}[X|Y=2]=3+\mathrm{E}[X],\mathrm{E}[X|Y=3]=1+\mathrm{E}[X].$$

由重期望公式

$$\mathrm{E}[X]=\sum_{k=1}^{3}\mathrm{E}[X|Y=k]\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{3}\left(6+2\mathrm{E}[X]\right),$$

解得 $\mathrm{E}[X]=6$。

Q8. 反复应用重期望公式和性质 $\mathrm{E}[g(Y)X|Y]=g(Y)\mathrm{E}[X|Y]$ 得

$$\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[XY|X]]=\mathrm{E}[X\mathrm{E}[Y|X]]=\mathrm{E}[X^2],\mathrm{E}[Y]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|X]]=\mathrm{E}[X],$$

从而 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=\mathrm{Var}[X]$。

Q9.
(1) 仅要求对离散和连续的情形证明即可。对于 Y 为离散随机变量的情形，由 X,Y 独立知

$$\mathrm{E}[Y|X=x]=\sum_i y_i\mathrm{P}(Y=y_i|X=x)=\sum_i y_i\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{E}[Y],$$

从而 $\mathrm{E}[Y|X]=\mathrm{E}[Y]$。
(2) 反之不一定成立。令 $X\sim\mathrm{U}(0,1),Y\sim\mathrm{U}(-X,X)$，通过计算验证 $E[Y|X]=E[Y]=0$ 以及 X,Y 不独立。

Q10. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）4.3.1 节的证明（Page 197），先证明 $\mathrm{Cov}(\hat{Y},\tilde{Y})=0$，再在 $Y=\hat{Y}+\tilde{Y}$ 两边取方差即可。

Q11. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）4.3.2 节全方差法则的证明（Page 197 - 198）。

Q12. 对任意分布 (X,Y)，条件期望 $\mathrm{E}[Y|X]$ 是在得到观测 X 下 Y 的最优预测（最小均方误差意义下），因为成立性质：

$$\mathrm{E}[Y|X]=\underset{g(X)}{\mathrm{argmin}}\,\mathrm{E}[(Y-g(X))^2|X]$$

特别地，若 $f_{(X,Y)}(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\mathbf{1}_{\{x\geq 0,y\geq 0,x^2+y^2\leq 1\}}(x,y)$，计算得

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbf{1}_{[0,1]}(x),f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]}(y),$$

$$\mathrm{E}[Y|X=x]=\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}, \mathrm{E}[Y|X=0.5]=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Q13.

(1) 由 $\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{E}[(Y-aX-b)^2]=\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{E}[(Y-aX-b)^2]=0$ 解得

$$a=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}, b=\mu_2-\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1.$$

(2) 在 (1) 中 (a,b) 取值下，

$$\mathrm{E}[(Y-aX-b)^2]=\sigma_2^2(1-\rho^2)\to 0 \iff \sigma_2\to 0 \text{或} \rho^2\to 1.$$

(3) 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）4.3 节习题 28(d) 的计算（Page 222）知

$$\mathrm{E}[Y|X]=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1)+\mu_2,$$

此时条件期望和最优线性预测一致。

Q14. 参考概率导论（Bertsekas，第 2 版）4.5 节的计算（Page 210 - 213）。

Q15. 取 $X_i \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(0,1), Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$，其中 X_i, N 彼此独立且

$$\mathrm{P}(N=1)=\mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{2}.$$

由 **Q14** 结论计算得 Y 的矩母函数 $M_Y(s)=\frac{1}{2}\exp(\frac{1}{2}s^2)+\frac{1}{2}\exp(s^2)$，可以验证其不是正态分布对应的矩母函数。

Q16.

(1) $\mathrm{E}[X_n]=0, \mathrm{Var}[X_n]=n.$

(2) 参考 one-dimensional Wiener process 的性质。